Wykład IX

2022/23

Str. 19. Niechaj $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego o zwartej formie rzeczywistej $\mathfrak{k}$.
Niech $(\cdot|\cdot) : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{C}$ będzie jak w Str. 18.
Jeżeli $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ jest ideałem, to wtedy $\mathfrak{h}^{\perp}$ jest ideałem i $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}^{\perp}$ jako algebra Liego.

D: Bycie ideałem oznacza, że

$$\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})\subset\mathfrak{h},$$

w szczególności więc $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{h})\equiv\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{\mathfrak{k}\otimes 1}(\mathfrak{h})\subset\mathfrak{h}$.

W takim jednak razie

$$\left(\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{t}^{\perp}) \,\middle|\, \mathfrak{t}\right) = -\big(\mathfrak{t}^{\perp} \,\big|\, \underbrace{\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{t})}_{\subset\, \mathfrak{t}}\big) = 0,$$

czyli $\mathfrak{t}^{\perp}$ jest $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}}$-niezmiennicze,

a zatem także $\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{\mathfrak{g}} \equiv \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}} + i \cdot \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}}$ -niezmiennicze.

Jako przestrzeń $\mathbb{C}$-liniowa $\mathfrak{g}$ rozkłada się na sumę prostą $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{t}^{\perp}$, a ponieważ

$\Rightarrow \mathfrak{t} \cap \mathfrak{t}^{\perp} = \{0_{\mathfrak{g}}\}$

zarówno $\mathfrak{r}$, jak i $\mathfrak{r}^{\perp}$ są ideałami w $\mathfrak{g}$, przeto $[\mathfrak{r},\mathfrak{r}^{\perp}] \subset \mathfrak{r}\cap\mathfrak{r}^{\perp} = \{0_{\mathfrak{g}}\}$, co oznacza właśnie, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}\oplus\mathfrak{r}^{\perp}$ jako algebra Liego. $\square$

Relacje między algebrami redukcyjnymi i półprostymi precyzuje ...

Str. 20. Niechaj $\mathfrak{g}$ będzie reduktywną zespoloną algebrą Liego o centrum $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Wówczas istnieje półprosta algebra Liego $\delta\mathfrak{g}$ o własności $\mathfrak{g} \simeq \delta\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (jako algebry Liego).

D: Jako że $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$, przeto także $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})^{\perp}$ (wzgl. struktury hermitowskiej i/s) jest ideałem w $\mathfrak{g}$ na mocy str. 19, a przy tym $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^{\perp} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Pokażemy, że $\delta\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^{\perp}$ jest półprosta.

Oczywiście $\mathfrak{z}(\delta\mathfrak{g}) = 0$, albowiem

$\forall Z \in \mathfrak{z}(\delta\mathfrak{g}) : Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (wobec $[Z, \mathfrak{z}(\mathfrak{g})] = 0$, a $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^{\perp}$),

czyli $Z \in \delta\mathfrak{g} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$.

Pozostaje wykazać zwartość formy rzeczywistej algebry Liego $\delta\mathfrak{g}$.

W tym celu zauważmy, że $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$

$\Longleftrightarrow Z \in \ker \mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{\mathfrak{g}} \Longleftrightarrow Z \in \ker \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{K}$, a zatem

$$Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \iff Z^* \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}).$$

Istotnie $Z = X \otimes 1 + Y \otimes i \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$

$$\iff \forall u \in \mathbf{k} : \quad 0 = \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_u (X \otimes 1 + Y \otimes i)$$

$$= \mathrm{ad}_u(X) \otimes 1 + \mathrm{ad}_u(Y) \otimes i$$

$$\iff \forall u \in \mathbf{k} : \quad \mathrm{ad}_u(X) = 0 = \mathrm{ad}_u(Y)$$

$$\iff \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_u(Z^*) \equiv \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_u(-X \otimes 1 + Y \otimes i) =$$

$$\equiv -\mathrm{ad}_u(X) \otimes 1 + \mathrm{ad}_u(Y) \otimes i = 0.$$

Ponieważ zaś $*$ jest inwolucją, (92)

przeto także $\delta\mathfrak{g}^* = \delta\mathfrak{g}$, to podobnie

implikuje $\delta\mathfrak{g} = \mathbb{C}\otimes(\delta\mathfrak{g}\cap \mathfrak{k}^{\otimes'}) = (\delta\mathfrak{g}\cap \mathfrak{k}^{\otimes'})^{\mathbb{C}}$ elementy rzeczywiste generują $\delta\mathfrak{g}$ over $\mathbb{C}$!

