Wykład $\overline{\underline{XIII}}$

2022/23

Str. 35. $\forall \alpha \in R \ \exists \Delta$ - baza E : $\alpha \in \Delta$.

D: Zauważmy, że ściany $\partial \overline{C}(E, R; \Delta \equiv \{\alpha_i\}_{i \in \overline{1,r}})$ są fragmentami hiperpłaszczyzn Π_{α_i}, $i \in \overline{1,r}$.
(PATRZ: $201\frac{1}{2}$)
Wystarczy zatem pokazać, że $\forall \alpha \in R$: Π_α ma przecięcie $\Pi_\alpha \cap \partial C$, $\mathrm{codim}_{\mathbb{R}}(\Pi_\alpha \cap \partial C) = 1$ z brzegiem pewnej komory Weyla C.
Rozważmy zatem $\alpha \in R$ i odnośną Π_α.
Ta ostatnia jest przestrzenią $\mathbb{R}$-liniową

wymiaru $\dim_{\mathbb{R}} \Pi_\alpha = \dim_{\mathbb{R}} E - 1$. Jej przecięcie z hiperpłaszczyznami Π_β, $\beta \in R \setminus \{\pm\alpha\}$ są podprzestrzeniami w Π_α wymiaru co najwyżej $\dim_{\mathbb{R}} \Pi_\alpha - 1$ (bo $\beta \notin \langle \alpha \rangle_{\mathbb{R}}$), zatem ich skończona suma mnogościowa, $\bigcup_{\beta \in R \setminus \{\pm\alpha\}} (\Pi_\beta \cap \Pi_\alpha)$ $|R \setminus \{\pm\alpha\}| < \infty$! jest właściwym podzbiorem Π_α,

$$\bigcup_{\beta \in R \setminus \{\pm\alpha\}} (\Pi_\beta \cap \Pi_\alpha) \subsetneq \Pi_\alpha$$ (elementarna algebra liniowa),

$\downarrow$

patrz: str. 186

czyli $\exists\, v \in \Pi_\alpha \setminus \bigcup_{\beta \in R \setminus \{\pm\alpha\}} \Pi_\beta$.

Dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ zachodzi wówczas $v_\varepsilon \equiv v + \varepsilon \triangleright \alpha \in C$ dla pewnej otwartej komnaty Weyla C (wszak $v_\varepsilon \in E \setminus \bigcup_{\beta \in R} \Pi_\beta$).

Połóżmy, że $\alpha \in \Delta_C$, gdzie Δ_C jest bazą, o której mówi Stw. 34. $\Delta_C = \{\alpha_i\}_{i \in \overline{1,r}}$

Zauważmy, że $\langle \alpha | v_\varepsilon \rangle = \langle \alpha | \varepsilon \triangleright \alpha \rangle = \varepsilon \langle \alpha | \alpha \rangle > 0$, jest z pewnością $\alpha \in R_+^{\Delta_C}$. Zapiszmy przeto

bo $v_\varepsilon \in C$ (por. Stw. 34)

$$\alpha = \sum_{i=1} n^i \triangleright \alpha_i \quad , n^i \in \mathbb{N} \,,$$

a wtedy

$$0 = \langle \alpha | v \rangle = \sum_{i=1}^{r} n^i \cdot \langle \alpha_i | v \rangle \text{, a ponieważ}$$

209

$$v \in \partial C \text{, przeto } \langle \alpha_i | v \rangle \geq 0 \text{, czyli}$$

$$\forall i \in \overline{1,r} : \left(n^i > 0 \Rightarrow \langle \alpha_i | v \rangle = 0 \right) \text{. Jednocześnie}$$

bo $v \perp \beta \Leftrightarrow v \in \Pi_\beta$ (patrz: Def. 207)

$$\forall \beta \notin \{\pm \alpha\} : v \not\perp \beta \text{, przeto } \exists! \, i \in \overline{1,r} : \langle \alpha_i | v \rangle = 0 \text{,}$$

czyli też $\exists! \, i \in \overline{1,r} : n^i > 0$, co oznacza, że

Vert

$$\alpha = \alpha_i \in \Delta_C \text{.} \qquad \square$$

Trochę czytelniej: Jeśli α <u>nie</u> jest w bazie, **(209½)**

to ma rozkład w tejże,

$$\alpha = \sum n^i \triangleright \alpha_i \quad z \quad n^i \geq 0 \text{ i co najmniej dwoma } n^i \neq 0 \neq n^j,\ i \neq j$$

(nie jedynym!),

ale wtedy $\langle \alpha_i | v \rangle = 0 = \langle \alpha_j | v \rangle$,

tymczasem $\alpha_i, \alpha_j \notin \{\pm\alpha\}$, zatem $\alpha_i, \alpha_j \not\perp \beta$,

więc sprzeczność.

