

Wykład VIII

2022/23



Nowy state

(39)

Str. 12. Dowlne reprezentacje
umowa na stonczeni wyników
pystzeni umow jest co pelni
pymiedze.

D : Nied (V, g) bedze umow uprzed
pymiedzi, alchy lapa of. Dymyzy dymy-
dymy na V pelni (1.1.).

Nach $W \subseteq V$ beste Substruktur
 σ -unitarisch, & $W^\perp$ ist das
(1.)-orthogonale. Folglich

$$V = W \oplus W^\perp$$

Es gilt, je $W^\perp$ ist σ -unit.

Insbesondere, $\forall (w, v) \in W \times W^\perp \forall X \in \sigma$:

$$\begin{aligned} (w | \rho(X)v) &\equiv (\rho(X)^T(w) | v) = -(\rho(X)(w) | v) \\ &= 0, \text{ d.h. } \rho(X)(w) \in W \quad (\Leftarrow W \text{ ist } \sigma\text{-unit.}) \end{aligned}$$

Jestli (V, φ) NIE jest uupyzmidka, (41)

do istnieje $0 \neq W \subset V$, która jest
 φ -uupym. i wtedy $V = W \oplus W^\perp$
: $W^\perp$ φ -uupym. czyli

$(W, \varphi|_W)$ do (40) upezentacye
unitarnej

Przynajmniej albo $(W, \varphi|_W)$ uupyzmidka,
albo rozkłada się na $\tilde{W} \oplus \tilde{W}^\perp$. Analogicznie

musieli być drugą do WT. (42)

Wszystkie powyższe procedury
prowadzi (w dronczym liście
kwalifikacji) do pełnego przeglądu

(V₁) na reprezentacyjne osiągnięcia



Nadzie możemy zrobić reprezentacji (43)
umierając algebr liczo 13 reprezentacje
zawarty jest liczo. Algebr 13 = 13
pochodzą, w paradygmaty

Def. 14. Niech G będzie grupą liczo
o algebrze liczo $\mathcal{A}$ i niech V będzie przestrzenią
wektorową nad $\mathbb{K}$. Niech $\rho : G \rightarrow GL(V; \mathbb{K})$
będzie reprezentacją G na V , więc homomorfizmem
grup liczo. Wówczas homomorfizm algebr liczo

$R \equiv T_e R : g \rightarrow gl(V)$ jest odwzorowaniem
wiodącym REPREZENTACJI POCHODNEJ g we V . (44)

namy

Str. 13. Przyjmijmy zdef. Def. 14, zakładając
Dodatkowo, że $K = \mathbb{C}$: we V jest określona
nieprzerwana struktura hermitowa

$$(\cdot | \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C} \quad (\text{iloczyn skalarny}).$$

Wówczas iloczyn R jest unitarna, tj.

$$\forall g \in G : (\cdot | \cdot) \circ (R(g) \times R(g)) = (\cdot | \cdot) \Leftrightarrow R(g)^T = R(g)^*$$

wskazując na bliżej reprezentację dR . (45)

D: skoro $\forall g \in G: R(g)^t = R(g)^{-1}$,

to w szczególności

$$\forall X \in \mathfrak{g}: R(\exp^G(tX))^t = R(\exp^G(-tX)),$$

de Str. 2-3-4-7.11 o naturalności $\exp$

pozwala zapisać $R \circ \exp^G = \exp^{GL(V;K)} \circ dR$,

zatem

$$\forall X \in \mathfrak{g} : \exp^{GL(V;K)}(dR(t \circ X))^t = \exp^{GL(V;K)}(dR(-t \circ X)) \quad (46)$$

