Wykład VII

2022/23

I ALGEBRY LIEGO

Def. 1. Skończenie wymiarowa rzeczywista/zespolona **ALGEBRA LIEGO** to para $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ złożona z

* przestrzeni wektorowej $\mathfrak{g}$ nad $\mathbb{R}/\mathbb{C} \equiv \mathbb{K}$

** odwzorowania $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ — **NAWIAS LIEGO**

o własności:

(L1) $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \in L_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\mathfrak{g};\mathfrak{g})$ 2-lin. nad $\mathbb{K}$

(L2) $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \circ \tau = -[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ SKOŚNA SYMETRIA

(L3) $\mathrm{Jac}_{\mathfrak{g}} \equiv 0$ TOŻSAMOŚĆ JACOBIEGO

Mówimy, że $\mathfrak{g}$ jest KOMUTATYWNA ②
lub abelowa, gdy $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \equiv 0$.

PODALGEBRA LIEGO algebry Liego $\mathfrak{g}$
to podprzestrzeń $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ o własności

$$[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{h}.$$

Jeśli $\mathfrak{g}$ jest nad $\mathbb{C}$, a $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$
jest rzeczywistą podprzestrzenią o tej własności,
to mówimy, że $\mathfrak{h}$ jest rzeczywistą podalgebrą Liego $\mathfrak{g}$.

Podalgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ jest określana mianem **IDEAŁU**, gdy

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{h}.$$

CENTRUM algebry Liego $\mathfrak{g}$ to jej podalgebra komutatywna

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) := \{ X \in \mathfrak{g} \mid \forall Y \in \mathfrak{g} : [X, Y]_{\mathfrak{g}} = 0 \}$$

Niechaj $\{X_A\}_{A \in \overline{1, \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}}}$ będzie bazą $\mathfrak{g}$, a wtedy stałe $f_{AB}{}^{C} \in \mathbb{K}$ w relacjach $[X_A, X_B]_{\mathfrak{g}} = f_{AB}{}^{C} X_C$ nazywamy **STAŁYMI STRUKTURY**.

Mamy oczywiście

Stw. 1. Niech $\mathfrak{g}$ – algebra Liego, $f_{AB}{}^{C}$ – jej stałe struktury.

Wówczas

$$f_{BA}{}^{C} = -f_{AB}{}^{C}$$

$$f_{AB}{}^{D} f_{DC}{}^{E} + f_{CA}{}^{D} f_{DB}{}^{E} + f_{BC}{}^{D} f_{DA}{}^{E} = 0.$$

Przykłady: (1) $(\mathbb{R}^3, \times)$ iloczyn wektorowy

(2) $(\mathcal{A}, [\cdot, \cdot])$ komutator

dowolna algebra Boole'a

w szczególności

(3) $(\mathrm{End}_{K}(V), [\cdot, \cdot]) \equiv gl(V)$

(4) $sl(V) \subset gl(V)$: $\mathrm{tr}|_{sl(V)} \equiv 0$

(5) $(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{X}(M)})$ nawias Liego pól wekt.

w szczególności

(6) $(T_eG, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{X}(G)})$

Def. 2. Niech $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ - algebry Liego

HOMOMORFIZM ALGEBR LIEGO to odwzorowanie

$$\chi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$$

o własnościach

(LH1) $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$

(LH2) $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}_2} \circ (\chi \times \chi) = \chi \circ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}_1}$.

W szczególności mówimy o mono-, epi-, izo-, endo- i auto-morfizmach algebr Liego.