W następnej kolejności zbadamy działanie $W(E,R)$ na zbiorze komór Weyla
(patrz: obserwacja 2) ze str. 202),
co doprowadzi nas do diagramatycznej reprezentacji systemów pierwiastkowych...

<u>Stw. 36.</u> Niechaj (E,R) będzie systemem pierwiastkowym.

$$\forall \Delta\text{-baza } (E,R): \quad W(E,R) = \langle w_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle .$$

Działanie $W(E,R)$ na zbiorze otwartych komór Weyla jest przechodnie.

D: Ustalmy bazę Δ i rozważmy podgrupę $W_\Delta \equiv \langle w_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle \subset W(E,R)$. Niechaj C będzie dowolną otwartą komorą Weyla. Wybierzmy $v \in \mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ i $w \in C$. Pokażemy, że $\exists\, \chi \in W_\Delta : \chi(w) \in \mathfrak{C}(E,R;\Delta)$. W tym celu wybierzmy $\chi_* \in W_\Delta$ spełniające warunek

$$\|\chi_*(w) - v\|_E = \min_{\chi \in W_\Delta} \|\chi(w) - v\|_E$$

(jest dobrze określone, gdyż $|W_\Delta| \leq |W(E,R)| < \infty$).

Załóżmy, że $X_*(w) \notin \mathfrak{C}(E,R;\Delta)$, a wtedy

$\exists\, \alpha\in\Delta : \langle \alpha | X_*(w)\rangle < 0$, co jednak oznacza, że
$(\cap\, \Pi_\alpha, \alpha\in\Delta$ ograniczają $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ (warunki $\langle v|\alpha\rangle>0$)) wobec $\langle v|\alpha\rangle>0$ -

$$\|X_*(w)-v\|_E^2 - \|w_\alpha\circ X_*(w)-v\|_E^2$$

$$= \big(X_*(w)-v\,\big|\,X_*(w)-v\big) - \big(w_\alpha\circ X_*(w)-v\,\big|\,w_\alpha\circ X_*(w)-v\big)$$

$$= \cancel{(w|w)} - 2\big(X_*(w)|v\big) + \cancel{(v|v)}$$

$$- \cancel{(w|w)} + 2\big(w_\alpha\circ X_*(w)|v\big) - \cancel{(v|v)}$$

0

$\wedge$

$$= 2\Big(\overbrace{\cancel{X_*(w)} - 2\frac{(X_*(w)|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\triangleright\alpha - \cancel{X_*(w)}}\,\Big|\,v\Big) = -4\,\frac{(X_*(w)|\alpha)\cdot(\alpha|v)}{(\alpha|\alpha)},$$

czyli $\quad \| u_\alpha \circ X_*(w) - v \| < \min\limits_{X \in W_\Delta} \| X(w) - v \|$ ↯ 213

(wszak $u_\alpha \circ X_* \in W_\Delta$).

Zatem $X_*(w) \in \mathfrak{E}(E,R;\Delta)$, co wobec dowolności w oznacza, że C można odwzorować w $\mathfrak{E}(E,R;\Delta)$ używając W_Δ, a ponieważ $X_* \in W_\Delta$ zachowuje kąty, jest pewne, że X_* przeprowadza całą komnatę C ← ścianę w ścianę! w $\mathfrak{E}(E,R;\Delta)$, czyli $X_*(C) = \mathfrak{E}(E,R;\Delta)$.

W takim razie ...

$\forall\, C_1, C_2$ – otwarte komory Weyla

$\exists\, \chi \in W_\Delta : \quad \chi(C_1) = C_2$, co oznacza,

że W_Δ – tym bardziej cała W – działa

przechodnio na zbiorze komór.