$\exp^{GL(V;K)}$ to
"rightly" disappears

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \exp^{GL(V;K)}(dR(t \circ X))^t \\ \parallel \end{array}$$

$$\lambda_{dR(t \circ X)^t} (1)$$

linear' dR ||

$$\lambda_{t \circ dR(X)^t} (1)$$

8hr.2-3-4-7.7

||

$$\lambda_{dR(-t \circ X)} (1)$$

|| linear' dR

$$\lambda_{t \circ dR(-X)} (1)$$

|| 8hr.2-3-4-7.7

$$\lambda_{dR(-X)}(t)$$

$$\lambda_{dR(X)^t}(t)$$

Różniczkując po czasie tożsamość określającą, (47)
obryzmy, po prostu otrzymujemy

$$\forall X \in \mathfrak{g} : dR(X)^T = dR(-X) = -dR(X). \quad \square$$

Pozostałe rzeczy ustalić możemy
określając, w jaki sposób mamy do czynienia
z reprezentacją różnych grup
Liego. O tym mówi...

Tw. 1. [Weyla-Schur-Hurwitz o uśrednianiu] (48)

Niech G będzie zwykłą grupą Liego.

Wówczas dowolna (składowa) reprezentacja R grupy G na nieprzerwanym (zespółym) przestrzeni unitarnej $(V, (\cdot|\cdot))$

jest UNITARYZOWALNA, tj. istnieje na V

nieprzerwana forma hermitowska, wzgl. którą R jest unitarna.

D: Niedrigst $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$. Konjugierung Darstellung (49)
 element $\omega \in \wedge^{\dim G} \mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$ ist konjugierung
 $\mathfrak{g}$ um $\mathfrak{g}$ RI $g h^{-1} \xrightarrow{P_h} g$

$$\Omega \in \Omega^{\dim G}(G) : \Omega(g) := \omega \circ (T_g P_{g^{-1}} \times T_g P_{g^{-1}} \times \dots \times T_g P_{g^{-1}}), g \in G$$

$$\begin{aligned} \text{Istotnie, } \forall g, h \in G : \varphi_h^*(\Omega(g)) &\equiv \Omega(g) \circ T_{gh^{-1}} P_h^{\times \dim G} \\ &\equiv \omega \circ T_g P_{g^{-1}}^{\times \dim G} \circ T_{gh^{-1}} P_h^{\times \dim G} = \omega \circ T_{gh^{-1}} (P_{g^{-1}} \circ P_h)^{\times \dim G} \\ &= \omega \circ T_{gh^{-1}} P_{hg^{-1}}^{\times \dim G} = \omega \circ T_{gh^{-1}} P_{(gh^{-1})^{-1}}^{\times \dim G} \equiv \Omega(gh^{-1}). \end{aligned}$$

Trivialität TG folgte aus stabilis orientierung

(50)

o na G jako długości $\Gamma(TG)$
 odmierzenia $(R_{X_1}, R_{X_2}, \dots, R_{X_{d(G)}})$ dla dowolnego
 układu wektorów $\{X_A\}_{A \in \Gamma(TG)}$ o własności

$$\omega(X_1, X_2, \dots, X_{d(G)}) > 0.$$

Mając Ω , możemy zadać pytanie
 o dowolnej funkcji gładkiej $f \in C^\infty(G; \mathbb{R})$

wprowadzamy

$$\int_G f := \int_{(G,0)} f \circ \Omega, \quad \text{przy czym}$$

$$f > 0 \Rightarrow \int_G f > 0 \quad (\text{wzale } \textcircled{51} \\ \text{• zadane} \\ \text{przez } \Omega).$$

Bez innych przychyleny try 1 1^{te}
 cohen to jest p - mierzalności
 w rozumieniu tożsamości

$$\forall g \in G : \int_G p_g^* f = \int_G f \quad (\Leftarrow p_g^* \Omega = \Omega).$$

Rozwijamy w symetryzacji indelawang
 przez $V \times V$ rozbij funkcji

$$f_{v,w} : G \longrightarrow \underset{\{K \in \mathbb{R}\}}{\mathbb{K}} : g \longmapsto (R(g)(v) | R(g)(w)), \quad \textcircled{52}$$

$v, w \in V$

Die $w=v \in V$ ist $f_{v,w} \geq 0$ ($i=0 \Leftrightarrow v=0$)

Es gilt $\int_G f_{v,v} \geq 0$ $i=0 \Leftrightarrow v=0$,

Def. $(\cdot | \cdot)^G : V \times V \rightarrow \mathbb{K} : (v, w) \mapsto \int_G f_{v,w}$

gibt eine innerproduktartige Form herüber
(0 ist die identische 1. Form $(\cdot | \cdot)$).