Przykład: Str. 2 Niech (M, λ) będzie rozmaitością z działaniem $\lambda : G \times M \to M$ grupy Liego G o algebrze Liego $\mathfrak{g} = T_e G$, a wtedy

POLE FUNDAMENTALNE (LEWOSTRONNE)

$$\mathcal{K}_{\cdot_1}(\cdot_2) \equiv T_{(e,\cdot_2)}\lambda(\cdot_1, 0_{T_{\cdot_2}M}) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$$

$$: X \mapsto T_{(e,\cdot_2)}\lambda(X, 0_{T_{\cdot_2}M}) \equiv \mathcal{K}_X(\cdot_2)$$

o wartościach $\mathcal{K}_X(m) \equiv T_{(e,m)}\lambda(X, 0_{T_m M})$

dwójka G-ekwiwariantny homomorfizm algebr Liego,

$$\forall X,Y\in\mathfrak{g}\ :\ [\mathcal{K}_X,\mathcal{K}_Y]_{\mathfrak{X}(M)}=\mathcal{K}_{[X,Y]_{\mathfrak{g}}}$$

$$\forall (X,g)\in\mathfrak{g}\times G\ :\ \lambda_{g*}\mathcal{K}_X=\mathcal{K}_{T_e\mathrm{Ad}_g(X)}$$

<u>NB:</u> $\forall (X,f,m)\in\mathfrak{g}\times C^1(M;\mathbb{R})\times M$:

$$\mathcal{K}_X(f)(m)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\big(\lambda_{\exp(-tX)}(m)\big)\Rightarrow \mathcal{K}_X(m)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\lambda_{\exp(-tX)}(m)$$

O związku między homomorfizmami
algebr Liego i ich ideałami,
który stawia te ostatnie na pozycji
analogonów podgrup normalnych
w kategorii grup, mówi

Stw. 3. Istnieje wzajemnie jednoznaczna
odpowiedniość między ideałami algebr
Liego i jądrami homomorfizmów —||—
—||—.

D: Niech $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ – ideał. Wówczas $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ opatrzony w strukturę algebry Liego z nawiasem

$$[X+\mathfrak{i}, Y+\mathfrak{i}]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{i}} := [X,Y]_{\mathfrak{g}} + \mathfrak{i},$$

względem której rzut kanoniczny

$$\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{i}} : \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i} : X \longmapsto X+\mathfrak{i}$$

jest epimorfizmem algebr Liego. Jego

jądro to $\mathrm{Ker}\,\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}} \equiv \mathfrak{k}$. (11)

Odwrotnie, niech $\chi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$

będzie homomorfizmem algebr

Liego. Wówczas $\forall (X,Y) \in \mathrm{Ker}\,\chi \times \mathfrak{g}_1$:

$$\chi([X,Y]_{\mathfrak{g}_1}) = [\chi(X), \chi(Y)]_{\mathfrak{g}_2} = [0_{\mathfrak{g}_2}, \chi(Y)]_{\mathfrak{g}_2}$$

$$= 0_{\mathfrak{g}_2} \qquad \square$$

<u>Def. 3</u> Niechaj $\mathfrak{g}$ – algebra Liego,
$\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ – jej ideał.

Algebrę Liego $\left(\mathfrak{g}/\mathfrak{r}\, , [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{r}}\right)$ nazywamy

ALGEBRĄ ILORAZOWĄ (LIEGO).

Naturalne operacje na algebrach Liego dziedziczone z kategorii $Vect_K^{<\infty}$ (13)
opisuje

Def. 4. Niech $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ – algebry Liego.
<u>SUMA PROSTA ALGEBR LIEGO</u> to algebra Liego $(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, [\cdot, \cdot]_\oplus)$ o nawiasie

$$\forall\, X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_1,\ Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}_2 : \quad [(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)]_\oplus := \left([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}_1}, [Y_1, Y_2]_{\mathfrak{g}_2}\right)$$

Jeżeli $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{g}$ podalgebry Liego algebry Liego $\mathfrak{g}$

i $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2]_{\mathfrak{g}} = 0$, mówimy, że

$\mathfrak{g}$ ROZKŁADA SIĘ NA SUMĘ PROSTĄ $\mathfrak{g}_1$ i $\mathfrak{g}_2$.