Pozostaje przekonać się, że $W_\Delta = W$.

Rozważmy $\alpha \in R$. W świetle str. 35 $\left(\begin{matrix}\forall \alpha \in R \\ \exists \text{ baza } \Delta \ni \alpha\end{matrix}\right)$

$\exists\, \Delta_{(\alpha)}$ baza : $\alpha \in \Delta_{(\alpha)}$, więc też – $\mathfrak{C}(E, R; \Delta_{(\alpha)})$.

Ustalmy $\chi \in W_\Delta : \quad \chi(\mathfrak{C}(E, R; \Delta_{(\alpha)})) = \mathfrak{C}(E, R; \Delta)$.

Skoro jednak $\chi(\alpha) \in \Delta$, co wynika z $\chi(\partial\mathfrak{C}(E,R;\Delta_{(\alpha)})) = \partial\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$, to zarówno χ (z zał.), jak i $w_{\chi(\alpha)}$ należą do W_Δ, ale...

Lemat: $\forall \alpha \in R \; \forall \chi \in W(E,R): \; w_{\chi(\alpha)} = \chi \circ w_\alpha \circ \chi^{-1}$

Dd: $\forall v \in E:$

$$w_{\chi(\alpha)}(v) \equiv v - 2\,\frac{(v|\chi(\alpha))}{(\chi(\alpha)|\chi(\alpha))} \triangleright \chi(\alpha)$$

$$= \chi(\chi^{-1}(v)) - 2\,\frac{(\chi(\chi^{-1}(v))|\chi(\alpha))}{(\chi(\alpha)|\chi(\alpha))} \triangleright \chi(\alpha)$$

$\mathbb{R}$-liniowość i izometryczność χ

$$\overset{\downarrow}{=} \chi\left(\chi^{-1}(v) - 2\,\frac{(\chi^{-1}(v)|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha\right) \equiv \chi\big(w_\alpha(\chi^{-1}(v))\big) \quad \square$$

Wobec powyższego dostajemy zatem:

$$w_\alpha = \chi^{-1} \circ w_{\chi(\alpha)} \circ \chi \in W_\Delta^{-1} \cdot W_\Delta \cdot W_\Delta \subset W_\Delta ,$$

dla $\alpha \in R$ dowolne i $w_\alpha, \alpha \in R$ generują $W(E,R)$. $\square$

Pójdziemy teraz w kierunku dowodu swobody działania $W(E,R)$ na zbiorze komnat...

W następnej kolejności dowodzimy — pomocniczo —

str. 37. $\forall C$ – otwarta komora Weyla

$$\forall\, v, w \in \overline{C} \;\; \forall\, \chi \in W(E,R) : \big(w = \chi(v) \implies w = v \big).$$

D: Zaczniemy od

Lemat: Niech Δ będzie bazą R i niech $\chi \in W(E,R) \setminus \{id_E\}$. Ustalmy ROZKŁAD MINIMALNY $\chi = W_{\alpha_1} \circ W_{\alpha_2} \circ \ldots \circ W_{\alpha_M}$, $\alpha_i \in \Delta$, tj. taki, w którym M jest najmniejsze z możliwych. Wówczas $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ i $\chi(\mathfrak{C}(E,R;\Delta))$ leżą po przeciwległych stronach Π_{α_1}.

(indukcyjny wzgl. M)
<u>Dd</u>: Słowo $X \neq id_E$, to $M \geq 1$. Jeśli $M=1$, 218
to $X = W_{\alpha_1}$, a wtedy $X(\mathfrak{E}(E;R;A)) \equiv W_{\alpha_1}(\mathfrak{E}(E;R;A))$
jest odbiciem $\mathfrak{E}(E;R;A)$ w hiperpłaszczyźnie Π_{α_1},
zgodnie z tezą.

Założymy, że teza jest słuszna dla X
o rozkładach minimalnych o długości $< M$.

