TEORIA GRUP II
WYKŁADY 5. I 6.
UN TOUT PETIT PEU DE KOHOMOLOGIA I QU'EST-CE QUE Z TEGO WYNIKA

Spis treści

1. Wprowadzenie

Na poprzednich wykładach wprowadziliśmy rachunek różniczkowy Cartana na grupie Liego G, więc

- pola wektorowe LI $\mathfrak{X}_L(\mathrm{G})$,
$$L. \;:\; \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}_L(\mathrm{G}) \;:\; X \longmapsto \mathsf{T}_e\ell.(X)\,,$$
określające globalną trywializację wiązki stycznej $\mathsf{T}\mathrm{G} \cong \mathrm{G}_{\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}}\ltimes\mathfrak{g}$ poprzez zadanie globalnej bazy $C^\infty(\mathrm{G},\mathbb{R})$-modułu $\Gamma(\mathrm{G})$,
$$\{L_A \equiv L_{t_A}\}_{A\in\overline{1,D}}\,, \qquad D \equiv \dim \mathrm{G}\,,$$
stowarzyszonej z dowolną bazą $\{t_A\}_{A\in\overline{1,D}}$ algebry Liego $\mathsf{T}_e\mathrm{G} \equiv \mathfrak{g}$, oraz
- dualną 1-formy LI $\Omega^1_L(\mathrm{G})$ rozpięte (nad $\mathbb{R}$) na bazie dualnej
$$\{\theta^A_{\mathrm{L}}\}_{A\in\overline{1,D}}\,, \qquad\qquad L_A \lrcorner\, \theta^B_{\mathrm{L}} = \delta_A^{\ B}\,.$$

Te ostatnie generują (nad $\mathbb{R}$ a wzgl. iloczynu zewnętrznego $\wedge$) podprzestrzenie k-form LI,
$$\Omega^k_L(\mathrm{G}) = \{\ \omega \in \Omega^k(\mathrm{G}) \quad|\quad \forall_{g\in\mathrm{G}} \;:\; \ell_g^*\omega = \omega\ \}\,,$$
otrzymujemy zatem
$$\Omega^\bullet_L(\mathrm{G}) \equiv \left\langle \theta^A_{\mathrm{L}} \,|\, A \in \overline{1,D}\right\rangle_{\wedge,\mathbb{R}} \subset \Omega^\bullet(\mathrm{G})\,.$$
Powstaje naturalne pytanie o to, czy także operator de Rhama $\mathsf{d}_{\mathrm{dR}} \equiv \mathsf{d}$ (pochodnej zewnętrznej) ogranicza się do tak zdefiniowanej **algebry form lewoniezmienniczych**. Odpowiedzi na nie dostarcza

Stwierdzenie 1. Operator de Rhama ogranicza się do algebry form lewoniezmienniczych na grupie Liego G, tj. zachodzi
$$\mathsf{d}\Omega^\bullet_L(\mathrm{G}) \subset \Omega^\bullet_L(\mathrm{G})\,.$$
W szczególności są spełnione równania Maurera–Cartana
$$\mathsf{d}\theta^A_{\mathrm{L}} = -\tfrac{1}{2}\, f_{BC}^{\ \ \ A}\, \theta^B_{\mathrm{L}} \wedge \theta^C_{\mathrm{L}}\,,$$
w których współczynniki $f_{BC}^{\ \ \ A}$ są stałymi struktury $\mathfrak{g}$ w bazie $\{t_A\}_{A\in\overline{1,D}}$,
$$[t_B, t_C]_{\mathfrak{g}} = f_{BC}^{\ \ \ A}\, t_A\,.$$

Dowód: Istnienie ograniczenia operatora de Rhama do $\Omega_L^\bullet(\mathrm{G})$ jest natychmiastową konsekwencją przemienności tego operatora z operatorem cofnięcia,

$$\ell_g^*\omega = \omega \qquad \Longrightarrow \qquad \ell_g^*\mathsf{d}\omega = \mathsf{d}\ell_g^*\omega = \mathsf{d}\omega\,.$$

Pozostaje zatem zająć się drugą częścią tezy, wykorzystując dodatkowo to, że 2-forma $\mathsf{d}\theta_{\mathrm{L}}^A$ jest w pełni określona przez wartości przyjmowane przez nią na bazie LI modułu $\Gamma(\mathrm{G})$. Biorąc pod uwagę fundamentalną tożsamość (Cartana)

$$\mathsf{d}\omega(\mathcal{V}_0,\mathcal{V}_1,\ldots,\mathcal{V}_k) = \sum_{l=0}^k (-1)^l\,\mathcal{V}_l \lrcorner\, \mathsf{d}\big(\omega(\mathcal{V}_0,\mathcal{V}_1,\underset{\widehat{l}}{\ldots},\mathcal{V}_k)\big) + \sum_{m<n=1}^k (-1)^{m+n}\,\omega\big([\mathcal{V}_m,\mathcal{V}_n],\mathcal{V}_0,\mathcal{V}_1,\underset{\widehat{m,n}}{\ldots},\mathcal{V}_k\big)\,,$$

słuszną dla dowolnej k-formy $\omega\in\Omega^k(M)$ (na rozmaitości M) i dowolnych pól wektorowych $\mathcal{V}_l\in\Gamma(\mathsf{T}M)$, $l\in\overline{0,k}$ (na tejże), obliczamy

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}\theta_{\mathrm{L}}^A(L_B,L_C) &= L_B\lrcorner\,\mathsf{d}\big(L_C\lrcorner\,\theta_{\mathrm{L}}^A\big) - L_C\lrcorner\,\mathsf{d}\big(L_B\lrcorner\,\theta_{\mathrm{L}}^A\big) - \theta_{\mathrm{L}}^A\big([L_B,L_C]\big)\\
&= L_B\lrcorner\,\mathsf{d}\delta_C^{\ A} - L_C\lrcorner\,\mathsf{d}\delta_B^{\ A} - \theta_{\mathrm{L}}^A\big(f_{BC}^{\ \ D}\,L_D\big) = -f_{BC}^{\ \ D}\,L_D\lrcorner\,\theta_{\mathrm{L}}^A = -f_{BC}^{\ \ A}\\
&\equiv -\tfrac{1}{2}\,f_{DE}^{\ \ A}\,\theta_{\mathrm{L}}^D\wedge\theta_{\mathrm{L}}^E(L_B,L_C)\,.
\end{aligned}$$

□

Formy różniczkowe na rozmaitości M wymiaru $\dim M = d$ tworzą wraz z (ograniczeniami) d_{dR} **kompleks (ko)łańcuchowy de Rhama**

$$\big(\Omega^\bullet(M),\mathsf{d}_{\mathrm{dR}}^{(\bullet)}\big)\ :\ \Omega^0(M)\xrightarrow{\mathsf{d}_{\mathrm{dR}}^{(0)}\equiv\mathsf{d}}\Omega^1(M)\xrightarrow{\mathsf{d}_{\mathrm{dR}}^{(1)}\equiv\mathsf{d}}\cdots\xrightarrow{\mathsf{d}_{\mathrm{dR}}^{(d-1)}\equiv\mathsf{d}}\Omega^d(M)\xrightarrow{\mathsf{d}_{\mathrm{dR}}^{(d)}\equiv 0}\mathbf{0}\,,$$

$$\mathsf{d}_{\mathrm{dR}}^{(k+1)}\circ\mathsf{d}_{\mathrm{dR}}^{(k)} = 0\,,\qquad k\in\overline{0,d-1}\,.$$

Jak wiemy z kursu Geometrii różniczkowej, grupy homologii tego kompleksu,

$$H^0(M,\mathbb{R})\equiv\mathrm{Ker}\,\mathsf{d}_{\mathrm{dR}}^{(0)}\,,\qquad H_{\mathrm{dR}}^{k+1}(M,\mathbb{R})\equiv Z_{\mathrm{dR}}^{k+1}(M,\mathbb{R})/B_{\mathrm{dR}}^{k+1}(M,\mathbb{R})\,,\quad k\in\overline{0,d-1}\,,$$

zwane **grupami kohomologii de Rhama rozmaitości** M, w których zapisie

$$Z_{\mathrm{dR}}^{k+1}(M,\mathbb{R})\equiv\mathrm{Ker}\,\mathsf{d}_{\mathrm{dR}}^{(k+1)}$$

to **grupa $(k+1)$-kocykli de Rhama** (czyli grupa $(k+1)$-form zamkniętych), a

$$B_{\mathrm{dR}}^{k+1}(M,\mathbb{R})\equiv\mathrm{Im}\,\mathsf{d}_{\mathrm{dR}}^{(k)}$$

to **grupa $(k+1)$-kobrzegów de Rhama na** M (czyli grupa $(k+1)$-form dokładnych), kodują istotną informację topologiczną dotyczącą M. Szczegółowa dyskusja natury tej informacji wykracza istotnie poza zakres niniejszego wykładu, pozostaje nam przeto zilustrować ją na poglądowym przykładzie. Oto więc z jednej strony mamy Lemat Poincarégo, który stwierdza trywialność rzeczonej informacji w przypadku obszarów ściągalnych, zatem pozbawionych „defektów" topologicznych, tj., mówiąc obrazowo, rozmaitych „dziur", których obecność każdorazowo skutkuje pojawieniem się nieściągalnych cykli (homologicznych), czyli podrozmaitości bez brzegu niebędących brzegami. O słuszności tej identyfikacji informacji topologicznej zapisanej w kohomologii de Rhama rozmaitości przekonujemy się bez trudu zestawiając parę rozmaitości różniących się obecnością „defektu" właśnie: ściągalną płaszczyznę $\mathbb{R}^{\times 2}$ oraz nieściągalną „płaszczyznę z dziurą" (tj. pierścień) $\mathbb{R}^{\times 2}\setminus\{0\}$. Jak stwierdziliśmy wcześniej, w tym pierwszym przypadku mamy

$$H_{\mathrm{dR}}^k\big(\mathbb{R}^{\times 2}\big) = \delta^{k,0}\,\mathbb{R}$$

(zerowa grupa kohomologii „zlicza" lokalne stałe, czyli spójne składowe rozmaitości – ich liczba określa potęgę ciała bazowego po prawej stronie powyższej formuły). Tymczasem w przypadku drugim pojawia się nietrywialny 1-kocykl de Rhama odpowiadający nieściągalnej pętli obiegającej wyjęty punkt 0, a mianowicie

$$\eta(x,y) = \tfrac{x\,\mathsf{d}y - y\,\mathsf{d}x}{x^2+y^2}\,,$$

który we współrzędnych biegunowych (dobrze określonych na $\mathbb{R}^{\times 2}\setminus\{0\}$ właśnie) przybiera postać

$$\eta(r\cos\phi, r\sin\phi) = \mathsf{d}\phi\,,$$

w jawny sposób dokumentującą jego naturalny związek z wyróżnioną pętlą, a zarazem – zamkniętość,

$$\mathsf{d}\eta = 0\,.$$

Nietrywialność 1-kocyklu η wynika wprost z nieistnienia *globalnie gładkiej* 0-formy (czyli funkcji) pierwotnej ϕ (współrzędna ta ma nieciągłość na półprostej $\mathbb{R}_{>0}\times\{0\}$). 1-kocykl η reprezentuje zatem klasę kohomologii w $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^{\times 2}\setminus\{0\})$. Podkreślmy: definicja η ma sens jedynie na płaszczyźnie z wyjętym punktem 0, w którym 1-forma ta (gdy potraktować ją jako 1-formę na $\mathbb{R}^{\times 2}$) ma osobliwość, co wyjaśnia jej nieobecność wśród 1-form na ściągalnej płaszczyźnie. W istocie nietrudno pokazać, że

$$H^k_{\mathrm{dR}}\big(\mathbb{R}^{\times 2}\setminus\{0\}\big) = \big(\delta^{k,0}+\delta^{k,1}\big)\,\mathbb{R}\,,$$

co odpowiada wiernie sytuacji topologicznej (grupa $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^{\times 2}\setminus\{0\})$ jest generowana przez klasę $[\eta]$). Opisana tu odpowiedniość uogólnia się w postaci dwoistości pomiędzy kohomologią de Rhama i homologią (singularną), patrz: Ref. [BT82].

Powyższe rozważania prowadzą nas do zadania naturalnego pytania o informację kodowaną przez homologię podkompleksu form lewoniezmienniczych

$$\big(\Omega^\bullet_{\mathrm{L}}(\mathrm{G}),\mathsf{d}^{(\bullet)}_{\mathrm{CaE}}\equiv\mathsf{d}^{(\bullet)}_{\mathrm{dR}}\restriction_{\Omega^\bullet_{\mathrm{L}}(\mathrm{G})}\big)\ :\ \Omega^0_{\mathrm{L}}(\mathrm{G})\xrightarrow{\mathsf{d}^{(0)}_{\mathrm{CaE}}\equiv\mathsf{d}}\Omega^1_{\mathrm{L}}(\mathrm{G})\xrightarrow{\mathsf{d}^{(1)}_{\mathrm{CaE}}\equiv\mathsf{d}}\cdots\xrightarrow{\mathsf{d}^{(D-1)}_{\mathrm{CaE}}\equiv\mathsf{d}}\Omega^D_{\mathrm{L}}(\mathrm{G})\xrightarrow{\mathsf{d}^{(d)}_{\mathrm{CaE}}\equiv 0}\mathbf{0}\,,$$

zwaną **kohomologią Cartana–Eilenberga grupy Liego** G,

$$\mathrm{CaE}^\bullet(\mathrm{G})\equiv H^\bullet_{\mathrm{dR,L}}(\mathrm{G},\mathbb{R})\,.$$

Kohomologia ta odgrywa istotną rolę w konstrukcji teorii pola z nieliniowo zrealizowaną symetrią wprowadzonej przed laty przez Weinberga i Schwingera w kontekście efektywnej teorii pola (np. w układach ze spontanicznie naruszoną symetrią), a rozwiniętej przez Salama, Strathdee'ego, Colemana, Callana, Wessa, Ishama i wielu innych.

2. Kohomologia Cartana–Eilenberga a rozszerzenia algebr Liego

Ażeby odpowiedzieć sobie na zadane pytanie, przeformułujemy to ostatnie w terminach czysto algebraicznych, przeszedłszy do stycznej $\mathsf{T}_e\mathrm{G}$. Zanim to jednak uczynimy, poddamy nasze dotychczasowe rozważania kohomologiczne, odniesione bezpośrednio do geometrii rozmaitości, więc intuicyjne, prostej abstrakcji, która poddaje się naturalnemu uogólnieniu. Oto więc mamy do czynienia z odwzorowaniem $\mathbb{R}$-liniowym

$$D.\ :\ \mathfrak{X}(M)\longrightarrow\mathrm{Der}\big(C^\infty(M;\mathbb{R})\big)\ :\ \mathcal{V}\longmapsto\mathcal{V}\lrcorner\,\mathsf{d}\equiv\mathscr{L}_{\mathcal{V}}=:D_{\mathcal{V}}$$

(stopień gładkości w zapisie przestrzeni różniczkowań nie ma znaczenia, o ile tylko jest ≥ 1) spełniającym strukturalną tożsamość

$$\big[D_{\mathcal{V}_1},D_{\mathcal{V}_2}\big]\equiv\mathscr{L}_{\mathcal{V}_1}\circ\mathscr{L}_{\mathcal{V}_2}-\mathscr{L}_{\mathcal{V}_2}\circ\mathscr{L}_{\mathcal{V}_1}=\mathscr{L}_{[\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2]_{\mathfrak{X}(M)}}\equiv D_{[\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2]_{\mathfrak{X}(M)}}\,,$$

która czyni zeń homomorfizm $\mathbb{R}$-algebr Liego. W tym języku k-formy różniczkowe traktujemy jako odwzorowania $\mathbb{R}$-liniowe

$$\Omega^k(M)\ :\ \bigwedge^k\mathfrak{X}(M)\longrightarrow C^\infty(M;\mathbb{R})\,,\tag{1}$$

a operator kobrzegu de Rhama (różniczki zewnętrznej) zadający odnośną kohomologię możemy *zdefiniować* określając wprost jego działanie na przestrzeni funkcji gładkich (czyli 0-form)

$$\mathsf{d}^{(0)}_{\mathrm{dR}}\ :\ C^\infty(M;\mathbb{R})\equiv\Omega^0(M)\longrightarrow\Omega^1(M)\ :\ f\longmapsto D.(f)\,,$$

$$D.(f) \;:\; \bigwedge^1 \mathfrak{X}(M) \equiv \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M;\mathbb{R}) \;:\; \mathcal{V} \longmapsto D_{\mathcal{V}}(f)\,,$$

a następnie *rozszerzając jego definicję* na formy wyższego stopnia przy użyciu tożsamości Cartana, w której obok powyższego homomorfizmu $D.$ pojawia się nawias Liego na $\mathfrak{X}(M)$. Takie nieco bardziej abstrakcyjne spojrzenie na dobrze już zrozumiane struktury algebraiczno-różniczkowe pozwala nam uczynić pierwszy krok w kierunku interpretacji kohomologii niezmienniczej (Cartana–Eilenberga) w dwóch poniższych definicjach.

