

Wykład XIV

2022 / 23



many kluzywe

Pr. 12. System pierwiastkowy jest niezyniedny 234
wtedy i tylko wtedy, gdy jego diagram Dynkina
jest spójny.

Ponadto diagramy Dynkina dwóch systemów
pierwiastkowych są równoważne wtedy i tylko
wtedy, gdy te systemy są izomorficzne.

D: Jeżeli \Rightarrow system liniowy (E, R)

wspiera się na podsystemy :

$$(E, R) = (E_1, R_1) \oplus (E_2, R_2),$$

wybrany bazę (E, R) w postaci $\Delta_1 \cup \Delta_2$,

gdzie Δ_A jest bazę (E_A, R_A) , $A \in \{1, 2\}$. Wtedy podnie

które są niechciami należącymi

do dwóch różnych podbaz : Δ_1 i Δ_2 są zerowe,

zatem stopień jest nieparzysty.

E | odwrotnie, jeśli stopień D funkcji (E, R) jest nieparzysty, baza Δ rozpada się na podzbiory

wzajem ortogonalne, $\Delta_1 \perp \Delta_2 = \Delta$.

W takim przypadku rozbie $E = \langle \Delta \rangle_{\mathbb{R}}$

(236)

$\simeq \underbrace{\langle \Delta_1 \rangle_{\mathbb{R}}}_{E_1} \oplus \underbrace{\langle \Delta_2 \rangle_{\mathbb{R}}}_{E_2}$. Oznaczmy $R_A := R \cap E_A$.

Łatwo widzieć, że (E_A, R_A) , $A \in \{1, 2\}$ są systemami pierwiastkowymi. Jedyne układy układowe są pierwiastkowe to (\mathbb{S}^3) , a ściślej: Musimy pokazać,

że $\forall \alpha, \beta \in R_A: \beta - 2 \frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \alpha \in R_A$. Oznaczmy

$\alpha(\beta) \in \mathbb{R}$, $\alpha(\beta) = \frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}$ zatem układowe są, że

$W_\alpha(\beta) \perp R_{A'}$, gdje A' jest neki od tih dijelova. (237)

$$\text{Ali } \forall \gamma \in R_{A'} : (W_\alpha(\beta) | \gamma) = (\beta | \gamma) - 2 \frac{(\beta | \alpha)}{(\alpha | \alpha)} \cdot (\alpha | \gamma) \\ \equiv 0. \quad \checkmark \quad \begin{matrix} 0, \text{ bo } \beta \perp \gamma \\ 0, \text{ bo } \alpha \perp \gamma \end{matrix}$$

Jest μ tip ortogonalne, je A_A jest baza (E_1, E_2) .

Pogotovo pokazati, je $\forall \alpha \in R : \alpha \in R_1 \vee \alpha \in R_2$.

W slične str. 36 : $W(E, R) = \langle W_\alpha | \alpha \in \Delta_1 \oplus \Delta_2 \rangle$,

a poniraj $\forall \alpha \in \Delta_A : W_\alpha |_{E_{A'}} = \text{id}_{E_{A'}}$, što

$W(E, R) = W(E_1, R_1) \times W(E_2, R_2)$, što opet $W(E_1, R_1) = \langle W_\alpha | \alpha \in \Delta_1 \rangle$
dijela trivijalni na $E_{A'}$.

Stwierdzenie $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ jest - na mocy Str. 35 -
elementem pierwszej bazy, a $W(E, \mathbb{R})$ zbieżne 238
- w świetle Str. 34 i 35 - przechodnio na zbiorze

bazy \mathbb{R} , to jest prawdziwe, że $\exists X = (X_1, X_2) \in W(E, \mathbb{R})$:
 $\alpha \in X(\Delta_1 \cup \Delta_2) \equiv X_1(\Delta_1) \cup X_2(\Delta_2)$ (wszaki X jest
izometryczny),

czyli $\alpha \in X_A(\Delta_A) \subset \mathbb{R}_A$ dla $\begin{matrix} A=1 \\ \vee \\ A=2 \end{matrix}$. \square

Przechodząc do drugiej części tego Twierdzenia,
konstruujemy dynamikę ugięcia $\mathbb{K} \Rightarrow \mathbb{H}$,
gdzie \mathbb{K} w przypadku $\mathbb{K} \Rightarrow \mathbb{H}$ ograniczony jest Verte

Wyobraźcie „hypodermis” myślenia $\boxed{\Leftarrow}$: 238 1/4

Niechaj $\chi: (E_1, R_1) \rightarrow (E_2, R_2)$ będzie izomorfizmem.

Obecnie bierzemy Δ_1 system (E_1, R_1) i ten bierzemy

system (E_2, R_2) (χ jest izomorfizmem

przebiegi R_2 -kierunków), a bierzemy jego parę

baz $\langle \Delta_1 \rangle_+$ w baz $\langle \chi(\Delta_1) \rangle_+$

(BSP 1); ponadto $R_2 = \chi(R_1) = \chi(\langle \Delta_1 \rangle_+ \cup \langle \Delta_1 \rangle_-)$
 $= \langle \chi(\Delta_1) \rangle_+ \cup \langle \chi(\Delta_1) \rangle_-$ (BSP 2).

Możemy też $\forall \alpha, \beta \in R_1 : w_{\chi(\alpha)}(\chi(\beta)) = \chi(w_\alpha(\beta))$. (238½)

W szczególności $\forall \alpha_i, \alpha_j \in \Delta_1 : w_{\chi(\alpha_i)}(\chi(\alpha_j)) = \chi(w_{\alpha_i}(\alpha_j))$
 $\chi(\alpha_j) - 2 \frac{(\chi(\alpha_j) | \chi(\alpha_i))}{(\chi(\alpha_i) | \chi(\alpha_i))} \chi(\alpha_i) \quad \chi(\alpha_j - 2 \frac{(\alpha_j | \alpha_i)}{(\alpha_i | \alpha_i)} \alpha_i)$

BAJA
 $\chi(\Delta_1) \rightarrow \chi(\alpha_i) \equiv \tilde{\alpha}_i$ $\chi(\alpha_j) - 2 \frac{(\alpha_j | \alpha_i)}{(\alpha_i | \alpha_i)} \chi(\alpha_i)$

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{(\tilde{\alpha}_i | \tilde{\alpha}_j)}{(\tilde{\alpha}_i | \tilde{\alpha}_i)} = \frac{(\alpha_i | \alpha_j)}{(\alpha_i | \alpha_i)} =: \alpha_{ij} \quad \forall i, j$$

Zbadamy teraz układ $\tilde{\alpha}_i$; id. użgl. Huges'a (dla nieprostokąt.).

