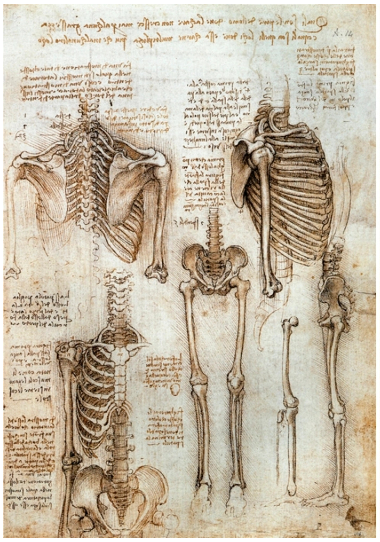
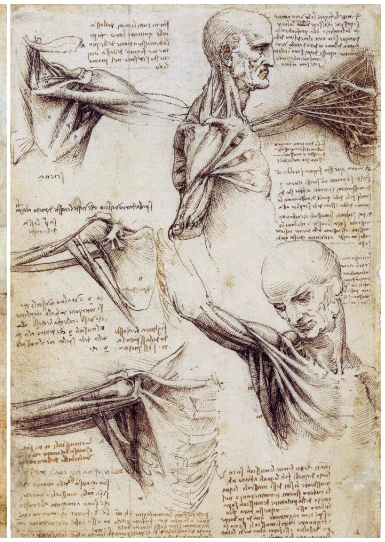
**CLIFFORD'S ANATOMY**
**(MAWF '22/23 1.XI & 1.XII [RRS])**

Dotychczasowe nasze rozważania przygotowały nas do przeprowadzenia szczegółowej analizy struktury algebr Clifforda skończenie wymiarowych przestrzeni kwadratowych, której zwieńczeniem będzie klasyfikacja tychże algebr w fizycznie istotnych przypadkach: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Rzeczoną analizę zaczniemy od zbadania wymiaru i wskazania naturalnej bazy algebry Clifforda.

**Stwierdzenie 1.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\{v_i\}_{i\in\overline{1,N}}$, $N = \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ będzie bazą przestrzeni kwadratowej $V$ o niezerowej formie kwadratowej. Zbiór wektorów

$$\{e^{\mathrm{C}}, v_{i_1}.v_{i_2}.\cdots.v_{i_k}\}_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le N\,,\ k\in\overline{1,N}}$$

stanowi bazę algebry Clifforda $\mathrm{Cliff}(V,Q)$. W szczególności więc

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Cliff}(V,Q) = 2^N\,. \tag{1}$$

*<u>Dowód:</u>* Przeprowadzimy indukcję względem wymiaru $N$, poczynając od przypadku $N = 1$. Niechaj zatem $v \in V \smallsetminus \{0_V\}$, a wtedy homomorfizm przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowych

$$\imath_V\ :\ V \longrightarrow \langle e, v\rangle_{\mathbb{K}} \subset \mathrm{Cliff}(V,Q)\ :\ \lambda \triangleright v \longmapsto \jmath_V^{\mathrm{C}}(\lambda \triangleright v) \equiv \lambda \triangleright v$$

jest odwzorowaniem Clifforda,

$$\imath_V(\lambda \triangleright v)^2 = \lambda^2 \triangleright \imath_V(v)^2 = \lambda^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright e^{\mathrm{C}} = Q(\lambda \triangleright v) \triangleright e^{\mathrm{C}}\,,$$

którego obraz generuje $\langle e, v\rangle_{\mathbb{K}}$ jako $\mathbb{K}$-algebrę. Ponadto dla dowolnego odwzorowania Clifforda $\varphi\ :\ V \longrightarrow \mathfrak{A}$ jest $\varphi(\lambda \triangleright v) = \lambda \triangleright_{\mathfrak{A}} \varphi(v)$, więc oznaczywszy $a := \varphi(v) \in \mathfrak{A}$, spełniający warunek $a^2 = Q(v) \triangleright \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$, możemy zdefiniować odwzorowanie (jawnie unitalne i $\mathbb{K}$-liniowe)

$$\widetilde{\varphi}\ :\ \langle e, v\rangle_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathfrak{A}\ :\ \lambda \triangleright e^{\mathrm{C}} + \mu \triangleright v \longmapsto \lambda \triangleright \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu \triangleright a\,,$$

przy czym

$$\widetilde{\varphi} \circ \imath_V(\lambda \triangleright v) = \lambda \triangleright_{\mathfrak{A}} a = \varphi(\lambda \triangleright v)\,,$$