Taki zdefiniowana forma symplecticzna (53)
 wariantu $\forall g \in G \forall v, w \in V$:

$$\begin{aligned} (R(g)(v) | R(g)(w))^G &\equiv \int_G f_{R(g)(v), R(g)(w)} = \int_{(G,0)} (R(\cdot)R(g)(v) | R(\cdot)R(g)(w)) \Omega(\cdot) \\ &= \int_{(G,0)} (R(\cdot \cdot g)(v) | R(\cdot \cdot g)(w)) \Omega(\cdot) \equiv \int_{(G,0)} (R \circ p_g(\cdot)(v) | R \circ p_g(\cdot)(w)) \Omega(\cdot) \end{aligned}$$

$$\equiv \int_G p_g^* f_{v,w} = \int_G f_{v,w} = (\sigma | w)^G, \text{ który oznacza}$$

moim zdaniem, że reprezentacja R jest uog. wj. unitarna $\square$

3) poligennie dwóch abstrakcyjnych (54)
wzrostu

Str. 14. Reprezentacje podrodnej algebry
Lego zwrócić się do uniwersalnej.

D: Ogólny.

Te same algebry Lego są zwrócić
spawiać, które algebry mogą na algebrach
Lego z nimi być stosowane.

Typy osiem sprowadzamy prostą, leży (55)
wider przydatne

Tw. 2. (Lemmaty Schur'a) Niech

σ -algebra $\mathcal{L}$ owo.

1° Niech $(V_1, \mathcal{F}_1) : (V_2, \mathcal{F}_2)$ - ję reprezentacje
nieprzegl.!

$\chi : (V_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (V_2, \mathcal{F}_2)$ - relacja.

Wówczas zachodzi dysjunkcja $\chi = 0 \vee \chi$ izo.

2° Med (V, φ) - ^{nieprzerwana} reprezentacja 56
 φ na zespole! ^{głęboko}
relatory! $\checkmark$

$\chi: (V, \varphi) \hookrightarrow$ - relatory

Wówczas $\exists \lambda \in \mathbb{C} : \chi = \lambda \circ \text{id}_V$.

3° Med $(V_1, \varphi_1) : (V_2, \varphi_2)$ - ^{nieprzerwana} reprezentacja φ
 $\neq 0$
 $\chi_1, \chi_2: (V_1, \varphi_1) \rightarrow (V_2, \varphi_2)$ - ^{nieprzerwana} relatory! ^{głęboko}
 φ_1, φ_2
 Wówczas $\exists \lambda \in \mathbb{C} : \chi_1 = \lambda \circ \chi_2$.

D, D 1° Prosta liniowa domowa (57)
(zbiór wektorów własnych λ i μ).

AD 2° Mamy - $\forall X \in \mathcal{A} - X \circ f(X) = f(X) \circ X$,
a ponieważ $\mathbb{C}$ jest algebraicznie domknięte
 $X \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ma co najmniej jeden
własny wektor, $\text{Sp} X \neq \emptyset$. Wobec
 $\forall X \in \mathcal{A} : f(X)(V_{\lambda}(X)) \subset V_{\lambda}(X)$, czyli

$V_\lambda(X) \subseteq V$ jest podprzestrzenią

(58)

og. mierz. Przyp. typ $\lambda \in \text{Sp} X$

ogracza, że $V_\lambda(X) \neq \{0_V\}$, zatem

wobec nieprzerwywalności φ zachodzi

$V = V_\lambda(X)$, co jest ogracone,

że $X \equiv X|_{V_\lambda(X)} \equiv \lambda \triangleright \text{id}_{V_\lambda(X)} \equiv \lambda \triangleright \text{id}_V$.