1) Na funkcji str. 31 wystarczy zwrócić uwagę (238^{3/4})
 małe α_i i α_j i $\tilde{\alpha}_i$ i $\tilde{\alpha}_j$

$$\left(\frac{(\tilde{\alpha}_i | \tilde{\alpha}_j)}{\|\tilde{\alpha}_i\| \cdot \|\tilde{\alpha}_j\|} \right)^2 = \tilde{\alpha}_{ij} \cdot \tilde{\alpha}_{ji} = \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji} = \left(\frac{(\alpha_i | \alpha_j)}{\|\alpha_i\| \cdot \|\alpha_j\|} \right)^2 \quad \checkmark$$

$$2) \left(\frac{\|\tilde{\alpha}_i\|}{\|\tilde{\alpha}_j\|} \right)^2 = \frac{\|\alpha_i\|^2}{(\alpha_i | \alpha_j)} \cdot \frac{(\tilde{\alpha}_j | \tilde{\alpha}_i)}{\|\tilde{\alpha}_j\|^2} = \frac{\tilde{\alpha}_{ji}}{\tilde{\alpha}_{ij}} = \frac{\alpha_{ji}}{\alpha_{ij}} = \left(\frac{\|\alpha_i\|}{\|\alpha_j\|} \right)^2 \quad \checkmark$$

Widzimy więc, że - istotnie - X jest parą
 przestrzeni Dyrubine (E_1, R_1) na przestrzeni Dyrubine (E_2, R_2)
 \square

Do cyfrowości, w której oba diagramy
Dyuklina są spójne, więc tej - w trójkę 239
wzajemnych ustalen - oba systemy przedstawi
są nieprzystępne.

Rozważmy zatem systemy (E_A, R_A)

• dwómi rodzaj $\Delta_A = \{a_i^A\}_{i \in \bar{1}, r}$ uporządkowany
tak, że izomorfizm diagramów Dyuklina
przyporządkowuje $v_i^1 \leftrightarrow v_i^2, i \in \bar{1}, r$.

$N_A(E_2, R_2)$ składowy i tego składowy

wędkie schematu: $\langle \cdot | \cdot \rangle_2 \mapsto \frac{\langle a_1^1 | a_1^1 \rangle_1}{\langle a_1^2 | a_1^2 \rangle_2} \langle \cdot | \cdot \rangle_2$ (240)

wykorzystując tym sposobem otrzymujemy $\langle \cdot | \cdot \rangle_2^{\sim}$,

* $\langle a_1^2 | a_1^2 \rangle_2^{\sim} = \langle a_1^1 | a_1^1 \rangle_1$. Jako że kreślony

$e_{1j \neq 1}^1$ to identyczne z odpowiednimi kreślonymi

$e_{1j \neq 1}^2$, przyto (1) $\frac{\langle a_1^2 | a_j^2 \rangle_2^2}{\langle a_1^1 | a_1^1 \rangle_1 \langle a_j^1 | a_j^1 \rangle_1} = \frac{\langle a_1^1 | a_j^1 \rangle_1^2}{\langle a_1^1 | a_1^1 \rangle_1 \langle a_j^1 | a_j^1 \rangle_1}$

$\langle a_1^2 | a_j^2 \rangle_2^{\sim 2} = \frac{\langle a_1^1 | a_j^1 \rangle_1^{\sim 2}}{\langle a_j^1 | a_j^1 \rangle_1} \cdot \langle a_1^1 | a_j^1 \rangle_1^2 \Big/ \frac{\langle a_1^2 | a_j^2 \rangle_2^{\sim 2}}{\langle a_1^2 | a_1^2 \rangle_2^{\sim} \cdot \langle a_j^2 | a_j^2 \rangle_2^{\sim}}$

• również możemy $\chi(a_1^2, a_j^2) = \chi(a_1^1, a_j^1)$

$$(2) \frac{\langle \alpha_j^2 | \alpha_j^2 \rangle_2}{\langle \alpha_1^2 | \alpha_1^2 \rangle_2} = \frac{\langle \alpha_j^1 | \alpha_j^1 \rangle_1}{\langle \alpha_1^1 | \alpha_1^1 \rangle_1} \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \langle \alpha_j^2 | \alpha_j^2 \rangle_2^{\sim} = \langle \alpha_j^1 | \alpha_j^1 \rangle_1 \quad (241)$$

$$\stackrel{|||}{=} \frac{\langle \alpha_j^2 | \alpha_j^2 \rangle_2^{\sim}}{\langle \alpha_1^2 | \alpha_1^2 \rangle_2^{\sim}}$$

rovnost stonuhov
 stupovis die miraduhov
folgowung (X)

3 koninkuji porogyzyl varuhov

odgytuhjenny: $\langle \alpha_1^2 | \alpha_j^2 \rangle_2^{\sim} = \langle \alpha_1^1 | \alpha_j^1 \rangle_1$

$$\langle \alpha_j^2 | \alpha_j^2 \rangle_2^{\sim} = \langle \alpha_j^1 | \alpha_j^1 \rangle_1 \quad (\text{dla } j \neq 1)$$