a nadto

$$\widetilde{\varphi}\big((\lambda_1 \triangleright e^{\mathrm{C}} + \mu_1 \triangleright v).(\lambda_2 \triangleright e^{\mathrm{C}} + \mu_2 \triangleright v)\big) = \widetilde{\varphi}\big(\big(\lambda_1 \cdot_{\mathbb{K}} \lambda_2 +_{\mathbb{K}} \mu_1 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v)\big) \triangleright e^{\mathrm{C}}$$

$$+(\lambda_1 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_2 +_{\mathbb{K}} \lambda_2 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_1) \triangleright v\big) = \big(\lambda_1 \cdot_{\mathbb{K}} \lambda_2 +_{\mathbb{K}} \mu_1 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v)\big) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$$

$$+_{\mathfrak{A}}(\lambda_1 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_2 +_{\mathbb{K}} \lambda_2 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_1) \triangleright_{\mathfrak{A}} a = (\lambda_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} a) \cdot_{\mathfrak{A}} (\lambda_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} a)$$

$$\equiv \widetilde{\varphi}(\lambda_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} a) \cdot_{\mathfrak{A}} \widetilde{\varphi}(\lambda_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} a)\,.$$

Wnioskujemy więc, na podstawie Stw. 8-9-10.1, że $\big(\big(\langle e^{\mathrm{C}}, v\rangle_{\mathbb{K}}, \iota_V\big), \iota_V\big)$ jest algebrą Clifforda dla $(\langle v\rangle_{\mathbb{K}} \equiv V, Q)$ i – zgodnie z postulatem –

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Cliff}(\langle v\rangle_{\mathbb{K}}, Q) \equiv \dim_{\mathbb{K}} \langle e^{\mathrm{C}}, v\rangle_{\mathbb{K}} = 2 \equiv 2^1\,.$$

Załóżmy następnie, że dowodzona przez nas teza jest prawdziwa dla dowolnego $N < N_0$ ($N_0$ ustalone), i niech $(V, Q)$ będzie przestrzenią kwadratową nad $\mathbb{K}$ wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V = N_0$, w której wybieramy bazę $Q$-ortogonalną $\{v_i\}_{i\in\overline{1,N_0}}$, której element $v_{N_0}$ spełnia warunek $Q(v_{N_0}) \neq 0_{\mathbb{K}}$, co uczyniwszy, rozkładamy $V$ na sumę $Q$-ortogonalną podprzestrzeni

$$V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_{N_0-1}\rangle_{\mathbb{K}} \textcircled{\perp}_Q \langle v_{N_0}\rangle_{\mathbb{K}} \equiv V_{N_0-1} \textcircled{\perp}_Q \langle v_{N_0}\rangle_{\mathbb{K}}\,,$$

wprowadzając przy tym oznaczenia $Q_{N_0-1} \equiv Q\restriction_{V_{N_0-1}}$ i $Q_{N_0} \equiv Q\restriction_{\langle v_{N_0}\rangle_{\mathbb{K}}}$. W świetle Tw. 8-9-10.3, a dalej – dotychczasowych ustaleń i założenia indukcyjnego możemy teraz zapisać

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cliff}(V, Q) \;&\cong\; \mathrm{Cliff}(V_{N_0-1}, Q_{N_0-1}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \mathrm{Cliff}(\langle v_{N_0}\rangle_{\mathbb{K}}, Q_{N_0}) \\
&\cong \Big(\big\langle e^{\mathrm{C}}_{N_0-1}\big\rangle_{\mathbb{K}} \oplus \bigoplus_{k=1}^{N_0-1} \bigoplus_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le N_0-1} \langle v_{i_1}.v_{i_2}.\cdots.v_{i_k}\rangle_{\mathbb{K}}\Big) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \Big(\big\langle e^{\mathrm{C}}_{N_0}\big\rangle_{\mathbb{K}} \oplus \langle v_{N_0}\rangle_{\mathbb{K}}\Big) \\
&= \big\langle e^{\mathrm{C}}_{N_0-1} \otimes_{\mathbb{K}} e^{\mathrm{C}}_{N_0}\big\rangle_{\mathbb{K}} \oplus \big\langle e^{\mathrm{C}}_{N_0-1} \otimes_{\mathbb{K}} v_{N_0}\big\rangle_{\mathbb{K}} \\
&\quad \oplus \bigoplus_{k=1}^{N_0-1} \bigoplus_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le N_0-1} \big\langle v_{i_1}.v_{i_2}.\cdots.v_{i_k} \otimes_{\mathbb{K}} e^{\mathrm{C}}_{N_0}\big\rangle_{\mathbb{K}} \\
&\quad \oplus \bigoplus_{k=1}^{N_0-1} \bigoplus_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le N_0-1} \big\langle v_{i_1}.v_{i_2}.\cdots.v_{i_k} \otimes_{\mathbb{K}} v_{N_0}\big\rangle_{\mathbb{K}}\,,
\end{aligned}$$