Definicja 1. Niechaj $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ będzie $\mathbb{K}$-algebrą Liego wymiaru $\dim_{\mathbb{K}}\mathfrak{g} \equiv D$. **$\mathfrak{g}$-moduł** to para $(V,\rho.)$ złożona z przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej V oraz homomorfizmu algebr Liego[1]

$$\rho. \;:\; \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \;:\; X \longmapsto \rho_X\,,$$

tj. odwzorowania spełniającego warunek

$$\forall_{X,Y\in\mathfrak{g}} \;:\; [\rho_X,\rho_Y] \equiv \rho_X\circ\rho_Y - \rho_Y\circ\rho_X = \rho_{[X,Y]}\,,$$

które zadaje **realizację algebry Liego $\mathfrak{g}$ na przestrzeni wektorowej V** (zwyczajowo oznaczaną tym samym symbolem)

$$\rho. \;:\; \mathfrak{g}\times V \longrightarrow V \;:\; (X,v) \longmapsto \rho_X(v) \equiv X \triangleright v\,.$$

Nawias Liego na $\mathfrak{g}$ można też rozumieć jako odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe

$$\mathrm{ad}. \;:\; \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}) \;:\; X \longmapsto [X,\cdot]_{\mathfrak{g}} \equiv \mathrm{ad}_X\,,$$

które indukuje na $\mathfrak{g}$ rodzinę **różniczkowań**[2] skośnego iloczynu $\mathrm{m}_{\mathfrak{g}} \equiv [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \;:\; \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ indeksowaną przez $\mathfrak{g}\ni X$, o czym zaświadcza tożsamość Leibniza (w tej roli objawia się nam tożsamość Jacobiego)

$$\forall_{Y,Z\in\mathfrak{g}} \;:\; \mathrm{ad}_X\big(\mathrm{m}_{\mathfrak{g}}(Y,Z)\big) = \mathrm{m}_{\mathfrak{g}}\big(\mathrm{ad}_X(Y),Z\big) + \mathrm{m}_{\mathfrak{g}}\big(Y,\mathrm{ad}_X(Z)\big)\,.$$

Istotnie, jeśli także przestrzeń $\mathbb{R}$-liniową $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ potraktujemy jako $\mathbb{R}$-algebrę z iloczynem skośnym $\mathrm{m}_{\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})} \equiv [\cdot,\cdot] \;:\; \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})\times\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$, to stwierdzimy nilpotentność (stopnia 2) operatorów różniczkowania,

$$\mathrm{m}_{\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})}(\mathrm{ad}_X,\mathrm{ad}_X) = \mathrm{ad}_{[X,X]_{\mathfrak{g}}} = 0\,.$$

Powyższe pozwala stowarzyszyć z parą $(V,\rho.)$ naturalny kompleks (ko)łańcuchów i kohomologię, o których mówi

Definicja 2. Przyjmijmy dotychczasowe oznaczenia i niechaj $(V,\rho.)$ będzie $\mathfrak{g}$-modułem w sensie Def. 1. **p-kołańcuch na $\mathfrak{g}$ o wartościach w V** to odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe $\underset{p}{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}^{\otimes_{\mathbb{K}}p},V)$, które jest całkowicie skośne

$$\forall_{X_1,X_2,\ldots,X_p\in\mathfrak{g},\ \sigma\in\mathfrak{S}_p} \;:\; \underset{p}{\varphi}\big(X_{\sigma(1)},X_{\sigma(2)},\ldots,X_{\sigma(p)}\big) = \mathrm{sign}(\sigma)\,\underset{p}{\varphi}(X_1,X_2,\ldots,X_p)\,.$$

Zbiór[3]

$$C^p(\mathfrak{g};V) \equiv \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \otimes_{\mathbb{K}} V$$

takich odwzorowań jest grupą przemienną (z operacją binarną zdefiniowaną punktowo), zwaną **grupą p-kołańcuchów na $\mathfrak{g}$ o wartościach w V**, przy czym przyjmujemy konwencję, w

[1] Struktura algebry (Liego) na $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$, do której odnosi się definicja, jest współokreślana przez komutator endomorfizmów.

[2] Warto przy tej okazji odnotować, że nawias Liego bywa różniczkowaniem zasadniczo *różnych* struktur algebry na danej przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej. Jest tak np. w fizykalnie nader istotnym przypadku przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowej $C^\infty(P,\mathbb{R})$ funkcji gładkich na przestrzeni stanów P układu fizycznego, wyposażonej w dwie struktury $\mathbb{R}$-algebry: z iloczynem punktowym jako operacją binarną oraz z nawiasem Poissona w tej samej roli. Tenże nawias Poissona jest różniczkowaniem $\mathbb{R}$-algebry $C^\infty(P,\mathbb{R})$ względem *obu* struktur, przy czym zazwyczaj podkreśla się tę jego własność w odniesieniu do pierwszej z nich, odróżniając spełnianą przezeń tożsamość Leibniza od tożsamości Jacobiego. W świetle naszych obserwacji obie tożsamości mają ten sam status – są tożsamościami Leibniza.

[3] Patrz: (1), przy czym należy pamiętać o konsekwencjach nieskończonego wymiaru przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowej $\mathfrak{X}(M)$.

której $C^0(\mathfrak{g};V) \equiv V$. Indeksowana przez $\overline{0,D} \ni p$ rodzina grup kołańcuchów tworzy kompleks (ko)łańcuchowy

$$\left(C^\bullet(\mathfrak{g};V),\delta_{\mathfrak{g}}^{(\bullet)}\right) \;:\; C^0(\mathfrak{g};V) \xrightarrow{\delta_{\mathfrak{g}}^{(0)}} C^1(\mathfrak{g};V) \xrightarrow{\delta_{\mathfrak{g}}^{(1)}} \cdots \xrightarrow{\delta_{\mathfrak{g}}^{(D-1)}} C^D(\mathfrak{g};V) \xrightarrow{\delta_{\mathfrak{g}}^{(D)}\equiv 0} \mathbf{0}$$

o **operatorach kobrzegu**

$$\delta_{\mathfrak{g}}^{(p)} \;:\; C^p(\mathfrak{g};V) \longrightarrow C^{p+1}(\mathfrak{g};V)\,, \qquad \delta_{\mathfrak{g}}^{(p+1)} \circ \delta_{\mathfrak{g}}^{(p)} = 0\,, \quad p \in \overline{0,D-1}$$

danych wzorami (zapisanymi dla dowolnych $X_i \in \mathfrak{g}$, $i \in \overline{0,p}$ i $\underset{k}{\varphi} \in C^k(\mathfrak{g};V)$, $k \in \{0, p>0\}$)

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathfrak{g}}^{(0)}\underset{0}{\varphi}(X_0) &= X_0 \triangleright \underset{0}{\varphi}\,,\\
\delta_{\mathfrak{g}}^{(p)}\underset{p}{\varphi}(X_0,X_1,\ldots,X_p) &= \sum_{l=0}^{p} (-1)^l\, X_l \triangleright \underset{p}{\varphi}(X_0,X_1,\underset{\widehat{l}}{\ldots},X_p)\\
&\quad + \sum_{m<n=1}^{p} (-1)^{m+n}\, \underset{p}{\varphi}([X_m,X_n]_{\mathfrak{g}},X_0,X_1,\underset{\widehat{m,n}}{\ldots},X_p)\,.
\end{aligned}$$

Grupa homologii powyższego kompleksu

$$H^0(\mathfrak{g};V) = Z^0(\mathfrak{g};V)\,, \qquad H^{p+1}(\mathfrak{g};V) \equiv Z^{p+1}(\mathfrak{g};V)/B^{p+1}(\mathfrak{g};V)\,, \quad p \in \overline{0,\dim_{\mathbb{K}}\mathfrak{g}-1}\,,$$

w której zapisie

$$Z^{p+1}(\mathfrak{g};V) \equiv \mathrm{Ker}\,\delta_{\mathfrak{g}}^{(p+1)}$$

to **grupa** $(p+1)$**-kocykli na algebrze** $\mathfrak{g}$ **o wartościach w** $\mathfrak{g}$**-module** V, a

$$B^{p+1}(\mathfrak{g};V) \equiv \mathrm{Im}\,\delta_{\mathfrak{g}}^{(p)}$$

to **grupa** $(p+1)$**-kobrzegów na algebrze** $\mathfrak{g}$ **o wartościach w** $\mathfrak{g}$**-module** V, nosi miano $(p+1)$**-tej grupy kohomologii algebry Liego** $\mathfrak{g}$ **o wartościach w** $\mathfrak{g}$**-module** V. Suma prosta

$$H^\bullet(\mathfrak{g};V) = \bigoplus_{p=0}^{\dim_{\mathbb{K}}\mathfrak{g}} H^p(\mathfrak{g};V)$$

tych grup określa **kohomologię algebry Liego** $\mathfrak{g}$ **o wartościach w** $\mathfrak{g}$**-module** V.

W szczególnym przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}$ i trywialnego działania $\rho_\cdot \equiv 0$ mówimy o (**grupach**) **kohomologii Chevalleya–Eilenberga algebry Liego** $\mathfrak{g}$,

$$\mathrm{CE}^\bullet(\mathfrak{g}) \equiv H^\bullet_{(\rho_\cdot=0)}(\mathfrak{g};\mathbb{R})\,.$$

Uwzględniwszy wszystkie nasze dotychczasowe ustalenia, bez trudu stwierdzamy

Stwierdzenie 2. Istnieje kanoniczny izomorfizm

$$\mathrm{CaE}^\bullet(\mathrm{G}) \cong \mathrm{CE}^\bullet(\mathfrak{g})\,.$$

Dowód: Wystarczy zauważyć, że każda forma LI na grupie Liego G jest w pełni określona przez swą wartość w e, w którym to punkcie staje się elementem $\bigwedge^p \mathsf{T}_e^*\mathrm{G} \equiv \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ właśnie. □

W powyższym stwierdzeniu dokonuje się transkrypcja struktury różniczkowo-geometrycznej, jaką jest niezmiennicza wersja kohomologii de Rhama, na język czysto algebraiczny, w którym wyraża się kohomologia algebry Liego. Transkrypcja ta prowadzi do strukturalnej (algebraicznej) interpretacji kohomologii Cartana–Eilenberga w terminach struktur rozszerzających – w sposób, który zilustrujemy poniżej na przykładzie $\mathrm{CaE}^2(\mathrm{G})$ – wyjściowy obiekt algebraiczny $\mathfrak{g}$. Po jej wyprowadzeniu pojawia się naturalne pytanie o „wersję odcałkowaną" do poziomu stosownego „rozszerzenia grupy" G. Okazuje się, że taka transkrypcja odwrotna jest co do zasady możliwa na gruncie Trzeciego Twierdzenia Liego oraz konstrukcji wiązki głownej o grupie strukturalnej U(1) (wzgl. ich strukturalnych uogólnień). Nie bę jej rozpatrywać w ogólności, w dalszej zaś części wykładu skupimy się na nader często w rozważaniach fizykalnych napotykanej grupie $\mathrm{CE}^2(\mathfrak{g})$. W jej przypadku odcałkowanie – ilekroć jest możliwe – prowadzi do tzw. rozszerzeń centralnych grupy G, z którymi Czytelnik mógł się spotkać w kontekście podnoszenia symetrii sztywnych teorii klasycznej do jej przestrzeni Hilberta, a które są opisywane przez **krótkie ciągi dokładne grup Liego**

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathrm{A} \xrightarrow{I_{\mathrm{A}}} \widetilde{\mathrm{G}} \xrightarrow{\Pi_{\mathrm{G}}} \mathrm{G} \longrightarrow \mathbf{1}$$

zapisywane w terminach wyjściowej grupy G, będącej jej rozszerzeniem grupy $\widetilde{\mathrm{G}}$ (odwzorowywanej na tę pierwszą przez *epi*morfizm Π_{G}) oraz grupy *przemiennej* A (odwzorowywanej w **centrum grupy** $\mathscr{Z}(\widetilde{\mathrm{G}}) = \{\ g \in \mathrm{G} \quad | \quad \forall_{h \in \mathrm{G}}\ :\ g \cdot h \cdot g^{-1} \cdot h^{-1} = e\ \}$ przez *mono*morfizm I_{A}) występującej w roli włókna rozszerzenia ($\mathrm{Ker}\,\Pi_{\mathrm{G}} = \mathrm{Im}\,I_{\mathrm{A}}$). Zrozumienie informacji algebraicznej zakodowanej w tej grupie wymaga zastąpienia struktur grupowych ich infinitezymalnymi (stycznościowymi) odpowiednikami, przy czym (Lie-)grupowa operacja binarna przechodzi w (Lie-)algebraiczną operację binarną, czyli nawias Liego. Precyzyjnej formalizacji tego schematu dostarcza

Definicja 3. Niechaj $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ będzie algebrą Liego (nad $\mathbb{R}$) i niech $(\mathfrak{a}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{a}} \equiv 0)$ będzie *komutatywną* algebrą Liego (nad $\mathbb{R}$). **Rozszerzenie centralne algebry Liego $\mathfrak{g}$ przez $\mathfrak{a}$** to trójka $(\widetilde{\mathfrak{g}}, \jmath_{\mathfrak{a}}, \pi_{\mathfrak{g}})$ złożona z

- algebry Liego $(\widetilde{\mathfrak{g}}, [\cdot,\cdot]_{\widetilde{\mathfrak{g}}})$;
- homomorfizmów algebr Liego: $\jmath_{\mathfrak{a}}\ :\ \mathfrak{a} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}}$ oraz $\pi_{\mathfrak{g}}\ :\ \widetilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathfrak{g}$

tworzących krótki ciąg dokładny algebr Liego

(2)
$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\jmath_{\mathfrak{a}}} \widetilde{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{g}}} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbf{0}$$

i takich, że $\jmath_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{z}(\widetilde{\mathfrak{g}})$, gdzie

$$\mathfrak{z}(\widetilde{\mathfrak{g}}) = \{\ X \in \widetilde{\mathfrak{g}} \quad | \quad \forall_{Y \in \widetilde{\mathfrak{g}}}\ :\ [X, Y]_{\widetilde{\mathfrak{g}}} = 0\ \}$$

jest **centrum algebry Liego**[4] $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Rozszerzenie nazywamy **rozszczepionym**, ilekroć epimorfizm $\pi_{\mathfrak{g}}$ ma cięcie w $\mathbf{LieAlg}_{\mathbb{R}}$, tj. istnieje homomorfizm algebr Liego

$$\sigma\ :\ \mathfrak{g} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}}$$

o własności

(3)
$$\pi_{\mathfrak{g}} \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\,.$$

Mówimy wówczas także, że krótki ciąg dokładny stowarzyszony z rozszerzeniem **rozszczepia się**.

Równoważność między rozszerzeniami $(\widetilde{\mathfrak{g}}_A, \jmath_{\mathfrak{a}}^A, \pi_{\mathfrak{g}}^A)$, $A \in \{1, 2\}$ **algebry Liego $\mathfrak{g}$ przez** $\mathfrak{a}$ to izomorfizm algebr Liego

$$\iota\ :\ \widetilde{\mathfrak{g}}_1 \xrightarrow{\cong} \widetilde{\mathfrak{g}}_2$$

domykający diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathfrak{a} \arrow[r, "\jmath_{\mathfrak{a}}^1"] \arrow[d, equal] & \widetilde{\mathfrak{g}}_1 \arrow[r, "\pi_{\mathfrak{g}}^1"] \arrow[d, "\iota"', "\cong"] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbf{0} \arrow[d, equal] \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r, "\jmath_{\mathfrak{a}}^2"'] & \widetilde{\mathfrak{g}}_2 \arrow[r, "\pi_{\mathfrak{g}}^2"'] & \mathfrak{g} \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd}\,.$$

który będziemy zapisywać w postaci

$$\begin{tikzcd}
 & & \widetilde{\mathfrak{g}}_1 \arrow[dd, "\iota"', "\cong"] \arrow[dr, "\pi_{\mathfrak{g}}^1"] & & \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[ur, "\jmath_{\mathfrak{a}}^1"] \arrow[dr, "\jmath_{\mathfrak{a}}^2"'] & & \mathfrak{g} \arrow[r] & \mathbf{0} \\
 & & \widetilde{\mathfrak{g}}_2 \arrow[ur, "\pi_{\mathfrak{g}}^2"'] & &
\end{tikzcd}$$

dla zaoszczędzenia e-inkaustu.