Istotnie, niech $\delta\mathfrak{g} \ni v = X\otimes 1 + Y\otimes i \Rightarrow \frac{1}{2}(v+v^*) = X\otimes 1$ i $\frac{1}{2i}(v-v^*) = X\otimes 1$

podobnie pole $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}\otimes(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap \mathfrak{k}^{\otimes'}) = (\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap \mathfrak{k}^{\otimes'})^{\mathbb{C}}$. $\delta\mathfrak{g} \subset (\delta\mathfrak{g}\cap\mathfrak{k}^{\otimes'})^{\mathbb{C}}$!

Wystarczy zatem okazać, że $\delta\mathfrak{g}\cap \mathfrak{k}^{\otimes'}$ i vice versa!

jest algebrą Liego zwartej grupy Liego.

Niechaj K będzie zwartą grupą Liego o algebrze

Liego $k \equiv \mathrm{Lie}\,K$. Oznaczmy

$$\delta K := T_e \mathrm{Ad}(K) \subset GL(k).$$

Jako ciągły obraz grupy zwartej δK jest zwarta, zatem domknięta. Na mocy Tw. Cartana 2-3-4-7.2 jest ona podgrupą Liego grupy Liego $GL(k)$, więc w szczególności – grupą Liego.

Mostow pattern

94

$0 \to \mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{k} \hookrightarrow \mathfrak{k} \twoheadrightarrow \delta\mathfrak{g}\cap\mathfrak{k} \to 0$
$(\mathfrak{k}\otimes 1)$

conjgt
$\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{k}\otimes 1$
$\subseteq$
$\mathfrak{k}\otimes 1 \cap \mathfrak{g}$
$=$
$\mathfrak{k}\otimes 1 \cap (\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \delta\mathfrak{g})$
$\supseteq$
$(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{k}\otimes 1) \oplus (\delta\mathfrak{g}\cap\mathfrak{k}\otimes 1)$

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[rr, "T_e\mathrm{Ad}"] \arrow[r, two heads, "T_e\mathrm{Ad}^*"] & \delta K \arrow[r] & GL(\mathfrak{k}) \\
 & & \delta\mathfrak{g}\cap\mathfrak{k} \arrow[u, "\exp^{\delta K}"] \arrow[r] \arrow[dr] & 0 \\
\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{k} \arrow[r] & \mathfrak{k} \arrow[uu, "\exp^K"] \arrow[ur, two heads, "\mathrm{ad}"] \arrow[rr, "\mathrm{ad}"'] & & \mathfrak{gl}(\mathfrak{k}) \arrow[uu, "\exp^{GL(\mathfrak{k})}"'] \\
0 \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}$$

$\delta\mathfrak{g}\cap\mathfrak{k} \simeq \mathrm{Lie}\,\delta K$

since $\delta\mathfrak{g}\cap\mathfrak{k} \overset{\mathrm{ad}}{\simeq} \mathfrak{k}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{k}$

$\ker\mathrm{ad} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{k}\otimes 1$

stąd pojedynczy wniosek

$$\delta\mathfrak{g}\cap\mathfrak{k} \equiv \mathrm{Lie}\,\delta K$$

δK – zwarta. □

Przechodząc do dyskusji algebr półprostych, zauważmy

<u>Tw. 3.</u> Niechaj $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego. Istnieją podalgebry $\{\mathfrak{g}_i \subseteq \mathfrak{g}\}_{i\in\overline{1,N}}$, $N<\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$ będące prostymi algebrami Liego

i jedyny rozkład prosty

$$\mathfrak{g} \simeq \bigoplus_{i=1}^{N} \mathfrak{g}_i \quad (\text{jako algebry Liego}).$$

Podalgebry te są określone jednoznacznie z dokładnością do permutacji.