gdzie $e^{\mathrm{C}}_{N_0-1}$ i $e^{\mathrm{C}}_{N_0}$ są jednościami w odnośnych algebrach Clifforda. Z powyższego wynika wprost pożądana równość (1), a nadto – wziąwszy pod uwagę jawną postać (8-9-10.9) użytego tu izomorfizmu $\mathbb{K}$-algebr – stwierdzamy, że baza $\mathrm{Cliff}(V, Q)$ otrzymana jako izomorficzny obraz otrzymanej powyżej bazy algebry $\mathrm{Cliff}(V_{N_0-1}, Q_{N_0-1}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \mathrm{Cliff}(\langle e_{N_0}\rangle_{\mathbb{K}}, Q_{N_0})$ wzdłuż $\chi$ jest postaci wskazanej w tezie dowodzonego stwierdzenia. □

W następnej kolejności wyróżnimy element algebry Clifforda, który odegra istotną rolę nie tylko w klasyfikacji niskowymiarowych rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda, ale też – w dyskusji ich reprezentacji, więc i w zastosowaniach fizykalnych (w których nosi miano **operatora chiralności**).

**Definicja 1.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy (przy czym zakładamy $\mathrm{char}\,\mathbb{K} = 0$) i niechaj

$$\xi_V \;:\; \bigwedge\nolimits^\bullet V \xrightarrow{\cong} \mathrm{Cliff}(V, Q)$$

będzie (jedynym) $\mathbb{K}$-liniowym rozszerzeniem przyporządkowania określonego na tensorach prostych ($v_i \in V,\ i \in \overline{1, N}$ są dowolne)

$$\xi_V(1_{\mathbb{K}}) := e^{\mathrm{C}}\,,$$

$$\xi_V(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k) := \tfrac{1}{k!} \textstyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \mathrm{sign}(\sigma) \triangleright v_{\sigma(1)}.v_{\sigma(2)}.\cdots.v_{\sigma(k)}\,, \qquad k \in \overline{1, N}\,.$$

Ponadto niech $\Delta \in \bigwedge^N V^* \setminus \{0\}$ będzie dowolnym niezerowym wyznacznikiem na $V$. **Element kanoniczny** algebry Clifforda $\mathrm{Cliff}(V, Q)$ (**stowarzyszony z** $\Delta$) to wektor $e_\Delta \in \mathrm{Cliff}(V, Q)$

określony przez warunek

$$\forall_{v_1,v_2,\ldots,v_N\in V}\ :\ \xi_V(v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_N)=:\Delta(v_1,v_2,\ldots,v_N)\triangleright e_\Delta\,.$$

**Uwaga 1.** Powyższa definicja ma sens, gdyż dla dowolnej bazy ortogonalnej $\mathscr{E}:=\{e_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ przestrzeni $V$ homomorfizm $\xi_V$ przyporządkowuje elementom odnośnej bazy $\{1_{\mathbb{K}},e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}\}_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le N\,,\ k\in\overline{1,N}}$ wektory

$$\begin{aligned}\xi_V(1_{\mathbb{K}}) &= e^{\mathrm{C}}\,,\\ \xi_V(e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_k) &= \tfrac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\mathrm{sign}(\sigma)\triangleright e_{\sigma(1)}.e_{\sigma(2)}.\cdots.e_{\sigma(k)}\\ &= \tfrac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\mathrm{sign}(\sigma)^2\triangleright e_1.e_2.\cdots.e_k=e_1.e_2.\cdots.e_k\,,\end{aligned}$$

przy czym ostatnia tożsamość wynika wprost z (jednej z wielu) definicji znaku permutacji jako odwzorowania

$$\mathrm{sign}\ :\ \mathfrak{S}_n\longrightarrow\{-1,1\}\ :\ \sigma\longmapsto(-1)^{\tau(\sigma)}\,,$$

w którego zapisie $\tau(\sigma)$ jest liczbą czynników w (dowolnym) rozkładzie permutacji $\sigma$ na transpozycje, oraz z relacji skośnej przemienności