[4] Odpowiedniość między $\mathfrak{z}(\widetilde{\mathfrak{g}})$ i $\mathscr{Z}(\widetilde{\mathrm{G}})$ daje się łatwo uchwycić przy pomocy odwzorowania $\exp^{\widetilde{\mathrm{G}}}$.

Ostatnia definicja daje nam do ręki wygodne narzędzia do badania algebraicznego sensu kohomologii Cartana–Eilenberga. Odczytamy go z dwóch stwierdzeń, które ustalają zapowiadaną wcześniej odpowiedniość między klasami $H^2(\mathfrak{g};\mathfrak{a})$ i rozszerzeniami centralnymi $\mathfrak{g}$ przez $\mathfrak{a}$. Podajemy je wraz z dość technicznymi dowodami, których wartość zasadza się na prostocie i konstruktywności, ta ostatnia zaś wytycza naturalny szlak ku „wersji odcałkowanej" – patrz: Uwaga 1. Zaczynamy od

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy zapis Def. 3. Klasa równoważności rozszerzenia centralnego $(\widetilde{\mathfrak{g}},[\cdot,\cdot]_{\widetilde{\mathfrak{g}}})$ algebry Liego $\mathfrak{g}$ przez $\mathfrak{a}$ kanonicznie wyznacza klasę[5] w $H^2(\mathfrak{g};\mathfrak{a})$. Klasa ta jest równa zeru wtedy i tylko wtedy, gdy krótki ciąg dokładny stowarzyszony z rozszerzeniem rozszczepia się.

<u>*Dowód:*</u> Istnienie krótkiego ciągu dokładnego (2) implikuje istnienie odwzorowania $\mathbb{K}$-liniowego $\sigma\ :\ \mathfrak{g}\longrightarrow\widetilde{\mathfrak{g}}$ spełniającego relację (3) (podprzestrzeń $\jmath_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a})\subset\widetilde{\mathfrak{g}}$ ma dopełnienie proste), z czego wywodzimy istnienie (kanonicznego) izomorfizmu przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowych

$$\iota\ :\ \widetilde{\mathfrak{g}}\xrightarrow{\cong}\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{g}\ :\ \widetilde{X}\longmapsto\big(\jmath_{\mathfrak{a}}^{-1}\big(\widetilde{X}-\sigma\circ\pi_{\mathfrak{g}}(\widetilde{X})\big),\pi_{\mathfrak{g}}(\widetilde{X})\big)\,.$$

(Podkreślmy: Przeciwdziedzina ι *nie* jest *a priori* sumą prostą algebr Liego, tylko sumą prostą przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowych.) W rzeczy samej, odwzorowanie to jest dobrze określone, jako że $\widetilde{X}-\sigma\circ\pi_{\mathfrak{g}}(\widetilde{X})\in\ker\pi_{\mathfrak{g}}=\mathrm{im}\,\jmath_{\mathfrak{a}}$, a $\jmath_{\mathfrak{a}}$ jest izomorfizmem na swój obraz. Odwrotność powyższego odwzorowania przyjmuje jawną postać

$$\iota^{-1}\ :\ \mathfrak{a}\oplus\mathfrak{g}\longrightarrow\widetilde{\mathfrak{g}}\ :\ (A,X)\longmapsto\jmath_{\mathfrak{a}}(A)+\sigma(X)\,.$$

Możemy następnie podnieść ι do rangi izomorfizmu algebr Liego definiując na podprzestrzeni wektorowej $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{g}$ nawias Liego w terminach tych z $\widetilde{\mathfrak{g}}$ i $\mathfrak{g}$ wedle schematu

$$\begin{aligned}[(A_1,X_1),(A_2,X_2)]_{\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{g}} &:= \iota\big([\iota^{-1}(A_1,X_1),\iota^{-1}(A_2,X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}\big)=\iota\big([\sigma(X_1),\sigma(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}\big)\\ &= \Big(\jmath_{\mathfrak{a}}^{-1}\big([\sigma(X_1),\sigma(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}-\sigma\circ\pi_{\mathfrak{g}}\big([\sigma(X_1),\sigma(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}\big)\big),\pi_{\mathfrak{g}}\big([\sigma(X_1),\sigma(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}\big)\Big)\\ &= \Big(\jmath_{\mathfrak{a}}^{-1}\big([\sigma(X_1),\sigma(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}-\sigma\big([X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\big)\big),[X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\Big)\,.\end{aligned}$$

Sensowność tej definicji jest zapewniona przez własności odwzorowania p-liniowego

$$\Theta_\sigma\ :\ \mathfrak{g}^{\times 2}\longrightarrow\mathfrak{a}\ :\ (X_1,X_2)\longmapsto\jmath_{\mathfrak{a}}^{-1}\big([\sigma(X_1),\sigma(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}-\sigma\big([X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\big)\big)\,,$$

które dostarcza ilościowej miary nie-homomorficzności cięcia σ. Oto bowiem ilekroć obliczymy je na parze elementów $\mathfrak{g}$, spełniona jest relacja

$$\Theta_\sigma(X_2,X_1)=-\Theta_\sigma(X_1,X_2)\,,$$

jest to zatem 2-kołańcuch na $\mathfrak{g}$ o wartościach w $\mathfrak{a}$, przy czym ta ostatnia algebra objawia się tutaj w roli trywialnego $\mathfrak{g}$-modułu. Kobrzeg tego kołańcucha znika,

$$\begin{aligned}\delta_{\mathfrak{g}}^{(2)}\Theta_\sigma(X_1,X_2,X_3) &= -\Theta_\sigma\big([X_1,X_2]_{\mathfrak{g}},X_3\big)-\Theta_\sigma\big([X_3,X_1]_{\mathfrak{g}},X_2\big)-\Theta_\sigma\big([X_2,X_3]_{\mathfrak{g}},X_1\big)\\ &= -\jmath_{\mathfrak{a}}^{-1}\Big([\sigma\big([X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\big),\sigma(X_3)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}+[\sigma\big([X_3,X_1]_{\mathfrak{g}}\big),\sigma(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}+[\sigma\big([X_2,X_3]_{\mathfrak{g}}\big),\sigma(X_1)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}-\sigma\circ\mathrm{Jac}_{\mathfrak{g}}(X_1,X_2,X_3)\Big)\\ &= \jmath_{\mathfrak{a}}^{-1}\Big([\jmath_{\mathfrak{a}}\circ\Theta_\sigma(X_1,X_2),\sigma(X_3)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}+[\jmath_{\mathfrak{a}}\circ\Theta_\sigma(X_3,X_1),\sigma(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}+[\jmath_{\mathfrak{a}}\circ\Theta_\sigma(X_2,X_3),\sigma(X_1)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}\\ &\quad -\mathrm{Jac}_{\widetilde{\mathfrak{g}}}\big(\sigma(X_1),\sigma(X_2),\sigma(X_3)\big)+\sigma\circ\mathrm{Jac}_{\mathfrak{g}}(X_1,X_2,X_3)\Big)=0\,,\end{aligned}$$

gdzie to w ostatnim kroku przywołaliśmy inkluzję $\mathrm{im}\jmath_{\mathfrak{a}}\subset\mathfrak{z}(\widetilde{\mathfrak{g}})$. Bez trudu weryfikujemy oczekiwaną własność indukowanego nawiasu Liego:

$$\mathrm{Jac}_{\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{g}}\big((A_1,X_1),(A_2,X_2),(A_3,X_3)\big)=\big(-\delta_{\mathfrak{g}}^{(2)}\Theta_\sigma(X_1,X_2,X_3),\mathrm{Jac}_{\mathfrak{g}}(X_1,X_2,X_3)\big)=(0,0)\,,$$

[5] W zapisie 2. grupy kohomologii algebra komutatywna algebra Liego $\mathfrak{a}$ występuje w roli przestrzeni wektorowej – formalnie rzecz ujmując, utożsamiamy $\mathfrak{a}$ z jej obrazem w kategorii $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ względem **funktora zapominania**. Taka dwoista rola $\mathfrak{a}$ jest nieunikniona – wszak z jednej strony krótki ciąg dokładny opisujący rozszerzenie jest diagramem w kategorii $\mathbf{LiaAlg}_{\mathbb{K}}$, z drugiej zaś – kohomologia przyjmuje wartości w przestrzeni wektorowej.

stwierdzając na tej podstawie, że rozszerzenie centralne w istocie kanonicznie wyznacza 2-kocykl na $\mathfrak{g}$ o wartościach w $\mathfrak{a}$.

W następnej kolejności zbadamy, jak 2-kocykl ów zmienia się przy przejściu do równoważnego rozszerzenia centralnego. Mamy w tym wypadku do dyspozycji dwa monomorfizmy algebr Liego: $\jmath^A_{\mathfrak{a}} \; : \; \mathfrak{a} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}}_A,\ A \in \{1,2\}$ i dwa epimorfizmy algebr Liego: $\pi^A_{\mathfrak{g}} \; : \; \widetilde{\mathfrak{g}}_A \longrightarrow \mathfrak{g}$ wraz z odnośnymi cięciami $\mathbb{K}$-liniowymi $\sigma_A \; : \; \mathfrak{g} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}}_A$. Biorąc pod uwagę przemienność diagramu

$$\begin{tikzcd}
& & \widetilde{\mathfrak{g}}_1 \arrow[dd, "\varepsilon"'] \arrow[dr, "\pi^1_{\mathfrak{g}}"] & & \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[ur, "\jmath^1_{\mathfrak{a}}"] \arrow[dr, "\jmath^2_{\mathfrak{a}}"'] & & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[ul, dashed, "\sigma_1"] \arrow[dl, dashed, "\sigma_2"'] & \mathbf{0} \\
& & \widetilde{\mathfrak{g}}_2 \arrow[ur, "\pi^2_{\mathfrak{g}}"'] & &
\end{tikzcd} ,$$

wraz z tożsamością

$$\pi^1_{\mathfrak{g}} \circ \left(\varepsilon^{-1} \circ \sigma_2 - \sigma_1 \right) = \pi^2_{\mathfrak{g}} \circ \sigma_2 - \pi^1_{\mathfrak{g}} \circ \sigma_1 = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} = 0 \,,$$

która przesądza o istnieniu odwzorowania $\mathbb{K}$-liniowego $\mu_\varepsilon \; : \; \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{a}$ (wszak $\mathrm{Ker}\pi^1_{\mathfrak{g}} = \mathrm{Im}\jmath^1_{\mathfrak{a}}$) o własności

$$\varepsilon^{-1} \circ \sigma_2 - \sigma_1 = \jmath^1_{\mathfrak{a}} \circ \mu_\varepsilon \,,$$

bez trudu stwierdzamy, dla dowolnych wektorów $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}
\jmath^1_{\mathfrak{a}} \circ (\Theta_{\sigma_2} - \Theta_{\sigma_1})(X_1, X_2) &= \left(\varepsilon^{-1} \circ \jmath^2_{\mathfrak{a}} \circ \Theta_{\sigma_2} - \jmath^1_{\mathfrak{a}} \circ \Theta_{\sigma_1} \right)(X_1, X_2) \\
= [\varepsilon^{-1} \circ \sigma_2(X_1), \varepsilon^{-1} \circ \sigma_2(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}_1} &- [\sigma_1(X_1), \sigma_1(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}_1} - \jmath^1_{\mathfrak{a}} \circ \mu_\varepsilon([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}) \\
= [\jmath^1_{\mathfrak{a}} \circ \mu_\varepsilon(X_1), \varepsilon^{-1} \circ \sigma_2(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}_1} + [\sigma_1(X_1), &\varepsilon^{-1} \circ \sigma_2(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}_1} - [\sigma_1(X_1), \sigma_1(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}_1} \\
-\jmath^1_{\mathfrak{a}} \circ \mu_\varepsilon([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}) &= [\sigma_1(X_1), \jmath^1_{\mathfrak{a}} \circ \mu_\varepsilon(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}_1} - \jmath^1_{\mathfrak{a}} \circ \mu_\varepsilon([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}) \\
&= -\jmath^1_{\mathfrak{a}} \circ \mu_\varepsilon([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}) \equiv \jmath^1_{\mathfrak{a}} \circ \delta^{(1)}_{\mathfrak{g}} \mu_\varepsilon(X_1, X_2) \,,
\end{aligned}$$

a stąd już wprost (wobec injektywności $\jmath^1_{\mathfrak{a}}$)

$$\Theta_{\sigma_2} - \Theta_{\sigma_1} = \delta^{(1)}_{\mathfrak{g}} \mu_\varepsilon \,, \qquad \text{czyli} \qquad [\Theta_{\sigma_2}]_{\mathfrak{g}} = [\Theta_{\sigma_1}]_{\mathfrak{g}} \,.$$

Na zakończenie dowodzimy ostatniej części tezy. Znikanie (klasy) 2-kocyklu Θ_σ w przypadku, gdy σ jest cięciem w kategorii algebr Liego (a nie tylko w kategorii przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowych), jest oczywiste, pozostaje zatem pokazać, że kohomologiczna trywialność Θ_σ implikuje istnienie cięcia w kategorii algebr Liego. Warunek trywialności 2-kocyklu Θ_σ możemy zgrabnie przepisać w postaci

$$[\sigma(X_1), \sigma(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}} = \sigma_\mu([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}) \,, \qquad \sigma_\mu := \sigma - \jmath_{\mathfrak{a}} \circ \mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, \widetilde{\mathfrak{g}}) \,.$$

W świetle komutatywności $\jmath_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a})$ to daje nam relację

$$[\sigma_\mu(X_1), \sigma_\mu(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}} = \sigma_\mu\big([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}\big) \,,$$

możemy zatem podnieść σ_μ do rangi homomorfizmu algebr Liego. Jako że ponadto spełniona jest tożsamość

$$\pi_{\mathfrak{g}} \circ \sigma_\mu = \pi_{\mathfrak{g}} \circ \sigma - \pi_{\mathfrak{g}} \circ \jmath_{\mathfrak{a}} \circ \mu = \pi_{\mathfrak{g}} \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} \,,$$

rozpoznajemy w nim poszukiwane cięcie $\pi_{\mathfrak{g}}$. □

W następnym kroku zajmiemy się przyporządkowaniem odwrotnym.

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def. 3. Klasa w $H^2(\mathfrak{g};\mathfrak{a})$ kanonicznie zadaje klasę równoważności rozszerzeń centralnych $(\widetilde{\mathfrak{g}},[\cdot,\cdot]_{\widetilde{\mathfrak{g}}})$ algebry Liego $\mathfrak{g}$ przez $\mathfrak{a}$. Rozszerzenia te rozszczepiają się wtedy i tylko wtedy, gdy klasa ta znika.

Dowód: Mając dany dowolny 2-kocykl $\Theta \in Z^2(\mathfrak{g};\mathfrak{a})$, wyposażamy przestrzeń $\mathbb{K}$-liniową $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{g} =: \widetilde{\mathfrak{g}}$ w jawnie skośne odwzorowanie dwuliniowe

$$[\cdot,\cdot]_\Theta \;:\; \widetilde{\mathfrak{g}}^{\times 2} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}} \;:\; \big((A_1,X_1),(A_2,X_2)\big) \longmapsto \big(\Theta(X_1,X_2),[X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\big)\,.$$

Bez trudu sprawdzamy, że mamy do czynienia z nawiasem Liego,

$$\mathrm{Jac}_{\widetilde{\mathfrak{g}}}\big((A_1,X_1),(A_2,X_2),(A_3,X_3)\big) = \big(-\delta^{(2)}_{\mathfrak{g}}\Theta(X_1,X_2,X_3),\mathrm{Jac}_{\mathfrak{g}}(X_1,X_2,X_3)\big) = (0,0)\,,$$

przeto $(\widetilde{\mathfrak{g}},[\cdot,\cdot]_\Theta)$ jest algebrą Liego.