Ad 3° Show $\chi_2 \neq 0$, to us way (59)

1° splatky ten jst izomorfizmus.

Jstn'ie jstn χ_2^{-1} i $\chi_1 \circ \chi_2^{-1} : (V_2, \beta_2) \rightarrow$
W smetle 2° $\chi_1 \circ \chi_2^{-1} = \lambda \circ \text{id}_{V_2}$ splatky!

Jst prv'ij k'lyk $\lambda \in \mathbb{C}$, a w tak'ym

zvie $\chi_1 = \lambda \circ \chi_2$.

□

III ^{*} Wyjściowe reprezentacje $su(2)$. (60)

Reprezentujemy $su(2)$ na

$$V_n := \{ w \in \mathbb{C}_2[z_1, z_2] \mid \deg w = n \}$$

(jednorodne wielomiany stopnia 2)

$$w = \sum_{k=0}^n a_k z_1^{n-k} z_2^k$$

$$\text{Niech } X = X_{ij} \triangleright E_{ij}, \quad (E_{ij})^k_e = \delta_i^k \delta_{je},$$

(61)

a wtedy

$$\rho_2(X)(w) := - \left(X_{11} \mathbb{Z}_1 + X_{12} \mathbb{Z}_2 \right) \frac{\partial W}{\partial \mathbb{Z}_1} \\ - \left(X_{21} \mathbb{Z}_1 + X_{22} \mathbb{Z}_2 \right) \frac{\partial W}{\partial \mathbb{Z}_2}$$

Jeżeli reprezentacja $\mathfrak{su}(2)$.

Niech $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- baza $\mathfrak{su}(2)$.

Wdwyer

62

$$\rho_n(H) = -x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2$$

$$\rho_n(E_+) = -x_2 \partial_1$$

$$\rho_n(E_-) = -x_1 \partial_2$$

spez. nuss
wählend
Lie's 2a(2).

i
Darstellung

weiter unbenutzt!

$$\rho_n(H) (x_1^{n-k} x_2^k) = (-n+2k) x_1^{n-k} x_2^k$$

$$\rho_n(E_+) (x_1^{n-k} x_2^k) = -(n-k) x_1^{n-k-1} x_2^{k+1}$$

$$\rho_n(E_-) (x_1^{n-k} x_2^k) = -k x_1^{n-k+1} x_2^{k-1}$$

(*)

Str. 15. $\forall n \geq 0 : (V_n, \beta_n)$ jest
mierznielna.

(62)

D: Wykorzystaj polegając, że dowolna
se(2) - mierznielna. Podkreślajmy W_n
jest wolna V_n . Niech $W \in W_n$
będzie postaci $W = \sum_{k=0}^n a_k x_1^{n-k} x_2^k$,
mamy więc $\exists k \in \overline{0, n} : a_k \neq 0$.

Wzrost k_0 : najwyższy indeks (64)
o większym $a_{k_0} \neq 0$. Rozważmy

$$f_n(E_+)^{n-k_0} w = w_0.$$

Operator $f_n(\bar{E}_+)$ podnosi potęgę z_2
o 1, zatem $f_n(\bar{E}_+)^{n-k_0}$ anihiluje
wzrostki pochodzące z w o potęgach
 $a_{k_0} z_1^{n-k_0} z_2^{k_0}$, ale $f_n(E_+)(z_1^{n-k} z_2^k) = 0$