Porokozjje to rozumotrani w odrednini

do każdego λ niezachodzą $\neq 1$

ustalimy - wobec spójności obu dróg -
tożsamość wszystkich (odnośnych) liczb i dążeń
u bazyli obu systemów, stwierdzając
tym samym, że jedynie \mathbb{R} -liniowe
rozszerzenie przyporządkowania

$$\alpha_i^1 \mapsto \alpha_i^2$$

jest izometryz : $(E_1, \langle \cdot | \cdot \rangle_1) \cong_{\mathbb{R}} (E_2, \langle \cdot | \cdot \rangle_2^{\sim})$,

242

α zatem - w rzeczywistości -

$$\forall \ell \in \Gamma : \ell \circ W_{\alpha_i^1} = W_{\alpha_i^2} \circ \ell \quad (\text{co jest warunkiem komutacyjnym równości}).$$

(243)

$$\text{Zatem, } \forall \beta \in E_1 : \ell \circ W_{\alpha_i^1}(\beta) = \ell \left(\beta - 2 \frac{\langle \beta | \alpha_i^1 \rangle}{\langle \alpha_i^1 | \alpha_i^1 \rangle} \alpha_i^1 \right)$$

$$= \ell(\beta) - 2 \frac{\langle \beta | \alpha_i^1 \rangle}{\langle \alpha_i^1 | \alpha_i^1 \rangle} \circ \ell(\alpha_i^1) = \ell(\beta) - 2 \frac{\langle \ell(\beta) | \ell(\alpha_i^1) \rangle}{\langle \ell(\alpha_i^1) | \ell(\alpha_i^1) \rangle} \alpha_i^2$$

przeformowanie w liczniku i mianowniku drugiego rzędu *verte*

$$\stackrel{\leq}{=} \ell(\beta) - 2 \frac{\langle \ell(\beta) | \alpha_i^2 \rangle}{\langle \alpha_i^2 | \alpha_i^2 \rangle} \alpha_i^2 \equiv W_{\alpha_i^2} \circ \ell(\beta)$$

W twierdzeniu 34 i 35 dowodzą pierwiastek $\alpha \in E_1$

Wyjściu:

$$\frac{\langle c(\beta) | \alpha_i^2 \rangle_2}{\langle \alpha_i^2 | \alpha_i^2 \rangle_2}$$

\equiv

$$\frac{\langle \alpha_1^1 | \alpha_1^1 \rangle_1 \cdot \langle c(\beta) | \alpha_i^2 \rangle_2}{\langle \alpha_1^2 | \alpha_1^2 \rangle_2 \cdot \langle \alpha_i^1 | \alpha_i^1 \rangle_1 \cdot \langle \alpha_i^2 | \alpha_i^2 \rangle_2}$$

\equiv

$$\frac{\langle c(\beta) | \alpha_i^2 \rangle_2}{\langle \alpha_i^2 | \alpha_i^2 \rangle_2}$$

243 1/2

możemy zapisać w postaci

$$\alpha = W_{d_{i_1}^1} \circ W_{d_{i_2}^1} \circ \dots \circ W_{d_{i_N}^1} (\alpha_j^1)$$

244

gdzie pewny $j, i_1, i_2, \dots, i_N \in \overline{1, r}$. W takim razie

pednak
$$\iota(\alpha) = W_{d_{i_1}^2} \circ W_{d_{i_2}^2} \circ \dots \circ W_{d_{i_N}^2} (\alpha_j^2) \in R_2$$

(wzale $W(E_2, R_2)$ zachowuje R_2). Analogicznie
polegujemy, że $\iota^{-1}(R_2) \subset R_1$, gdyż atleynie

koniecz

$$\iota|_{R_1}: R_1 \cong R_2, \text{ który koniecy}$$

demo¹⁹.

□

3 potrozenia Th. 10 i 12. wprowadzamy
statne dla nas

(245)

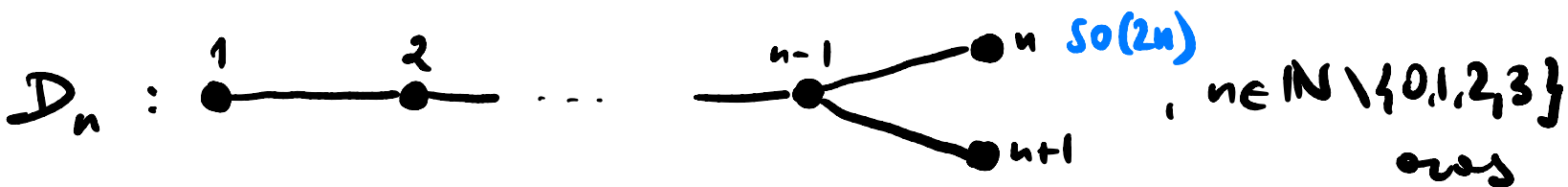
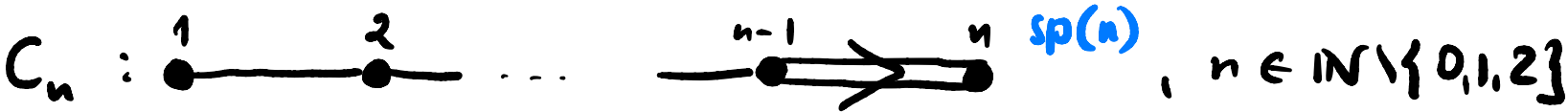
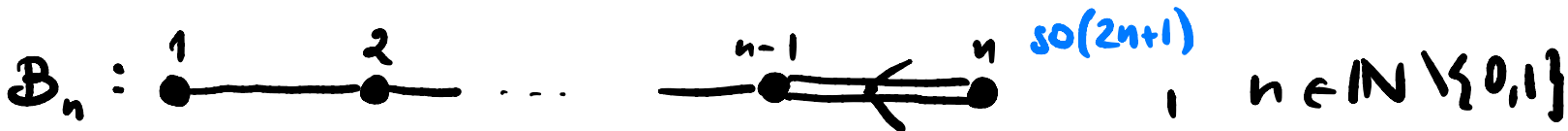
Corollarium Niechaj g będzie potprostą a.l.
o zwartej formie ujemnej k i niech
 k będzie jej podatek bez Costana odpowiadający
wynowi k ujemnej podatek ujemnej
u k . Wówczas g jest prosta wtedy i tylko
wtedy, gdy degree $D_{g,k}$ (to i, $Q(g, k)$)
jest spójny.