<u>D</u>: Jeżeli $\mathfrak{g}$ ma <u>nietrywialny</u> ideał $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ rozkłada się jako algebra Liego na sumę prostą $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$ na mocy str. 19, przy czym $\mathfrak{h}^{\perp}$ także jest

ideałem w $\mathfrak{g}$. Jeśli $\mathfrak{h}$ zawiera nietrywialny ideał (w $\mathfrak{h}$!) $\mathfrak{h}' \subsetneq \mathfrak{h}$, to oczywiście $[\mathfrak{h}^\perp, \mathfrak{h}']_{\mathfrak{g}} = \underset{\mathfrak{h}'}{\underset{\cap}{0}}$ oraz $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}']_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{h}'$, przeto $\mathfrak{h}'$ jest też ideałem w $\mathfrak{g}$. W takim razie

$$\mathfrak{h}'' := (\mathfrak{h}')^\perp \cap \mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$$

jest ideałem w $\mathfrak{g}$ i otrzymujemy – ponownie na mocy Stw. 19 –

$$\mathfrak{g} \simeq (\mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{h}'') \oplus \mathfrak{h}^\perp .$$

Po skończonej liczbie kroków uzyskujemy tym sposobem rozkład prosty algebry Liego $\mathfrak{k}$ na sumę prostą algebr nieposiadających nietrywialnych ideałów, a następnie ten sam algorytm stosujemy do ideału $\mathfrak{k}^{\perp}$, otrzymując ostatecznie rozkład prosty $\mathfrak{g}$ na sumę prostą

$$\mathfrak{g} \cong \bigoplus_{i=1}^{N} \mathfrak{g}_i$$

trudniejszej algebry. Pozostaje pokazać, że każdy ideał ma wymiar liniowy co najmniej 2.

1.a. Niech $\mathfrak{g}_i$ będzie jednym z ideałów i załóżmy, że $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_i = 1$. Wówczas $\mathfrak{g}_i$ jest komutatywna, a zatem $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (wszak $\forall j \in \overline{1,N} \setminus \{i\} : [\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_i]_{\mathfrak{g}} = 0$).
Ale $\mathfrak{g}$ półprosta, zatem $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$. ↯

Niechaj teraz $\bigoplus_{i=1}^{N_1} \mathfrak{g}_i^{(1)} \cong \mathfrak{g} \cong \bigoplus_{i=1}^{N_2} \mathfrak{g}_i^{(2)}$ (100)

będą dwoma takimi rozkładami.

Każda podalgebra $\mathfrak{g}_i^{(A)}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$, a zatem podreprezentacją reprezentacji $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$. Jako taka $\mathfrak{g}_i^{(A)}$ jest nieprzywiedlna, bo w p.p. zawierałaby podprzestrzeń, która będąc $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-niezmienniczą, byłaby w szczególności $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_i^{(A)}}$-niezmienniczą, czyli – nietrywialnym ideałem w $\mathfrak{g}^{(A)}_i$, w sprzeczności z prostotą $\mathfrak{g}^{(A)}_i$. Przy tym

$$i \neq j \Longrightarrow \left(\mathfrak{g}^{(A)}_i, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\restriction\right) \not\cong \left(\mathfrak{g}^{(A)}_j, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\restriction\right),$$

bo $\mathfrak{g}_i^{(A)}$ działa na $\mathfrak{g}_i^{(A)}$ nietrywialnie (wszak $\mathfrak{g}_i^{(A)}$ jest niekomutatywna), a na $\mathfrak{g}_j^{(A)}$ – trywialnie ($\Leftarrow \mathfrak{g} \cong \bigoplus_{i=1}^{N_A} \mathfrak{g}_i^{(A)}$ jako <u>algebra Liego</u>)