Niech $X = W_{\alpha_1} \circ W_{\alpha_2} \circ \ldots \circ W_{\alpha_M}$ i rozważmy $\underline{X} := W_{\alpha_1} \circ W_{\alpha_2} \circ \ldots \circ W_{\alpha_{M-1}}$.
Rozkład $\underline{X}$ jest minimalny, gdyby bowiem
nie był, rozkład X nie byłby minimalny,

wbrew założeniu. Na mocy założenia indukcyjnego (219)
$\underline{\chi}(\mathfrak{E}(E;R;\Delta))$ i $\mathfrak{E}(E;R;\Delta)$ leżą po przeciwnych
stronach Π_{α_1}. Gdyby zatem $\chi(\mathfrak{E}(E;R;\Delta))$
leżał po tej samej stronie Π_{α_1} co $\mathfrak{E}(E;R;\Delta)$,
to wówczas $\underline{\chi}(\mathfrak{E}(E;R;\Delta))$ i $\chi(\mathfrak{E}(E;R;\Delta))$ leżałyby
po przeciwnych stronach Π_{α_1}, $\underline{\chi}(w_{\alpha_1}(\mathfrak{E}(E;R;\Delta)))$
czyli też – wobec odwracalności $\underline{\chi}$ –
$\mathfrak{E}(E;R;\Delta)$ i $w_{\alpha_1}(\mathfrak{E}(E;R;\Delta))$ leżałyby po przeciwnych
stronach $\underline{\chi}^{-1}(\Pi_{\alpha_1}) = \Pi_{\underline{\chi}^{-1}(\alpha_1)}$.

Okazuje się jednak, że istnieje dokładnie (220)
jedna hiperpłaszczyzna Π_β, $\beta \in R$ o tej własności,
że $\mathcal{E}(E,R;\Delta)$ i $w_{\alpha_M}(\mathcal{E}(E,R;\Delta))$ są po przeciwnych
stronach Π_β — jest to Π_{α_M}. Istotnie,
leżą
$\mathcal{E}(E,R;\Delta)$ i $w_{\alpha_M}(\mathcal{E}(E,R;\Delta))$ ~~są~~ po przeciwnych $\neq \emptyset$
~~stronach~~ Π_{α_M}, a gdy tym $\Pi_{\alpha_M} \cap \partial\mathcal{E}(E,R;\Delta) \cap \partial w_{\alpha_M}(\mathcal{E}(E,R;\Delta))$
rozdzielone ... $w_{\alpha_M}(\Pi_{\alpha_M}) = \Pi_{\alpha_M}$
weźmy więc $v \in \partial\mathcal{E}(E,R;\Delta) \cap \Pi_{\alpha_M} \setminus \bigcup_{\beta \in R\setminus\{\pm\alpha_M\}} \Pi_\beta$,
a wtedy odcinek $\{v + t\alpha_M \mid t \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$
dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ zawiera parę wektorów

Istotnie, $\Pi_{\alpha_M} \cap \partial \mathcal{E}(E,R;\Delta) \neq \emptyset$, bo $\alpha_M \in \Delta$ 220½

$$\Downarrow$$

$$w_{\alpha_M}(\Pi_{\alpha_M}) \cap w_{\alpha_M}\big(\partial \mathcal{E}(E,R;\Delta)\big) \neq \emptyset$$

$$\parallel$$

$$\Pi_{\alpha_M} \cap \partial\, w_{\alpha_M}\big(\mathcal{E}(E,R;\Delta)\big) \neq \emptyset$$

z $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ i $w_{\alpha_M}(\mathfrak{C}(E,R;\Delta))$ i nie przecina żadnej Π_β, $\beta \in R\setminus\{\pm\alpha_M\}$, czyli wszystkie pary wektorów $(v + t_0\alpha_M, v - t_0\alpha_M)$ są po tej samej stronie (221) wszystkich Π_β, $\beta \in R\setminus\{\pm\alpha_M\}$.