Komutatywność $\mathfrak{a}$ przesądza o tym, że kanoniczna injekcja $\jmath_{\mathfrak{a}} \;:\; \mathfrak{a}\longrightarrow\widetilde{\mathfrak{g}} \;:\; A\longmapsto(A,0)$ jest monomorfizmem algebr Liego dla tak określonej struktury na $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Z kolei kanoniczny $\mathbb{K}$-liniowy rzut $\pi_{\mathfrak{g}} \;:\; \widetilde{\mathfrak{g}}\longrightarrow\mathfrak{g} \;:\; (A,X)\longmapsto X$ zyskuje teraz status epimorfizmu algebr Liego, o oczywistej własności $\ker\pi_{\mathfrak{g}} = \mathrm{im}\,\jmath_{\mathfrak{a}}$, na koniec więc otrzymujemy krótki ciąg dokładny algebr Liego

$$\mathbf{0}\longrightarrow\mathfrak{a}\xrightarrow{\jmath_{\mathfrak{a}}}\widetilde{\mathfrak{g}}\xrightarrow{\pi_{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g}\longrightarrow\mathbf{0}$$

który pozwala nam zidentyfikować $\widetilde{\mathfrak{g}}$ jako rozszerzenie centralne $\mathfrak{g}$ przez $\mathfrak{a}$.

W obecności dwóch kohomologicznych 2-kocykli: $\Theta_2 = \Theta_1+\delta^{(1)}_{\mathfrak{g}}\mu,\ \mu\in C^1(\mathfrak{g};\mathfrak{a})$, opisany powyżej schemat daje dwa nawiasy Liego na $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{a}\oplus\mathfrak{g}$, czyli dwa rozszerzenia centralne algebry Liego $\mathfrak{g}$ przez $\mathfrak{a}$, przy czym łatwo widać, że $\mathbb{K}$-liniowy automorfizm

$$\varepsilon_\mu \;:\; \widetilde{\mathfrak{g}}\longrightarrow\widetilde{\mathfrak{g}} \;:\; (A,X)\longmapsto\big(A-\mu(X),X\big)$$

izomorficznie odwzorowuje $(\widetilde{\mathfrak{g}},[\cdot,\cdot]_{\Theta_1})$ w $(\widetilde{\mathfrak{g}},[\cdot,\cdot]_{\Theta_2})$,

$$\begin{aligned}[\varepsilon_\mu(A_1,X_1),\varepsilon_\mu(A_2,X_2)]_{\Theta_2} &= \big(\Theta_2(X_1,X_2),[X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\big) = \big(\Theta_1(X_1,X_2)-\mu([X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}),[X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\big)\\ &\equiv \varepsilon_\mu\big([(A_1,X_1),(A_2,X_2)]_{\Theta_1}\big)\,.\end{aligned}$$

Przy tym spełnione są oczekiwane tożsamości:

$$\pi_{\widetilde{\mathfrak{g}}_{(2)}}\circ\varepsilon_\mu(A,X) = X \equiv \pi_{\widetilde{\mathfrak{g}}_{(1)}}(A,X)$$

oraz

$$\varepsilon_\mu\circ\jmath^{(1)}_{\mathfrak{a}}(A) = \varepsilon_\mu(A,0) = (A,0)\equiv\jmath^{(2)}_{\mathfrak{a}}(A)\,.$$

Ilekroć Θ jest 2-kobrzegiem, $\Theta = \delta^{(1)}_{\mathfrak{g}}\mu,\ \mu\in C^1_0(\mathfrak{g};\mathfrak{a})$, możemy włożyć $\mathfrak{g}$ w $\widetilde{\mathfrak{g}}$ przy użyciu odwzorowania $\mathbb{K}$-liniowego

$$\sigma_\mu \;:\; \mathfrak{g}\longrightarrow\widetilde{\mathfrak{g}} \;:\; X\longmapsto\big(-\mu(X),X\big)$$

w oczywisty sposób będące $\mathbb{K}$-liniowym cięciem $\pi_{\mathfrak{g}}$ i podnoszące się do monomorfizmu algebr Liego,

$$\begin{aligned}[\sigma_\mu(X_1),\sigma_\mu(X_2)]_\Theta &= [(-\mu(X_1),X_1),(-\mu(X_2),X_2)]_\Theta = \big(\Theta(X_1,X_2),[X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\big)\\ &= \big(-\mu\left([X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\right),[X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\big)\equiv\sigma_\mu\left([X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\right)\,.\end{aligned}$$

Krótki ciąg dokładny algebr Liego stowarzyszony z opisanym rozszerzeniem rozszczepia się.

I odwrotnie, dowolne cięcie $\pi_{\mathfrak{g}}$ w kategorii algebr Liego jest nieodzownie postaci

$$\sigma_\mu \;:\; \mathfrak{g}\longrightarrow\widetilde{\mathfrak{g}} \;:\; X\longmapsto\big(-\mu(X),X\big)$$

dla pewnego $\mu\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ o własności

$$\big(\Theta(X_1,X_2),[X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\big) = [\sigma_\mu(X_1),\sigma_\mu(X_2)]_\Theta = \sigma_\mu\left([X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\right) = \big(-\mu\left([X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\right),[X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\big)\,,$$

zatem $\Theta = \delta^{(1)}_{\mathfrak{g}}\mu$, zgodnie z tezą dowodzonego stwierdzenia. □

Nasze studium podsumowuje

Twierdzenie 1. Niechaj $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ będzie algebrą Liego. Istnieje kanoniczna bijekcja między $\mathrm{CE}^2(\mathfrak{g})$ i zbiorem klas równoważności rozszerzeń centralnych $\mathfrak{g}$ przez $\mathbb{R}$. W obrazie tej bijekcji klasa trywialna $\mathrm{CE}^2(\mathfrak{g})$ odpowiada klasie równoważności rozszerzenia rozszczepionego.

Przed przystąpieniem do egzemplifikacji powyższych abstrakcyjnych rozważań i ich umieszczeniem w kontekście fizykalnym poddamy nasz ostatni wynik reinterpretacji pozwalającej na wyrobienie sobie w odniesieniu do niego przydatnej intuicji (o istotnych konsekwencjach geometrycznych).

Uwaga 1. Istnienie rozszerzenia centralnego $\mathfrak{g}$ przez $\mathfrak{a}$ wyznaczanego przez Θ implikuje trywializację cofnięcia 2-kocyklu

$$\widetilde{\Theta} := \pi_{\mathfrak{g}}^* \Theta \ : \ \widetilde{\mathfrak{g}}^{\times 2} \longrightarrow \mathfrak{a} \ : \ \big((A_1, X_1), (A_2, X_2)\big) \longmapsto \Theta(X_1, X_2)$$

opisaną wzorem

$$\widetilde{\Theta} = \delta^{(1)}_{\widetilde{\mathfrak{g}}} \widetilde{\mu}\,, \qquad \widetilde{\mu} := -\pi_{\mathfrak{a}} \ : \ \widetilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathfrak{a} \ : \ (A, X) \longmapsto -A\,. \tag{4}$$

Tym sposobem nietrywialny 2-kocykl na wyjściowej algebrze $\mathfrak{g}$ znajduje swoją (kohomologiczną) trywializację na jej rozszerzeniu $\widetilde{\mathfrak{g}}$.

2.1. **A Pair of Whatabouts.** Powyższe rozważania pozostawiają nas z dwoma naturalnymi a nietrywialnymi pytaniami, na które odpowiedzi są wprawdzie znane, lecz zrozumienie ich wymagałoby poważnego (i czasochłonnego) strukturalnego odejścia od głównego nurtu niniejszego wykładu i jako takie jest pozostawione zainteresowanym Słuchaczom do samodzielnego wypracowania:

(1) *W jakich okolicznościach centralne rozszerzenie algebry Liego „całkuje się" do centralnego rozszerzenia odnośnej grup Liego?* W tym kontekście warto zauważyć, że obserwacja będąca treścią Uwagi 1 rodzi skojarzenie z trywializacją 2-kocyklu de Rhama[6] (czyli 2-formy zamkniętej), takiego jak np. 2-forma Maxwella opisująca (w formacie jawnie lorentzowsko współzmienniczym) natężenie pola elektromagnetycznego, na przestrzeni totalnej wiązki liniowej (lub głównej) z powiązaniem o krzywiźnie tożsamej z tymże 2-kocyklem. To skojarzenie jest nie tylko w pełni usprawiedliwione, ale wiedzie wprost do systematycznego studium odpowiedzi na wyjściowe pytanie – patrz: praca Tuynmana i Wiegerincka [TW87].

(2) *Czy istnieje algebraiczna interpretacja wyższych klas kohomologii algebr Liego analogiczna do tej słusznej dla $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ przedstawionej powyżej?* Odpowiedź, dającą się najzgrabniej sformułować w języku teorii algebr typu L_∞, czyli swoistych kategoryfikacji struktury algebry Liego podanych przez Stasheffa w pracy [Sta92], znaleźli Baez i Crans w pracy [BC04]. Przedstawiona tam konstrukcja tzw. 2-algebry Liego, stowarzyszonej z 3-kocyklem na algebrze Liego, uogólnia się w naturalny sposób na przypadek wyższych kocykli/kohomologii. Struktury te dostarczają narzędzi opisu (skategoryfikowanych) symetrii teorii pola z gatunku modelu σ, opisujących propagację rozciągłych rozkładów energii i ładunku topologicznego w zewnętrznych polach: grawitacyjnym i p-formy (uogólnienie pola Maxwella) .

3. Przykład poglądowy

Na pierwszy rzut oka rozszerzenia algebr mogą się wydawać strukturami dość egzotycznymi i ezoterycznymi. O ich powszechności i naturalności w ramach kanonicznego opisu symetrii ciągłych w mechanice klasycznej i teorii pola w terminach odnośnych ładunków Noether oraz w operatorowym opisie tychże symetrii w teorii kwantowej przekona uważnego Czytelnika każdy rzetelny kurs z tych dziedzin, w którym będą omawiane anomalie algebr ładunków i prądów symetrii w obecności – np. – ładunku topologicznego na obiektach elementarnych teorii fizycznej (naładowanych cząstkach punktowych, pętlach itp.), wzgl. rzutowych realizacji symetrii klasycznych na

[6]Taka trywializacja 2-kocyklu $\mathrm{F} \in Z^2_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R})$ wymaga jeszcze spełnienia warunku $\mathrm{Per}(\mathrm{F}) \subset 2\pi\mathbb{Z}$ (w którego zapisie $\mathrm{Per}(\mathrm{F})$ jest grupą przemienną tzw. **okresów** 2-kocyklu F, czyli wyników jego całkowania po 2-cyklach homologicznych w M).

przestrzeni Hilberta układu fizycznego. Prostej ilustracji takiego fizykalnego scenariusza dostarcza poniższa dyskusja szczegółowa.

Przedmiotem naszego zainteresowania w niniejszym przykładzie są realizacje symetrii translacyjnej w prostych układach mechanicznych – zarówno w reżymie klasycznym, jak i kwantowym – w kontekście rozszerzeń centralnych algebr i grup Liego. Tytułem przygotowania do ich omówienia rozważmy komutatywną algebrę Liego o 4 generatorach

$$\mathfrak{t}(3) = \bigoplus_{\mu\in\{1,2,3\}} \langle P_i \rangle_{\mathbb{R}}$$

i nawiasach Liego

$$[P_i, P_j] = 0, \qquad i,j \in \{1,2,3\},$$

czyli stycznościową algebrę Liego przemiennej grupy Liego translacji (w) $\mathbb{R}^{\times 3} \equiv \mathrm{T}(3)$ o operacji binarnej

$$\mathrm{m} \ : \ \mathrm{T}(3) \times \mathrm{T}(3) \longrightarrow \mathrm{T}(3) \ : \ \big(x^i, y^i\big) \longmapsto \big(x^i + y^i\big),$$

odwrotności

$$\mathrm{Inv} \ : \ \mathrm{T}(3) \circlearrowleft \ : \ \big(x^i\big) \longmapsto \big(-x^i\big)$$

i elemencie neutralnym

$$e = (0,0,0,0).$$

Operacja binarna pozwala zdefiniować działanie lewe regularne grupy $\mathrm{T}(3)$ na sobie, dane wzorem

$$\ell_{\cdot} \ : \ \mathrm{T}(3) \longrightarrow \mathrm{Diff}^\infty\big(\mathrm{T}(3)\big) \ : \ \big(x^i\big) \longmapsto \mathrm{m}\big(\big(x^i\big), \cdot\big) \equiv \big(x^i + \cdot\big) =: \ell_{(x^i)},$$

do którego będziemy się odwoływać w dalszej części naszych rozważań.

Jednym z pytań, na które poszukamy odpowiedzi, jest wpływ ładunku niesionego przez obiekt fundamentalny układu mechanicznego na realizację rzeczonej symetrii translacyjnej w formalizmie kanonicznym. Ujawnienie takiego wpływu wymaga obecności zewnętrznego pola elektromagnetycznego, którego naturalnym modelem matematycznym (uwzględniającym relatywistyczną niezmienniczość maxwellowskiej dynamiki) jest 2-kocykl de Rhama na przestrzeni konfiguracyjnej układu mechanicznego zdefiniowany w terminach natężenia pola elektrycznego oraz indukcji magnetycznej. Jako że celem naszym jest studium mechaniki nierelatywistycznej na cięciu stałego czasu, ograniczymy się do składowej przestrzenno-przestrzennej tegoż 2-kocyklu, którą identyfikujemy z polem indukcji magnetycznej. Niechaj zatem

$$(\omega_{ij} = -\omega_{ji}) \in \mathbb{R}(3)$$

będzie dowolną *niezerową* macierzą. Oznaczywszy elementy bazy $\mathfrak{t}(3)^* \cong \mathbb{R}^{\times 3}$ dualnej do $\{P_i\}_{i\in\{1,2,3\}}$ jako π^i, $i \in \{1,2,3\}$,

$$\pi^i(P_j) = \delta^i{}_j, \qquad i,j \in \{1,2,3\},$$

definiujemy 2-kołańcuch na $\mathfrak{t}(3)$ o wartościach w trywialnym $\mathfrak{t}(3)$-module $\mathbb{R}$ wzorem

$$\omega := \omega_{ij}\, \pi^i \wedge \pi^j \in C^2\big(\mathfrak{t}(3); \mathbb{R}\big), \tag{5}$$

tj. dla dowolnej pary wektorów $X_A = X_A^i\, P_i \in \mathfrak{t}(3)$, $A \in \{1,2\}$ mamy

$$\omega(X_1, X_2) = 2\omega_{ij}\, X_1^i\, X_2^j.$$

Bez trudu sprawdzamy zamkniętość ω licząc (dla dowolnych $X_B = X_B^i\, P_i \in \mathfrak{t}(3)$, $B \in \{0,1,2\}$)

$$\begin{aligned} &\delta^{(2)}_{\mathfrak{t}(3)}\omega(X_0, X_1, X_2) \\ = \;& -\omega\big(X_0^i\, X_1^j\, [P_i, P_j]_{\mathfrak{t}(3)}, X_3\big) + \omega\big(X_0^i\, X_2^j\, [P_i, P_j]_{\mathfrak{t}(3)}, X_1\big) - \omega\big(X_1^i\, X_2^j\, [P_i, P_j]_{\mathfrak{t}(3)}, X_0\big) = 0. \end{aligned}$$

Mamy zatem do czynienia z 2-kocyklem Chevalleya–Eilenberga,

$$\omega \in Z^2\big(\mathfrak{t}(3); \mathbb{R}\big).$$

Załóżmy, że jest to 2-kobrzeg, tj., że istnieje 1-kołańcuch $\theta \in C^1(\mathfrak{t}(3);\mathbb{R}) \equiv \mathfrak{t}(3)^*$ o własności

$$\omega = \delta^{(1)}_{\mathfrak{t}(3)}\theta\,,$$

która tłumaczy się na warunek

$$2\omega_{ij}\,X_1^i\,X_2^j = \omega(X_1,X_2) \overset{!}{=} \delta^{(1)}_{\mathfrak{t}(3)}\theta(X_1,X_2) = -\theta\big(X_1^i\,X_2^j\,[P_i,P_j]\big) = -\theta(0_{\mathfrak{t}(3)}) \equiv 0\,,$$

prowadzący do sprzeczności z założeniem o niezerowości ω. 2-kocykl ω definiuje zatem nietrywialną klasę

$$[\omega]_{\mathfrak{t}(3)} \in \mathrm{CE}^2\big(\mathfrak{t}(3)\big)\,,$$

więc także – w zgodzie z tezą Stw. 4 – rozszerzenie centralne

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\jmath_{\mathbb{R}}} \widetilde{\mathfrak{t}(3)}_\omega \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{t}(3)}} \mathfrak{t}(3) \longrightarrow \mathbf{0}\,. \tag{6}$$