$\Leftrightarrow k = n$, zatem

(65)

$$f_n(E_+)^{n-k_0} W = \lambda_0 \Delta \mathbb{Z}_2^n$$

$$\lambda_0 \neq 0$$

Stąd jest W_n jest $m(2)$ -wymiar.,
 do mniejszej zawiera $\mathbb{Z}_2^n$. Teraz jednak
 $f_n(E_-)^k \mathbb{Z}_2^n$, $k \in \overline{0, n}$ są — na mocy (*)
 niezależnymi podprzestrzelnymi $\mathbb{Z}_1^k \mathbb{Z}_2^{n-k}$,
 (zh. 50) —

zatem te należą do W. Pościągaj (66)
jednak mogą one być V_n ,
więc — słownie — $W_n = V_n$. $\square$

Pytanie teraz do dyskusji który algebra
Liego o reprezentacji podlegałby tej
stanowiłoby interesujący. I dla porównania
z zastosowaniem fizyki i ewentualnie tej samej
winną rozprawy...

IV Elementy teorii algebr potęgowych (67)

Def. 15 Niedzielnej $\mathfrak{g}$ będzie zespoloną
algebrą Liego. Istnieje
związka pury Liego K o algebrze
Liego K takie, że $\mathfrak{g} \simeq K^c$,

algebr $\mathfrak{g}$ rozpinający REDUKTYWNA.
Jestli ponadto $z(\mathfrak{g}) = 0$, to mówimy, że
 $\mathfrak{g}$ jest POTĘGOWA.

Die Darstellung 'einfacher' algebry ⁶⁸
g algebry K wzywny ZWARTA FORMA
RZECZYWISTA g.

_____ x _____

NB: W literaturze występują różne inne
(odmienne) definicje prostoty, np.

* istnienie niezera idealu pierwotnego

** ———— ———— ———— rozkładu

*** zerowość reszty (niezerowego idealu
rozkładu)

**** nieproduktywne FORMY KILUNGA (69)

$$\kappa : g \times g \rightarrow \mathbb{C}$$

$$: (X, Y) \mapsto \text{tr}_g([X, [Y, \cdot]])$$

Wykazywanie równoważności powyższych definicji
jest procesem nieproduktywnym - w rzeczywistości
wylucza one wiele innych niezbędnych, a tym samym wybieramy definicję pozwalającą
na najszersze dotarcie do trybalizmu statystyki
reputacji...

Pygylidae : (1) $sl(n; \mathbb{C})$, $n \geq 2$

(70)

(2) $so(n; \mathbb{C})$, $n \geq 3$

(3) $sp(n; \mathbb{C})$, $n \geq 1$

is $\mu^T \mu^{\text{prot}}$.

(1') $gl(n; \mathbb{C})$

(2') $so(2; \mathbb{C})$

is reducible, leg $\mu^T \mu^{\text{prot}}$.
(ev. CHUGENIA!)

A żeby móc postąpić dalej, musimy (71)
przejść na bliżej określonej reprezentacji
podrodnej, której wprowadzamy ψ

Def. 16 Wiedząc G będzie grupą Liego

o algebrze Liego $\mathfrak{g}$. REPREZENTACJA

DOŁĄCZONA $\mathfrak{g}$ na sobie to reprezentacja
główna ($\text{ad} \equiv dT_e \text{Ad}, \mathfrak{g}$) stworzona

z REPREZENTACJĄ DOŁĄCZONĄ $(T_e \text{Ad}, \mathfrak{g})$.

