

TEORIA GRUP II 2022/23
WYKŁADY 2., 3. I 4.
LIE TO ME, CARTAN!

SPIS TREŚCI

1. Grupy Liego i rachunek różniczkowy Cartana	1
Dodatek A. Odzworowania	18
Dodatek B. Iloczyn półprosty grup	18

1. GRUPY LIEGO I RACHUNEK RÓŻNICZKOWY CARTANA

Ostatni wykład dostarczył rzetelnej motywacji do studiowania grup, których elementy zależą w sposób ciągły lub zgoła gładki od (zbioru) parametrów. Naturalnego uogólnienia i formalizacji naszych rozważań dostarcza teoria grup Liego, tj. zbiorów wyposażonych w uzgodnione wzajem struktury: algebraiczną strukturę grupy (wprowadzoną na pierwszorocznym wykładzie z Algebry) i geometryczną strukturę rozmaitości różniczkowalnej (wprowadzoną na drugorocznym wykładzie z Geometrii różniczkowej). Uzgodnienie takie ma daleko idące konsekwencje dla stycznościowego rachunku różniczkowego na tych rozmaitościach, którego liczne *strukturalne* zastosowania w mechanice klasycznej (np. teoria odwzorowań momentowych w opisie symetrii i redukcji symplektycznych) i teorii pola (np. cechowanie symetrii sztywnych, zw. też globalnymi, ale także nieliniowe realizacje symetrii istotne w opisie zjawisk takich jak mechanizm Higgsa czy odwrotny mechanizm Higgsa) czynią studium jego podstawowych własności nieodzownym elementem niniejszego kursu. Z owego studium wyprowadzimy naturalnie pojęcie (stycznościowej) algebry Liego (grupy Liego), którego desygnat zostanie następnie poddany abstrakcji i klasyfikacji, co będzie stanowiło punkt wyjścia do dyskusji teorii reprezentacji o fundamentalnym znaczeniu fizycznym (w kontekście, m.in., klasycznej teorii oddziaływań fundamentalnych i kwantowomechanicznej klasyfikacji pól materii i nośników oddziaływań).

Zacniemy od pojęć podstawowych

Definicja 1. Grupa topologiczna to grupa

$$(G, m \equiv \cdot, \text{Inv} \equiv (\cdot)^{-1}, \bullet \mapsto e),$$

której nośnik G jest przestrzenią topologiczną, a odwzorowania strukturalne m i Inv są ciągłe. **Podgrupa topologiczna** grupy topologicznej $(G, m, \text{Inv}, \bullet \mapsto e)$ to grupa topologiczna $(H, m|_{H \times H}, \text{Inv}|_H, \bullet \mapsto e)$, której nośnik H jest podprzestrzenią topologiczną przestrzeni G . **Homomorfizm topologiczny** między grupami topologicznymi $(G_1, m_1, \text{Inv}_1, \bullet_1 \mapsto e_1)$ i $(G_2, m_2, \text{Inv}_2, \bullet_2 \mapsto e_2)$ to homomorfizm grup ciągły względem topologii dziedziny i przeciwdziedziny.

Analogicznie definiujemy **grupę Liego** jako grupę, której nośnik jest rozmaitością gładką, a odwzorowania strukturalne m i Inv są klasy C^∞ . **Podgrupa Liego** grupy Liego $(G, m, \text{Inv}, \bullet \mapsto e)$ to grupa Liego $(H, m|_{H \times H}, \text{Inv}|_H, \bullet \mapsto e)$, której nośnik H jest podrozmaitością klasy C^∞ rozmaitości G . **Homomorfizm grup Liego** to homomorfizm grup gładki względem struktury różniczkowej dziedziny i przeciwdziedziny.

Przykłady 1.

- (1) \mathbb{R}^{x^n}
- (2) $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \equiv \text{U}(1) \cong \mathbb{S}^1$
- (3) $\text{SU}(2) \cong \mathbb{S}^3$
- (4) grupa Poincarégo z App. B

- (5) Grupa liniowa główna $GL(n; \mathbb{R})$ dziedziczy topologię i strukturę różniczkową z przestrzeni $\mathbb{R}(n) \equiv \mathbb{R}^{n^2}$, w której jest zanurzona jako podzbiór otwarty $\det_{(n)}^{-1}(\mathbb{R}_{\neq 0})$ (wszak $\det_{(n)} : \mathbb{R}(n) \rightarrow \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem wielomianowo zależnym od wyrazów macierzy, więc ciągłym)
- (6) wiele innych, które zostaną przedstawione na ćwiczeniach.

Lemat 1. Przyjmijmy zapis Def.1 i niechaj G będzie grupą topologiczną. Dla dowolnego elementu $g \in G$ i dowolnego otoczenia otwartego $\mathcal{O}_e \in \mathcal{T}(G)$ elementu neutralnego $e \in G$ istnieje otoczenie otwarte $\mathcal{O}_g \in \mathcal{T}(G)$ elementu g spełniające warunek

$$m_G \circ (\text{Inv}_G \times \text{id}_G)(\mathcal{O}_g \times \mathcal{O}_g) \subset \mathcal{O}_e.$$

Dowód: Odwzorowanie $f \equiv m_G \circ (\text{Inv}_G \times \text{id}_G)$ jest ciągle (w topologii produktowej na swej dziedzinie), przeto istnieją otoczenia otwarte $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ elementu g o własności $f(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) \subset \mathcal{O}_e$. Otwarte otoczenie $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 =: \mathcal{O}_g$ spełnia pożądaną własność $f(\mathcal{O}_g \times \mathcal{O}_g) \subset \mathcal{O}_e$. \square

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def.1 i niechaj $(G, m, \text{Inv}, \bullet \mapsto e)$ będzie grupą Liego. Czwórka

$$(\text{T}G, \text{T}m, \text{T}\text{Inv}, (\bullet, 0) \mapsto 0_{\text{T}_e G} \in \text{T}_e G)$$

jest grupą Liego noszącą miano **stycznej grupy Liego**. Rzut kanoniczny $\pi_{\text{T}G} : \text{T}G \rightarrow G$ oraz cięcia zerowe $\mathbf{0}_{\text{T}G}$ są homomorfizmami grup Liego spełniającymi relację

$$(1) \quad \pi_{\text{T}G} \circ \mathbf{0}_{\text{T}G} = \text{id}_G.$$

Dowód: Chwila zastanowienia uświadamia nam, że przyporządkowanie rozmaitości gładkiej jej wiązki stycznej ma charakter funktorialny (zrozumienie użytego tu niezwykle ekonomicznego skrótu pojęciowego umożliwia krótkie wprowadzenie do języka teorii kategorii, które załączam w oddzielnym pliku). Funktorialność T zapewnia transport nie tylko pełnej struktury (czyli struktury gładkiej i odwzorowań) grupy Liego G , ale także jej aksjomatyki – funktorialnym obrazem diagramów przemiennych wyrażających aksjomaty G są analogiczne diagramy dla $\text{T}G$. Jedynym zatem nietrywialnym punktem dowodzonego stwierdzenia jest ten mówiący o homomorficznym charakterze rzutu kanonicznego i cięcia zerowego oraz ich wzajemnej relacji. Zaczniemy od rzutu kanonicznego. Zważywszy definicję odwzorowania stycznego, stwierdzamy, że dla dowolnych $(g, h) \in G \times G$ jest

$$\text{T}_{(g,h)}m : \text{T}_{(g,h)}(G \times G) \cong \text{T}_g G \oplus \text{T}_h G \rightarrow \text{T}_{m(g,h)}G,$$

zatem

$$\pi_{\text{T}G} \circ \text{T}m = m \circ (\pi_{\text{T}G} \times \pi_{\text{T}G}),$$

a to jest właśnie definiująca własność homomorfizmu grup, przy czym wobec gładkości m także odwzorowanie styczne jest gładkie, mamy przeto do czynienia z homomorfizmem grup Liego. Aby postąpić dalej, musimy wejrzeć w strukturę $\text{T}_{(g,h)}m$. Dla dowolnego elementu $g \in G$ zdefiniujmy odwzorowania gładkie

$$\ell_g : G \circlearrowleft : h \mapsto m(g, h), \quad \wp_g : G \circlearrowright : h \mapsto m(h, g).$$

Wyberzmy lokalne mapy: $\kappa_g \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n) : \mathcal{O}_g \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_g \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{n^2})$, $n = \dim G$ na pewnym otoczeniu otwartym \mathcal{O}_g punktu g , $\kappa_h \equiv (y^1, y^2, \dots, y^n) : \mathcal{O}_h \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_h \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{n^2})$ na pewnym otoczeniu otwartym \mathcal{O}_h punktu h oraz $\kappa_{g \cdot h} \equiv (z^1, z^2, \dots, z^n) : \mathcal{O}_{g \cdot h} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{g \cdot h} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{n^2})$ na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_{g \cdot h}$ punktu $g \cdot h$, a wtedy – dla dowolnych $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}(g) \in \text{T}_g G$ i $W = W^a \frac{\partial}{\partial y^a}(h) \in \text{T}_h G$ – dostajemy

$$\text{T}_{(g,h)}m(V, W) = V^i \frac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial x^i}(\kappa_g(g), \kappa_h(h)) \frac{\partial}{\partial z^\mu}(g \cdot h)$$

$$+W^a \frac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial y^a}(\kappa_g(g), \kappa_h(h)) \frac{\partial}{\partial z^\mu}(g \cdot h).$$

W wyrażeniach $\frac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial x^i}(\kappa_g(g), \kappa_h(h))$ i $\frac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial y^a}(\kappa_g(g), \kappa_h(h))$ rozpoznajemy elementy macierzy odwzorowań liniowych $\mathbb{T}_g \wp_h$ i $\mathbb{T}_h \ell_g$, odpowiednio, możemy zatem przepisać powyższe w wygodnej postaci

$$(2) \quad \mathbb{T}_{(g,h)}m = \mathbb{T}_g \wp_h \circ \text{pr}_1 + \mathbb{T}_h \ell_g \circ \text{pr}_2.$$

Na tej podstawie wnioskujemy o słuszności równości

$$\begin{aligned} \mathbb{T}m \circ (\mathbf{0}_{\mathbb{T}G} \times \mathbf{0}_{\mathbb{T}G})(g, h) &= \mathbb{T}_{(g,h)}m(0_{\mathbb{T}_g G}, 0_{\mathbb{T}_h G}) = \mathbb{T}_g \wp_h(0_{\mathbb{T}_g G}) + \mathbb{T}_h \ell_g(0_{\mathbb{T}_h G}) \\ &= 0_{\mathbb{T}_{g,h} G} + 0_{\mathbb{T}_{g,h} G} = 0_{\mathbb{T}_{g,h} G} \equiv \mathbf{0}_{\mathbb{T}G} \circ m(g, h), \end{aligned}$$

która dokumentuje homomorficzny charakter $\mathbf{0}_{\mathbb{T}G}$, przy czym – rzecz jasna – mamy tu do czynienia z homomorfizmem gładkim. Tożsamość (1) jest oczywista. \square