Rozważmy teraz ideał $\mathfrak{g}_i^{(2)} \subset \mathfrak{g}$. Jako że rzut kanoniczny $pr_j : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}_j^{(1)}$

jest splotaczem między $ad_{\mathfrak{g}}$ i $ad_{\mathfrak{g}}\restriction_{\mathfrak{g}_j^{(1)}}$

(wszak $\mathfrak{g}_j^{(1)}$ jest ideałem), zatem

$\pi_{j;i} = pr_j\restriction_{\mathfrak{g}_i^{(2)}} : (\mathfrak{g}_i^{(2)}, ad_{\mathfrak{g}}\restriction_{\mathfrak{g}_i^{(2)}}) \longrightarrow (\mathfrak{g}_j^{(1)}, ad_{\mathfrak{g}}\restriction_{\mathfrak{g}_j^{(1)}})$ (nieprzywiedlne obie!) jest albo 0, albo $\cong$ na mocy

I Lematu Schura (Tw. 2.1°). Skoro jednak

$\mathfrak{g} \cong \bigoplus_{i=1}^{N_1} \mathfrak{g}_i^{(1)}$, to istnieje $j \in \overline{1,N_1}$: $\pi_{j;i}$ jest $\cong$. (inaczej $\pi_{j;i} \equiv 0$)

Wtedy też jednak $\pi_{k\neq j;i} = 0$, bo reprezentacje

$$\left(\mathfrak{g}_k^{(1)}, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\big|_{\mathfrak{g}_k^{(1)}}\right) \not\simeq \left(\mathfrak{g}_j^{(1)}, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\big|_{\mathfrak{g}_j^{(1)}}\right) \text{ dla } k \neq j.$$

Jest zatem $\mathfrak{g}_i^{(2)} = \mathfrak{g}_j^{(1)}$ (równość, a nie tylko $\simeq$!).

$\square$

Uzyskawszy nietrywialny wgląd w „anatomię" półprostych algebr Liego, przejdziemy obecnie do ich analizy pod kątem klasyfikacji ich reprezentacji. W tym celu wyróżnimy w og (półprostej) elementy (wspól–) 104

diagonalizowalne w każdej reprezentacji,

więc w szczególności – w reprezentacji

dołączonej (og, ad).

Def. 17. PODALGEBRA CARTANA

(półprostej) algebry Liego $\mathfrak{g}$ (nad $\mathbb{C}$) to podprzestrzeń (zespolona) $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ o własnościach:

(C1) $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}} = 0$ (KOMUTATYWNOŚĆ)

(C2) $\forall X \in \mathfrak{g} : \left([\mathfrak{h}, X]_{\mathfrak{g}} = 0 \Rightarrow X \in \mathfrak{h} \right)$ (MAKSYMALNOŚĆ)

(C3) $\forall H \in \mathfrak{h}$: ad_H jest diagonalizowalny. (WSPÓŁDIAGONALIZOWALNOŚĆ).

mamy następujące

<u>Tw. 4</u> [O istnieniu podalgebry Cartana]

Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego o zwartej formie rzeczywistej $\mathfrak{k}$ i niech $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ będzie (dowolną) maksymalną podalgebrą komutatywną. Wówczas podalgebra

$$\mathfrak{h} := \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$$

jest podalgebrą Cartana $\mathfrak{g}$. W szczególności podalgebra Cartana istnieje.

D: Rozważmy dowolną 1-wym. podprzestrzeń $\mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{k}$ ($\neq \mathfrak{k}$, bo $\mathfrak{z}(\mathfrak{k}) = 0$). To jest podalgebra komutatywna. Niech teraz $S_{\mathfrak{k}_0}$ będzie zbiorem podalgebr komutatywnych w $\mathfrak{k}$ zawierających $\mathfrak{k}_0$. Wówczas maksymalny element tego zbioru, $\mathfrak{t} := \bigcup_{s \in S_{\mathfrak{k}_0}} s \subset \mathfrak{k}$ jest przykładem maksymalnej podalgebry komutatywnej.