Def. 5. Niech $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ rzeczywista algebra Liego

KOMPLEKSYFIKACJA $\mathfrak{g}$ to zespolona algebra Liego

$(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}})$

• nawias Liego

15

$\forall\, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}$:

$$[X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i\,,\, X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i]_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$$

$$:= \left([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}} - [Y_1, Y_2]_{\mathfrak{g}}\right) \otimes 1 + \left([X_1, Y_2]_{\mathfrak{g}} + [Y_1, X_2]_{\mathfrak{g}}\right) \otimes i$$

$\{ X \in \mathfrak{gl}(n;\mathbb{C}) \mid X^{\dagger} = -X \}$

__Przykład__ : $\mathfrak{u}(n)^{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{gl}(n;\mathbb{C})$

Mamy

Stw. 4. Niech $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ – rzeczywiste algebry Liego, Dowolny $\chi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ – homomorfizm rzecz. algebr Liego indukuje kanoniczny homomorfizm $\chi^{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$, który nazywamy KOMPLEKSYFIKACJĄ HOMOMORFIZMU ALGEBR LIEGO.

D: $\forall X, Y \in \mathfrak{g}_1 : \chi^{\mathbb{C}}(X \otimes 1 + Y \otimes i)$

$$= \chi(X) \otimes 1 + \chi(Y) \otimes i .$$

Szczególne i szczególnie istotne typy algebr Liego opisuje

Def. 6. Algebrę Liego $\mathfrak{g}$ nazywamy **NIEPRZYWIEDLNĄ** /**NIEROZKŁADALNĄ**, gdy jedynymi w niej ideałami są $\mathfrak{g}$ i $\{0_{\mathfrak{g}}\}$. Nieprzywiedlna algebra Liego wymiaru $\dim_K \mathfrak{g} \geq 2$ jest określana mianem **PROSTEJ**.

18

NB: Każda 1-wym. algebra Liego jest nieprzywiedlna z przyczyn oczywistych. Jest też – siłą rzeczy – komutatywna. Ogólniej, żadna komutatywna algebra Liego nie jest prosta, gdyż każda podprzestrzeń takiej algebry jest jej ideałem.

Przykład: Stw. 5. Algebra Liego $sl(2;\mathbb{C})$ jest prosta.

D: Na ćwiczeniach.

Def. 7. Niech $\mathfrak{g}$ – algebra Liego.
Ideał $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g}$ określony nazywa
IDEAŁEM KOMUTATOROWYM lub ALGEBRY POCHODNEJ.
Niemalejący ciąg podalgebr
$\mathfrak{g}_\cdot : \mathbb{N} \to \mathrm{obj}\,\mathbf{LieAlg}_{\mathbb{K}} : n \mapsto \mathfrak{g}_n$,
określony rekurencyjnie: $\mathfrak{g}_{n+1} = [\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_n]_{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$,
w którym $\mathfrak{g}_n \subseteq \mathfrak{g}_{n-1}$ jako ideał,
nazywamy CIĄGIEM POCHODNYM $\mathfrak{g}$.

Ilekroć $\exists\, n \in \mathbb{N} : \mathfrak{g}_n = \{0_{\mathfrak{g}}\}$,

algebrę $\mathfrak{g}$ nazywamy ROZWIĄZALNĄ.

NB: $\mathfrak{g}_{n>1}$ nie są w ogólności ideałami w $\mathfrak{g}$.

Def 8. Niech $\mathfrak{g}$ - algebra Liego

Malejący ciąg ideałów w $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g}^{\cdot} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{Obj}\,\mathbf{LieAlg}_{\mathbb{K}} : n \longmapsto \mathfrak{g}^{n}$$

określony rekurencyjnie: $\mathfrak{g}^{n+1} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{n}]_{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g}^{0} = \mathfrak{g}$,

nazywamy GÓRNYM CIĄGIEM CENTRALNYM $\mathfrak{g}$.

Ilekroć $\exists\, n \in \mathbb{N} : \mathfrak{g}^{n} = \{0_{\mathfrak{g}}\}$,

algebrę $\mathfrak{g}$ nazywamy NILPOTENTNĄ.

Mamy proste

Stw. 6. Każda algebra nilpotentna jest rozwiązalna.