Uwaga 1. Ażeby do końca oswoić styczną grupę Liego, znajdziemy jeszcze jawną postać morfizmu $\mathbb{T}\text{Inv}$. W tym celu rozważymy tożsamości

$$m \circ (\text{id}_G \times \text{Inv}) \circ \Delta = \eta = m \circ (\text{Inv} \times \text{id}_G) \circ \Delta,$$

w których zapisie użyliśmy odwzorowań (jawnie) gładkich

$$\Delta : G \longrightarrow G \times G : g \longmapsto (g, g), \quad \eta : G \circlearrowright : g \longmapsto e,$$

a których funktorialnym obrazem względem \mathbb{T} jest

$$\mathbb{T}m \circ (\text{id}_{\mathbb{T}G} \times \mathbb{T}\text{Inv}) \circ \mathbb{T}\Delta = 0 = \mathbb{T}m \circ (\mathbb{T}\text{Inv} \times \text{id}_{\mathbb{T}G}) \circ \mathbb{T}\Delta.$$

Uwzględniając Równ. (2), wyprowadzamy stąd tożsamości (dla dowolnych $g \in G$ i $V \in \mathbb{T}_g G$)

$$\mathbb{T}_g \wp_{g^{-1}}(V) + \mathbb{T}_{g^{-1}} \ell_g \circ \mathbb{T}_g \text{Inv}(V) = 0_{\mathbb{T}_e G} = \mathbb{T}_{g^{-1}} \wp_g \circ \mathbb{T}_g \text{Inv}(V) + \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}}(V),$$

czyli

$$\mathbb{T}_g \text{Inv} = -\mathbb{T}_e \ell_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_g \wp_{g^{-1}} = -\mathbb{T}_e \wp_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}}.$$

Godzi się przy tym podkreślić, że ostatnia równość nie wymaga powyższego wyprowadzenia, wynika ona bowiem wprost ze wzajemnej przemienności ℓ_g i \wp_h dla dowolnych $g, h \in G$.

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i zdefiniujmy **działanie dołączone**

$$\text{Ad} : G \times G \longrightarrow G : (g, h) \longmapsto m(m(g, h), \text{Inv}(g)) \equiv \text{Ad}_g(h).$$

Odwzorowanie

$$\mathbb{T}_e \ell : G_{\mathbb{T}_e \text{Ad}} \times \mathbb{T}_e G \longrightarrow \mathbb{T}G : (g, X) \longmapsto \mathbb{T}_e \ell_g(X)$$

jest izomorfizmem grup Liego.

Dowód: Na podstawie Równ. (2) możemy przepisać

$$\mathbb{T}_{(g,e)}m \circ (\mathbf{0}_{\mathbb{T}G} \times \text{id}_{\mathbb{T}_e G})(g, X) = \mathbb{T}_{(g,e)}m(0_{\mathbb{T}_g G}, X) = \mathbb{T}_g \wp_e(0_{\mathbb{T}_g G}) + \mathbb{T}_e \ell_g(X)$$

$$(4) \quad = \mathbb{T}_e \ell_g(X) \equiv \mathbb{T}_e \ell.(g, X),$$

czyli

$$\mathbb{T}_e \ell = \mathbb{T}_{(g,e)}m \circ (\mathbf{0}_{\mathbb{T}G} \times \text{id}_{\mathbb{T}_e G}),$$

co dowodzi gładkości $\mathbb{T}_e \ell$. W połączeniu z obserwacją

$$(\mathbb{T}_e \ell)^{-1} = (\pi_{\mathbb{T}G}, \mathbb{T}_{\pi_{\mathbb{T}G}(\cdot)} \ell_{\text{Inv} \circ \pi_{\mathbb{T}G}(\cdot)}(\cdot)),$$

którą weryfikujemy w bezpośrednim rachunku (w którym $v \in \mathbb{T}G$):

$$(\pi_{\mathbb{T}G}, \mathbb{T}_{\pi_{\mathbb{T}G}(\cdot)} \ell_{\text{Inv} \circ \pi_{\mathbb{T}G}(\cdot)}(\cdot)) \circ \mathbb{T}_e \ell.(g, X)$$

$$\begin{aligned}
 &= (\pi_{\text{TG}}, \mathbb{T}_{\pi_{\text{TG}}(\cdot)} \ell_{\text{Inv} \circ \pi_{\text{TG}}(\cdot)}(\cdot)) \circ \mathbb{T}_e \ell_g(X) = (g, \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_e \ell_g(X)) \\
 &= (g, \mathbb{T}_e(\ell_{g^{-1}} \circ \ell_g)(X)) = (g, \mathbb{T}_e \ell_{g^{-1} \cdot g}(X)) = (g, \mathbb{T}_e \ell_e(X)) = (g, X), \\
 &\quad \mathbb{T}_e \ell. \circ (\pi_{\text{TG}}, \mathbb{T}_{\pi_{\text{TG}}(\cdot)} \ell_{\text{Inv} \circ \pi_{\text{TG}}(\cdot)}(\cdot))(v) \\
 &= \mathbb{T}_e \ell_{\pi_{\text{TG}}(v)} \circ \mathbb{T}_{\pi_{\text{TG}}(v)} \ell_{\pi_{\text{TG}}(v)^{-1}}(v) = \mathbb{T}_{\pi_{\text{TG}}(v)}(\ell_{\pi_{\text{TG}}(v)} \circ \ell_{\pi_{\text{TG}}(v)^{-1}})(v) \\
 &= \mathbb{T}_{\pi_{\text{TG}}(v)}(\ell_e)(v) = v,
 \end{aligned}$$

przekonuje nas to o dyfeomorficznym charakterze tego odwzorowania (zależność $(\mathbb{T}_e \ell.)^{-1}$ od argumentu jest jawnie gładka). Pozostaje zatem upewnić się, że mamy do czynienia z homomorfizmem grup. W tym celu obliczamy – dla dowolnych $X, Y \in \mathbb{T}_e G$ oraz $g, h \in G$, a w odwołaniu do Równ. (2) –

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{T}_e \ell.((g, X)_{\mathbb{T}_e \text{Ad} \cdot} (h, Y)) = \mathbb{T}_e \ell.(g \cdot h, \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h^{-1}}(X) + Y) \\
 &= \mathbb{T}_e \ell_{g \cdot h}(\mathbb{T}_e \text{Ad}_{h^{-1}}(X) + Y) = \mathbb{T}_e(\ell_{g \cdot h \cdot h^{-1}} \circ \wp_h)(X) + \mathbb{T}_h \ell_g \circ \mathbb{T}_e \ell_h(Y) \\
 &= \mathbb{T}_e(\wp_h \circ \ell_g)(X) + \mathbb{T}_h \ell_g \circ \mathbb{T}_e \ell_h(Y) = \mathbb{T}_g \wp_h(\mathbb{T}_e \ell_g(X)) + \mathbb{T}_h \ell_g(\mathbb{T}_e \ell_h(Y)) \\
 &\equiv \mathbb{T}_{(g, h)} m(\mathbb{T}_e \ell_g(X), \mathbb{T}_e \ell_h(Y)) \equiv \mathbb{T}_{(g, h)} m(\mathbb{T}_e \ell.(g, X), \mathbb{T}_e \ell.(h, Y)).
 \end{aligned}$$

Warto odnotować na marginesie, że $\mathbb{T}_e \ell.$ jest stycznościowym odpowiednikiem dyfeomorfizmu $\ell. \upharpoonright_{G \times \{e\}} : G \times \{e\} \rightarrow G$. \square

Definicja 2. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. **Pole wektorowe lewoniemiennicze** na grupie Liego G to pole wektorowe $\mathcal{V}_L \in \Gamma(\text{TG})$ o własności

$$\forall_{g \in G} : \ell_{g*} \mathcal{V} = \mathcal{V}.$$

Analogicznie, **pole wektorowe prawoniemiennicze** na G to pole wektorowe $\mathcal{V}_R \in \Gamma(\text{TG})$ o własności

$$\forall_{g \in G} : \wp_{g*} \mathcal{V} = \mathcal{V}.$$

Uwaga 2. Jako że powyższe wzory prowadzą czasami do nieporozumień, wypiszemy drugi z nich w jawnej postaci. Oto więc dla dowolnych $g, h \in G$ zachodzi w ogólności

$$(\ell_{g*} \mathcal{V})(h) \equiv \mathbb{T}_{\ell_g^{-1}(h)} \ell_g(\mathcal{V}(\ell_g^{-1}(h))) = \mathbb{T}_{g^{-1} \cdot h} \ell_g(\mathcal{V}(g^{-1} \cdot h)),$$

przeto warunek lewoniemienniczości przyjmuje postać

$$\mathbb{T}_{g^{-1} \cdot h} \ell_g(\mathcal{V}(g^{-1} \cdot h)) = \mathcal{V}(h).$$

Innymi słowy, przesuując stycznościowo wzgl. lewej translacji ℓ_g na grupie wartość pola wektorowego w dowolnym punkcie otrzymujemy wektor w punkcie poddanym translacji tożsamej z wartością tegoż pola w tym punkcie.

Stwierdzenie 3. Zbiory

$$\mathfrak{X}_L(G) := \{ \mathcal{V} \in \Gamma(\text{TG}) \mid \mathcal{V} \text{ lewoniemiennicze} \},$$

$$\mathfrak{X}_R(G) := \{ \mathcal{V} \in \Gamma(\text{TG}) \mid \mathcal{V} \text{ prawoniemiennicze} \}$$

są podprzestrzeniami \mathbb{R} -liniowymi w $\Gamma(\text{TG})$, a ponadto komutator pól wektorowych ogranicza się do każdego z nich,

$$[\cdot, \cdot]_G(\mathfrak{X}_H(G) \times \mathfrak{X}_H(G)) \subset \mathfrak{X}_H(G), \quad H \in \{L, R\}.$$

Parę

$$(\mathfrak{X}_L(G), [\cdot, \cdot]_G \upharpoonright_{\mathfrak{X}_L(G) \times \mathfrak{X}_L(G)})$$

nazywamy **algebrą pól lewnieziemniczych na G**, a parę

$$(\mathfrak{X}_R(G), [\cdot, \cdot]_G \upharpoonright_{\mathfrak{X}_R(G) \times \mathfrak{X}_R(G)})$$

algebrą pól prawnieziemniczych na G.