W tym kontekście 2-kocykl ω będziemy określać mianem **2-kocyklu rozszerzenia** $\widetilde{\mathfrak{t}(3)}_\omega$. W świetle konstruktywnego dowodu Stw. 4 jako reprezentanta klasy równoważności takich rozszerzeń możemy przyjąć

$$\big(\widetilde{\mathfrak{t}(3)}_\omega = \mathbb{R}\oplus\mathfrak{t}(3), [\cdot,\cdot]_{\widetilde{\mathfrak{t}(3)}_\omega}\big)\,.$$

Oznaczywszy wektory bazowe w $\widetilde{\mathfrak{t}(3)}_\omega$ jako

$$Z := (1,0)\,, \qquad \widetilde{P}_i := (0,P_i)\,, \qquad i \in \{1,2,3\}\,,$$

dostajemy algebrę Liego

$$[\widetilde{P}_i,\widetilde{P}_j]_{\widetilde{\mathfrak{t}(3)}_\omega} = 2\omega_{ij}\,Z\,, \qquad [\widetilde{P}_i,Z]_{\widetilde{\mathfrak{t}(3)}_\omega} = 0_{\widetilde{\mathfrak{t}(3)}_\omega}\,, \qquad [Z,Z]_{\widetilde{\mathfrak{t}(3)}_\omega} = 0_{\widetilde{\mathfrak{t}(3)}_\omega}\,.$$

Bez trudu „całkujemy" powyższe rozszerzenie algebry Liego do rozszerzenia grupy Liego $\mathrm{T}(3)$ przez $\mathbb{R}$ opisywanego przez krótki ciąg dokładny grup Liego

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{I_{\mathbb{R}}} \widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega \xrightarrow{\Pi_{\mathrm{T}(3)}} \mathrm{T}(3) \longrightarrow \mathbf{1}\,, \tag{7}$$

w którego zapisie $I_{\mathbb{R}}$ i $\Pi_{\mathrm{T}(3)}$ są homomorfizmami grup Liego. W obecnych nader nieskomplikowanych okolicznościach moglibyśmy wręcz zgadnąć postać tego rozszerzenia, my jednak pójdziemy inną drogą, która pozwala powrócić do geometrycznego punktu wyjścia naszych rozważań, a przy tym okazuje się znajdować zastosowanie w okolicznościach dużo mniej oczywistych (np. w kontekście ładunkowych rozszerzeń (super)algebr Liego supersymetrii – patrz: praca [CdAIPB00]).

Zaczniemy od reinterpretacji powyższego zagadnienia i otrzymanego wyniku w terminach rachunku różniczkowego na grupie Liego $\mathbb{R}^{\times 3}$. Zaczynamy od komutatywnej algebry pól translacyjnie (lewo-)niezmienniczych na $\mathbb{R}^{\times 3}$, dla których bazą są pola

$$L_i \equiv L_{P_i} \equiv \partial_i\,, \qquad i \in \{1,2,3\}$$

o trywialnych komutatorach

$$[L_i,L_j] = 0\,, \qquad i,j \in \{1,2,3\}\,.$$

Dualną bazę przestrzeni 1-form translacyjnie (lewo-)niezmienniczych na $\mathbb{R}^{\times 3}$ tworzą 1-formy

$$\theta^i_{\mathrm{L}} = \mathsf{d}x^i\,, \qquad i \in \{1,2,3\}\,.$$

Odpowiednikiem 2-kocyklu ω jest tutaj 2-kocykl de Rhama

$$\Omega = \omega_{ij}\,\mathsf{d}x^i \wedge \mathsf{d}x^j\,,$$

jawnie translacyjnie (lewo-)niezmienniczy, lecz nieposidający 1-formy pierwotnej *o tej samej własności*. Istotnie, 1-forma taka musiałaby być postaci

$$\Theta = \Theta_i\,\mathsf{d}x^i\,, \qquad \Theta_i \in \mathbb{R}$$

($\mathbb{R}$-liniowa kombinacja bazowych 1-form translacyjnie (lewo-)niezmienniczych), co jednak doprowadziłoby nas do sprzeczności

$$0 \neq \Omega \overset{!}{=} \mathsf{d}\Theta = \partial_j\Theta_i\,\mathsf{d}x^j \wedge \mathsf{d}x^i = 0\,.$$

Należy w tym momencie dobitnie podkreślić (rzecz oczywistą): 2-forma Ω *jest* dokładna w kohomologii de Rhama (trywialnej dla $\mathbb{R}^{\times 3}$) – ma np. 1-formę pierwotną

$$\vartheta(x) = \omega_{ij}\, x^i\, \mathsf{d}x^j \,,$$

nie jest natomiast dokładna w kohomologii (lewo)niezmienniczej.

W świetle Uwagi 1 możemy oczekiwać, że trywializacja w kohomologii Cartana–Eilenberga będzie możliwa dopiero po cofnięciu Ω na grupę Liego $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega$ o algebrze Liego $\widetilde{\mathfrak{t}(3)}_\omega$ otrzymanej uprzednio. Postać tej ostatniej każe nam podejrzewać, że jako zbiór grupa $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega$ będzie postaci[7] $\mathbb{R}\times\mathrm{T}(3)$, z kanonicznym rzutem

$$\Pi_{\mathrm{T}(3)} \equiv \mathrm{pr}_2 \;:\; \mathbb{R}\times\mathrm{T}(3) \longrightarrow \mathrm{T}(3)$$

jako epimorfizmem grup Liego współokreślającym rozszerzenie, przy czym pierwszy czynnik kartezjański będzie podgrupą przemienną (o algebrze Liego $\mathbb{R}$), a poszukiwana operacja binarna $\widetilde{\mathrm{m}}$ na $\mathbb{R}\times\mathrm{T}(3)$ będzie wprowadzać „poprawkę" do odnośnej operacji binarnej (dodawania) zależną od drugich składowych argumentów. Jak wyznaczyć $\widetilde{\mathrm{m}}$? Zauważmy po pierwsze, że *lewo*-$\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega$-*niezmiennicza* 1-forma pierwotna $\widetilde{\Theta}$ dla $\Pi^*_{\mathrm{T}(3)}\Omega$ spełnia tożsamość

$$\mathsf{d}\widetilde{\Theta} = \Pi^*_{\mathrm{T}(3)}\Omega = \mathsf{d}\Pi^*_{\mathrm{T}(3)}\vartheta \qquad\Longrightarrow\qquad \widetilde{\Theta} - \Pi^*_{\mathrm{T}(3)}\vartheta \in Z^1\big(\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega, \mathbb{R}\big)\,,$$

a ponieważ $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega$ w antycypowanej postaci także jest ściągalna, przeto

$$\widetilde{\Theta} = \mathsf{d}F + \Pi^*_{\mathrm{T}(3)}\vartheta$$

dla pewnej gładkiej funkcji $F \in C^\infty(\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega, \mathbb{R})$, przy czym w świetle Równ. (4), które identyfikuje $\widetilde{\Theta}$ jako 1-formę dualną do pola lewoniezmienniczego ∂_Z na przemiennej grupie Liego $\mathbb{R}$ (o kartezjańskiej współrzędnej globalnej Z) rozszerzającej $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega$, oczekujemy tożsamości

$$\mathsf{d}F \equiv -\mathsf{d}Z\,.$$

Postulujemy zatem

$$\widetilde{\Theta}(Z,x) = -\mathsf{d}Z + \omega_{ij}\, x^i\, \mathsf{d}x^j\,.$$

Po drugie „zmienniczość" znalezionej przez nas 1-formy pierwotnej dla Ω względem lewych translacji na $\mathbb{R}^{\times 3}$ przybiera szczególnie prostą postać: oto poprawka do ϑ będąca wynikiem cofnięcia ϑ wzdłuż $\ell_{(\varepsilon^i)}$ dla *stałego* wektora $\varepsilon \equiv (\varepsilon^i) \in \mathbb{R}^{\times 3}$ jest 1-formą zamkniętą (to konstatacja niezależna od grupy Liego, na której rozpatrujemy kohomologię Cartana–Eilenberga),

$$\mathsf{d}\vartheta = \Omega = \ell^*_\varepsilon\Omega = \ell^*_\varepsilon\mathsf{d}\vartheta = \mathsf{d}\ell^*_\varepsilon\vartheta \qquad\Longrightarrow\qquad \ell^*_\varepsilon\vartheta - \vartheta \in Z^1\big(\mathrm{T}(3), \mathbb{R}\big)\,,$$

więc też dokładną w konsekwencji trywialności kohomologii de Rhama $\mathrm{T}(3)$,

$$\big(\ell^*_\varepsilon\vartheta - \vartheta\big)(x) = \mathsf{d}\big(\omega_{ij}\,\varepsilon^i\, x^j\big)\,.$$

To w połączeniu z wcześniejszym postulatem dotyczącym postaci $\widetilde{\Theta}$ pozwala *wyprowadzić* możliwą postać operacji binarnej $\widetilde{\mathrm{m}}$ z warunku niezmienniczości $\widetilde{\Theta}$ względem lewostronnych translacji na $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega$ indukowanych przez $\widetilde{\mathrm{m}}$ właśnie. Istotnie, jeśli zapiszemy

$$\widetilde{\ell}_{(0,\varepsilon)}\big(Z, x^i\big) \equiv \widetilde{\mathrm{m}}\big(\big(0,\varepsilon^i\big), \big(Z, x^i\big)\big) =: \big(\Phi(Z,x,\varepsilon), x^i + \varepsilon^i\big)\,,$$

uwzględniając po drodze homomorficzny charakter $\Pi_{\mathrm{T}(3)} \equiv \mathrm{pr}_2$, to z warunku lewoniezmienniczości $\widetilde{\Theta}$,

$$-\mathsf{d}\Phi(Z,x,\varepsilon) + \omega_{ij}\,\big(x^i+\varepsilon^i\big)\,\mathsf{d}x^j = \ell^*_{(0,\varepsilon)}\widetilde{\Theta}(Z,x) \stackrel{!}{=} \widetilde{\Theta}(Z,x) = -\mathsf{d}Z + \omega_{ij}\, x^i\, \mathsf{d}x^j\,,$$

odczytujemy (*modulo constans*)

$$\Phi(Z,x,\varepsilon) = Z + \omega_{ij}\,\varepsilon^i\, x^j\,,$$

[7] Rzecz jasna, nie ma *jedynej* grupy Liego odpowiadającej danej algebrze Liego $\mathbb{R}$. W naszych rozważaniach dokonujemy po prostu wyboru najprostszego.

co prowadzi nas do zapostulowania operacji binarnej na $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega$ w postaci

$$\widetilde{\mathrm{m}}\ :\ \widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega \times \widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega \longrightarrow \widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega\ :\ \big((Z_1, x_1^i), (Z_2, x_2^j)\big) \longmapsto \big(Z_1 + Z_2 + \omega_{mn}\, x_1^m\, x_2^n, x_1^i + x_2^i\big)\,.$$

Pozostaje jeszcze tylko sprawdzić, że tak określona operacja binarna jest łączna. O tym, że tak jest w istocie, przekonuje bezpośredni rachunek – z jednej strony:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{m}}\big(\widetilde{\mathrm{m}}\big((Z_1, x_1^i), (Z_2, x_2^j)\big), (Z_3, x_3^\rho)\big) &= \widetilde{\mathrm{m}}\big((Z_1 + Z_2 + \omega_{mn}\, x_1^m\, x_2^n, x_1^i + x_2^i), (Z_3, x_3^\rho)\big) \\ &= \big(Z_1 + Z_2 + \omega_{mn}\, x_1^m\, x_2^n + Z_3 + \omega_{mn}\,(x_1^m + x_2^m)\, x_3^n, x_1^i + x_2^i + x_3^i\big)\,,\end{aligned}$$

z drugiej zaś:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{m}}\big((Z_1, x_1^i), \widetilde{\mathrm{m}}\big((Z_2, x_2^j), (Z_3, x_3^\rho)\big)\big) &= \widetilde{\mathrm{m}}\big((Z_1, x_1^i), (Z_2 + Z_3 + \omega_{mn}\, x_2^m\, x_3^n, x_2^j + x_3^j)\big) \\ &= \big(Z_1 + Z_2 + Z_3 + \omega_{mn}\, x_2^m\, x_3^n + \omega_{mn}\, x_1^m\,(x_2^n + x_3^n), x_1^i + x_2^i + x_3^i\big)\,.\end{aligned}$$

Rekonstrukcję krótkiego ciągu dokładnego grup Liego (7) „odcałkowującego" wyjściowy krótki ciąg dokładny algebr Liego (6) uzupełniamy dokonując identyfikacji monomorfizmu

$$I_{\mathbb{R}}\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega\ :\ r \longmapsto (r, 0)\,.$$

Na tym etapie mamy już nie tylko rozszerzenie centralne grupy $\mathrm{T}(3)$, ale także – lewoniezmienniczą bazę wiązki kostycznej $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega$:

$$\widetilde{\Theta}(Z, x) = -\mathsf{d}Z + \omega_{ij}\, x^i\, \mathsf{d}x^j \qquad , \qquad \widetilde{\theta}^i_{\mathrm{L}}(Z, x) = \mathsf{d}x^i\,, \qquad i \in \{0, 1, 2, 3\}\,.$$

W uzupełnieniu roztrząsań różniczkowo-geometrycznych wyznaczamy bazę lewoniezmienniczą wiązki stycznej $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega$ (w tym – podniesienia pól lewoniezmienniczych z $\mathrm{T}(3)$), do której ta powyżej jest dualną:

$$L_Z(Z, x) = \tfrac{\partial}{\partial Z}\,, \qquad L_{\widetilde{P}_i}(Z, x) = \tfrac{\partial}{\partial x^i} - \omega_{ij}\, x^j\, \tfrac{\partial}{\partial Z}\,, \qquad i \in \{0, 1, 2, 3\}\,.$$

W bazie tej spełnione są oczekiwane relacje komutacji

$$[L_{\widetilde{P}_i}, L_{\widetilde{P}_j}] = 2\omega_{ij}\, L_Z\,, \qquad [L_{\widetilde{P}_i}, L_Z] = 0\,, \qquad [L_Z, L_Z] = 0\,.$$

Na zakończenie niniejszego studium przypadku wskażemy kontekst fizykalny, w którym realizowany jest powyższy scenariusz algebro-geometryczny. Punktem wyjścia jest tutaj lagranżjan (nierelatywistycznej) cząstki punktowej o masie m poruszającej się w metryce $\delta_{\mathrm{E}} = \delta_{ij}\, \mathsf{d}x^i \otimes \mathsf{d}x^j$ w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^{\times 3}$, dany w postaci

$$L(x, \dot{x}) = \tfrac{m}{2}\, \delta_{ij}\, \dot{x}^i\, \dot{x}^j\,.$$

Wyprowadzamy z niej formułę na pęd *kinetyczny*

$$\mathrm{p} = p_i\, \mathsf{d}x^i\,, \qquad p_i = \tfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \delta_{ij}\, m\, \dot{x}^j\,.$$

W opisie kanonicznym teorii znajdujemy nawiasy Poissona

(8) $$\{x^i, p_j\}_\Omega = \delta^i{}_j\,, \qquad \{x^i, x^j\}_\Omega = 0\,, \qquad \{p_i, p_j\}_\Omega = 0\,, \qquad i, j \in \{1, 2, 3\}\,,$$

których postać wynika wprost z postaci (Darboux) formy presymplektycznej

$$\Omega(x, p) = \mathsf{d}p_i \wedge \mathsf{d}x^i$$

modelu, otrzymanej zeń np. w formalizmie pierwszego rzędu. Warto tu w szczególności zwrócić baczną uwagę na komutatywną algebrę (Poissona) pędów kinetycznych:

$$\{p_i, p_j\}_\Omega = 0\,, \qquad i, j \in \{1, 2, 3\}\,.$$

Pola hamiltonowskie na przestrzeni stanów układu fizykalnego $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}$ sparametryzowanej przez pary (x^μ, p_j) (dane Cauchy'ego trajektorii klasycznej) stowarzyszone z tymi pędami to

$$\mathcal{V}_{p_i} = \tfrac{\partial}{\partial x^i}\,, \qquad \mathcal{V}_{p_i} \lrcorner\, \Omega = -\mathsf{d}p_i\,, \qquad i \in \{1, 2, 3\}\,.$$