Niech teraz $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ dla $\mathfrak{t}$ j.w.

Wówczas $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}} = 0$ i musimy pokazać, że jest maksymalna.

Niech $X \in \mathfrak{g} \equiv \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ spełnia $[X,\mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}} = 0$

$\equiv X_1 \otimes 1 + X_2 \otimes i$, a wtedy także

$[X, \mathfrak{t} \otimes 1]_{\mathfrak{g}} = 0$, więc $[X_1, \mathfrak{t}]_{\mathfrak{k}} = 0 = [X_2, \mathfrak{t}]_{\mathfrak{k}}$!

ponieważ jednak $\mathfrak{t}$ maksymalna, przeto nieodzownie $X_1, X_2 \in \mathfrak{t}$, czyli $X \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \equiv \mathfrak{h}$.

Jeśli teraz $(\cdot|\cdot)$ jest formą hermitowską, (109)
o której mowa w Stw. 18, to
$$\forall H \in \mathfrak{t} \left(\subset \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} \right) : \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_H \text{ jest skośnie}$$
hermitowski, więc też diagonalizowalny, a ponieważ dla dowolnych dwóch $H_1, H_2 \in \mathfrak{t}$ zachodzi
$$\left[\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_1}, \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_2}\right]_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})} = \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{[H_1,H_2]_{\mathfrak{t}}} = 0,$$
przeto operatory $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_1}$ i $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_2}$ są
współ-diagonalizowalne. W takim przypadku

więc także dowolny element

$H = H_1 \otimes 1 + H_2 \otimes i$ ma $\mathrm{ad}_H \equiv \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_1} + i \triangleright \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_2}$

diagonalizowalny i – znów –

$$\forall H, \tilde{H} \in \mathfrak{t} \; : \; [\mathrm{ad}_H, \mathrm{ad}_{\tilde{H}}]_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})} = \mathrm{ad}_{[H, \tilde{H}]_{\mathfrak{g}}} = 0,$$

więc $\{\mathrm{ad}_H\}_{H \in \mathfrak{t}}$ są współdiagonalizowalne.

<u>NB</u>: Dowodzi się, że dowolne dwie $\square$
podalgebry Cartana są izomorficzne,
przy czym izomorfizm taki rozszerza się
do automorfizmu $\mathfrak{g}$.

To uprawomocnia

<u>Def. 18.</u> RZĄD półprostej algebry Liego $\mathfrak{g}$ to wymiar jej (dowolnej) podalgebry Cartana.

W dalszej części wykładu zbadamy rozkład $\mathfrak{g}$ na podprzestrzenie własne $ad_{\mathfrak{h}}$ …

Wobec $\mathbb{C}$-liniowego charakteru odwzorowania $\mathrm{ad}_{\cdot} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ zależność wartości własnej operatora ad_H, $H \in \mathfrak{t}$ od H jest $\mathbb{C}$-liniowa. Ma zatem sens

Przyjmijmy dotychczasowe założenia.

<u>Def. 19</u> Jeżeli istnieje niezerowy wektor $X \in \mathfrak{g}$ o własności

$$\mathrm{ad}_H(X) = \alpha(H) \triangleright X \,, \quad H \in \mathfrak{t},$$

funkcjonał $\mathbb{C}$-liniowy $\alpha : \mathfrak{t} \to \mathbb{C}$ określony mianem <u>PIERWIASTKA</u> $\mathfrak{g}$ dla $\mathfrak{t}$.