Dowód: Pierwsza część tezy wynika wprost z \mathbb{R} -liniowości warunku lewnieziemniczości (wzgl. prawnieziemniczości), a druga – z prostego rachunku (przeprowadzonego dla dowolnego elementu $g \in G$ i dowolnych pól lewnieziemniczych $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in \mathfrak{X}_L(G)$):

$$\ell_{g*}[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_G = [\ell_{g*}\mathcal{V}_1, \ell_{g*}\mathcal{V}_2]_G = [\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_G.$$

Analogiczny rachunek dowodzi prawnieziemniczości komutatora dowolnej pary pól prawnieziemniczych. \square

Uwaga 3. Przywołane powyżej zachowanie komutatora pól wektorowych stanowi szczególny przypadek ogólniejszego mechanizmu, któremu podlegają tzw. **pary pól wektorowych w F-relacji** wyróżnione przez dowolne gładkie odwzorowanie $F : M \rightarrow M$ między rozmaitościami różniczkowalnymi M, N . Przypomnijmy: elementy takiej pary $(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \in \Gamma(TM) \times \Gamma(TN)$ spełniają tożsamość definiującą

$$\forall_{x \in M} : \mathcal{W}(F(x)) = T_x F(\mathcal{V}(x)).$$

Dla każdych dwóch takich par $(\mathcal{V}_A, \mathcal{W}_A)$, $A \in \{1, 2\}$ dowodzimy tożsamości

$$(5) \quad \forall_{x \in M} : [\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2]_{\Gamma(TN)}(F(x)) = T_x F([\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2](x)),$$

wyrażającej prawidłowość: Komutator pierwszych składowych pary pól w F -relacji jest w F -relacji z komutatorem drugich składowych pary. W rozpatrywanym powyżej przypadku para $(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ jest w ℓ_g -relacji dla dowolnego elementu grupy $g \in G$.

Definicja 3. Algebra Liego nad ciałem \mathbb{K} to kolekcja $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto \mathbf{0}_V), \ell_V, [\cdot, \cdot]_V)$ złożona z przestrzeni \mathbb{K} -liniowej $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto \mathbf{0}_V), \ell_V)$ oraz odwzorowania dwu- \mathbb{K} -liniowego skośnie symetrycznego

$$[\cdot, \cdot]_V : V \times V \rightarrow V : (v, w) \mapsto [v, w]_V = -[w, v]_V,$$

zwanego **nawiasem Liego na V**, którego **jakobiator**

$$\text{Jac}_V : V \times V \times V \rightarrow V$$

$$: (X_1, X_2, X_3) \mapsto [[X_1, X_2]_V, X_3]_V + [[X_3, X_1]_V, X_2]_V + [[X_2, X_3]_V, X_1]_V$$

jest tożsamościowo równy zeru. Tożsamość w algebrze wyrażająca znikanie jakobiatora nazywa się **tożsamością Jacobiego**.

Podalgebrą Liego algebry Liego $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto \mathbf{0}_V), \ell_V, [\cdot, \cdot]_V)$ nazwiemy algebrą Liego $((W, +_W \upharpoonright_{W \times W}, P_W \upharpoonright_W, \bullet \mapsto \mathbf{0}_W), \ell_W \upharpoonright_{\mathbb{K} \times W}, [\cdot, \cdot]_W \upharpoonright_{W \times W})$ o nośniku $W \subseteq V$ będącym podprzestrzenią \mathbb{K} -liniową V .

Homomorfizm algebr Liego między algebrami Liego $((V_\alpha, +_\alpha, P_\alpha, \bullet \mapsto \mathbf{0}_\alpha), \ell_\alpha, [\cdot, \cdot]_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ to odwzorowanie \mathbb{R} -liniowe $\chi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ o własności

$$[\cdot, \cdot]_2 \circ (\chi \times \chi) = \chi \circ [\cdot, \cdot]_1.$$

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def. 3 i Stw. 3. Odwzorowanie

$$\text{T.Ad.} : \mathfrak{X}_R(G) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{X}_L(G) : \mathcal{V} \mapsto \text{T.Ad.}(\mathcal{V}(\cdot))$$

jest izomorfizmem przestrzeni pól prawo- i lewoniezmienniczych. Istnieją kanoniczne izomorfizmy przestrzeni \mathbb{R} -liniowych¹

$$H : \mathfrak{g} \equiv \text{Der}_e C^1(G, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{X}_H(G), \quad H \in \{L, R\},$$

o własności

$$(6) \quad L \circ (R)^{-1} \equiv \text{T.Ad.}$$

Indukują one na przestrzeni $\mathfrak{g} \cong \text{T}_e G$ nawias Liego

$$[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} : (X_1, X_2) \longmapsto [L_{X_1}, L_{X_2}]_{\Gamma(\text{TG})}(e).$$

Algebra Liego

$$(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}) \equiv \text{Lie } G$$

(w której zapisie \mathfrak{g} jest traktowana jako przestrzeń \mathbb{R} -liniowa) nosi miano **algebry Liego grupy Liego** G .

Dowód: Dla dowolnego pola prawoniezmienniczego $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}_R(G)$ sprawdzamy lewoniezmienniczość jego obrazu względem (jawnie \mathbb{R} -liniowego i odwracalnego) T.Ad. w bezpośrednim rachunku, prowadzonym dla dowolnych $g, h \in G$ z uwzględnieniem prawoniezmienniczości \mathcal{V} ,

$$\begin{aligned} \ell_{g*}(\text{T.Ad.}(\mathcal{V}(\cdot)))(h) &= \text{T}_{\ell_{g^{-1}(h)}} \ell_g((\text{T.Ad.}(\mathcal{V}(\cdot)))(\ell_{g^{-1}(h)})) \\ &= \text{T}_{g^{-1}h} \ell_g(\text{T}_{g^{-1}h} \text{Ad}_{g^{-1}h}(\mathcal{V}(g^{-1}h))) = \text{T}_{g^{-1}h}(\ell_h \circ \wp_{h^{-1}g})(\mathcal{V}(g^{-1}h)) \\ &= \text{T}_e \ell_h \circ \text{T}_{g^{-1}h} \wp_{h^{-1}g}(\mathcal{V}(g^{-1}h)) = \text{T}_e \ell_h(\mathcal{V}(e)) \equiv \text{T}_e \ell_h \circ \text{T}_h \wp_{h^{-1}}(\mathcal{V}(h)) \\ &\equiv (\text{T.Ad.}(\mathcal{V}(\cdot)))(h). \end{aligned}$$

Poszukiwania izomorfizmu L zaczniemy od zauważenia, że dowolne pole lewoniezmiennicze $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}_L(G)$ spełnia tożsamość

$$\mathcal{V}(g) = (\ell_{g*} \mathcal{V})(g) \equiv \text{T}_{\ell_{g^{-1}(g)}} \ell_g(\mathcal{V}(\ell_{g^{-1}(g)})) = \text{T}_e \ell_g(\mathcal{V}(e)) \equiv \mathcal{V}(e) \circ \ell_g^*,$$

gdzie ℓ_g^* , $g \in G$ jest cofnięciem (funkcji), $\mathcal{V}(e)$ zaś jest różniczkowaniem algebry funkcji na grupie w jej elemencie neutralnym. Jako że $\mathcal{V}(e) \in \mathfrak{g}$, powyższa obserwacja podpowiada wprost definicję poszukiwanego izomorfizmu. Określmy odwzorowanie, jawnie \mathbb{R} -liniowe,

$$L : \mathfrak{g} \longrightarrow \Gamma(\text{TG}) : X \longmapsto X \circ \ell_e^* \equiv L_X,$$

Bez trudu sprawdzamy lewoniezmienniczość pól w jego obrazie,

$$\begin{aligned} \ell_{g*} L_X &= \text{T}_{\ell_{g^{-1}(\cdot)}} \ell_g(L_X \circ \ell_{g^{-1}(\cdot)}) \equiv (L_X \circ \ell_{g^{-1}(\cdot)}) \circ \ell_g^* \equiv X \circ \ell_{\ell_{g^{-1}(\cdot)}}^* \circ \ell_g^* \\ &= X \circ (\ell_g \circ \ell_{\ell_{g^{-1}(\cdot)}})^* = X \circ \ell_{g \cdot \ell_{g^{-1}(\cdot)}}^* = X \circ \ell_e^* \equiv L_X, \quad g \in G. \end{aligned}$$

Kierując się wcześniejszym rachunkiem postulujemy odwrotność L w postaci, także jawnie \mathbb{R} -liniowej,

$$\text{ev}_e : \mathfrak{X}_L(G) \longrightarrow \mathfrak{g} : \mathcal{V} \longmapsto \mathcal{V}(e),$$

oto bowiem zachodzi

$$\mathcal{V} = \text{ev}_e(\mathcal{V}) \circ \ell_e^* \equiv L_{\text{ev}_e(\mathcal{V})}.$$

Z drugiej strony obliczamy

$$\text{ev}_e(L_X) = X \circ \ell_e^* = X,$$

więc w istocie

$$\text{ev}_e = (L)^{-1}.$$

¹ $\text{Der}_e C^1(G, \mathbb{R}) = \{ V \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(C^1(G, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \mid \forall_{f, g \in C^1(G, \mathbb{R})} : V(f \cdot C^1(G, \mathbb{R}) g) = V(f) \cdot g(e) + f(e) \cdot V(g) \}$ jest przestrzenią różniczkowań algebry funkcji klasy C^1 w e .