Wracając do wcześniejszego rozumowania konstatujemy, że gdyby $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ i $w_{\alpha_M}(\mathfrak{C}(E,R;\Delta))$ leżały po przeciwnych stronach $\underline{\chi}^{-1}(\Pi_{\alpha_1}) = \Pi_{\underline{\chi}^{-1}(\alpha_1)}$, to byłoby $\Pi_{\underline{\chi}^{-1}(\alpha_1)} \equiv \Pi_{\alpha_M}$, czyli też – w świetle Lematu ze str. 215 –

$$w_{\alpha_M} \equiv w_{\underline{\chi}^{-1}(\alpha_1)} = \underline{\chi}^{-1} \circ w_{\alpha_1} \circ \underline{\chi}\,,$$ a to dałoby (222)

$$\chi \equiv \underline{\chi} \circ w_{\alpha_M} = w_{\alpha_1} \circ \underline{\chi} \equiv (w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_1}) \circ w_{\alpha_2} \circ \dots \circ w_{\alpha_{M-1}}$$

$$= w_{\alpha_2} \circ w_{\alpha_3} \circ \dots \circ w_{\alpha_{M-1}}\,,$$ czyli reprezentację

χ krótszą (o 2) od minimalnej. ↯ ⊠

Możemy więc przystąpić do dowodu stwierdzenia.

Przeprowadźmy go metodą indukcji względem długości L rozkładu minimalnego χ na odbicia $w_\alpha, \alpha \in \Delta_c$. 2.2.3

Jeśli $L = 0$, to $\chi = id_E$ i teza jest spełniona trywialnie. Załóżmy, że jest ona spełniona także, gdy $L < M$. Niech teraz $\chi = w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2} \circ \ldots \circ w_{\alpha_M}$ będzie rozkładem minimalnym. W świetle Lematu $\Sigma(E,R;\Delta_c) \equiv C$ i $\chi(\Sigma(E,R;\Delta_c))$ leżą po przeciwnych stronach Π_{α_1} i

$$\chi\left(\overline{\Sigma(E,R;\Delta_c)}\right) \cap \overline{\Sigma(E,R;\Delta_c)} \subset \Pi_{\alpha_1},$$

co oznacza, że $X(v) \equiv w \in \Pi_{\alpha_1}$, skąd dalej

$$W_{\alpha_1} \circ X(v) = W_{\alpha_1}(w) = w$$

$$\overset{L}{=} \underbrace{W_{\alpha_2} \circ W_{\alpha_3} \circ \dots \circ W_{\alpha_M}}_{\underline{X}}(v) \quad \text{, czyli}$$

$$\underline{X}(v) = w \quad \text{dla} \quad v, w \in \mathcal{E}(E, R; \Delta_c) \equiv C,$$

ale rozkład $\underline{X}$ ma długość $M-1$, więc możemy zastosować założenie indukcyjne, aby stwierdzić, że w takim razie $v = w$.

$\square$

Dotychczasowe ustalenia dostarczają narzędzi do łatwiej weryfikacji następujących twierdzeń: 225

<u>Stw. 38.</u> Działanie $W(E,R)$ na zbiorze otwartych komór Weyla jest <u>swobodne</u>. Ponadto $\forall C$ – otwarta komora Weyla $\forall v \in C$ $\forall \chi \in W(E,R)$:

$$\chi(v) = v \implies \chi = \mathrm{id}_E .$$

punkt stały w zbiorze komór

<u>D</u>: Niechaj C będzie otwartą komorą Weyla i niech $\chi \in W(E,R)$ takie, że $\chi(C) = C$, a wtedy $\forall v \in C$: $\chi(v) \in C$, więc na mocy

Str. 37 zachodzi $\forall v\in C: \chi(v)=v$, stąd też $\chi|_C = \mathrm{id}_C$, ale to oznacza, że $\chi \equiv \mathrm{id}_E$, bo χ : komnaty Weyla $\circlearrowleft$ wraz ze ścianami, gdyż – z racji ciągłości χ – $\chi|_{\overline{C}} = \mathrm{id}_{\overline{C}}$, ale $\partial C = \overline{C}\setminus C$ ma postać Π_α, $\alpha\in\Delta_C$ – baza E (!), więc $\Pi_\alpha = \chi(\Pi_\alpha) = \Pi_{\chi(\alpha)}$, a skoro $\chi : R \circlearrowleft$, to $\chi(\alpha)=\pm\alpha$, gdyby jednak było $\chi(\alpha)=-\alpha$, to dla $v\in\Pi_\alpha$ byłoby: $v+\varepsilon\alpha\in C \xmapsto{\chi} \underset{\equiv v}{\chi(v)}-\varepsilon\alpha\notin C$ ↯, przeto $\forall\alpha\in\Delta_C : \chi(\alpha)=\alpha$, to jednak oznacza – wobec bazowości Δ_C – $\chi\equiv\mathrm{id}_E$.