Przechodząc do lagranżjanu (nierelatywistycznej) cząstki punktowej o masie m i ładunku elektrycznym q poruszającej się w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^{\times 3}$ w metryce δ_{E} i *stałym* polu magnetycznym $\mathrm{B} = B^i\,\partial_i$ o potencjale wektorowym $\mathrm{A} = A^i\,\partial_i$, $A^i(x) = -\frac{1}{2}\,\epsilon_{jk}{}^i\,x^j\,B^k$,

$$L(x,\dot{x}) = \tfrac{m}{2}\,\delta_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j + q\,\delta_{ij}\,A^i(x)\,\dot{x}^j\,,$$

znajdujemy – obok wprowadzonego wcześniej pędu kinetycznego

$$\mathrm{p} = m\,\delta_{ij}\,\dot{x}^j\,\mathsf{d}x^i \equiv p_i\,\mathsf{d}x^i\,,$$

także pęd *kanoniczny*

$$\pi = \pi_i\,\mathsf{d}x^i\,,\qquad \pi_i = \tfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \delta_{ij}\left(m\,\dot{x}^j + qA^j(x)\right).$$

Forma presymplektyczna to tym razem

$$\Omega_{\mathrm{F}}(x,p) = \mathsf{d}\pi_i \wedge \mathsf{d}x^i = \mathsf{d}p_i \wedge \mathsf{d}x^i + q\,\mathrm{F}\,,\qquad \mathrm{F} \equiv \tfrac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\,B^i\,\mathsf{d}x^j \wedge \mathsf{d}x^k =: f_{ij}\,\mathsf{d}x^i \wedge \mathsf{d}x^j\,.$$

Parametryzując przestrzeń stanów układu fizykalnego tak jak poprzednio, czyli parami (x^i, p_i) (zamiast parami kanonicznie sprzężonymi (x^i, π_i)), wyznaczamy bez trudu elementarne pola hamiltonowskie:

$$\mathcal{V}_{x^i}(x,p) = -\tfrac{\partial}{\partial p_i}\,,\qquad \mathcal{V}_{x^i} \lrcorner\, \Omega_{\mathrm{F}} = -\mathsf{d}x^i\,,$$

$$\mathcal{V}_{p_i}(x,p) = \tfrac{\partial}{\partial x^i} - 2q\,f_{ij}\,\tfrac{\partial}{\partial p_j}\,,\qquad \mathcal{V}_{p_i} \lrcorner\, \Omega_{\mathrm{F}} = -\mathsf{d}p_i$$

oraz odnośne nawiasy Poissona

$$\{x^i, p_j\}_{\Omega_{\mathrm{F}}} = \delta^i{}_j\,,\qquad \{x^i, x^j\}_{\Omega_{\mathrm{F}}} = 0\,,\qquad \{p_i, p_j\}_{\Omega_{\mathrm{F}}} = 2q\,f_{ij}\,,\qquad i,j \in \{1,2,3\}\,. \tag{9}$$

Zauważmy, że w ograniczeniu do podalgebr w odnośnych algebrach Liego–Poissona

$$\left(C^\infty(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}, \mathbb{R}), \{\cdot,\cdot\}_\Omega\right) \qquad \text{vs} \qquad \left(C^\infty(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}, \mathbb{R}), \{\cdot,\cdot\}_{\Omega_{\mathrm{F}}}\right)$$

generowanych przez pędy kinetyczne włączenie stałego pola magnetycznego B możemy zinterpretować jako omówione wcześniej rozszerzenie (na poziomie liniowym w generatorach)

$$\mathfrak{t}(3) \xrightarrow{\ \omega\ } \widetilde{\mathfrak{t}(3)}_{\mathrm{F}}\,,\qquad \omega_{ij} \equiv f_{ij}\,,$$

w którym dodatkowym generatorem jest. . . ładunek elektryczny cząstki,

$$L_Z = \jmath_{\mathbb{R}}(1) \equiv q\,!$$

Ten sposób myślenia o „ładunkach" niesionych przez cząstki okazuje się być niezwykle naturalny, uniwersalny i płodny – patrz: np. praca Gauntletta, Gomisa i Townsenda [GGT90].

Na obecnym etapie pozostaje jeszcze odpowiedzieć na pytanie o fizykalną realizację znalezionego wcześniej grupowego wariantu rozszerzenia (7). Okazuje się, że ten jest związany z pewnym wyróżnionym schematem kwantowania opisanego modelu fizykalnego, którego elementy omówimy poniżej. Zaczniemy od kanonicznego skwantowania relacji (8), tj. wskazania ośrodkowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i operatorowej realizacji na niej (w terminach operatorów samosprzężonych) algebry Heisenberga

$$[\widehat{x}^i, \widehat{p}_j] = \mathsf{i}\,\hbar\,\delta^i{}_j\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}}\,,\qquad [\widehat{x}^i, \widehat{x}^j] = 0\,,\qquad [\widehat{p}_i, \widehat{p}_j] = 0\,,\qquad i,j \in \{1,2,3\}\,.$$

Jak powszechnie wiadomo (choćby z kursu Mechaniki kwantowej I), realizacji takiej dostarcza przestrzeń Hilberta $L^2(\mathbb{R}^3, \mathsf{d}^3x)$ funkcji (zespolonych) na $\mathbb{R}^3$ całkowalnych z kwadratem (względem standardowej miary Lebesgue'a) – realizacja ta przyjmuje znajomą prostą postać:

$$\widehat{x}^i \equiv x^i\,,\qquad \widehat{p}_i = -\mathsf{i}\,\hbar\,\tfrac{\partial}{\partial x^i}\,,\qquad i \in \{1,2,3\}\,.$$

To kwantowomechaniczny elementarz (choć same operatory $\widehat{x}^i$ i $\widehat{p}_j$ okazują się być dość narowiste). Pytanie brzmi: Jak zrealizować algebrę

$$[\widehat{x}^i, \widehat{p}_j] = \mathsf{i}\,\hbar\,\delta^i{}_j\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}}\,,\qquad [\widehat{x}^i, \widehat{x}^j] = 0\,,\qquad [\widehat{p}_i, \widehat{p}_j] = 2\mathsf{i}\,\hbar\,q\,f_{ij}\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}}\,,\qquad i,j \in \{1,2,3\} \tag{10}$$

otrzymaną w wyniku kanonicznego skwantowania relacji (9) w obecności ładunku elektrycznego (i zewnętrznego pola magnetycznego)? I czy ma to cokolwiek wspólnego z rozszerzeniem $\widetilde{\mathrm{T}(3)}$?

Konstruktywnej odpowiedzi na pierwsze z tych pytań i zarazem pozytywnej odpowiedzi na drugie z nich dostarcza schemat kwantowania rozwinięty przez Kostanta i Souriau[8], który określamy mianem kwantowania geometrycznego. Na zakończenie niniejszych notatek zaprezentujemy jedynie jego wynik w rozważanym modelu fizykalnym, zastępując przy tym addytywną grupę $\mathbb{R}$ rozszerzenia $\widetilde{\mathrm{T}(3)}$ nad bazą $\mathbb{R}^{\times 3}$ multyplikatywną grupą okręgu $\mathrm{U}(1) \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$, co daje nam (po dodatkowej, trywialnej transpozycji składników kartezjańskich) rozszerzenie

$$\pi \equiv \mathrm{pr}_1 \;:\; \widetilde{\mathrm{UT}(3)}_\omega := \mathbb{R}^{\times 3} \times \mathrm{U}(1) \longrightarrow \mathbb{R}^{\times 3} \tag{11}$$

z działaniem binarnym

$$\widetilde{\mathrm{UT}(3)}_\omega \times \widetilde{\mathrm{UT}(3)}_\omega \longrightarrow \widetilde{\mathrm{UT}(3)}_\omega \;:\; \big((x_1^i, u_1), (x_2^i, u_2)\big) \longmapsto \big(x_1^i + x_2^i, u_1 \cdot u_2 \cdot \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\omega_{mn}\, x_1^m\, x_2^n}\big) \tag{12}$$

i indukowanym przezeń działaniem (lewym) $\widetilde{\mathrm{UT}(3)}_\omega$ na sobie

$$\begin{aligned} \lambda^\omega_\cdot \;&:\; \widetilde{\mathrm{UT}(3)}_\omega \times \widetilde{\mathrm{UT}(3)}_\omega \longrightarrow \widetilde{\mathrm{UT}(3)}_\omega \\ &:\; \big((\varepsilon^i, \zeta), (x^i, z)\big) \longmapsto \big(x^i + \varepsilon^i, z \cdot \zeta \cdot \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\omega_{mn}\,\varepsilon^m\, x^n}\big) \equiv \lambda_{(\varepsilon,\zeta)}(x, z)\,. \end{aligned}$$

Tak przygotowani możemy już przystąpić do konstrukcji operatorowej realizacji algebry (10). Tej dostarczają po raz kolejny funkcje (zespolone) na $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^3$ całkowalne z kwadratem (i odpowiednio spolaryzowane – np. w polaryzacji/„reprezentacji" pędowej), na których tym razem zadajemy operatory

$$\widehat{x}^i(x,p) = \mathrm{i}\hbar\,\tfrac{\partial}{\partial p_i}\,, \qquad \widehat{p}_i(x,p) = -\mathrm{i}\hbar\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i} - q\,\epsilon_{ijk}\,B^k\,\tfrac{\partial}{\partial p_j}\right) + p_i - \tfrac{1}{2}\,q\,\epsilon_{ijk}\,x^j\,B^k\,.$$

Operatory te otrzymujemy z ogólnego przepisu

$$h \longmapsto -\mathrm{i}\hbar\,\mathcal{V}_h - \mathcal{V}_h \lrcorner\, \eta + h \equiv \widehat{h}\,,$$

w którym $\mathcal{V}_h$ jest polem hamiltonowskim stowarzyszonym z $h \in C^\infty\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}, \mathbb{R}\big)$, $\eta \in \Omega^1(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3})$ zaś jest dowolną 1-formą pierwotną dla 2-kocyklu Ω_{F}, która w naszym wypadku została wybrana w postaci

$$\eta(x,p) = -x^i\,\mathsf{d}\pi_i(x,p) = -x^i\left(\mathsf{d}p_i + \tfrac{1}{2}\,q\,\epsilon_{ijk}\,B^j\,\mathsf{d}x^k\right).$$

Bez trudu przekonujemy się, że wypisane powyżej operatory różniczkowe spełniają pożądane relacje komutacyjne. Ażeby zrozumieć, w jaki sposób ich struktura i działanie na $L^2(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}, \mathbb{R})$ wiąże się z rozszerzeniem (11), musimy wrócić do modelu klasycznego.

Model klasyczny ma symetrie ciągłe: pod wpływem translacji ℓ_ε o *stały* wektor $\varepsilon \in \mathbb{R}^{\times 3}$ lagranżjan zmienia się o zupełną pochodną czasową

$$L\big(\ell_\varepsilon \circ x, (\ell_\varepsilon \circ x)^{\dot{}}\big) = L(x, \dot{x}) + \dot{F}(x)$$

funkcji gładkiej

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\,q\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon^i\,x^j\,B^k\,.$$

Oczekiwanie, iżby symetrie te podnosiły się do teorii kwantowej, jest w pełni uzasadnione. Tu jednak natrafiamy na obstrukcję: o ile operator położenia jest nieczuły na przesunięcia, operator pędu podlega transformacji

$$\widehat{p}_i\big(\ell_\varepsilon(x), p\big) = \widehat{p}_i(x,p) - \tfrac{1}{2}\,q\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon^j\,B^k\,,$$

jeśli zatem nie poddamy stosownej korekcie (fazowej) funkcji falowej $\psi \in L^2(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}, \mathbb{R})$, wartości oczekiwane tego operatora i wszelkich operatorów pochodnych,

$$\big\langle \mathcal{O}(\widehat{x}^i, \widehat{p}_j)\big\rangle_\psi \equiv \int_{\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}} \mathrm{Vol}\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}; \Omega_{\mathrm{F}}\big)\,\overline{\psi(x,p)}\,\mathcal{O}(\widehat{x}^i, \widehat{p}_j)(x,p)\,\psi(x,p)$$

[8]Schemat ten został w nader przystępny sposób przedstawiony w monografii Woodhouse'a [Woo92].

nie będą niezmiennicze względem przesunięć (należy zwrócić uwagę, że 2-forma symplektyczna $\Omega_{\rm F}$ jest translacyjnie niezmiennicza, cechę tę ma zatem także symplektyczna forma objętości $\mathrm{Vol}(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3};\Omega_{\rm F})$). Jest przy tym jasne, że konieczna postać[9] transformacji symetrii funkcji falowej

$$\mathsf{L}^2\ell.\;:\;\mathsf{T}(3)\times L^2\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3},\mathbb{R}\big)\longrightarrow L^2\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3},\mathbb{R}\big)\;:\;\big((\varepsilon^i),\psi\big)\longmapsto\varepsilon\triangleright\psi\equiv\mathsf{L}^2\ell_\varepsilon(\psi)\,,$$

$$\big(\varepsilon\triangleright\psi\big)(x,p)=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon^i\,x^j\,B^k}\cdot\psi\big(\ell_{-\varepsilon}(x),p\big)$$

(uwzględniliśmy to, że działanie na argumencie funkcji falowej poprzez cofnięcie wzdłuż ℓ_ε jest działaniem *prawym*, my zaś dążymy do skonstruowania działania lewego). Istotnie, oczekiwana niezmienniczość amplitud jest wówczas prostą konsekwencją translacyjnej niezmienniczości symplektycznej miary objętości,

$$\begin{aligned}
\big\langle\mathcal{O}\big(\widehat{x}^i,\widehat{p}_j\big)\big\rangle_{\varepsilon\triangleright\psi} &= \int_{\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}}\mathrm{Vol}\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3};\Omega_{\rm F}\big)\,\overline{\big(\varepsilon\triangleright\psi\big)(x,p)}\,\mathcal{O}\big(\widehat{x}^i,\widehat{p}_j\big)(x,p)\,\big(\varepsilon\triangleright\psi\big)(x,p)\\
&= \int_{\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}}\mathrm{Vol}\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3};\Omega_{\rm F}\big)\,\overline{\psi\big(\ell_{-\varepsilon}(x),p\big)}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon^i\,x^j\,B^k}\\
&\qquad\cdot\mathcal{O}\big(\widehat{x}^i,\widehat{p}_j\big)(x,p)\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon^i\,x^j\,B^k}\cdot\psi\big(\ell_{-\varepsilon}(x),p\big)\\
&= \int_{\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}}\mathrm{Vol}\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3};\Omega_{\rm F}\big)\,\overline{\psi\big(\ell_{-\varepsilon}(x),p\big)}\cdot\mathcal{O}\big(\widehat{x}^i,\widehat{p}_j+\tfrac{1}{2}\,q\,\epsilon_{jkl}\,\varepsilon^k\,B^l\big)(x,p)\,\psi\big(\ell_{-\varepsilon}(x),p\big)\\
&= \int_{\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}}\mathrm{Vol}\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3};\Omega_{\rm F}\big)\,\overline{\psi\big(\ell_{-\varepsilon}(x),p\big)}\cdot\mathcal{O}\big(\widehat{x}^i,\widehat{p}_j\big)\big(\ell_{-\varepsilon}(x),p\big)\,\psi\big(\ell_{-\varepsilon}(x),p\big)\\
&= \big\langle\mathcal{O}\big(\widehat{x}^i,\widehat{p}_j\big)\big\rangle_\psi\,.
\end{aligned}$$