Zastąpiwszy w powyższym rozumowaniu działanie lewe regularne ℓ . jego prawym odpowiednikiem \wp ., możemy powtórzyć to rozumowanie w odniesieniu do pól prawoniezmiennicznych, co daje nam izomorfizm

$$R : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}_R(\mathbf{G}) : X \longmapsto X \circ \wp^* \equiv R_X ,$$

o odwrotności – jak poprzednio –

$$(R.)^{-1} = \text{ev}_e .$$

Tożsamość (6) jest w oczywisty sposób spełniona, oto bowiem dla dowolnego wektora $X \in \mathfrak{g}$ zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned} \text{T.Ad.} \circ R.(X) &= \text{T.Ad.}(X \circ \wp^*) = X \circ \wp^* \circ \ell^* \circ \wp_{\text{Inv}(\cdot)}^* = X \circ \wp^* \circ \wp_{\text{Inv}(\cdot)}^* \circ \ell^* = X \circ \wp_{\text{Inv}(\cdot)}^* \circ \ell^* \\ &= X \circ \wp_e^* \circ \ell^* = X \circ \ell^* \equiv L.(X) . \end{aligned}$$

Pozostaje już tylko przekonać się, że jakobiator jawnie skośnie symetrycznego i dwu- \mathbb{R} -liniowego odwzorowania $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}$ znika tożsamościowo. Czynimy to w bezpośrednim rachunku, w którym wykorzystujemy prostą tożsamość (w której, tak jak w tych po niej następujących, opuszczamy znacznik $\Gamma(\text{TG})$ na komutatorze pól wektorowych)

$$L_{[X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}} \equiv L_{\text{ev}_e([L_{X_1}, L_{X_2}])} = [L_{X_1}, L_{X_2}] .$$

Oto więc wyznaczamy

$$\begin{aligned} \text{Jac}_{\mathfrak{g}}(X_1, X_2, X_3) &\equiv [[X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}, X_3]_{\mathfrak{g}} + [[X_3, X_1]_{\mathfrak{g}}, X_2]_{\mathfrak{g}} + [[X_2, X_3]_{\mathfrak{g}}, X_1]_{\mathfrak{g}} \\ &= [\text{ev}_e([L_{X_1}, L_{X_2}]), X_3]_{\mathfrak{g}} + [\text{ev}_e([L_{X_3}, L_{X_1}]), X_2]_{\mathfrak{g}} + [\text{ev}_e([L_{X_2}, L_{X_3}]), X_1]_{\mathfrak{g}} \\ &= [L_{\text{ev}_e([L_{X_1}, L_{X_2}])}, L_{X_3}](e) + [L_{\text{ev}_e([L_{X_3}, L_{X_1}])}, L_{X_2}](e) + [L_{\text{ev}_e([L_{X_2}, L_{X_3}])}, L_{X_1}](e) \\ &= [[L_{X_1}, L_{X_2}], L_{X_3}](e) + [[L_{X_3}, L_{X_1}], L_{X_2}](e) + [[L_{X_2}, L_{X_3}], L_{X_1}](e) \\ &\equiv \text{Jac}_{\Gamma(\text{TG})}(L_{X_1}, L_{X_2}, L_{X_3})(e) = 0_{\mathfrak{g}} , \end{aligned}$$

co kończy dowód stwierdzenia. □

Definicja 4. Przyjmijmy zapis Stw. 4 i jego dowodu, przy czym założymy dodatkowo, że $N := \dim \mathbf{G} < \infty$. Wybierzmy w przestrzeni wektorowej \mathfrak{g} dowolną bazę $\mathcal{T} := \{t_A\}_{A \in \overline{1, N}}$, a wówczas **stałe struktury algebry Liego** $\text{Lie } \mathbf{G}$ w bazie \mathcal{T} to liczby $f_{ABC} = -f_{BAC} \in \mathbb{R}$, $A, B, C \in \overline{1, N}$ zdefiniowane przez **równania struktury algebry Liego** $\text{Lie } \mathbf{G}$

$$[t_A, t_B] = f_{ABC} \triangleright t_C , \quad A, B \in \overline{1, N} .$$

W konsekwencji znikania jakobiatora na $\text{Lie } \mathbf{G}$ spełniają one tożsamościowo dwuliniowe relacje

$$f_{ABD} f_{DCE} + f_{CAD} f_{DBE} + f_{BCD} f_{DAE} = 0 , \quad A, B, C, E \in \overline{1, N} ,$$

zwane **tożsamościami Jacobiego dla stałych struktury** $\text{Lie } \mathbf{G}$. Elementy bazy $C^\infty(\mathbf{G}, \mathbb{R})$ -modułu $\Gamma(\text{TG})$ będącej L -wzgl. R -obrazem bazy \mathcal{T} będziemy oznaczać symbolem

$$L_A(\cdot) \equiv \text{T}_e \ell.(t_A)$$

wzgl.

$$R_A(\cdot) \equiv \text{T}_e \wp.(t_A) .$$

Twierdzenie 1 (Funktorialność Lie). Przyjmijmy zapis Def. 3 i Stw. 4. Przyporządkowanie grupom Liego ich algebr Liego rozszerza się kanonicznie do funktora

$$\text{Lie} : \mathbf{LieGrp} \longrightarrow \mathbf{LieAlg}_{\mathbb{R}} .$$

o składowej morfizmowej

$$\begin{aligned} \text{Lie} & : \text{Mor } \mathbf{LieGrp} \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{LieAlg}_{\mathbb{R}} \\ & : (G_1 \xrightarrow{\chi} G_2) \longmapsto (\text{Lie } G_1 \xrightarrow{\text{T}_{e_1}\chi} \text{Lie } G_2). \end{aligned}$$

Dowód: Odwzorowanie $\text{T}_{e_1}\chi$ jest dobrze określone, pozostaje zatem jedynie wykazać, że jest ono homomorfizmem algebr Liego. Punktem wyjścia będzie dla nas następująca tożsamość funkcjonalna, słuszna dla dowolnego elementu $g_1 \in G$:

$$\ell_{\chi(g_1)} \circ \chi = \chi \circ \ell_{g_1}.$$

Na jej podstawie obliczamy, dla dowolnych: funkcji $f \in C^1(G_2; \mathbb{R})$ oraz wektora $X \in \mathfrak{g}_1$,

$$\begin{aligned} \text{T}_{g_1}\chi(L_X(g_1))(f) & \equiv L_X(g_1) \circ \chi^*(f) \equiv X \circ \ell_{g_1}^* \circ \chi^*(f) = X \circ (\chi \circ \ell_{g_1})^*(f) \\ & = X \circ (\ell_{\chi(g_1)} \circ \chi)^*(f) = (X \circ \chi^*) \circ \ell_{\chi(g_1)}^*(f) \\ & \equiv \text{T}_{e_1}\chi(X) \circ \ell_{\chi(g_1)}^*(f) \equiv L_{\text{T}_{e_1}\chi(X)}(\chi(g_1))(f), \end{aligned}$$

co pozwala skonstatować, że

$$\text{T}_*\chi(L_X(\cdot)) = L_{\text{T}_{e_1}\chi(X)}(\chi(\cdot)),$$

czyli że $(L_X, L_{\text{T}_{e_1}\chi(X)})$ jest parą pól w χ -relacji w rozumieniu Uwagi 3, a zatem w świetle wypisanego w niej Równ. (5) dla dowolnych wektorów $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_1$ zachodzi pożądana tożsamość

$$\begin{aligned} [\text{T}_{e_1}\chi(X_1), \text{T}_{e_1}\chi(X_2)]_{\mathfrak{g}_2} & \equiv [L_{\text{T}_{e_1}\chi(X_1)}, L_{\text{T}_{e_1}\chi(X_2)}]_{G_2}(e_2) = [L_{\text{T}_{e_1}\chi(X_1)}, L_{\text{T}_{e_1}\chi(X_2)}]_{G_2}(\chi(e_1)) \\ & = \text{T}_{e_1}\chi([L_{X_1}, L_{X_2}]_{G_1}(e_1)) \equiv \text{T}_{e_1}\chi([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}_1}). \end{aligned}$$

□

Stwierdzenie 5. Pola lewo- i prawoniezmiennicze na dowolnej grupie Liego są zupełne.

Dowód: Rozważmy gładką krzywą całkową $\gamma :]a, b[\longrightarrow G$ przez $\gamma(t_0) = g_0 \in G$ w $t_0 \in]a, b[$ pola lewoniezmienniczego $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}_L(G)$, tj. rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$D\gamma(t) = \mathcal{V}(\gamma(t)), \quad t \in]a, b[, \quad \gamma(t_0) = g_0.$$

Wyberzmy (dowolnie) czasy pośrednie t_1, t_2 spełniające warunki $a < t_1 < t_2 < b$ i oznaczmy $\Delta t := t_2 - t_1 > 0$. Krzywą γ będziemy teraz dowolnie przedłużać wykorzystując przechodniość działania lewego regularnego na G , która pozwala nam wskazać $g_{21} := \gamma(t_2) \cdot \gamma(t_1)^{-1}$. Zdefiniujmy zatem ścieżkę

$$\gamma_{\Delta t} :]a + \Delta t, b + \Delta t[\longrightarrow G : t \longmapsto \ell_{g_{21}} \circ \gamma(t - \Delta t).$$

Jest ona rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$D\gamma_{\Delta t}(t) = \text{T}_{\gamma(t-\Delta t)}\ell_{g_{21}} \circ D\gamma(t - \Delta t), \quad t \in]a + \Delta t, b + \Delta t[, \quad \gamma_{\Delta t}(t_2) = \gamma(t_2),$$

a ponieważ $t - \Delta t \in]a, b[$ dla dowolnego czasu $t \in]a + \Delta t, b + \Delta t[$, przeto – wobec lewoniezmienniczości pola \mathcal{V} –

$$D\gamma_{\Delta t}(t) = \text{T}_{\gamma(t-\Delta t)}\ell_{g_{21}} \circ \mathcal{V}(\gamma(t - \Delta t)) = \mathcal{V}(\ell_{g_{21}} \circ \gamma(t - \Delta t)) \equiv \mathcal{V}(\gamma_{\Delta t}(t)).$$

Widzimy więc, że także $\gamma_{\Delta t}$ jest gładką krzywą całkową pola \mathcal{V} , stąd też – na mocy Twierdzenia o Jednoznaczności Rozwiązania Zagadnienia Cauchy'ego w dziedzinie określoności – na niepustym przedziale $\Delta I :=]a + \Delta t, b[\ni t_2$ zachodzi równość

$$\gamma_{\Delta t} \upharpoonright_{\Delta I} = \gamma \upharpoonright_{\Delta I}$$

i otrzymujemy gładkie przedłużenie $\tilde{\gamma}$ krzywej γ do $]a, b + \Delta t[$ w postaci

$$\tilde{\gamma} :]a, b + \Delta t[\longrightarrow G : \begin{cases} \gamma(t) & \text{dla } t \in]a, b[\\ \gamma_{\Delta t}(t) & \text{dla } t \in]a + \Delta t, b + \Delta t[\end{cases} .$$

Dokonując iteracji powyższej procedury, możemy gładko przedłużyć wyjściową krzywą w sposób nieograniczony od góry, tj. do przedziału $]a, \infty[$. Podobny argument pokazuje, że jest ona także przedłużalna wstecz, tj. do $] - \infty, b[$, ostatecznie więc stwierdzamy, że γ przedłuża się gładko do \mathbb{R} , co wobec dowolności g_0 (wszak pole \mathcal{V} jest określone na całej rozmaitości G) daje nam postulowaną tezę dla pól lewoniezmiennicznych. Dowód w przypadku pól prawoniezmiennicznych przebiega w pełni analogicznie. \square