W podsumowaniu całej dotychczasowej
 dyskusji możemy powiedzieć sygnalnie

(246)

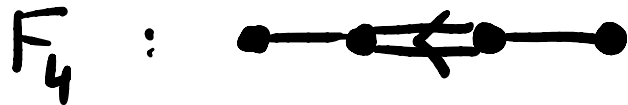
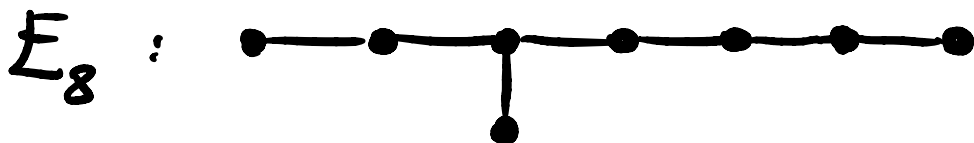
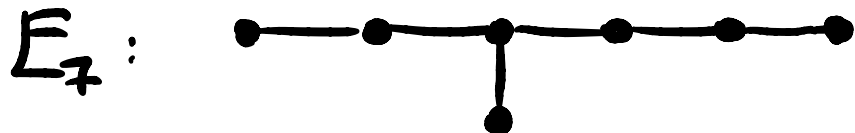
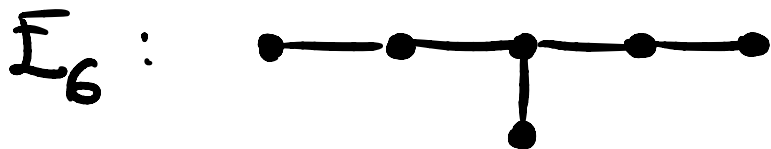
Th. 13. [Klasyfikacje dla systemów pierwiastków]

Jedynie spójne diagramy Dynkina to



ALGEBRY
WYJĄTKOWE

247



NB. : Wszystkie
te diagramy
odpowiadają systemom
ściwościowym
(\mathfrak{sl}) partii algebr
Liego!

D: Okazuje się, że zamiast klasyfikacji
Hessowej Dynkinie, w której występuje
wielkość o wojny dymosji, co znajduje
odzwierciedlenie w delonacji knowdji
(podobnym)
o walencji > 1 , występuje związek na dobrym

248

Coxetera C , które dostajemy w wyniku
przemianowania: $\alpha_i \mapsto \frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}$, co skutkuje
związaniem delonacji z knowdji.

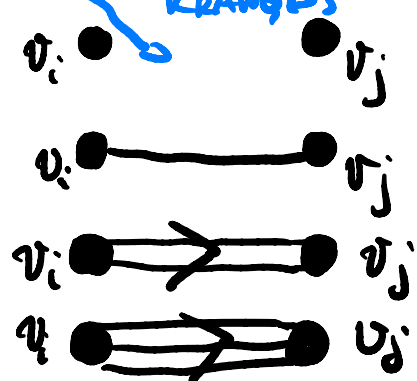
Ażby dobrze zrozumieć stopień zjed nami
zadanie, ze kapitalizacjami dotychczasowe
ustalenia: Mamy do czynienia ze zbiorem wektorów
liniowo niezależnych $\{a_i\}_{i \in I}$ czyli trygonycznych niezależności

preju. Możliwe uszy między wektorami
względnie uosobienie to (Def. 26
ony str. 175-178)
KRAWDZ

- 1° $\angle(a_i, a_j) = \frac{\pi}{2}$
- 2° $\angle(a_i, a_j) = \frac{2\pi}{3}$
- 3° $\angle(a_i, a_j) = \frac{3\pi}{4}$
- 4° $\angle(a_i, a_j) = \frac{5\pi}{6}$

$A_{ij} = 0 = A_{ji}$
 $A_{ij} = -1 = A_{ji}$
 $A_{ij} = -1, A_{ji} = -2$
 $A_{ij} = -1, A_{ji} = -3$

$n_i = A_{ij} A_{ji}$
LIGBA
Linii




Woliamy teraz zamiany:

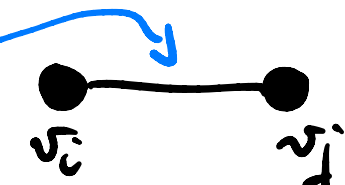
(250)

$$d_i \mapsto \frac{d_i}{\|d_i\|} \equiv \hat{d}_i, \quad i \in \overline{1, n}$$


liczymy w powyższym przypadku: $\hat{A}_{ij} \equiv 2 \langle \hat{d}_i | \hat{d}_j \rangle$
(highly to same!)

$$1^\circ \langle \hat{d}_i | \hat{d}_j \rangle = 0 \quad \hat{A}_{ij} = 0 = \hat{A}_{ji} \Rightarrow \hat{A}_{ij} \cdot \hat{A}_{ji} = 0$$


$$2^\circ \langle \hat{d}_i | \hat{d}_j \rangle = \frac{\langle d_i | d_j \rangle}{\|d_i\| \cdot \|d_j\|} \stackrel{\|d_i\| = \|d_j\|}{=} \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{\langle d_i | d_j \rangle}{\langle d_i | d_i \rangle} \equiv \frac{1}{2} A_{ij} = -\frac{1}{2}$$

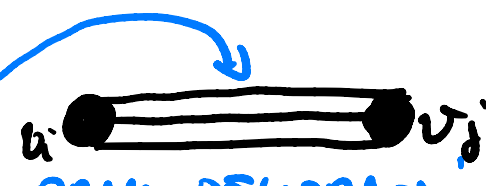
$$\hat{A}_{ij} = -1 = \hat{A}_{ji} \Rightarrow \hat{A}_{ij} \cdot \hat{A}_{ji} = 1$$


$$3^\circ \langle \hat{\alpha}_i | \hat{\alpha}_j \rangle = \frac{\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle}{\|\alpha_i\| \cdot \|\alpha_j\|} \stackrel{\|\alpha_i\| = \sqrt{2} \|\alpha_j\|}{=} \frac{\sqrt{2} \cdot 2 \langle \alpha_i | \alpha_j \rangle}{2 \langle \alpha_i | \alpha_i \rangle} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (251)$$

$$\hat{A}_{ij} = -\sqrt{2} = \hat{A}_{ji} \Rightarrow \hat{A}_{ij} \cdot \hat{A}_{ji} = 2$$