Istnienie niezmienniczej formy hermitowskiej na $\mathfrak{g}$, o której mowa w str. 18, wyznacza izomorfizm $\mathfrak{t}^* \cong \mathfrak{t}$, który pozwala wygodnie zdefiniować pierwiastek jako taki $\alpha \in \mathfrak{t} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$, dla którego istnieje $X \in \mathfrak{g} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$ o własności

$$\forall H \in \mathfrak{t} : \mathrm{ad}_H(X) = (\alpha|H) \triangleright X .$$

Zbiór wszystkich pierwiastków będziemy oznaczać symbolem $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$. ||

Dla dowolnego pierwiastka $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ (114)

określony **PRZESTRZEŃ PIERWIASTKOWA**

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{ X \in \mathfrak{g} \mid \forall H \in \mathfrak{t} : \mathrm{ad}_H(X) = (\alpha|H) \triangleright X \}.$$

Dowolny jej element $X \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0_\mathfrak{g}\}$ nazywamy **WEKTOREM PIERWIASTKOWYM** α.

Ozn.: Ogólniej oznaczamy – dla dowolnego $\alpha \in \mathfrak{t}$:
$$\mathfrak{g}_\alpha = \{ X \in \mathfrak{g} \mid \forall H \in \mathfrak{t} : \mathrm{ad}_H(X) = (\alpha|H) \triangleright X \},$$
przy czym $\mathfrak{g}_0 \equiv \mathfrak{t}$ oraz $\alpha \notin Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \Rightarrow \mathfrak{g}_\alpha = 0$.

Mamy oczywiście   Przyjmujemy język dotychczasowy.

Str. 21. Dowolna półprosta algebra Liego $\mathfrak{g}$ o podalgebrze Cartana $\mathfrak{h}$ ma jako przestrzeń $\mathbb{C}$-liniowa rozkład

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha .$$

---

x

Przyjrzyjmy się bliżej przestrzeniom pierwiastkowym ...

<u>Str. 22.</u> Przypomnijmy zapis dotychczasowy.

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathfrak{t} : \quad [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} .$$

W szczególności, jeśli $\alpha+\beta \notin Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$,

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta]_{\mathfrak{g}} = 0 .$$

<u>D</u>: Tożsamość Jacobiego może być zinterpretowana jako stwierdzenie:

$\forall X \in \mathfrak{g}$: ad_X jest różniczkowaniem algebry $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ ← iloczynu ,

$$\mathrm{ad}_X([Y,Z]_{\mathfrak{g}}) = [\mathrm{ad}_X(Y), Z]_{\mathfrak{g}} + [Y, \mathrm{ad}_X(Z)]_{\mathfrak{g}}.$$

W szczególności $\forall (X,Y) \in \mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_\beta$:

$$\mathrm{ad}_H([X,Y]_{\mathfrak{g}}) = [\mathrm{ad}_H(X), Y]_{\mathfrak{g}} + [X, \mathrm{ad}_H(Y)]_{\mathfrak{g}}$$

$$= [(\alpha|H) \triangleright X, Y]_{\mathfrak{g}} + [X, (\beta|H) \triangleright Y]_{\mathfrak{g}}$$

$$= (\alpha+\beta|H) \triangleright [X,Y]_{\mathfrak{g}} . \quad \square$$

Uwagi dalej

Str. 23. Przypomnijmy dotychczasową notację:

$$Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \subset \mathfrak{t}\otimes i .$$

D: Jako że ad_H, $H\in\mathfrak{t}$ jest skośnie hermitowski, przeto $\mathrm{Sp}\, ad_H \subset i\mathbb{R} (\subset \mathbb{C})$, ale to oznacza, że $\forall \alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) : (\alpha|H)\in i\mathbb{R}$.

Niech $\underset{\alpha_1,\alpha_2\in\mathfrak{t}}{\alpha = \alpha_1\otimes 1 + \alpha_2\otimes i}$, a wtedy – w świetle str. 18. –

$$\underset{\in i\mathbb{R}}{(\alpha|H)} = \underset{\in\mathbb{R}}{(\alpha_1|H)} - i\cdot\underset{\in\mathbb{R}}{(\alpha_2|H)} \Rightarrow \alpha_1 = 0.$$

$(\mathrm{Im}(\cdot|\cdot)\restriction_{\mathfrak{t}\times\mathfrak{t}}\subset\mathbb{R})$

$\square$