Stwierdzenie 6. Przyjmijmy zapis Stw. 4 i niechaj $X \in \mathfrak{g}$. Jednoparametrowe grupy dyfeomorfizmów grupy Liego G stowarzyszone z polami: lewoniezmiennicznym L_X ,

$$\mathcal{L}_{\cdot 1}^X(\cdot 2) \equiv \Phi_{L_X}(\cdot 1, \cdot 2) : \mathbb{R} \times G \longrightarrow G : (t, g) \longmapsto \Phi_{L_X}(t, g) \equiv \mathcal{L}_t^X(g),$$

oraz prawoniezmiennicznym R_X ,

$$\mathcal{R}_{\cdot 1}^X(\cdot 2) \equiv \Phi_{R_X}(\cdot 1, \cdot 2) : \mathbb{R} \times G \longrightarrow G : (t, g) \longmapsto \Phi_{R_X}(t, g) \equiv \mathcal{R}_t^X(g),$$

przyjmując postać, odpowiednio,

$$(7) \quad \mathcal{L}_t^X = \varrho_{\mathcal{L}_t^X(e)}, \quad \mathcal{R}_t^X = \ell_{\mathcal{R}_t^X(e)}.$$

Dowód: To, że potoki zupełnych (i globalnie gładkich) pól lewo- i prawoniezmiennicznych zadają jednoparametrowe grupy dyfeomorfizmów G , wynika wprost z wiedzy zgromadzonej w trakcie I semestru. Pozostaje sprawdzić słuszność tożsamości (7). Obliczamy, dla dowolnego $g \in G$,

$$\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \mathcal{L}_t^X(g) = L_X(g) = \mathbb{T}_e \ell_g(L_X(e)) \equiv \mathbb{T}_e \ell_g \left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \mathcal{L}_t^X(e) \right) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \ell_g \circ \mathcal{L}_t^X(e) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\varrho_{\mathcal{L}_t^X(e)}(g)),$$

gdzie w ostatnim kroku skorzystaliśmy z Reguły Łańcuchowej dla pochodnej funkcji złożonej. Ścieżki $\mathcal{L}_t^X(g)$ i $\ell_g \circ \mathcal{L}_t^X(e)$, przecinające się w chwili $t = 0$,

$$\ell_g \circ \mathcal{L}_0^X(e) = \ell_g(e) = g \cdot e = g \equiv \mathcal{L}_0^X(g),$$

są zatem współstyczne w tejże chwili, a wektorem stycznym jest wartość pola lewoniezmiennicznego L_X w g . Obie też są krzywymi całkowitymi pola L_X , oto bowiem dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ zachodzi – wprost z definicji –

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_t^X(g) = L_X \circ \mathcal{L}_t^X(g),$$

a także – wobec lewoniezmienniczności L_X –

$$\frac{d}{dt} \ell_g \circ \mathcal{L}_t^X(e) = \mathbb{T}_{\mathcal{L}_t^X(e)} \ell_g(L_X \circ \mathcal{L}_t^X(e)) = L_X \circ \ell_g \circ \mathcal{L}_t^X(e).$$

Na mocy Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego ścieżki te są tożsame. Analogicznie dowodzimy drugiej równości w Równ. (7). \square

W dalszej części zajmiemy się zatem wyróżnionymi ścieżkami $\mathcal{L}^X(e)$ oraz $\mathcal{R}^X(e)$.

Stwierdzenie 7. Przyjmijmy zapis Stw. 6. Gładkie ścieżki

$$\lambda_X \equiv \mathcal{L}^X(e) : \mathbb{R} \longrightarrow G, \quad \rho_X \equiv \mathcal{R}^X(e) : \mathbb{R} \longrightarrow G$$

spełniają tożsamości

$$\forall t \in \mathbb{R} : \left(\lambda_{t \triangleright X}(1) = \lambda_X(t) \quad \wedge \quad \rho_{t \triangleright X}(1) = \rho_X(t) \right).$$

Dowód: W świetle Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego krzywa λ_X jest jednoznacznie określona przez warunki

$$\lambda_X(0) = e \quad \wedge \quad \forall t \in \mathbb{R} : \frac{d}{dt} \lambda_X(t) = L_X \circ \lambda_X(t) \equiv \mathbb{T}_e \ell_{\lambda_X(t)}(X).$$

Z drugiego z nich wyprowadzamy tożsamość

$$\forall_{s,t \in \mathbb{R}} : \mathbb{T}_e \ell_{\lambda_X(st)}(X) = \frac{d}{d(st)} \lambda_X(st) = \frac{1}{s} \cdot \frac{d}{dt} \lambda_X(st),$$

czyli też równoważną jej (wobec \mathbb{R} -liniowości $\mathbb{T}_e \ell_{\lambda_X(st)}$)

$$\forall_{s,t \in \mathbb{R}} : \frac{d}{dt} \lambda_X(st) = \mathbb{T}_e \ell_{\lambda_X(st)}(s \triangleright X),$$

Zdefiniujemy rodzinę ścieżek

$$\gamma_s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{G} : t \longmapsto \lambda_X(st), \quad s \in \mathbb{R},$$

a wówczas powyższy warunek możemy zapisać w postaci

$$\forall_{s,t \in \mathbb{R}} : \frac{d}{dt} \gamma_s(t) = \mathbb{T}_e \ell_{\gamma_s(t)}(s \triangleright X) \equiv L_{s \triangleright X}(\gamma_s(t)),$$

przy czym też

$$\gamma_s(0) = e = \lambda_{s \triangleright X}(0),$$

stwierdzamy zatem równość

$$\forall_{s \in \mathbb{R}} : \gamma_s = \lambda_{s \triangleright X},$$

skąd ostatecznie wniosek

$$\lambda_{s \triangleright X}(t) = \gamma_s(t) \equiv \lambda_X(st),$$

czyli także – w szczególności

$$\lambda_{s \triangleright X}(1) = \lambda_X(s).$$

Dowód dla ścieżek wykreślanych przez pola prawoniezmiennicze przebiega w pełni analogicznie. \square

Stwierdzenie 8. Przyjmijmy zapis Stw. 7. Gładkie ścieżki λ_X i ρ_X są homomorfizmami addytywnej grupy Liego \mathbb{R} (z naturalną strukturą różniczkową) w \mathbf{G} , spełniającymi warunek początkowy

$$\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_X(t) = X = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \rho_X(t).$$

I odwrotnie, każdy homomorfizm grup Liego

$$\chi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{G}$$

spełniający warunek początkowy

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \chi(t) = X \in \mathfrak{g}$$

jest postaci

$$\lambda_X = \chi = \rho_X.$$

W szczególności więc ścieżki λ_X i ρ_X są tożsame.

Dowód: Jedynym, co wymaga sprawdzenia w przypadku ścieżek $\gamma \in \{\lambda_X, \rho_X\}$, jest warunek homomorfizmu

$$\forall_{s,t \in \mathbb{R}} : \gamma(s+t) = \gamma(s) \cdot \gamma(t).$$

Zacniemy od $\gamma = \lambda_X$. Ażeby udowodnić powyższą tożsamość, musimy przekonać się o tożsamości ścieżek λ_X i $\gamma_s := \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \circ \lambda_X(s + \cdot)$ przy ustalonym (dowolnie) s . W tym celu obliczamy – korzystając przy tym wprost z definicji ścieżki γ oraz z lewoniezmienniczości L_X –

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \gamma_s(t) &= \mathbb{T}_{\lambda_X(s+t)} \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \left(\frac{d}{dt} \lambda_X(t+s) \right) \equiv \mathbb{T}_{\lambda_X(s+t)} \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \left(\frac{d}{d(s+t)} \lambda_X(s+t) \right) \\ &= \mathbb{T}_{\lambda_X(s+t)} \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \left(L_X(\lambda_X(s+t)) \right) = L_X(\ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \circ \lambda_X(s+t)) \\ &\equiv L_X(\gamma_s(t)), \end{aligned}$$

skąd wniosek, że ścieżka γ_s jest krzywą całkową pola L_X tak jak λ_X , a nadto

$$\gamma_s(0) = e = \lambda_X(0),$$

zatem są to rozwiązania zagadnienia początkowego (dla tego samego pola wektorowego) przy tych samych warunkach początkowych, co w świetle Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego przesądza o ich postulowanej tożsamości. W przypadku $\gamma = \rho_X$ powtarzamy rozumowanie dla $\tilde{\gamma}_s := \rho_{\rho_X(s)^{-1}} \circ \rho_X(s + \cdot)$.

Niechaj teraz χ będzie homomorfizmem spełniającym warunek początkowy (8). Różniczkując relację funkcjonalną wyrażającą homomorficzność χ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\chi(s) &\equiv \frac{d}{d\xi}\upharpoonright_{\xi=s}\chi(\xi) = \frac{d}{dt}\upharpoonright_{t=0}\chi(s+t) = \frac{d}{dt}\upharpoonright_{t=0}\ell_{\chi(s)} \circ \chi(t) \\ &= T_{\chi(0)}\ell_{\chi(s)}\left(\frac{d}{dt}\upharpoonright_{t=0}\chi(t)\right) = T_e\ell_{\chi(s)}\left(\frac{d}{dt}\upharpoonright_{t=0}\chi(t)\right) \\ &\equiv L_{\frac{d}{dt}\upharpoonright_{t=0}\chi(t)}(\chi(s)), \end{aligned}$$

stwierdzamy, że χ jest krzywą całkową przez $e = \chi(0)$ (równość ta, użyta w powyższym rachunku, jest konsekwencją homomorficzności χ) lewniezmienniczego pola wektorowego będącego obrazem wektora $\frac{d}{dt}\upharpoonright_{t=0}\chi(t)$ względem izomorfizmu L ze Stw. 4. Powtarzając to rozumowanie w odniesieniu do relacji

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\chi(t) &\equiv \frac{d}{d\xi}\upharpoonright_{\xi=t}\chi(\xi) = \frac{d}{ds}\upharpoonright_{s=0}\chi(s+t) = \frac{d}{ds}\upharpoonright_{s=0}\rho_{\chi(t)} \circ \chi(s) \\ &= T_{\chi(0)}\rho_{\chi(t)}\left(\frac{d}{ds}\upharpoonright_{s=0}\chi(s)\right) = T_e\rho_{\chi(t)}\left(\frac{d}{ds}\upharpoonright_{s=0}\chi(s)\right) \\ &\equiv R_{\frac{d}{ds}\upharpoonright_{s=0}\chi(s)}(\chi(t)), \end{aligned}$$

uzyskujemy ostatnią brakującą część tezy. □

Stwierdzenie 9. Przyjmijmy zapis Stw. 7. Odwzorowanie

$$\lambda : \mathfrak{g} \times \mathbb{R} \longrightarrow G : (X, t) \longmapsto \lambda_X(t)$$

jest gładkie.