Na obecnym etapie zasadnym wydaje się ustalenie własności odwzorowania $\mathsf{L}^2\ell.$. Czy mamy do czynienia z działaniem grupy $\mathsf{T}(3)$? W bezpośrednim rachunku stwierdzamy

$$\begin{aligned}
\big(\mathsf{L}^2\ell_{\varepsilon_1}\circ\mathsf{L}^2\ell_{\varepsilon_2}\big)(\psi)(x,p) &= \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon_1^i\,x^j\,B^k}\cdot\big(\mathsf{L}^2\ell_{\varepsilon_2}(\psi)\big)\big(\ell_{-\varepsilon_1}(x),p\big)\\
&= \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon_1^i\,x^j\,B^k}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon_2^i\,\ell_{-\varepsilon_1}(x)^j\,B^k}\cdot\psi\big(\ell_{-\varepsilon_2}\circ\ell_{-\varepsilon_1}(x),p\big)\\
&= \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon_1^i\,\varepsilon_2^j\,B^k}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^i\,x^j\,B^k}\cdot\psi\big(\ell_{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}(x),p\big)\\
&\equiv \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon_1^i\,\varepsilon_2^j\,B^k}\cdot\mathsf{L}^2\ell_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(\psi)(x,p)\,,
\end{aligned}$$

zatem $\mathsf{L}^2\ell.$ *nie* jest działaniem. Jest natomiast **działaniem rzutowym**, a ponieważ takie działania często spotykanym w kontekście kwantowania symetrii klasycznych (w związku ze swobodą redefinicji fazy funkcji falowej), przeto omówimy je po krótce w pewnej ogólności. Oto więc mamy do czynienia z realizacją grupy G na przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej V, czyli homomorfizmem

$$\mathrm{G}\longrightarrow\mathrm{GL}(V,\mathbb{K})/\mathbb{K}^\times\equiv\mathrm{PGL}(V,\mathbb{K})$$

grupy G w grupę ilorazową $\mathrm{PGL}(V,\mathbb{K})$, określaną mianem **rzutowej grupy głównej liniowej przestrzeni** V, który możemy równoważnie opisywać jako odwzorowanie

$$R\;:\;\mathrm{G}\longrightarrow\mathrm{GL}(V,\mathbb{K})$$

o własności

$$\forall_{g,h\in\mathrm{G}}\;\exists_{c(g,h)\in\mathbb{K}^\times}\;:\;R(g)\circ R(h)=c(g,h)\triangleright R(g\cdot h)\,.$$

Można zadać pytanie, kiedy tak określone odwzorowania współdeterminują *działanie* rozszerzenia centralnego G przez $\mathbb{K}^\times$,

$$\mathbf{1}\longrightarrow\mathbb{K}^\times\xrightarrow{(e_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_{\mathbb{K}^\times})}\mathrm{G}\times\mathbb{K}^\times\equiv\widetilde{\mathrm{G}}\xrightarrow{\ \mathrm{pr}_1\ }\mathrm{G}\longrightarrow\mathbf{1}$$

o operacji binarnej

$$\widetilde{\mu}\;:\;\widetilde{\mathrm{G}}\times\widetilde{\mathrm{G}}\longrightarrow\widetilde{\mathrm{G}}\;:\;\big((g_1,k_1),(g_2,k_2)\big)\longmapsto\big(g_1\cdot g_2,k_1\cdot k_2\cdot c(g_1,g_2)\big)\,.\tag{13}$$

[9] Zauważmy, że operator położenia pozostaje niezmieniony pod wpływem translacji ℓ_ε.

Jest to możliwe, gdy odwzorowanie

$$c\ :\ \mathrm{G}\times\mathrm{G}\longrightarrow\mathbb{K}^\times\ :\ (g,h)\longmapsto c(g,h) \tag{14}$$

spełnia warunek

$$\forall_{g_1,g_2,g_3\in\mathrm{G}}\ :\ c(g_1,g_2)\cdot c(g_1\cdot g_2,g_3)=c(g_2,g_3)\cdot c(g_1,g_2\cdot g_3)\,, \tag{15}$$

oto bowiem wtedy zapostulowana powyżej operacja binarna $\widetilde{\mu}$ okazuje się być łączna, a my możemy zadać działanie grupy $\widetilde{\mathrm{G}}$ w postaci odwzorowania

$$\widetilde{R}\ :\ \widetilde{\mathrm{G}}\longrightarrow\mathrm{GL}(V,\mathbb{K})\ :\ (g,k)\longmapsto k\triangleright R(g)\,,$$

którego homomorficzność sprawdzamy w bezpośrednim rachunku:

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(g_1,k_1)\circ\widetilde{R}(g_2,k_2) &= k_1\triangleright R(g_1)\circ\big(k_2\triangleright R(g_2)\big)=k_1\triangleright\big(k_2\triangleright\big(R(g_1)\circ R(g_2)\big)\big)\\ &= k_1\cdot k_2\triangleright\big(c(g_1,g_2)\triangleright R(g_1\cdot g_2)\big)=k_1\cdot k_2\cdot c(g_1,g_2)\triangleright R(g_1\cdot g_2)\\ &\equiv \widetilde{R}\circ\widetilde{\mu}\big((g_1,k_1),(g_2,k_2)\big)\,.\end{aligned}$$

Interpretacja samego warunku wymaga kolejnej

Definicja 4. Niechaj G będzie grupą, A zaś – grupą przemienną, na której określone jest **działanie** (lewe) G, tj. dany jest homomorfizm grup

$$\Lambda.\ :\ \mathrm{G}\longrightarrow\mathrm{Aut}_{\mathbf{Grp}}(A)\ :\ g\longrightarrow\Lambda_g\,,$$

przy czym jak zwykle będziemy też pisać, nadużywając nieco notacji,

$$\Lambda\ :\ \mathrm{G}\times A\longrightarrow A\ :\ (g,a)\longmapsto g\triangleright a\equiv\Lambda_g(a)\,.$$

Mówimy, że para $(A,\Lambda.)$ jest **modułem grupy** G. p**-kołańcuch na** G **o wartościach w** A to odwzorowanie

$$f\ :\ \mathrm{G}^{\times p}\longrightarrow A\,,$$

przy czym dla $p=0$ przyjmujemy konwencję: $\mathrm{G}^{\times 0}\equiv\{\bullet\}$ (singleton), z której wynika, że **0-kołańcuch na** G **o wartościach w** A to element A. Zbiór $C^p(\mathrm{G};A)\equiv\mathrm{Map}(\mathrm{G}^{\times p},A)$ takich odwzorowań dziedziczy z A strukturę grupy przemiennej (z operacją binarną zdefiniowaną punktowo) – grupę tę określamy mianem **grupy** p**-kołańcuchów na** G **o wartościach w** A. Indeksowana przez $\mathbb{N}\ni p$ rodzina grup kołańcuchów tworzy kompleks (ko)łańcuchowy

$$\big(C^\bullet(\mathrm{G};A),\delta_{\mathrm{G}}^{(\bullet)}\big)\ :\ C^0(\mathrm{G};A)\xrightarrow{\delta_{\mathrm{G}}^{(0)}}C^1(\mathrm{G};A)\xrightarrow{\delta_{\mathrm{G}}^{(1)}}\cdots\xrightarrow{\delta_{\mathrm{G}}^{(p-1)}}C^p(\mathrm{G};A)\xrightarrow{\delta_{\mathrm{G}}^{(p)}}\cdots$$

o **operatorach kobrzegu**

$$\delta_{\mathrm{G}}^{(p)}\ :\ C^p(\mathrm{G};A)\longrightarrow C^{p+1}(\mathrm{G};A)\,,\qquad\qquad \delta_{\mathrm{G}}^{(p+1)}\circ\delta_{\mathrm{G}}^{(p)}=0\,,\quad p\in\mathbb{N}$$

danych wzorami (zapisanymi dla dowolnych $g_i\in\mathrm{G}$, $i\in\overline{0,p}$ i $\underset{k}{c}\in C^k(\mathrm{G};A)$, $k\in\{0,p>0\}$)

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{G}}^{(0)}\underset{0}{\varphi}(g_0) &= g_0\triangleright\underset{0}{\varphi}-\underset{0}{\varphi}\,,\\ \delta_{\mathrm{G}}^{(p)}\underset{p}{\varphi}(g_0,g_1,\ldots,g_p) &= g_0\triangleright\underset{p}{\varphi}(g_1,g_2,\ldots,g_p)+\sum_{j=1}^p(-1)^j\,\underset{p}{\varphi}(g_0,g_1,\ldots,g_{j-2},g_{j-1}\cdot g_j,g_{j+1},g_{j+2},\ldots,g_p)\\ &\quad+(-1)^{p+1}\,\underset{p}{\varphi}(g_0,g_1,\ldots,g_{p-1})\,.\end{aligned}$$

Grupa homologii powyższego kompleksu

$$H^0(\mathrm{G};A)\equiv Z^0(\mathrm{G};A)\,,\qquad\qquad H^{p+1}(\mathrm{G};A)\equiv Z^{p+1}(\mathrm{G};A)/B^{p+1}(\mathrm{G};A)\,,\quad p\in\mathbb{N}\,,$$

w której zapisie

$$Z^{p+1}(\mathrm{G};A)\equiv\mathrm{Ker}\,\delta_{\mathrm{G}}^{(p+1)}$$

to **grupa** $(p+1)$**-kocykli na grupie** G **o wartościach w** G**-module** A, a

$$B^{p+1}(\mathrm{G};A)\equiv\mathrm{Im}\,\delta_{\mathrm{G}}^{(p)}$$

to **grupa** $(p+1)$**-kobrzegów na grupie** G **o wartościach w** G**-module** A, nosi miano $(p+1)$**-tej grupy kohomologii grupy** G **o wartościach w** G**-module** A. Suma prosta

$$H^\bullet(\mathrm{G};A)=\bigoplus_{p\in\mathbb{N}}H^p(\mathrm{G};A)$$

tych grup określa **kohomologię grupy** G **o wartościach w** G**-module** A.

Uwaga 2. Warto zwrócić uwagę na to, że $H^0(\mathrm{G};A)$ to zbiór niezmienników działania $\Lambda_\cdot$. Wprowadzona tu kohomologia dostarcza naturalnego uogólnienia pojęcia niezmiennika. Odgrywa niebagatelną rolę w dyskusji cechowania symetrii sztywnych w teoriach fizycznych.

Bogatsi o powyższą definicję bez trudu identyfikujemy warunek (15) narzucony na odwzorowanie (14): oto zdefiniowanie działania rozszerzenia centralnego $\widetilde{\mathrm{G}}$ zrealizowanej rzutowo grupy G wymaga, iżby odwzorowanie to było 2-kocyklem na G o wartościach w *trywialnym* G-module $\mathbb{K}^\times$ (z $\Lambda_\cdot\equiv\mathrm{id}_{\mathbb{K}^\times}$),

$$(15)\qquad\Longleftrightarrow\qquad c\overset{!}{\in}Z^2(\mathrm{G};\mathbb{K}^\times)\,.$$

Będziemy go nazywać **2-kocyklem działania rzutowego** R. Zauważmy przy tym, że poprawienie wyjściowego 2-kocyklu c o 2-kobrzeg $\delta^{(1)}_{\mathrm{G}}d$, $d\in C^1(\mathrm{G};\mathbb{K}^\times)$ nie zmienia jakościowo sytuacji, gdyż poprawka może być zaabsorbowana w redefinicję odwzorowania R wedle schematu

$$R\longmapsto\mathrm{Inv}\circ d\triangleright R\equiv R_d\,,$$

tj., jeśli R spełnia warunek

$$\forall_{g,h\in\mathrm{G}}\ :\ R(g)\circ R(h)=c(g,h)\cdot\delta^{(1)}_{\mathrm{G}}d(g,h)\triangleright R(g\cdot h)\equiv c(g,h)\cdot d(h)\cdot d(g\cdot h)^{-1}\cdot d(g)\triangleright R(g\cdot h)\,,$$

to wówczas R_d spełnia warunek

$$\forall_{g,h\in\mathrm{G}}\ :\ R_d(g)\circ R_d(h)=c(g,h)\triangleright R_d(g\cdot h)\,.$$

Ponadto, rzecz jasna,

$$\delta^{(2)}_{\mathrm{G}}\big(c\cdot\delta^{(1)}_{\mathrm{G}}d\big)=\delta^{(2)}_{\mathrm{G}}c\,,$$

przeto koniec końców w rozpatrywanym przez nas zagadnieniu znaczenie ma jedynie klasa kohomologii 2-kocyklu działania rzutowego.

W naszych wcześniejszych rozważaniach fizykalnych realizacja algebry (10) doprowadziła nas wprost do definicji działania rzutowego $L^2\ell_\cdot$ grupy $\mathrm{T}(3)$ o własności

$$\forall_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\mathrm{T}(3)}\ :\ \mathsf{L}^2\ell_{\varepsilon_1}\circ\mathsf{L}^2\ell_{\varepsilon_2}=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\epsilon_{ijk}\,\varepsilon_1^i\,\varepsilon_2^j\,B^k}\triangleright\mathsf{L}^2\ell_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\,.$$

Łatwo przekonujemy się, że pojawiający się tutaj 2-kołańcuch na $\mathrm{T}(3)$ o wartościach w trywialnym $\mathrm{T}(3)$-module $\mathrm{U}(1)$ (notacja multyplikatywna dla grupy przemiennej $\mathrm{U}(1)$!) dany wzorem

$$c_{\mathrm{F}}\ :\ \mathrm{T}(3)\times\mathrm{T}(3)\longrightarrow\mathrm{U}(1)\ :\ (\varepsilon_1,\varepsilon_2)\longmapsto\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\epsilon_{ijk}\,\varepsilon_1^i\,\varepsilon_2^j\,B^k}$$

jest 2-kocyklem,

$$\delta^{(2)}_{\mathrm{T}(3)}c_{\mathrm{F}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\epsilon_{ijk}\,\varepsilon_2^i\,\varepsilon_3^j\,B^k}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\epsilon_{ijk}\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^i\,\varepsilon_3^j\,B^k}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\epsilon_{ijk}\,\varepsilon_1^i\,(\varepsilon_2+\varepsilon_3)^j\,B^k}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\epsilon_{ijk}\,\varepsilon_1^i\,\varepsilon_2^j\,B^k}\equiv1\,.$$

Obserwacja ta pozwala zrozumieć strukturę zapostulowanej przez nas transformacji symetrii funkcji falowej jako odzwierciedlenie ukrytego za nią działania rozszerzenia centralnego

$$\mathbf{1}\longrightarrow\mathrm{U}(1)\xrightarrow{(0,\mathrm{id}_{\mathrm{U}(1)})}\mathrm{T}(3)\times\mathrm{U}(1)\equiv\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar\xrightarrow{\mathrm{pr}_1}\mathrm{T}(3)\longrightarrow\mathbf{1}$$

na przestrzeni Hilberta ładunku elektrycznego w stałym polu magnetycznym. Porównując operację binarną indukowaną na rozszerzeniu $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar$ w tych okolicznościach wedle schematu (13),

$$\widetilde{\mu}_\hbar\ :\ \widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar\times\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar\longrightarrow\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar\ :\ \big((\varepsilon_1,u_1),(\varepsilon_2,u_2)\big)\longmapsto\big(\varepsilon_1+\varepsilon_2,u_1\cdot u_2\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\epsilon_{ijk}\,\varepsilon_1^i\,\varepsilon_2^j\,B^k}\big)\,,$$

z operacją binarną (12) na grupie $\widetilde{\mathrm{UT}(3)}_\omega$ otrzymanej przez (równoważne) scałkowanie centralnego rozszerzenia algebry Liego $\mathfrak{t}(3)$ indukowanego przez 2-kocykl ω na $\mathfrak{t}(3)$, konstatujemy z serdecznym wzruszeniem, iż

$$\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar\equiv\widetilde{\mathrm{UT}(3)}_\omega\,,\qquad\qquad\omega_{ij}\equiv-\tfrac{1}{2\hbar}\,q\,f_{ij}=-\tfrac{1}{4\hbar}\,q\,\epsilon_{ijk}\,B^k\,.$$

I na tym jednak nie koniec... Możemy wszak zadać pytanie o (naturalny) mechanizm indukcji działania „kwantowej grupy translacji" $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar$ na przestrzeni Hilberta skwantowanego geometrycznie modelu dynamiki masywnego ładunku elektrycznego w stałym polu magnetycznym. Odpowiedź na to pytanie nasuwa się sama w geometrycznym paradygmacie opisu zjawisk fizykalnych, u którego podstaw – tak w mechanice klasycznej, jak i w teorii pola (a nawet w niektórych schematach kwantowania obu) – leży w wymiarze formalnym pojęcie wiązki włóknistej (lub innej „wyższej geometrii", jak (n-)wiecheć wiązek), które jest omawiane ze szczegółami i w konkretnych zastosowaniach na 2. i 3. semestrze wykładu monograficznego pt. „Elementy algebry i geometrii wyższej w fizyce" Autora. Nie mogąc zakładać znajomości dyskutowanych tam struktur geometrycznych i algebraicznych, możemy jedynie – z braku czasu na rozleglejszą argumentację – podsunąć Czytelnikowi niezbędną intuicję, wywiedzioną z kursu Algebry.