BRAU DEBORACI!

$$4^\circ \langle \hat{\alpha}_i | \hat{\alpha}_j \rangle = \frac{\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle}{\|\alpha_i\| \cdot \|\alpha_j\|} \stackrel{\|\alpha_i\| = \sqrt{3} \|\alpha_j\|}{=} \frac{\sqrt{3} \cdot 2 \langle \alpha_i | \alpha_j \rangle}{2 \langle \alpha_i | \alpha_i \rangle} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\hat{A}_{ij} = -\sqrt{3} = \hat{A}_{ji} \Rightarrow \hat{A}_{ij} \cdot \hat{A}_{ji} = 3$$


BRAU DEBORACI!

W dalszych rozważaniach będziemy używać określenia DIAGRAM DOPUSZCZALNY w odniesieniu do tych diagramów Costera, które spełniają warunki między innymi geometryczne wynikające z liniowej niezależności i dopuszczalności węzłów między wektorami $\{\vec{a}_i\}$ i $\{\vec{b}_i\}$. Diagramy, które nie są dopuszczalne, nazywamy NIEDOPUSZCZALNYMI i odpowiadają. Nasze strategie sprowadza się do zaleźności wszystkich diagramów dopuszczalnych i sprawdzenia, że

każdy z nich po przyjęciu do pracy (253)
odpowiada pewnemu systemowi pierwiastkowym.

W istocie ^(na chwilę) powiemy, że każdy z nich odpowiada
systemowi pierwiastkowym pewnej (pół)prstej
algebry Liego.

Można rozumowanie zorganizować
w formie szeregu lematów, które zawrą
spektrum dopuszczalnych stopni Coxetera.

Lemma 0. Každý podgrafem diagramu
domuzovalno je domuzovalny.

(254)

DL 0 : Ouzymite. \blacksquare

Lemma 1: Jeśli \mathcal{C} jest dopuszczalnym,

to \mathcal{C} jest drzewem (tj. nie zawiera cykli).

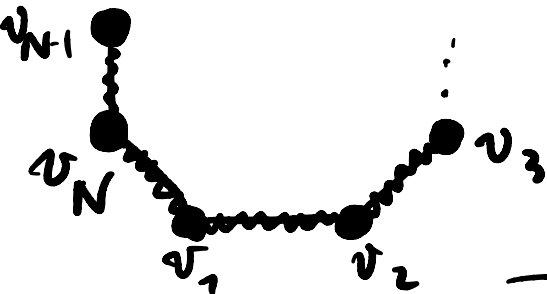
Dł 1: ^{A.a.} Niedostępnym nierozłączni $\{v_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ tworzą cykle,

(1) $\forall i \in \overline{1, N-1} : 2 \langle \hat{a}_i | \hat{a}_{i+1} \rangle \leq -1$

(2) $2 \langle \hat{a}_N | \hat{a}_1 \rangle \leq -1$

(3) dla pozostałych par (i, j) :

$\langle \hat{a}_i | \hat{a}_j \rangle = 0$



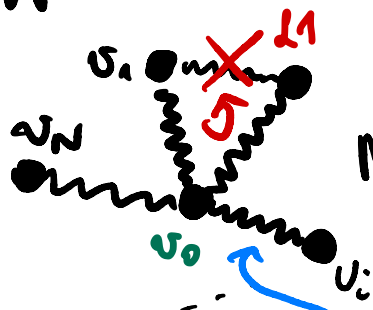
oraz $\sum_{i \in \overline{1, N}} \hat{a}_i = 0$ co wynika z
 1 linia,
 czyli $\hat{A}_{ij} \in \{-1, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}\}$

liczymy: $\| \sum_{i=1}^N \hat{a}_i \|^2 = \sum_{i=1}^N \| \hat{a}_i \|^2 + 2 \left[\sum_{i=1}^{N-1} \langle \hat{a}_i | \hat{a}_{i+1} \rangle + \langle \hat{a}_N | \hat{a}_1 \rangle + \sum_{(i,j) \in \overline{1, N}} \langle \hat{a}_i | \hat{a}_j \rangle \right]$
 $\leq N + (-1) + (-1) = N - 1 < 0$, czyli $\sum_{i=1}^N \hat{a}_i = 0_{\mathcal{C}}$ (wzrost 22.3 są LN3). \square

Lemma 2.: Jeśli \mathcal{L} jest dopuszczalny, to \mathcal{L} nie zawiera
 więcej niż 3 wartości o wartości > 3 . (256)

Dł2: Rozważmy dowolny niezdeformowany v_0 położony
 z innymi wartościami $v_i, i \in \{1, \dots, N\}$ (i tylko tymi), przy czym
 założamy, że każda linia między v_0 i v_i to L_i .