3 powyższym pojęciem, o fundamentalnym (72)
znaczeniu w dalszej części kursu, opiera nas

Str. 16 krótki zapis Def. 16.

$$\forall X \in \mathfrak{g} : \text{ad}_X \equiv \text{ad}(X) = [X, \cdot]_{\mathfrak{g}}.$$

D: Rozważmy działanie grupy G na $\mathfrak{g}$:

$$T_e \text{Ad}_g : \mathfrak{g} \equiv T_e G \hookrightarrow \text{dla } \text{Ad}_g : G \ni h \mapsto g \cdot h \cdot g^{-1}$$

o punkcie mamy $\text{Ad}_g(e) = e$.

$$\text{Zechceć } \forall X \in \mathfrak{g} : T_e \text{Ad}_g(X) \equiv T_{g^{-1}} \ell_g \circ T_e p_{g^{-1}}(X).$$

Przyjmujemy z braku str. 27-27.1 postać operacji binarnej (73)

w formie ciągłej $T_m: TG \times TG \rightarrow TG$,

$$T_{(g,h)} m = T_g p_h \circ m_1 + T_h l_g \circ m_2,$$

z której wyprowadzamy tożsamości:

$$T_e p_{g^{-1}}(X) = T_{(e,g^{-1})} m(X, 0_{T_{g^{-1}}G}),$$

$$T_{g^{-1}} l_g(v) = T_{(g,g^{-1})} m(0_{TG}, v).$$

$$\forall \begin{matrix} g \in G \\ X \in \mathfrak{g} \\ v \in T_{g^{-1}}G \end{matrix}$$

Te formalny przepis

(74)

$$T_e Ad_g(X) = D_{Tg}(g) \cdot X \cdot D_{Tg}(g^{-1})$$

co wobec gładkości Tm oraz ciętej przez

$D_{Tg} \in \Gamma(TG)$ daje gładkość problemu

$T_e Ad$, umożliwiając jego zdefiniowanie

distanse od plus dystansu pochodnego.

W następnym kroku wykorzystujemy Str. 2-3-4-7.
(rozp. 7.) 6 i 12.

also gezeigt - da Darstellung $X, Y \in \mathfrak{g}$ - (75)

$$[L_X, L_Y]_{T(e)} \equiv \mathcal{L}_{L_X} L_Y \equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi_{L_X}(-t; \cdot)_* L_Y$$

$$= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} P \exp^G(-tX) * L_Y = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} L_{T_e \text{Ad}_{\exp^G(-tX)}(Y)}$$

$$= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} L_{T_e \text{Ad}_{\exp^G(tX)}(Y)} \quad , \quad \text{also}$$

$$[X, Y]_{\mathfrak{g}} \equiv [L_X, L_Y]_{T(e)} \stackrel{\downarrow}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} L_{T_e \text{Ad}_{\exp^G(tX)}(Y)}(e)$$

$$= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} T_e \text{Ad}_{\exp^G(tX)}(Y) \equiv d T_e \text{Ad}(X)(Y) . \quad \square$$

Nasze rozważania prowadzi tej do 76

Skr. 17. W odrydyzowanej notacji zachodzi
 bynajmniej $T_e \text{Ad} \circ \exp^G = \exp^{G(\alpha)} \circ \text{ad}.$

D: Wystarczy skorzystać ze skr. 2-3-4-7.11
 i skr. 16. $\square$

Ponieważ stąd nie wynika
 do fundamentalnego

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{T_e \text{Ad.}} & G(\alpha) \\
 \uparrow \exp^G & & \uparrow \exp^{G(\alpha)} \\
 \mathfrak{g} & \xrightarrow[\text{ad}]{d T_e \text{Ad.}} & \mathfrak{g}(\alpha)
 \end{array}$$

Str. 18. Niedziej $\mathfrak{g}$ będzie prosty (77)

algebra Liego o zwartej formie rzeczywistej K . Istnieje nieupodobniona forma hermitowska

$$(\cdot | \cdot) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$$

o postaci $(\cdot | \cdot)|_{K \times K} : K \times K \rightarrow \mathbb{R} (\subset \mathbb{C})$
(na $K = K \otimes 1 \subset \mathfrak{g}$)

i taka, je działanie adżointne $\text{ad}^{\mathbb{C}} : K \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$
 $\cong \text{ad} \otimes \text{id}_K$
jest unitarne w sensie wyrażenia powyż.