Punktem wyjścia w konstrukcji, którą chcemy zaproponować, jest potraktowanie rozważanych przez nas funkcji falowych $\psi : \mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \longrightarrow \mathbb{C}$ jako odwzorowań z przestrzeni stanów $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}$ układu fizycznego w produkt kartezjański $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \times \mathbb{C}$ tejże z rozmaitością $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^{\times 2}$ szczególnej postaci

$$\big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}}, \psi\big) \;:\; \mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \longrightarrow \mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \times \mathbb{C} \;:\; (x,p) \longmapsto \big((x,p), \psi(x,p)\big)\,,$$

czyli takich, które są prawymi odwrotnościami rzutu

$$\mathrm{pr}_1 \;:\; \mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\,. \tag{16}$$

W języku wiązek włóknistych to ostatnie odwzorowanie nosi miano **rzutu na bazę** $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}$ **wiązki** (trywialnej) $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \times \mathbb{C}$, dla którego $(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}}, \psi)$ jest (globanym) **cięciem**. Tak określona wiązka (pre)kwantowa[10] $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \times \mathbb{C}$ jest wprost ze swej natury wiązką jednowymiarowych przestrzeni $\mathbb{C}$-liniowych nad **bazą** $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}$ – w naszym przypadku każde jej **włókno** $\mathrm{pr}_1^{-1}(\{(x,p)\})$ nad punktem $(x,p) \in \mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}$ bazy jest po prostu przestrzenią $V \equiv \mathbb{C}$ (w ogólnym przypadku mamy do czynienia z przestrzenią $\mathbb{C}$-liniową *niekanonicznie* izomorficzną z $\mathbb{C}$). Wybór bazy w tej (i w każdej innej) jednowymiarowej przestrzeni $\mathbb{C}$-liniowej jest równoznaczny ze wskazaniem izomorfizmu

$$\beta \;:\; \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} V\,,$$

a zbiór $\mathrm{Iso}_\mathbb{C}(\mathbb{C}, V)$ *wszystkich* takich izomorfizmów, więc też zbiór *wszystkich baz*, jest naturalnie utożsamialny z grupą $\mathrm{GL}(1,\mathbb{C}) \equiv \mathbb{C}^\times$. Można też, rzecz jasna, rozważać podklasę $\mathrm{Iso}_\mathbb{C}^{\mathrm{H}}(\mathbb{C}, V)$ baz powiązanych ze sobą transformacjami utożsamialnymi z dowolną podgrupą $\mathrm{H} \subset \mathrm{GL}(1,\mathbb{C})$, np. bazy $\mathrm{Iso}_\mathbb{C}^{\mathrm{U}(1)}(\mathbb{C}, V)$ z orbity działania podgrupy $\mathrm{U}(1) \subset \mathbb{C}^\times \equiv \mathrm{GL}(1,\mathbb{C})$. Należy podkreślić, że każdą taką H-orbitę można utożsamić z H *niekanonicznie* dopiero po wybraniu dowolnego jej punktu. Mając taki dowolny element $\beta_* \in \mathrm{Iso}_\mathbb{C}^{\mathrm{H}}(\mathbb{C}, V)$, jesteśmy w stanie odtworzyć wyjściową przestrzeń $\mathbb{C}$-liniową V jako $\beta_*(\mathbb{C})$. Z punktu widzenia geometryzacji dyskutowanych pojęć i operacji algebraicznych dużo bardziej naturalne wydaje się pytanie o możliwość odtworzenia V *bez wyróżniania* jakiejkolwiek bazy, czyli wprost ze zbioru $\mathrm{Iso}_\mathbb{C}^{\mathrm{H}}(\mathbb{C}, V) \times \mathbb{C}$. Usunięcie $|\mathrm{H}|$-krotnej nadwyżki elementów musi przy tym uwzględniać status ontologiczny wszystkich zaangażowanych obiektów. W sukurs przychodzi nam podkreślana wyżej struktura **H-torsora** na $\mathrm{Iso}_\mathbb{C}^{\mathrm{H}}(\mathbb{C}, V)$, która podpowiada schemat „wyprojektowania" $|\mathrm{H}|$-krotnej nadwyżki poprzez przejście do przestrzeni orbit diagonalnego działania H na $\mathrm{Iso}_\mathbb{C}^{\mathrm{H}}(\mathbb{C}, V) \times \mathbb{C}$ danego wzorem

$$\mathrm{H} \times \big(\mathrm{Iso}_\mathbb{C}^{\mathrm{H}}(\mathbb{C}, V) \times \mathbb{C}\big) \longrightarrow \mathrm{Iso}_\mathbb{C}^{\mathrm{H}}(\mathbb{C}, V) \times \mathbb{C} \;:\; \big(h, (\beta, z)\big) \longmapsto \big(\beta \circ h, h^{-1}(z)\big)\,,$$

w którym H traktujemy pedantycznie jako podgrupę $\mathrm{GL}(1,\mathbb{C})$. W wyniku tej operacji otrzymujemy zbiór (orbit)

$$\big(\mathrm{Iso}_\mathbb{C}^{\mathrm{H}}(\mathbb{C}, V) \times \mathbb{C}\big)/\mathrm{H} \ni [(\beta, z)]_\sim\,,$$

którego elementy to klasy abstrakcji $[(\beta, z)]_\sim$ względem relacji równoważności

$$(\beta_1, z_1) \sim (\beta_2, z_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists_{h \in \mathrm{H}} \;:\; (\beta_2, z_2) = \big(\beta_1 \circ h, h^{-1}(z_1)\big)$$

[10]Konstrukcja, którą tu wprowadzamy „tylnymi drzwiami", jest zupełnie ogólna i nie zawsze prowadzi do produktowej **przestrzeni totalnej** jak ta tutaj: $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \times \mathbb{C}$. Ta uwaga ma na celu zdjęcie z naszych dalszych rozważań potencjalne odium trywialności, a zarazem sztuczności i nadmiarowości.

i który jest w sposób *kanoniczny* izomorficzny z V, a to poprzez odwzorowanie

$$[\mathrm{ev}] \;:\; \big(\mathrm{Iso}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, V)\times\mathbb{C}\big)/\mathrm{H} \xrightarrow{\cong} V \;:\; [(\beta, z)]_{\sim} \longmapsto \beta(z)\,,$$

którego dobra określoność (tj. niezależność od wyboru reprezentanta klasy $(\beta, z)]_{\sim}$) wynika z łączności superpozycji odwzorowań,

$$\forall_{h\in\mathrm{H}} \;:\; \beta\circ h\big(h^{-1}(z)\big) = \beta\circ\big(h\circ h^{-1}\big)(z) = \beta(z)\,.$$

Istnienie izomorfizmu $[\mathrm{ev}]$ pozwala zaindukować na $(\mathrm{Iso}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, V)\times\mathbb{C})/\mathrm{H}$ naturalną strukturę $\mathbb{C}$-liniową.

Powyższa dyskusja dotyczy w szczególności U(1)-torsora $\mathrm{Iso}^{\mathrm{U}(1)}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, V) \equiv \mathrm{U}(1)$ (złożonego z przemnożeń liczb zespolonych przez fazy z U(1), co stanowi podstawę utożsamienia z U(1)) – mamy zatem

$$[\mathrm{ev}] \;:\; \big(\mathrm{U}(1)\times\mathbb{C}\big)/\mathrm{U}(1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C} \;:\; [(u, z)]_{\sim} \longmapsto u\cdot z\,. \tag{17}$$

Dokonawszy geometryzacji tej konstrukcji nad bazą $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}$, tj. „wyprojektowawszy" działanie

$$\mathrm{U}(1)\times\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathrm{U}(1)\times\mathbb{C}\big) \longrightarrow \mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathrm{U}(1)\times\mathbb{C} \;:\; \big(g, \big((x,p), u, z\big)\big) \longmapsto \big((x,p), u\cdot g, g^{-1}\cdot z\big)\,,$$

odnajdujemy **wiązkę stowarzyszoną**

$$\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathrm{U}(1)\times\mathbb{C}\big)/\mathrm{U}(1) \longrightarrow \mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \;:\; \big[\big((x,p), u, z\big)\big]_{\sim} \longmapsto (x,p) \tag{18}$$

z **wiązką główną**

$$\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathrm{U}(1) \longrightarrow \mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \;:\; \big((x,p), u\big) \longmapsto (x,p)$$

poprzez naturalne działanie U(1) na $\mathbb{C}$ (przez mnożenie). Wiązka (18) (rozmaitość) jest kanonicznie izomorficzna (dyfeomorficzna) z wiązką (pre)kwantową (16),

$$\mathrm{Bun}[\mathrm{ev}] \;:\; \big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathrm{U}(1)\times\mathbb{C}\big)/\mathrm{U}(1) \longrightarrow \mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathbb{C} \;:\; \big[\big((x,p), u, z\big)\big]_{\sim} \longmapsto \big((x,p), u\cdot z\big)\,,$$

por. (17). Tym, co sprawia, że nie jest to jedynie matematyczne kuriozum, jest zanurzenie

$$\widetilde{\mathrm{T}(3)}_{\hbar} \equiv \mathbb{R}^{\times 3}\times\mathrm{U}(1) \hookrightarrow \mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathrm{U}(1) \;:\; (x, u) \longmapsto \big((x,p), u\big)\,,$$

które implikuje istnienie działania „kwantowej grupy translacji" $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_{\hbar}$ na $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathrm{U}(1)\times\mathbb{C}$ będącego lewym działaniem regularnym tej grupy na składniku kartezjańskim $\mathrm{pr}_{1,3}(\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathrm{U}(1)\times\mathbb{C}) = \mathbb{R}^{\times 3}\times\mathrm{U}(1)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Bun}\lambda_{\cdot} \;&:\; \widetilde{\mathrm{T}(3)}_{\hbar}\times\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathrm{U}(1)\times\mathbb{C}\big) \longrightarrow \mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathrm{U}(1)\times\mathbb{C}\\ &:\; \big((\varepsilon,\zeta), \big((x,p), u, z\big)\big) \longmapsto \big((x+\varepsilon, p), u\cdot\zeta\cdot \mathrm{e}^{-\frac{iq}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon^i\,x^j\,B^k}, z\big)\,,\end{aligned}$$

przemiennego z wyprojektowywanym działaniem U(1), więc zstępującego do przestrzeni orbit $\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathrm{U}(1)\times\mathbb{C}\big)/\mathrm{U}(1)$ w postaci

$$\begin{aligned}[\mathrm{Bun}\lambda_{\cdot}] \;&:\; \widetilde{\mathrm{T}(3)}_{\hbar}\times\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathrm{U}(1)\times\mathbb{C}\big)/\mathrm{U}(1) \longrightarrow \big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathrm{U}(1)\times\mathbb{C}\big)/\mathrm{U}(1)\\ &:\; \big((\varepsilon,\zeta), \big[\big((x,p), u, z\big)\big]_{\sim}\big) \longmapsto \big[\big((x+\varepsilon, p), u\cdot\zeta\cdot \mathrm{e}^{-\frac{iq}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon^i\,x^j\,B^k}, z\big)\big]_{\sim}\end{aligned}$$

i tym samym dającego nam możliwość zaindukowania na wiązce (pre)kwantowej $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathbb{C}$ *naturalnego* działania

$$\lambda^{\hbar}_{\cdot} \;:\; \widetilde{\mathrm{T}(3)}_{\hbar}\times\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathbb{C}\big) \longrightarrow \mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathbb{C}$$

wedle schematu opisanego przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar \times \big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \times \mathrm{U}(1) \times \mathbb{C}\big)/\mathrm{U}(1) \arrow[r, "{[\mathrm{Bun}\lambda].}"] & \big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \times \mathrm{U}(1) \times \mathbb{C}\big)/\mathrm{U}(1) \arrow[d, "{\mathrm{Bun[ev]}}"] \\
\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar \times \big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \times \mathbb{C}\big) \arrow[u, "{\mathrm{id}_{\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar} \times \mathrm{Bun[ev]}^{-1}}"] \arrow[r, "\lambda^\hbar_\cdot"'] & \mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \times \mathbb{C}
\end{tikzcd} .$$

Otrzymujemy tym sposobem działanie

$$\lambda^\hbar_{(\varepsilon,z)}\big((x,p),z\big) = \big((x+\varepsilon,p), \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon^i\,x^j\,B^k} \cdot z\big)$$

o oczywistej składowej w bazie

$$\underline{\lambda}^\hbar_{(\varepsilon,\zeta)} \;:\; \mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \circlearrowleft \;:\; (x,p) \longmapsto \big(\ell_\varepsilon(x),p\big)$$

(wszak działanie $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar$ jest rozszerzeniem działania $\mathrm{T}(3)$) i zależnej od punktu w bazie składowej we włóknie

$$\mathsf{F}\lambda^\hbar_{(\varepsilon,\zeta)}(x,p) \;:\; \mathrm{pr}_1^{-1}\big(\{(x,p)\}\big) \circlearrowleft \;:\; z \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon^i\,x^j\,B^k} \cdot z\,.$$

Z tych dwóch możemy już w standardowy sposób złożyć *lewe* działanie „kwantowej grupy translacji" $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar$ na funkcjach falowych:

$$\mathsf{L}^2\lambda^\hbar_\cdot \;:\; \widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar \times L^2\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\big) \longrightarrow L^2\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\big) \;:\; \big((\varepsilon,\zeta),\psi\big) \longmapsto \mathsf{F}\lambda^\hbar_{(\varepsilon,\zeta)}(\cdot)\cdot\psi \circ \underline{\lambda}^\hbar_{(\varepsilon,\zeta)^{-1}}(\cdot)\,.$$

Na końcu naszej długiej i chwilami nieoczywistej drogi czeka na nas nagroda – dobra nowina:

$$\mathsf{L}^2\ell_\varepsilon \equiv \mathsf{L}^2\lambda^\hbar_{(\varepsilon,1)}\,!$$

Udało się nam zatem *zrozumieć* postać rzutowego działania grupy translacji $\mathrm{T}(3)$ na przestrzeni Hilberta, wymuszoną przez wybór geometrycznego schematu kwantowania, jako ograniczenie naturalnego działania rozszerzenia tejże grupy $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar$ na przestrzeni (całkowalnych z kwadratem) cięć trywialnej wiązki wektorowej $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \times \mathbb{C}$ nad klasyczną przestrzenią stanów.

Więcej ciekawych szczegółów i przykładów Czytelnik znajdzie w monografii de Azcárraga i Izquierdo pt. "Lie groups, Lie algebras, cohomology and some applications in physics" [dAI95].

Zadanie na ćwiczenia 1 (na przyszłość)**.** Udowodnić i zinterpretować Drugi Lemat Whiteheada dla dowolnej skończenie wymiarowej półprostej algebry Liego $\mathfrak{g}$:

$$\mathrm{CE}^2(\mathfrak{g}) = \mathbf{0}\,.$$

Literatura

[BC04] J. C. Baez and A. S. Crans. "Higher-dimensional algebra VI: Lie 2-algebras". *Theor. Appl. Categor.*, 12:492–528, 2004.

[BT82] R. Bott and L.W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*, volume 82 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1982.

[CdAIPB00] C. Chryssomalakos, J.A. de Azcárraga, J.M. Izquierdo, and J.C. Pérez Bueno. "The geometry of branes and extended superspaces". *Nucl. Phys.*, B567:293–330, 2000.

[dAI95] J. A. de Azcárraga and J. M. Izquierdo. *Lie groups, Lie algebras, cohomology and some applications in physics*. Cambridge Monographs On Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1995.

[GGT90] J.P. Gauntlett, J. Gomis, and P.K. Townsend. "Particle actions as Wess–Zumino terms for spacetime (super)symmetry groups". *Phys. Lett. B*, 249:255–260, 1990.

[Sta92] J. Stasheff. "Differential graded Lie algebras, quasi-hopf algebras and higher homotopy algebras". In P.P. Kulish, editor, *"Quantum Groups. Proceedings of Workshops held in the Euler International Mathematical Institute, Leningrad, Fall 1990"*, volume 1510 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 120–137. Springer, 1992.

[TW87] G.M. Tuynman and W.A.J.J. Wiegerinck. "Central extensions and physics". *J. Geom. Phys.*, 4:207–258, 1987.

[Woo92] N.M.J. Woodhouse. *Geometric Quantization*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, 1992.