D:

Przykład: (1) **Stw. 7.** Podprzestrzeń $\mathfrak{g} \subset \mathbb{R}(3)$ macierzy ściśle górnotrójkątnych dziedziczy z $(\mathbb{R}(3), [\cdot,\cdot])$ struktury algebry Liego, względem której jest nilpotentna. D: Ćw.

(2) <u>Stw. 8.</u> Podprzestrzeń

$$\mathfrak{g} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{C} \right\} < \mathbb{C}(2)$$

dziedziczy z $\left(\mathbb{C}(2), [\cdot, \cdot] \right)$ strukturę algebry Liego, względem której jest rozwiązalna, lecz nie-nilpotentna.

<u>D :</u> Ćwicz.

Szczególny i szczególnie ważny typ homomorfizmu opisuje

<u>Def.</u> 9. Niech $\mathfrak{g}$ - algebra Liego nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$.

REPREZENTACJA $\mathfrak{g}$ (tzw. też $\mathfrak{g}$-MODUŁEM) to para (V, ρ) złożona z

* przestrzeni wektorowej V nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$

** homomorfizmu algebr Liego $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Jeśli $\mathfrak{g}$ jest rzeczywistą algebrą Liego, (26)
każdą reprezentację nazywamy
RZECZYWISTĄ, jeśli zaś $\mathfrak{g}$ jest
zespoloną algebrą Liego, reprezentację
nazywamy ZESPOLONĄ, o ile
V jest zespoloną przestrzenią wektorową.
Jeżeli ρ jest monomorfizmem, reprezentację określamy
mianem WIERNEJ.

Podprzestrzeń $W \subseteq V$ nośnika reprezentacji (V, ρ) algebry $\mathfrak{g}$ spełniającą warunek

$$\rho(\mathfrak{g})(W) \subseteq W$$

nazywamy ($\mathfrak{g}$-) NIEZMIENNICZĄ. Przy tym jeśli $W \in \{\{0_V\}, V\}$, to mówimy o TRYWIALNEJ PODPRZESTRZENI NIEZMIENNICZEJ.

W przeciwnym razie podprzestrzeń niezmienniczą określony mianem NIETRYWIALNEJ. 28

Reprezentacja nierozkładająca, nietrywialnych podprzestrzeni niezmienniczych jest nazywana NIEPRZYWIEDLNA.

x

Niech (V_1, ϱ_1) i (V_2, ϱ_2) będą reprezentacjami algebry Liego $\mathfrak{g}$. SPLATACZ pomiędzy tymi reprezentacjami to odwzorowanie

$$\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$$

o własności

$$\forall X \in \mathfrak{g} : \quad \chi \circ \rho_1(X) = \rho_2(X) \circ \chi .$$

Splotowy, który jest izomorfizmem nośników, określony mianem RÓWNOWAŻNOŚCI REPREZENTACJI. Ilekroć taka istnieje, odnośne reprezentacje nazywamy RÓWNOWAŻNYMI i piszemy $\rho_1 \sim \rho_2$.

Mamy oczywiście

Stw. 9. Dowolna (rzeczywista) reprezentacja (V, ϱ) rzeczywistej(!) algebry Liego $\mathfrak{g}$ na zespolonej przestrzeni wektorowej V rozszerza się jednoznacznie do (zespolonej) reprezentacji kompleksyfikacji $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ tejże, $(V, \varrho^{\mathbb{C}})$. Przy tym ϱ jest nieprzywiedlna $\Longleftrightarrow$ $\varrho^{\mathbb{C}}$ —||— .

D.: Pierwsza część jest trywialna.
Dla dowodu drugiej części wystarczy zauważyć, że

$$\rho^{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}) \equiv \rho(\mathfrak{g}) + i\,\rho(\mathfrak{g}) \quad \square$$

W następnej kolejności poznamy istotne przykłady reprezentacji i algorytmy konstrukcji nowych reprezentacji ze starych.