$$\forall X \in K, Y, Z \in \mathfrak{g} : (\text{ad}_X^{\mathbb{C}}(Y) | Z) = - (Y | \text{ad}_X^{\mathbb{C}}(Z)).$$

(2)

3 definiujemy anty- $\mathbb{C}$ -liniową involucję: (78)

$$* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} : X \otimes 1 + Y \otimes i \mapsto -X \otimes 1 + Y \otimes i, \\ (X, Y \in \mathfrak{k})$$

a wówczas powyższa mapa hermitowa
spełnia

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g} : (\operatorname{ad}_X^{(\mathfrak{g})}(Y) | Z) = (Y | \operatorname{ad}_X^{(\mathfrak{g})*}(Z)), \\ \text{czyli} \quad \operatorname{ad}_X^{(\mathfrak{g})\dagger} = \operatorname{ad}_X^{(\mathfrak{g})*}. \quad (*)$$

D: Rozważmy rezygnację struktury

(79)

hermitowskiej na K otrzymując $\mathfrak{g}$ konstrukcyjnego

dotyczy Tw. 1. Dla $(V, R) \equiv (K, T_{\mathbb{C}} \text{Ad.})$,

względem której $dR \equiv \text{ad}$ jest unitarna.

Struktura $\mathfrak{g}$ jest więc rozszerzeniem na $\mathfrak{g} \equiv K^{\mathbb{C}}$

u naturalnego sposobu:

$$\begin{aligned} (\cdot | \cdot)_{\mathbb{C}}^{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathbb{C} \\ &: (X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i, X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i) \mapsto +i \left((X_1 | Y_2)^{\mathfrak{g}} - (Y_1 | X_2)^{\mathfrak{g}} \right) \end{aligned}$$

(80)

Bei dieser Forderung ist,
 je $(\cdot | \cdot)_{\mathbb{C}}^G$ ist nichtnegativ, positiv
 definit und es gilt, wenn x, y reell,
 $\forall \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} : (x_1 \otimes 1 + y_1 \otimes i | \lambda \triangleright (x_2 \otimes 1 + y_2 \otimes i))_{\mathbb{C}}^G$
 $\equiv (x_1 \otimes 1 + y_1 \otimes i | (\alpha \triangleright x_2 - \beta \triangleright y_2) \otimes 1 + (\alpha \triangleright y_2 + \beta \triangleright x_2) \otimes i)_{\mathbb{C}}^G$
 $\equiv (x_1 | \alpha \triangleright x_2 - \beta \triangleright y_2)^G + (y_1 | \alpha \triangleright y_2 + \beta \triangleright x_2)^G$
 $+ i ((x_1 | \alpha \triangleright y_2 + \beta \triangleright x_2)^G - (y_1 | \alpha \triangleright x_2 - \beta \triangleright y_2)^G)$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left((X_1 | X_2)^G + (Y_1 | Y_2)^G + i \left((X_1 | Y_2)^G - (Y_1 | X_2)^G \right) \right) \textcircled{81} \\
&+ \beta \left((Y_1 | X_2)^G - (X_1 | Y_2)^G + i \left((X_1 | X_2)^G + (Y_1 | Y_2)^G \right) \right) \\
&\equiv (\alpha + i\beta) \cdot (X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i | X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i)_C^G, \text{ a note}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i | X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i)_C^G \equiv (X_2 | X_1)^G + (Y_2 | Y_1)^G \\
&\quad + i \left((X_2 | Y_1)^G - (Y_2 | X_1)^G \right) \quad \left[\begin{array}{l} x=0=y \\ 1 \end{array} \right] \\
&= (X_1 | X_2)^G + (Y_1 | Y_2)^G - i \left((X_1 | Y_2)^G - (Y_1 | X_2)^G \right) \\
&\equiv \underbrace{(X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i | X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i)_C^G}_{\substack{\text{Permutation} \\ (X \otimes 1 + Y \otimes i | X \otimes 1 + Y \otimes i)_C^G = (X | X)^G + (Y | Y)^G + i((X | Y)^G - (Y | X)^G)}}
\end{aligned}$$