Dowód: Gładkość zależności λ od drugiego argumentu wynika wprost z Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego, oto bowiem dla ustalonego X ścieżka λ_X jest krzywą całkową gładkiego pola L_X . Pozostaje zatem wykazać gładkość zależności λ od pierwszego argumentu. W tym celu przedstawimy λ_X jako krzywą całkową gładkiego pola wektorowego na $\mathfrak{g} \times G$ o danych początkowych (X, e) , co pozwoli nam wywnioskować postulowaną gładkość wprost z tegoż Twierdzenia. Będziemy przy tym – jak zazwyczaj – utożsamiać $\text{Der}_e C^1(G, \mathbb{R})$ z $T_e G$. Rozważmy zatem pole wektorowe (jawnie gładkie)

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &: \mathfrak{g} \times G \longrightarrow T(\mathfrak{g} \times G) \\ &: (X, g) \longmapsto (0_{\mathfrak{g}}, T_e\ell_g(X)) \equiv (0_{\mathfrak{g}}, L_X(g)) \in \mathfrak{g} \oplus T_e\ell_g(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \oplus T_g G \\ &\equiv T_{(X, g)}(\mathfrak{g} \times G). \end{aligned}$$

Jego potok $\Phi_{\mathcal{V}}$ spełnia równanie

$$\frac{d}{dt}\Phi_{\mathcal{V}}(t; t_0, (X_0, g_0)) = \mathcal{V}(\Phi_{\mathcal{V}}(t; t_0, (X_0, g_0))),$$

w którego zapisie (X_0, g_0) jest warunkiem początkowym (w czasie t_0),

$$\Phi_{\mathcal{V}}(t_0; t_0, (X_0, g_0)) = (X_0, g_0).$$

Ustalmy warunek początkowy $(X_0, g_0) := (X, e)$ dla $t_0 := 0$. Rzutując powyższe równanie na drugą składową (tj. na G), w której odbywa się nietrywialna ewolucja, otrzymujemy równość

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e)) &= \text{pr}_2 \circ \frac{d}{dt} \Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e)) = \text{pr}_2 \circ \mathcal{V}(\Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e))) \\ &= L_{\text{pr}_1 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e))}(\text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e))) \\ &= L_X(\text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e))), \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika wprost z konstrukcji \mathcal{V} (w swej pierwszej składowej warunek początkowy pozostaje niezmienny wobec trywialności tejże składowej pola \mathcal{V}). Otrzymana równość pozwala zidentyfikować $\text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(\cdot; 0, (X, e))$ jako (jedyną) krzywą całkową pola L_X wychodzącą z punktu $g_0 = e$, czyli

$$\text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(\cdot; 0, (X, e)) = \lambda_X(\cdot),$$

co stanowi właśnie zapowiedzianą wcześniej reinterpretację tejże krzywej całkowej pola L_X . \square

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Stw. 9. Odwzorowanie

$$\exp \equiv \exp^G := \lambda.(1) : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

określamy mianem **odwzorowania eksponencjalnego na G** .

Stwierdzenie 10. Przyjmijmy zapis Def. 5. Istnieją otoczenia otwarte: $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ wektora $0_{\mathfrak{g}}$ w \mathfrak{g} oraz \mathcal{O}_e elementu e w G takie, że odwzorowanie $\exp \upharpoonright_{\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}}$ jest dyfeomorfizmem klasy C^∞ na \mathcal{O}_e .

Dowód: Obliczymy odwzorowanie styczne do \exp w $0_{\mathfrak{g}}$ na dowolnym wektorze $X \in \mathfrak{g} \equiv T_{0_{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g}$, odwołując się po drodze do Stw. 7. Znajdujemy

$$T_{0_{\mathfrak{g}}}\exp(X) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(0_{\mathfrak{g}} + t \triangleright X) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_{t \triangleright X}(1) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_X(t) = X,$$

czyli

$$T_{0_{\mathfrak{g}}}\exp = \text{id}_{\mathfrak{g}}.$$

Teza dowodzonego stwierdzenia wynika teraz wprost z Twierdzenia o Lokalnej Odwracalności Odwzorowań. \square

Stwierdzenie 11 (Naturalność odwzorowania eksponencjalnego). Przyjmijmy zapis Def. 5 oraz Tw. 1 i niechaj $\chi : G_1 \longrightarrow G_2$ będzie homomorfizmem grup Liego między grupami Liego G_α , $\alpha \in \{1, 2\}$. Poniższy diagram jest przemienny

$$\begin{array}{ccc} \text{Lie } G_1 & \xrightarrow{\text{Lie } \chi} & \text{Lie } G_2 \\ \exp^{G_1} \downarrow & & \downarrow \exp^{G_2} \\ G_1 & \xrightarrow{\chi} & G_2 \end{array} .$$

Dowód: Rozważmy ścieżkę gładką

$$\gamma := \chi \circ \lambda_X : \mathbb{R} \longrightarrow G_2$$

przez

$$\gamma(0) \equiv \chi \circ \lambda_X(0) = \chi(e_1) = e_2.$$

Na podstawie bezpośredniego rachunku (wykorzystującego definicję ścieżki λ_X oraz lewniezmienniczość L_X , jak również Regułę Łańcuchową)

$$\frac{d}{dt} \gamma(t) = T_{\lambda_X(t)} \chi \left(\frac{d}{dt} \lambda_X(t) \right) = T_{\lambda_X(t)} \chi \left(L_X(\lambda_X(t)) \right) = T_{\lambda_X(t)} \chi \circ T_{e_1} \ell_{\lambda_X(t)}^1(X)$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{T}_{e_1}(\chi \circ \ell_{\lambda_X(t)}^1)(X) = \mathbb{T}_{e_1}(\ell_{\chi \circ \lambda_X(t)}^2 \circ \chi)(X) = \mathbb{T}_{\chi(e_1)} \ell_{\chi \circ \lambda_X(t)}^2(\mathbb{T}_{e_1} \chi(X)) \\
 &= \mathbb{T}_{e_2} \ell_{\chi \circ \lambda_X(t)}^2(\mathbb{T}_{e_1} \chi(X)) \equiv \mathbb{T}_{e_2} \ell_{\gamma(t)}^2(\text{Lie } \chi(X)) \equiv L_{\text{Lie } \chi(X)}(\gamma(t))
 \end{aligned}$$

i wreszcie

$$\gamma(0) = e_2 \equiv \lambda_{\text{Lie } \chi(X)}(0),$$

konstatujemy na gruncie Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego, że dla γ jest spełniona tożsamość

$$\chi \circ \lambda_X \equiv \gamma = \lambda_{\text{Lie } \chi(X)},$$

co w chwili $t = 1$ daje pożądaną równość

$$\chi \circ \exp^{\text{G}^1}(X) \equiv \chi \circ \lambda_X(1) = \lambda_{\text{Lie } \chi(X)}(1) \equiv \exp^{\text{G}^2} \circ \text{Lie } \chi(X).$$

□

Stwierdzenie 12. Przyjmijmy zapis Def. 4 i niech $((\mathbb{T}_e \text{Ad})_A^B)_{A, B \in \overline{1, \dim \text{G}}}$ o będzie macierzą o wartościach w $C^\infty(\text{G}, \mathbb{R})$ określoną równaniami

$$\mathbb{T}_e \text{Ad} \cdot (t_A) =: (\mathbb{T}_e \text{Ad})_A^B \triangleright t_B, \quad A \in \overline{1, \dim \text{G}}.$$

Pola wektorowe L_A i R_A , $A \in \overline{1, \dim \text{G}}$ spełniają relacje (zapisane dla dowolnych $A, B \in \overline{1, \dim \text{G}}$)

$$[L_A, L_B] = f_{ABC} \triangleright L_C, \quad [R_A, R_B] = -f_{ABC} \triangleright R_C, \quad [L_A, R_B] = 0.$$

Ponadto prawdziwe są tożsamości:

$$(9) \quad L_A(\cdot) = (\mathbb{T}_e \text{Ad})_A^B \triangleright R_B(\cdot)$$

oraz

$$\text{Inv}_* L_A = -R_A, \quad \text{Inv}_* R_A = -L_A,$$

a także – dla dowolnego elementu $g \in \text{G}$ –

$$\wp_{g*} L_A = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^B \triangleright L_B, \quad \ell_{g*} R_A = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright R_B$$

Dowód: Pierwsza równość wynika wprost z definicji komutatora w Lie G , oto bowiem wobec lewoniezmienniczości komutatora pól lewoniezmiennicznych zachodzi

$$\begin{aligned}
 f_{ABC} L_C(\cdot) &= f_{ABC} \mathbb{T}_e \ell \cdot (L_C(e)) \equiv f_{ABC} \mathbb{T}_e \ell \cdot (t_C) = \mathbb{T}_e \ell \cdot ([t_A, t_B]) \\
 &\equiv \mathbb{T}_e \ell \cdot ([L_A, L_B](e)) = [L_A, L_B](\cdot).
 \end{aligned}$$

Komutator bazowego pola lewoniezmiennicznego z takimż polem prawoniezmiennicznym obliczamy na dowolnej funkcji $f \in C^1(\text{G}, \mathbb{R})$ w dowolnym punkcie $g \in \text{G}$, korzystając przy tym ze Stw. 6,

$$\begin{aligned}
 [L_A, R_B](f)(g) &\equiv L_A(R_B(f))(g) - R_B(L_A(f))(g) \\
 &\equiv L_A\left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{R}_t^{tB}\right)(g) - R_B\left(\frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} f \circ \mathcal{L}_s^{tA}\right)(g) \\
 &\equiv \frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} \left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{R}_t^{tB}\right) \circ \mathcal{L}_s^{tA}(g) - \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \left(\frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} f \circ \mathcal{L}_s^{tA}\right) \circ \mathcal{R}_t^{tB}(g) \\
 &= \frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f(\mathcal{R}_t^{tB}(e) \cdot (g \cdot \mathcal{L}_s^{tA}(e))) - \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \left(\frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} f((\mathcal{R}_t^{tB}(e) \cdot g) \cdot \mathcal{L}_s^{tA}(e))\right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Wreszcie też wyznaczamy wprost, w dowolnym punkcie $g \in \text{G}$,

$$L_A(g) = \mathbb{T}_e \ell_g(L_A(e)) \equiv \mathbb{T}_e \ell_g(t_A) = \mathbb{T}_e \wp_g \circ \mathbb{T}_g \wp_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_e \ell_g(t_A)$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{T}_e \wp_g \circ \mathbb{T}_e \text{Ad}_g(t_A) \equiv (\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright \mathbb{T}_e \wp_g(t_B) \\
 &\equiv (\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright \mathbb{T}_e \wp_g(R_B(e)) = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright R_B(g).
 \end{aligned}$$

Jest też – w świetle Uwagi 1, a dla dowolnego $g \in G$ –

$$\begin{aligned}
 \text{Inv}_* L_A(g) &\equiv \mathbb{T}_{g^{-1}} \text{Inv}(L_A(g^{-1})) = \mathbb{T}_{g^{-1}} \text{Inv} \circ \mathbb{T}_e \ell_{g^{-1}}(t_A) \\
 &= -\mathbb{T}_e \wp_g \circ \mathbb{T}_{g^{-1}} \ell_g \circ \mathbb{T}_e \ell_{g^{-1}}(t_A) = -\mathbb{T}_e \wp_g(t_A) \equiv -R_A(g),
 \end{aligned}$$

a stąd już wprost wynika

$$\text{Inv}_* R_A = -\text{Inv}_* \circ \text{Inv}_* L_A = -(\text{Inv} \circ \text{Inv})_* L_A = -L_A.$$