Przykłady:

(1) REPREZENTACJA TRYWIALNA $(\forall \rho \equiv 0)$

(2) REPREZENTACJA STANDARDOWA:

$\left(\mathbb{C}^n, \rho \equiv \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\right)$ dla $\mathfrak{g} \subset \mathbb{C}(n)$ - podalgebra Liego

(3) REPREZENTACJA DOŁĄCZONA:

$\left(\mathfrak{g}, \mathrm{ad}_\cdot : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) : X \mapsto [X, \cdot]_{\mathfrak{g}} \equiv \mathrm{ad}_X\right)$

NB: Homomorficzny charakter ad. wynika z tożsamości Jacobiego.

(4) REPREZENTACJA KONTRAGREDIENTNA / DUALNA

$$\left(V^*,\ \rho^* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V^*) : X \mapsto -\rho(X)^*\right),$$

gdzie $\forall (v,\varphi) \in V \times V^* : \ \langle \rho(X)^*(\varphi),\ v \rangle := \langle \varphi,\ \rho(X)(v) \rangle$,

czyli $\quad \rho(X)^*(\varphi) \equiv \varphi \circ \rho(X)$.

Mamy

Stw. 10 (V,ρ) nieprzywiedlna $\Longleftrightarrow$ (V^*,ρ^*) — " —

Stw. 11 $(V^{**}, (\rho^*)^*) \sim (V,\rho)$

D: ⌂

Naturalne operacje na reprezentacjach

Operacje:

Def. 10. Niech $\{(V_\alpha, \rho_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ – reprezentacje algebry Liego $\mathfrak{g}$.

SUMA PROSTA REPREZENTACJI to reprezentacja

$$\Big(\bigoplus_{\alpha \in A} V_\alpha,\ \underbrace{\bigoplus_{\beta \in A} \rho_\beta}_{\text{"}\rho_\oplus\text{"}}\Big),\ \text{gdzie } pr_\alpha \circ \rho_\oplus = \rho_\alpha$$

czyli $\forall X \in \mathfrak{g}$: $\quad \rho_\oplus(X)(v_\alpha) = (\rho_\alpha(X) v_\alpha)$

Mowy dalej

<u>Def. 11.</u> Niech $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ — algebry Liego nad $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

(V_α, ρ_α) — reprezentacja $\mathfrak{g}_\alpha$ dla $\alpha \in \{1, 2\}$.

ILOCZYN TENSOROWY REPREZENTACJI to reprezentacja algebry $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ (!) dana w postaci

SPR !

$$\left(V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2 \,,\ \rho_1 \otimes \rho_2 : \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{gl}(V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2) : (X_1, X_2) \longmapsto \rho_1(X_1) \otimes \mathrm{id}_{V_2} + \mathrm{id}_{V_1} \otimes \rho_2(X_2) \right)$$

Wprowadzamy nader istotne pojęcie

Def. 12. Reprezentację (V,ρ) nazywamy (W PEŁNI) PRZYWIEDLNĄ / ROZKŁADALNĄ, gdy jest izomorficzna sumie prostej reprezentacji nieprzywiedlnych, tj.

$$\exists\, (V_\alpha,\rho_\alpha)_{\alpha\in A} : (V,\rho) \sim \bigoplus_{\alpha\in A} (V_\alpha,\rho_\alpha).$$

Algebra Liego ‚litości' każda (skończenie wymiarowa) reprezentacja jest w pełni przywiedlna, jest określona mianem W PEŁNI PRZYWIEDLNEJ / REDUKOWALNEJ.

NB: Powyższa cecha nie jest generyczna — wyróżnia klasę algebr Liego, którą zajmiemy się w dalszej części kursu.

Wprowadzamy osobną kategorię

Def. 13. Niech $\mathfrak{g}$ – rzeczywista algebra Liego, $(V, (\cdot|\cdot))$ – przestrzeń! [illegible] unitarna

> **KONWENCJA:** $(\cdot_1|\cdot_2)$ jest liniowa w $\cdot_2$!!!

Reprezentację (V, ρ) nazywamy <u>UNITARNĄ</u>, gdy $\forall X \in \mathfrak{g}: \ \rho(X)^\dagger = -\rho(X)$,

gdzie $\forall v, w \in V: \ (\rho(X)^\dagger (v) \mid w) := (v \mid \rho(X)(w))$