W świetle Lemma 1. wartości v_i i $v_j, i, j \in \{1, \dots, N\}$



nie są połączone, czyli $\forall i, j \in \{1, \dots, N\} : \langle \hat{a}_i | \hat{a}_j \rangle = 0$.
 Na tej podstawie bierzemy implikację $\hat{a}_0 \notin \langle \hat{a}_i | i \in \{1, \dots, N\} \rangle_{\mathbb{R}}$

$$1 = \|\hat{a}_0\|^2 > \sum_{i=1}^N \langle \hat{a}_0 | \hat{a}_i \rangle^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N L_i \Rightarrow \sum_{i=1}^N L_i < 4$$

liczba linii:

$$L_i = \hat{A}_{0i} \hat{A}_{i0} = 4 \langle \hat{a}_0 | \hat{a}_i \rangle^2$$

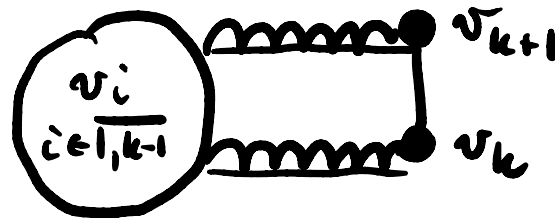
□

Lemma 3. Niech \mathcal{L} będzie dopuszczalny i niech $v_k, v_{k+1} \in \mathcal{L}$ będą kolejno pierwszymi liniami $e_{k,k+1}$.
 Wówczas diagram $\mathcal{L}_{k \times k+1}$ otrzymany z \mathcal{L} poprzez usunięcie $e_{k,k+1}$ i utożsamienie $v_k \equiv v_{k+1}$ jest dopuszczalny.

257

DL 3: Rozwijamy diagram \mathcal{L} :

(zawsze możemy tak ponumerować węzły)



Definiujemy:

$$\underline{\hat{d}}_k := \hat{d}_k + \hat{d}_{k+1}$$

$$\underline{\hat{d}}_i := \hat{d}_i, i \in \overline{1, k-1}$$

mm niedostawiony typ,

jeśli $k > 1$, to choć jedno z nich nie może!

Důležitý: $\|\underline{\hat{a}}_k\|^2 = \|\hat{a}_k\|^2 + \|\hat{a}_{k+1}\|^2 + 2\langle \hat{a}_k | \hat{a}_{k+1} \rangle \equiv \hat{A}_{k,k+1} = -1$
 $= 1 + 1 - 1 = 1 \checkmark$, 258

e každo

$\forall i \in \overline{1, k-1}$: $\langle \underline{\hat{a}}_i | \underline{\hat{a}}_k \rangle \equiv \langle \hat{a}_i | \hat{a}_k \rangle + \langle \hat{a}_i | \hat{a}_{k+1} \rangle$



\rightarrow jeden
 } iterymů
 $= 0$

$\left\{ 0, -\frac{1}{2}, -\frac{k}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$

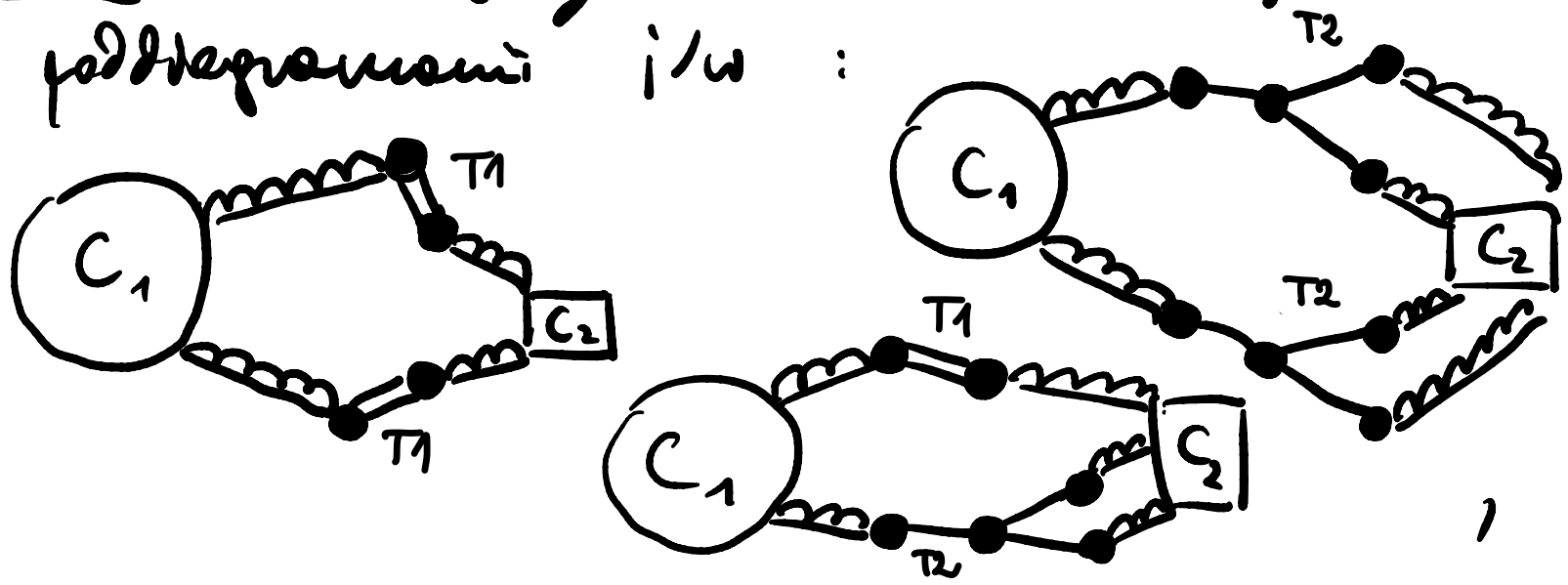
$\forall i, j \in \overline{1, k-1}$: $\langle \underline{\hat{a}}_i | \underline{\hat{a}}_j \rangle \equiv \langle \hat{a}_i | \hat{a}_j \rangle \checkmark$

Uvědomění: $\{\underline{\hat{a}}_j\}_{j \in \overline{1, k}}$ tvoří každý uspořádaného systému
 ortonormalního. ▣

Lemma 4. Jeśli \mathcal{C} jest dopuszczalny, to \mathcal{C} nie zawiera dwóch lub więcej podciągów postaci (259)

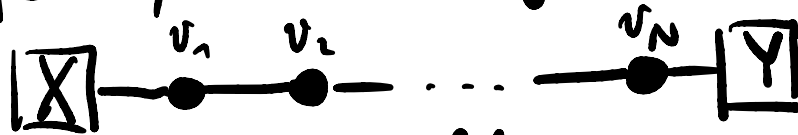


DL4. ^{A.e.} Rozważmy \mathcal{C} z co najmniej dwoma podciągami i/w :