Pierwsza z tych tożsamości pozwala łatwo udowodnić drugą równość wypisaną w tezie stwierdzenia w odwołaniu do podstawowej własności komutatora pól wektorowych, jaką jest jego niezmienniczość względem pchnięć, oraz zweryfikowanej wcześniej równości pierwszej,

$$-f_{ABC} R_C = f_{ABC} \text{Inv}_* L_C = \text{Inv}_*([L_A, L_B]) = [\text{Inv}_* L_A, \text{Inv}_* L_B] \equiv [R_A, R_B].$$

Sprawdzamy także – dla dowolnego $h \in G$ –

$$\begin{aligned}
 (\wp_g * L_A)(h) &\equiv \mathbb{T}_{\wp_{g^{-1}}(h)} \wp_g(L_A \circ \wp_{g^{-1}}(h)) = \mathbb{T}_{hg^{-1}} \wp_g \circ \mathbb{T}_e \ell_{hg^{-1}}(t_A) \\
 &= \mathbb{T}_e \ell_h \circ \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}(t_A) = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^B \triangleright \mathbb{T}_e \ell_h(t_B) \\
 &= (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^B \triangleright L_B(h)
 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
 (\ell_g * R_A)(h) &\equiv \mathbb{T}_{\ell_{g^{-1}}(h)} \ell_g(R_A \circ \ell_{g^{-1}}(h)) = \mathbb{T}_{g^{-1}h} \ell_g \circ \mathbb{T}_e \wp_{g^{-1}h}(t_A) \\
 &= \mathbb{T}_e(\ell_g \circ \wp_h \circ \wp_{g^{-1}})(t_A) = \mathbb{T}_e(\wp_h \circ \text{Ad}_g)(t_A) \\
 &= (\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright \mathbb{T}_e \wp_h(t_B) = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright R_B(h).
 \end{aligned}$$

□

Uwaga 4. Powyższe stwierdzenie orzeka, że algebry pól lewo- i prawoniezmienniczych są wzajemnie antyizomorficznymi komutującymi podalgebrami Liego w algebrze Liego (gładkich) pól wektorowych na G , przy czym $((\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B)_{A, B \in \overline{1, \dim G}}$ w dowolnym punkcie $g \in G$ jest macierzą przejścia pomiędzy lewo- i prawoniezmienniczną bazą styczną do grupy w tym punkcie. Tożsamości, w których pojawia się pchnięcie wzdłuż Inv , stanowią stycznościowy (w e) wariant relacji między lewym i prawym działaniem regularnym w grupie i grupie przeciwnej. Ostatnie dwie tożsamości w tezie stwierdzenia określają własności współzmienniczości względem – odpowiednio – prawych i lewych translacji (pchnięć) pól lewo- i prawoniezmienniczych.

Definicja 6. Przyjmijmy zapis Def. 4 i niechaj $\{\theta_L^A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$ i $\{\theta_R^A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$ będą bazami $C^\infty(G, \mathbb{R})$ -modułu $\Omega^1(G)$ dualnymi do baz – odpowiednio – $\{L_A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$ i $\{R_A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$ $C^\infty(G, \mathbb{R})$ -modułu $\Gamma(\text{TG})$,

$$L_A \lrcorner \theta_L^B = \delta_A^B = R_A \lrcorner \theta_R^B, \quad A, B \in \overline{1, \dim G}.$$

Pole 1-form o wartościach w \mathfrak{g} postaci

$$\theta_L := \theta_L^A \otimes_{\mathbb{R}} t_A$$

nosi miano **kanonicznego pola 1-form lewoniezmiennicznych** lub **lewoniezmiennicznej formy Maurera–Cartana** na G . Analogicznie, pole 1-form

$$\theta_R := \theta_R^A \otimes_{\mathbb{R}} t_A$$

nazywamy **kanonicznym polem 1-form prawoniezmiennicznych** lub **prawoniezmienniczną formą Maurera–Cartana** na G .

Uwaga 5. Warto odnotować, że formy Maurera–Cartana wraz z odnośnymi polami niezmiennicznymi na grupie dają nam do ręki wygodną reprezentację operatora różniczkowego zewnętrznego (de Rhama), oto bowiem dla dowolnej funkcji $f \in C^1(G, \mathbb{R})$ i w dowolnym punkcie $g \in G$ zachodzą tożsamości:

$$df(g) = L_A(f)(g) \triangleright \theta_L^A(g) \equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \mathcal{L}_t^{tA})(g) \triangleright \theta_L^A(g)$$

oraz

$$df(g) = R_A(f)(g) \triangleright \theta_R^A(g) \equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \mathcal{R}_t^{tA})(g) \triangleright \theta_R^A(g),$$

z których pierwszą sprawdzamy w bezpośrednim rachunku (rachunek sprawdzający drugą jest w pełni analogiczny)

$$L_B \lrcorner (L_A(f)(g) \triangleright \theta_L^A(g)) = L_A(f)(g) \delta_B^A = L_B(f)(g) \equiv L_B \lrcorner df(g).$$

Formuły te należy odnieść do znanych formuł różniczkowych

$$df(x) = \partial_\mu f(x) \triangleright dx^\mu$$

słusznych na dowolnej rozmaitości M w dziedzinie lokalnego układu współrzędnych $\{x^\mu\}^{\mu \in \overline{1, \dim M}}$. Należy przy tym podkreślić, że o ile ostatnia formuła jest słuszna *lokalnie*, o tyle wypisane wcześniej formuły na $M \cong G$ mają sens *globalnie*. Znajdują one bezpośrednie zastosowanie np. w fizykalnie istotnym rachunku różniczkowym na wiązkach głównych i stowarzyszonych z nimi (w kontekście konstrukcji teorii pola z wycechowaną symetrią globalną).

Stwierdzenie 13. Przyjmijmy zapis Def. 6 oraz Stw. 12. Formy Maurera–Cartana są – odpowiednio – lewo- i prawoniezmienniczne,

$$(\ell_g^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_L = \theta_L, \quad (\wp_g^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_R = \theta_R,$$

a ponadto spełniają tożsamości:

$$(10) \quad \theta_R = (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad.}) \circ \theta_L$$

i

$$(11) \quad (\text{Inv}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_L = -\theta_R, \quad (\text{Inv}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_R = -\theta_L$$

oraz – dla dowolnego elementu $g \in G$ –

$$(\wp_g^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_L = (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \theta_L, \quad (\ell_g^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_R = (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_g) \circ \theta_R.$$

Dowód: W dowodach wszystkich relacji wykorzystujemy bazowy charakter układów $\{\theta_H^A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$, $H \in \{L, R\}$ (w dowolnym punkcie G) oraz ich dualność względem odnośnego układu pól niezmiennicznych. I tak z równości, słusznej dla dowolnych $g, h \in G$,

$$(L_A \lrcorner \ell_g^* \theta_L^B)(h) = \theta_L^B(\ell_g(h)) \circ T_h \ell_g(L_A(h)) = \theta_L^B(gh)(L_A(gh)) = \delta_A^B$$

wywdzimy wniosek:

$$\ell_g^* \theta_L^B(h) = \theta_L^B(h),$$

czyli

$$\ell_g^* \theta_L^B = \theta_L^B.$$

Analogicznie dowodzimy prawoniezmienniczności 1-form θ_R^B . W następnej kolejności przywołujemy Równ. (9) i na tej podstawie obliczamy

$$L_A \lrcorner \theta_R^B = (T_e \text{Ad.})_A^C \triangleright R_C \lrcorner \theta_R^B = (T_e \text{Ad.})_A^C \delta_C^B = (T_e \text{Ad.})_A^B,$$

skąd odczytujemy Równ. (10). W dowolnym punkcie $g \in G$ jest też na mocy Uwagi 1 spełniona relacja

$$R_A \lrcorner \text{Inv}^* \theta_L^B(g) = \theta_L^B(g^{-1}) \circ T_g \text{Inv}(R_A(g)) = \theta_L^B(g^{-1}) \circ T_g \text{Inv} \circ T_e \wp_g(t_A)$$

$$= -\theta_L^B(g^{-1}) \circ \mathbb{T}_e \ell_{g^{-1}}(t_A) \equiv -\theta_L^B(g^{-1})(L_A(g^{-1})) = -\delta_A^B,$$

zatem

$$\text{Inv}^* \theta_L^B = -\theta_R^B,$$

czyli także

$$\text{Inv}^* \theta_R^B = -\theta_L^B.$$

Wreszcie na koniec obliczamy – dla dowolnych $g, h \in G$ –

$$\begin{aligned} L_A \lrcorner (\varphi_g^* \theta_L^B)(h) &= \theta_L^B(hg) \circ \mathbb{T}_h \varphi_g(L_A(h)) = \theta_L^B(hg) \circ \mathbb{T}_h \varphi_g \circ \mathbb{T}_e \ell_h(t_A) \\ &= \theta_L^B(hg) \circ \mathbb{T}_e \ell_{hg} \circ \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}(t_A) = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^C \theta_L^B(hg) \circ \mathbb{T}_e \ell_{hg}(t_C) \\ &= (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^C \theta_L^B(hg)(L_C(hg)) = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^C \delta_C^B = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^B \end{aligned}$$

i na tej podstawie wnioskujemy, że

$$\varphi_g^* \theta_L^B = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^B \theta_L^A.$$

Dowód ostatniej tożsamości przebiega w pełni analogicznie. \square

Definicja 7. Przyjmijmy zapis Stw. 4 i niechaj $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ będzie rozmaitością gładką, G zaś – grupą Liego. **Pochodna logarytmiczna lewostronna** na $C^\infty(M, G)$ to odwzorowanie

$$\delta_L \log : C^\infty(M, G) \longrightarrow \Omega^1(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$$

określone wzorem

$$\delta_L \log f(x)(v_x) := \mathbb{T}_{f(x)} \ell_{f(x)^{-1}} \circ \mathbb{T}_x f(v_x),$$

słusznym dla dowolnych: punktu $x \in M$, wektora $v_x \in \mathbb{T}_x M$ oraz funkcji $f \in C^\infty(M, G)$. Podobnie, **pochozna logarytmiczna prawostronna** na $C^\infty(M, G)$ to odwzorowanie

$$\delta_R \log : C^\infty(M, G) \longrightarrow \Omega^1(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$$

zadane w postaci

$$\delta_R \log f(x)(v_x) := \mathbb{T}_{f(x)} \varrho_{f(x)^{-1}} \circ \mathbb{T}_x f(v_x).$$