Ponadto, gdy dla pewnego $v\in C$ jest $\chi(v)=v$, to w świetle Obserwacji 2) ze str. 202 (χ : komnaty $\to$ komnaty) jest $\chi(C)=C$, a to na mocy wyżej udowodnionej tezy implikuje $\chi=\mathrm{id}_E$. $\square$

Mamy też

str. 39. $\forall \Delta_1, \Delta_2$ - bazy R $\exists! X \in W(E,R)$:

$$\Delta_2 = X(\Delta_1).$$

D: Baza Δ_A, $A \in \{1,2\}$ wyznacza obszar komory Weyla — $\mathfrak{E}(E,R;\Delta_A)$. Wobec swobodnego i przechodniego działania grupy Weyla $W(E,R)$ na zbiorze obszarów komór Weyla (str. 38 i 36, odpowiednio) $\exists! X \in W(E,R)$: $\mathfrak{E}(E,R;\Delta_2) = X(\mathfrak{E}(E,R;\Delta_1))$. Ale X przeprowadza

$\chi(\partial\mathfrak{C}(E,R;\Delta_1)) = \partial\mathfrak{C}(E,R;\Delta_2)$, więc

$\langle\alpha_1\rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} \equiv \Pi_{\alpha_1},\ \alpha_1\in\Delta_1$ $\qquad$ $\Pi_{\alpha_2},\ \alpha_2\in\Delta_2$

też $\chi(\Delta_1)=\Delta_2$. $\square$

$\chi(\Pi_{\alpha_1}) = \Pi_{\alpha_2} \equiv \langle\alpha_2\rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$

$\equiv \chi(\langle\alpha_1\rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}) \xrightarrow{\chi\in O(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)} \chi(\langle\alpha_1\rangle_{\mathbb{R}}) = \langle\alpha_2\rangle_{\mathbb{R}}$

Doprecyzowujemy

Str. 40. Niechaj C – otwarta komora Weyla i niech $v\in E$. $\exists!\ \alpha\in\overline{C}\cap W(E,R)(v)$.

orbita

D: Niech $v\in E$, więc też $v\in\overline{C_v}$, gdzie C_v jest pewną otwartą komorą Weyla. Na mocy str. 36 $\exists\ \chi\in W(E,R): C=\chi(C_v)$, a wtedy także $\chi(\overline{C_v})=\overline{C}$, zatem $\chi(v)\in\overline{C}$, czyli $W(E,R)(v) \cap \overline{C} \neq \emptyset$.

Przy tym jeśli takie $w \in W(E,R)(v) \cap \overline{C}$

to $X(v)$ i w są w tej samej otoczce v,

czyli $\exists\, \tilde{X} \in W(E,R)$: $w = \tilde{X}(X(v))$,

a to oznacza — w świetle str. 37 —

$w \equiv X(v)$, bo $X(v), w \in \overline{C}$. $\square$

Na zakończenie tej części wszystkich rozważań dowodzimy ...

Str. 41. Niechaj Δ będzie bazą R i niech $\alpha \in \Delta$. $\forall \beta \in R^{\Delta}_{+} : \left(\beta \neq \alpha \implies w_{\alpha}(\beta) \in R^{\Delta}_{+} \right)$, (230)

czyli w_{α} jest permutacją pierwiastków dodatnich różnych od α.

D: Niech $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} n^{\gamma}_{\Delta} \gamma$, przy czym $\beta \neq \alpha$ implikuje $\exists\, \gamma_{*} \in \Delta \setminus \{\alpha\} : n^{\gamma_{*}} > 0$.

Na mocy aksjomatu (SP3) $w_{\alpha}(\beta) = \beta - N_{\Delta}\alpha$ dla pewnej liczby $N \in \mathbb{Z}$, a wobec tego

$w_\alpha(\beta) = \sum_{\gamma\in\Delta} \tilde{n}^\gamma \Delta\gamma$, gdzie $\tilde{n}^\gamma = \begin{cases} n^\alpha - N & \text{dla } \gamma=\alpha \\ n^\gamma & \text{w p.p.} \end{cases}$ (231)

W szczególności $\tilde{n}^{\gamma_*} = n^{\gamma_*}$.