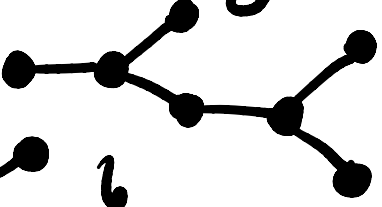
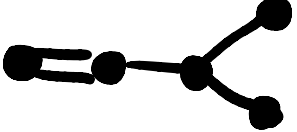
przy czym założymy, że na ścieżce w kierunku
 z pomiędzy podzięrami nie ma (260)
 innych podzięrami tego typu (tj. wybieramy
 dwa podzięramy najbliższe), a wtedy

Tędy jest pewien ciąg krawędzi postaci
 $X, Y \in \{T_1, T_2\}$

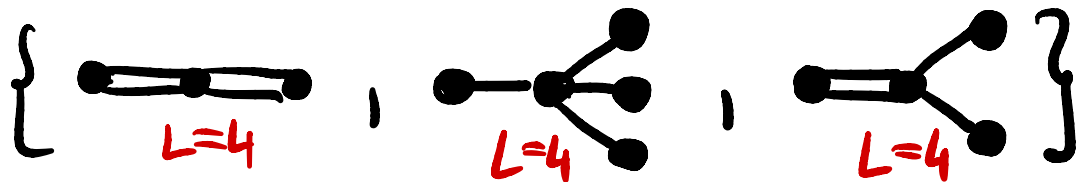



(krawędź pozioma - wpływowa przy temacie 2,
 krawędź pionowa - wpływowa przy założeniu,
 krawędź gołędną sąsiadującą - j/w).

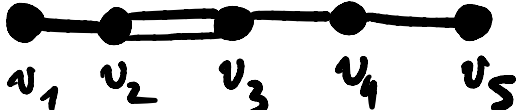
Dla dowolnego dzielenia niezerowego
 $\{U; \zeta_i \in \mathbb{N}\}$ otrzymujemy diagram dopływowy, (261)

ale w nim: $\boxed{X|Y} \in \{$  ,  ,
 $\}$,

co po dalszym dzieleniu daje



Ćwiczenie 5. Dwiegram  jest
niedopuszczalnym, w szczególności jeden 262
 dwiegram dopuszczalnym nie zawiera go jako
 poddwiegramu.

DłS.: Określmy , a wtedy
 $\langle \hat{a}_2 | \hat{a}_3 \rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\langle \hat{a}_1 | \hat{a}_2 \rangle = \langle \hat{a}_3 | \hat{a}_4 \rangle = \langle \hat{a}_4 | \hat{a}_5 \rangle = -\frac{1}{2}$
 natomiast pozostałe iloczyny skalarne = 0.
 Zdefiniujmy $\alpha := \hat{a}_1 + 2\hat{a}_2$ i $\beta := 3\hat{a}_3 + 2\hat{a}_4 + \hat{a}_5$.

Zadanie

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \langle 2\hat{a}_2 | 3\hat{a}_3 \rangle = 6 \langle \hat{a}_2 | \hat{a}_3 \rangle = -3\sqrt{2}, \quad (263)$$

a wtedy

$$\|\alpha\|^2 = \|\hat{a}_1\|^2 + \|2\hat{a}_2\|^2 + 2 \langle \hat{a}_1 | 2\hat{a}_2 \rangle = 1 + 4 - 2 = 3$$

$$\begin{aligned} \|\beta\|^2 &= \|3\hat{a}_3\|^2 + \|2\hat{a}_4\|^2 + \|\hat{a}_5\|^2 + 2(\langle 3\hat{a}_3 | 2\hat{a}_4 \rangle + \langle 2\hat{a}_4 | \hat{a}_5 \rangle) \\ &= 9 + 4 + 1 + 2(-3 - 1) = 6. \end{aligned}$$

Dlategoż zatem $|\langle \alpha | \beta \rangle| \equiv \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$,

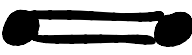
co - jak wiemy z lemmu algebry liniowej - oznacza,
że $\beta \in \langle \alpha \rangle_{\mathbb{R}}$. \Downarrow (wszystkie wektory $\{\hat{a}_i\}_{i=1,5}$ są ortogonalne)
 \square


Wniosek 1.: Jeśli \mathcal{C} jest dopuszczalny i zawiera
krawędź wielokrotną, to jest typu B_n, C_n, F_4 lub G_2 . (264)

Uzasadnienie: W świetle Lemata 3 podany
diagram z krawędzią podwójną jest

$$\text{---} \parallel \text{---} \equiv G_2.$$

W przypadku linii podwójnej Lemat 4
zabrania wystąpienia dwóch lub więcej
krawędzi tego typu, a Lemat 5
dopuszcza jedynie kontynuację diagramu.

po jednej ze stron krawędzi , czyli

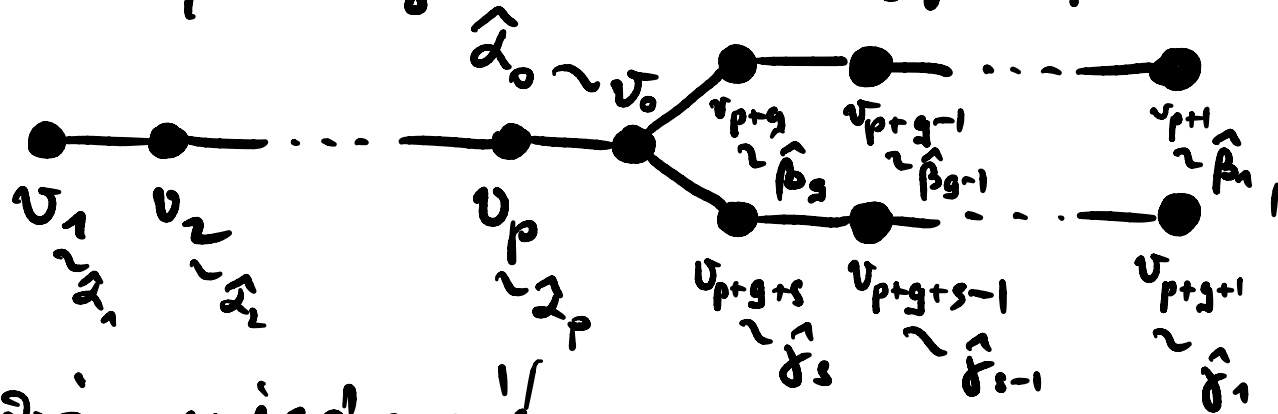
 B_n/C_n (nieosobliwość)

(bez odcięć)

lub  $\equiv F_4$. □ (265)

Na obecnym etapie pozostałe skomplikowane doposażenie drzewa o krawędziach pojedynczych.