Stwierdzenie 14. Przyjmijmy zapis Def. 7. Dla dowolnych $f_1, f_2 \in C^\infty(M, G)$ (wymnożonych punktowo) i w każdym punkcie $x \in M$ prawdziwe są następujące tożsamości

$$\delta_L \log(f_1 \cdot f_2)(x) = \delta_L \log f_2(x) + (\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{f_2(x)^{-1}})(\delta_L \log f_1(x)),$$

$$\delta_R \log(f_1 \cdot f_2)(x) = \delta_R \log f_1(x) + (\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{f_1(x)})(\delta_R \log f_2(x)).$$

Dowód: Dowiedzimy pierwszej tożsamości. Dowód drugiej z nich przebiega analogicznie. Wprost na podstawie definicji, a w odwołaniu do Równ. (2), obliczamy

$$\begin{aligned} &\delta_L \log(f_1 \cdot f_2)(x) \\ &= \mathbb{T}_{f_1(x) \cdot f_2(x)} \ell_{f_2(x)^{-1} \cdot f_1(x)^{-1}} \circ \mathbb{T}_x (f_1 \cdot f_2) \\ &= \mathbb{T}_{f_1(x) \cdot f_2(x)} (\ell_{f_2(x)^{-1}} \circ \ell_{f_1(x)^{-1}}) \circ \mathbb{T}_x (m \circ (f_1, f_2)) \\ &= \mathbb{T}_{f_2(x)} \ell_{f_2(x)^{-1}} \circ \mathbb{T}_{f_1(x) \cdot f_2(x)} \ell_{f_1(x)^{-1}} \circ \mathbb{T}_{(f_1(x), f_2(x))} m \circ \mathbb{T}_x (f_1, f_2) \\ &= \mathbb{T}_{f_2(x)} \ell_{f_2(x)^{-1}} \circ \mathbb{T}_{f_1(x) \cdot f_2(x)} \ell_{f_1(x)^{-1}} \circ (\mathbb{T}_{f_2(x)} \ell_{f_1(x)} \circ \mathbb{T}_x f_2 + \mathbb{T}_{f_1(x)} \varrho_{f_2(x)} \circ \mathbb{T}_x f_1) \\ &= \mathbb{T}_{f_2(x)} \ell_{f_2(x)^{-1}} \circ \mathbb{T}_x f_2 + (\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{f_2(x)^{-1}}) \circ \mathbb{T}_{f_1(x)} \ell_{f_1(x)^{-1}} \circ \mathbb{T}_x f_1. \end{aligned}$$

□

Stwierdzenie 15. Przyjmijmy zapis Def. 7 i niechaj $f_1, f_2 \in C^\infty(M, G)$, a wówczas prawdziwe są zdania:

$$\delta_L \log f_1 = \delta_L \log f_2 \iff \exists_{g \in G} : f_2 = \ell_g \circ f_1$$

oraz

$$\delta_R \log f_1 = \delta_R \log f_2 \iff \exists_{g \in G} : f_2 = \rho_g \circ f_1.$$

Dowód: Wynikanie \Leftarrow jest oczywiste, a już z pewnością staje się takim po przeanalizowaniu dowodu wynikania przeciwnego. To udowodnimy dla pochodnej lewostronnej. Dowód dla pochodnej prawostronnej jest w pełni analogiczny. Oto więc, stosując pierwszą z tożsamości ze Stw. 14, otrzymujemy

$$\delta_L \log(f_2 \cdot \text{Inv} \circ f_1) = \delta_L \log(\text{Inv} \circ f_1) + (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_2,$$

a ponieważ na podstawie tej samej tożsamości stwierdzamy też równość

$$0 \equiv \delta_L \log(f_1 \cdot \text{Inv} \circ f_1) = \delta_L \log(\text{Inv} \circ f_1) + (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_1,$$

przeto wobec założonej równości obu pochodnych lewostronnych

$$\begin{aligned} \delta_L \log(f_2 \cdot \text{Inv} \circ f_1) &= -(\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_1 + (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_2 \\ &= -(\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_1 + (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Przywołując definicję pochodnej logarytmicznej, przepisujemy powyższe w postaci

$$0 = \delta_L \log(f_2 \cdot \text{Inv} \circ f_1) = T_{f_2(\cdot) \cdot f_1(\cdot)^{-1}} \ell_{f_1(\cdot) \cdot f_2(\cdot)^{-1}} \circ T_{(f_2(\cdot) \cdot f_1(\cdot)^{-1})},$$

albo równoważnej

$$T_{(f_2(\cdot) \cdot f_1(\cdot)^{-1})} = 0,$$

która implikuje równość

$$\forall_{x \in M} \forall_{V \in T_x M} : V(f_2(\cdot) \cdot f_1(\cdot)^{-1}) = 0,$$

czyli

$$\forall_{x \in M} : f_2(x) \cdot f_1(x)^{-1} = \text{const} \in G,$$

co jest właśnie postulowaną tezą. □

Stwierdzenie 16. W zapisie Def. 6 i 7 słuszne są tożsamości

$$\theta_L \equiv \delta_L \log \text{id}_G, \quad \theta_R \equiv \delta_R \log \text{id}_G.$$

Dowód: Bez trudu sprawdzamy, dla dowolnego $g \in G$,

$$\begin{aligned} L_A \lrcorner \delta_L \log \text{id}_G(g) &\equiv T_g \ell_{g^{-1}} \circ T_g \text{id}_G(L_A(g)) = T_g \ell_{g^{-1}} \circ \text{id}_{T_g G}(L_A(g)) \\ &= T_g \ell_{g^{-1}} \circ T_g \ell_g(L_A(e)) = L_A(e) \equiv t_A, \end{aligned}$$

co wobec bazowego charakteru układu $\{L_A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$ kończy dowód pierwszej części tezy stwierdzenia. Dowód w przypadku pochodnej prawostronnej przebiega analogicznie. □

Stwierdzenie 17. Przyjmijmy zapis Def. 6. Formy Maurera–Cartana spełniają – dla dowolnych elementów $g, h \in G$ – tożsamości

$$m^* \theta_L(g, h) = \theta_L(h) + (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{h^{-1}}) \circ \theta_L(g),$$

$$m^* \theta_R(g, h) = \theta_R(g) + (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_g) \circ \theta_R(h).$$

Dowód: Na mocy Stw. 16 (odczytanego w połączeniu z Def. 7), a w odwołaniu do Równ. (2) stwierdzamy, co następuje:

$$\begin{aligned} \theta_L(g \cdot h) &\equiv m^* \theta_L(g, h) = T_{g \cdot h} \ell_{(g \cdot h)^{-1}} \circ T_{(g, h)} m = T_{gh}(\ell_{h^{-1} \cdot g^{-1}}) \circ (T_{g \mathcal{L}h} \circ \text{pr}_1 + T_h \ell_g \circ \text{pr}_2) \\ &\equiv T_g(\text{Ad}_{h^{-1}} \circ \ell_{g^{-1}}) \circ \text{pr}_1 + T_h \ell_{h^{-1}} \circ \text{pr}_2 = T_e \text{Ad}_{h^{-1}} \circ T_g \ell_{g^{-1}} \circ \text{pr}_1 + T_h \ell_{h^{-1}} \circ \text{pr}_2 \\ &\equiv (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{h^{-1}}) \circ \theta_L(g) + \theta_L(h). \end{aligned}$$

Dowód drugiej tożsamości przebiega w pełni analogicznie. \square

DODATEK A. ODZWOROWANIA

Niechaj X_A, Y_A , $A \in \{1, 2\}$ będą zbiorami, $f_A : X_A \rightarrow Y_A$ zaś – odwzorowaniami. Definiujemy wówczas **produkt** odwzorowań f_A jako odwzorowanie

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2 : (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2)).$$

Mając do dyspozycji zbiory X, Z_1, Z_2 i parę odwzorowań $F_\alpha : X \rightarrow Z_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$, definiujemy także odwzorowanie

$$(F_1, F_2) : X \rightarrow Z_1 \times Z_2 : x \mapsto (F_1(x), F_2(x)).$$

Relację pomiędzy tymi dwoma typami odwzorowań ustalmy wprowadzając odwzorowanie

$$\Delta : X \rightarrow X \times X : x \mapsto (x, x),$$

wkładające zbiór X w jego kwadrat kartezjański w postaci jego przekątnej. Przy jego pomocy możemy zapisać tożsamość

$$(F_1, F_2) = (F_1 \times F_2) \circ \Delta.$$

Jest oczywiste, że ilekroć wszystkie zbiory objęte definicjami są wyposażone w strukturę różniczkowalnej klasy C^∞ , względem której odnośne odwzorowania są gładkie, własność ta jest dziedziczona przez $f_1 \times f_2$ i (F_1, F_2) .

DODATEK B. IŁCZYN PÓŁPROSTY GRUP

Niechaj G_A , $A \in \{1, 2\}$ będą grupami i niech

$$\alpha : G_1 \rightarrow \text{Aut}_{\mathbf{Grp}}(G_2) : g \mapsto \alpha_g$$

będzie homomorfizmem grup przyporządkowującym dowolnemu elementowi G_1 odnośny automorfizm (tj. odwracalny endomorfizm – te tworzą grupę z superpozycją jako operacją binarną, odwrotnością jako operacją unarną i automorfizmem identycznościowym jako elementem neutralnym) G_2 . Wówczas produkt kartezjański $G_1 \times G_2$ nośników struktury grupy możemy wyposażyć w *odmienną od produktowej* strukturę grupy definiując operację binarną

$$(G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \rightarrow G_1 \times G_2 : ((g_1, g_2), (h_1, h_2)) \mapsto (g_1 \cdot_{G_1} h_1, \alpha_{h_1^{-1}}(g_2) \cdot_{G_2} h_2)$$

oraz odwrotność

$$G_1 \times G_2 \curvearrowright : (g_1, g_2) \mapsto (g_1^{-1}, \alpha_{g_1}(g_2^{-1})),$$

dla których para elementów neutralnych (e_{G_1}, e_{G_2}) jest elementem neutralnym. Tak zadaną strukturę grupy określamy mianem **produktu półprostego grup** i oznaczamy symbolem

$$G_{1 \alpha} \ltimes G_2.$$

Przykładem takiej struktury jest grupa Poincarégo symetrii przestrzeni Minkowskiego $\mathbb{R}^{3,1}$, będąca produktem półprostym grupy Lorentza i przemiennej grupy translacji w \mathbb{R}^4 ,

$$\text{ISO}(3,1) = \text{SO}(3,1) \ltimes \mathbb{R}^4,$$

zdefiniowana przez standardową reprezentację wektorową

$$\Lambda : \text{SO}(3,1) \longrightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^{3+1}) \cong \text{GL}(4; \mathbb{R}).$$