W kolejnym kroku sprawdzamy tj. $\gamma' \in \textcircled{82}$

kompleksyfikacja ad , zatem pewnym wzorem

$$\text{ad}_X^{\mathbb{C}}(Y \otimes 1 + Z \otimes i) := \text{ad}_X(Y) \otimes 1 + \text{ad}_X(Z) \otimes i, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{k},$$

specjalnie sprawdzamy warunek:

$$\begin{aligned} & \left(\text{ad}_X^{\mathbb{C}}(X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i) \mid X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i \right)_{\mathbb{C}}^{\mathbb{G}} \\ & \equiv \left(\text{ad}_X(X_1) \otimes 1 + \text{ad}_X(Y_1) \otimes i \mid X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i \right)_{\mathbb{C}}^{\mathbb{G}} \\ & \equiv \left(\text{ad}_X(X_1) \mid X_2 \right)^{\mathbb{G}} + \left(\text{ad}_X(Y_1) \mid Y_2 \right)^{\mathbb{G}} + i \left(\begin{aligned} & \left(\text{ad}_X(X_1) \mid Y_2 \right)^{\mathbb{G}} \\ & - \left(\text{ad}_X(Y_1) \mid X_2 \right)^{\mathbb{G}} \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

(83)

$$= - (X_1 | \text{ad}_X(X_2))^G - (Y_1 | \text{ad}_X(Y_2))^G$$

$$- i \left((X_1 | \text{ad}_X(Y_2))^G - (Y_1 | \text{ad}_X(X_2))^G \right)$$

$$= - \left(X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i | \text{ad}_X(X_2) \otimes 1 + \text{ad}_X(Y_2) \otimes i \right)_\mathbb{C}^G$$

$$= - \left(X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i | \text{ad}_X^\mathbb{C}(X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i) \right)_\mathbb{C}^G,$$

co formula nam zapochleba! (w odměřání
do též
dvojnásob
str.)

$$(\cdot | \cdot) \equiv (\cdot | \cdot)_\mathbb{C}^G.$$

Pozor! sponďeť tejsmo! (*) (th. 78)

W tym celu bierzemy — dla dowolnego (84)
 $\mathbb{C}$ -liniowego rozszerzenia $\text{ad}^{\mathbb{C}}$ z k do $k^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}$,
 danego wzorem

$$\text{ad}^{(\mathfrak{g})}_{X \otimes 1 + Y \otimes i} \equiv \text{ad}_X^{\mathbb{C}} + i \text{ad}_Y^{\mathbb{C}} \quad -$$

dzięki czemu polewnymy trybem

$$\left(\text{ad}^{(\mathfrak{g})}_{X \otimes 1 + Y \otimes i} (X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i) \mid X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i \right)_{\mathbb{C}}$$

$$\begin{aligned} &\equiv \left(\text{ad}_X^{\mathbb{C}} (X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i) + i \text{ad}_Y^{\mathbb{C}} (X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i) \mid X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i \right)_{\mathbb{C}} \\ &= - \left(X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i \mid \text{ad}_X^{\mathbb{C}} (X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i) \right)_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -i \left(\text{ad}_Y^{\mathbb{C}}(X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i) \mid X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i \right)_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}} \quad (85) \\
 & = (X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i \mid (-\text{ad}_X^{\mathbb{C}} + i\text{ad}_Y^{\mathbb{C}})(X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i))_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}} \\
 & \equiv (X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i \mid \text{ad}_{(X \otimes 1 + Y \otimes i)^*}^{(\sigma)}(X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i))_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}},
 \end{aligned}$$

co kończy dowód. $\square$

W ten sposób wyznaczenie 3 powyższego dobieło
 idąc wstecz, wyrażenie powyższe...