Ale $R = R_+^\Delta \cup R_-^\Delta$, skoro więc $\tilde{n}^{\gamma_*} > 0$, to także pozostałe $\tilde{n}^{\gamma\neq\gamma_*} \geq 0$,

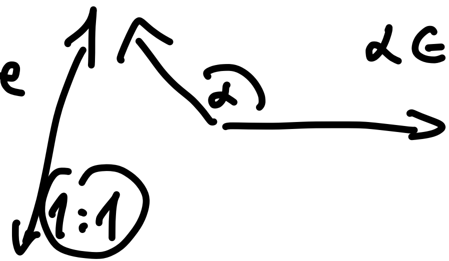
zatem $w_\alpha(\beta) \in R_+^\Delta$. $\square$

Dotychczasowe rozważania przygotowały nas do podjęcia wyzwania klasyfikacji systemów pierwiastkowych...

231 1/2

Rekapitulacja:

- SYSTEM Γ $\supset$ BAZA SYSTEMU Γ $\leftarrow$ elementy NIEROZKŁADALNE
- wektory bazowe



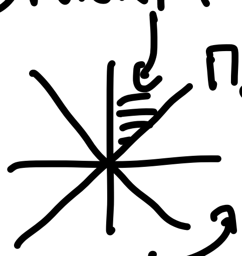
1:1

$\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$

wtedy $\Pi \cap R = \emptyset$

$\mathrm{codim}_{\mathbb{R}} \Pi = 1$

- KOMNATY WEYLA $\ni$ FUNDAMENTALNA KOMNATA WEYLA



Π_α , $\alpha \in R$

$\wr$

BAZA $\partial \Sigma = \bigcup_i \tilde{\Pi}_{\alpha_i}$

$W(E,R)$ działa na nich

- Γ : każdy może być bazowym!

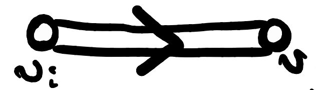
Def. 26. Niechaj (E,R) będzie systemem pierwiastkowym o bazie $\Delta = \{\alpha_i\}_{i\in\overline{1,r}}$.
DIAGRAM DYNKINA s.p. (E,R) to graf o r wierzchołkach $\{v_i\}_{i\in\overline{1,r}}$ połączonych krawędziami $e_{ij} = \overrightarrow{(v_i, v_j)}$, $i,j\in\overline{1,r}$ wedle przepisu:

$n_1 : n_2$ linii (patrz: str. 176)

(patrz: str. 29. i 31.)

- $\sphericalangle(\alpha_i,\alpha_j) = \frac{\pi}{2} \implies e_{ij} =$ 

- $\sphericalangle(\alpha_i,\alpha_j) = \frac{2\pi}{3} \implies e_{ij} =$ 

: $\|v_i\| = \|v_j\|$
- $\sphericalangle(\alpha_i,\alpha_j) = \frac{3\pi}{4} \implies e_{ij} =$ 

: $\|v_i\| = \sqrt{2}\,\|v_j\|$
- $\sphericalangle(\alpha_i,\alpha_j) = \frac{5\pi}{6} \implies e_{ij} =$ 

: $\|v_i\| = \sqrt{3}\,\|v_j\|$

$n_1 \cdot \|\alpha_i\|_E^2 = 2\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle$
$n_2 \cdot \|\alpha_j\|_E^2 = 2\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle$

Dwa diagramy Dynkina nazwiemy **RÓWNOWAŻNYMI**, jeśli istnieje bijekcja między zbiorami ich wierzchołków zachowująca łączące je krawędzie (walencję i „zwrot"). (2.33)

$\left(\forall \Delta_1, \Delta_2 - \text{bazy } (E,R)\ \exists!\ \chi \in W(E,R) : \Delta_2 = \chi(\Delta_1)\right)$

OBSERWACJA: W świetle Stw. 39. i w konsekwencji zachowywania przez $W(E,R)$ kątów i długości **dowolne** dwie bazy (E,R) dają równoważne diagramy Dynkina, w tym zatem sensie diagram Dynkina jest stowarzyszony z systemem pierwiastkowym, nie zaś – z konkretną bazą.