Lemat 6. Jeśli \mathcal{C} jest doprzyszalonym diagramem o krawędziach gęstościowych (266) zamierzonym poddiagramem T_2 , czyli jest postaci



to zachodzi nierówność

$$\frac{p}{1+p} + \frac{g}{1+g} + \frac{s}{1+s} < 2.$$

DL6: {definiierung

$$X := \sum_{k=1}^p k \triangleright \hat{\alpha}_k, \quad Y := \sum_{k=1}^q k \triangleright \hat{\beta}_k, \quad Z := \sum_{n=1}^s m \triangleright \hat{\gamma}_n. \quad (267)$$

obliczenie

$$\begin{aligned} \langle X | X \rangle &= \sum_{k=1}^p \langle k \triangleright \hat{\alpha}_k | k \triangleright \hat{\alpha}_k \rangle + 2 \sum_{k=1}^{p-1} \langle k \triangleright \hat{\alpha}_k | (k+1) \triangleright \hat{\alpha}_{k+1} \rangle \\ &= \sum_{k=1}^p k^2 + 2 \sum_{k=1}^{p-1} k(k+1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^p k^2 - \sum_{k=1}^{p-1} (k^2 + k) \\ &= p^2 - \frac{(p-1) \cdot p}{2} = \frac{p^2 + p}{2} = \frac{p(p+1)}{2} \end{aligned}$$

analogicznie $\langle Y|Y \rangle = \frac{g(g+1)}{2}$, $\langle Z|Z \rangle = \frac{s(s+1)}{2}$.

Na tej podstawie wyznaczamy

$$\begin{aligned} \langle \hat{\alpha}_0 | \frac{1}{\|X\|} X \rangle^2 &= \left(\sqrt{\frac{2}{p(p+1)}} \cdot \sum_{k=1}^p \langle \hat{\alpha}_0 | k \alpha_k \rangle \right)^2 \\ &= \frac{2}{p(p+1)} \cdot p^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{p}{2(p+1)} \end{aligned}$$

(268)

oraz - analogicznie -

$$\langle \hat{\alpha}_0 | \frac{1}{\|Y\|} Y \rangle^2 = \frac{g}{2(g+1)}, \quad \langle \hat{\alpha}_0 | \frac{1}{\|Z\|} Z \rangle^2 = \frac{s}{2(s+1)}$$

Ponieważ $X \perp Y, X \perp Z, Y \perp Z,$

a wiadomo $\hat{\alpha}_0 \in \langle X, Y, Z \rangle_{\mathbb{R}}$, mamy

(269)

$$1 = \|\hat{\alpha}_0\|^2 = \left\langle \hat{\alpha}_0 \left| \frac{1}{\|X\|} X \right. \right\rangle^2 + \left\langle \hat{\alpha}_0 \left| \frac{1}{\|Y\|} Y \right. \right\rangle^2 + \left\langle \hat{\alpha}_0 \left| \frac{1}{\|Z\|} Z \right. \right\rangle^2,$$

co jest właśnie gotulowaniem mierności.

Na tym etapie pozostałe już tylko rozpatrzyć wszystkie ewentualności przewidziane przez tę mierność. ▣

Wniosek 2.: Jeśli \mathcal{C} jest dopuszczalnym
 i zawiera poddrzewem T_2 , to jest typu (270)
 D_n, E_6, E_7 lub E_8 .

Uzasadnienie: Wobec pełnej symetrii pomysłowy

Wybierzmy p, q i s ustalony: $p \geq q \geq s$.

Jeśli $s \geq 2$, to $\frac{s}{s+1} \geq \frac{2}{3}$, zatem także

$$\frac{p}{p+1} \geq \frac{2}{3} \text{ i } \frac{q}{q+1} \geq \frac{2}{3}, \text{ a wtedy } \frac{p}{p+1} + \frac{q}{q+1} + \frac{s}{s+1} \geq \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{x+1} \right) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow \frac{p}{p+1} \geq \frac{q}{q+1} \geq \frac{s}{s+1} \left(\geq \frac{2}{3} \right)$$



Wobec powyższego $s = 1$, ^(s=0 nie daje T2!) $e \text{ nie daje } 2^2!$

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q}{q+1} < 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \quad \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \quad (271)$$

Jeśli $q \geq 3$, to $\frac{q}{q+1} \geq \frac{3}{4}$, a wtedy

$$\frac{p}{p+1} < \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow p < 3, \text{ ale } p \geq q \geq 3 \quad \text{⚡}$$

Pozostają zatem przypadki: $(q=0 \text{ nie daje } B!)$

$$q=1 \Rightarrow p \geq 1 \quad (D_n)$$

$$q=2 \Rightarrow 2 \leq p < 5 \quad (E_6, E_7, E_8). \quad \square$$

Dotychczasowe rozważanie wykluczało wszelkie
skrajności inne niż te, o których mowa (272)
w teście Thiersteina. Konstruktynego dowodu
na to, że każdy z nich jest skrajnością
jennego systemu pierwiastków, istnieje
studium (P) postaci algebr tego (lub'ya
zoforališnyj sz na dwigeviad). \square

(CECI N'EST PAS)

LA FIN ...