(2)
$$\forall_{\substack{i,j\in\overline{1,N}\\ i\neq j}}\ :\ e_i.e_j=-e_j.e_i$$

spełnianych przez obrazy elementów bazy $\mathscr{E}$ w $\mathrm{Cliff}(V,Q)$. Tym samym odwzorowanie ($\mathbb{K}$-liniowe) $\xi_V$ przeprowadza bazę dziedziny na bazę przeciwdziedziny, o której mowa w tezie Stw. 1, jest zatem izomorfizmem przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowych. Ponadto dla dowolnych wektorów $v_\alpha=v_\alpha^j\triangleright e_i,\ \alpha\in\overline{1,N}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\xi_V(v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_N) &= v_1^{i_1}\cdot_{\mathbb{K}}v_2^{i_2}\cdot_{\mathbb{K}}\cdots\cdot_{\mathbb{K}}v_N^{i_N}\triangleright\xi_V(e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_N})\\ &= \tfrac{1}{N!}v_1^{i_1}\cdot_{\mathbb{K}}v_2^{i_2}\cdot_{\mathbb{K}}\cdots\cdot_{\mathbb{K}}v_N^{i_N}\triangleright\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sign}(\sigma)\triangleright e_{i_{\sigma(1)}}.e_{i_{\sigma(2)}}.\cdots.e_{i_{\sigma(N)}}\,,\end{aligned}$$

przy czym w ostatniej sumie wyrazy o indeksach $i_j=i_k$ dla $j\neq k$ występują w parach odpowiadających $(\sigma,\sigma\circ\tau_{j,k})$, których wkłady do sumy różnią się znakiem wobec relacji $\mathrm{sign}(\sigma)=-\mathrm{sign}(\sigma\circ\tau_{j,k})$, a zatem ostatecznie niezerowy przyczynek do tej sumy może pochodzić jedynie od tych $N$-tek indeksów $(i_1,i_2,\ldots,i_N)$, które stanowią permutacje (dowolne) zbioru $\overline{1,N}$,

$$\begin{aligned}&\xi_V(v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_N)\\ =\ &\tfrac{1}{N!}\sum_{\rho\in\mathfrak{S}_N}v_1^{\rho(1)}\cdot_{\mathbb{K}}v_2^{\rho(2)}\cdot_{\mathbb{K}}\cdots\cdot_{\mathbb{K}}v_N^{\rho(N)}\triangleright\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sign}(\sigma)\triangleright e_{\sigma\circ\rho(1)}.e_{\sigma\circ\rho(2)}.\cdots.e_{\sigma\circ\rho(N)}\\ =\ &\tfrac{1}{N!}\sum_{\rho\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sign}(\rho)\,v_1^{\rho(1)}\cdot_{\mathbb{K}}v_2^{\rho(2)}\cdot_{\mathbb{K}}\cdots\cdot_{\mathbb{K}}v_N^{\rho(N)}\triangleright\sum_{\sigma\circ\rho\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sign}(\sigma\circ\rho)\triangleright e_{\sigma\circ\rho(1)}.e_{\sigma\circ\rho(2)}.\cdots.e_{\sigma\circ\rho(N)}\\ =\ &\tfrac{1}{N!}\sum_{\rho\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sign}(\rho)\,v_1^{\rho(1)}\cdot_{\mathbb{K}}v_2^{\rho(2)}\cdot_{\mathbb{K}}\cdots\cdot_{\mathbb{K}}v_N^{\rho(N)}\triangleright\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sign}(\sigma)\triangleright e_{\sigma(1)}.e_{\sigma(2)}.\cdots.e_{\sigma(N)}\\ \equiv\ &\sum_{\rho\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sign}(\rho)\,v_1^{\rho(1)}\cdot_{\mathbb{K}}v_2^{\rho(2)}\cdot_{\mathbb{K}}\cdots\cdot_{\mathbb{K}}v_N^{\rho(N)}\triangleright e_1.e_2.\cdots.e_N\\ \equiv\ &\Delta_{\mathscr{E}}(v_1,v_2,\ldots,v_N)\triangleright e_1.e_2.\cdots.e_N\,.\end{aligned}$$

Istotnie, wobec $N$-liniowości i skośnej symetrii wyznacznika oraz jego unormowania dostajemy, na mocy argumentów analogicznych do tych użytych powyżej,

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathscr{E}}(v_1,v_2,\ldots,v_N) &= v_1^{i_1}\cdot_{\mathbb{K}}v_2^{i_2}\cdot_{\mathbb{K}}\cdots\cdot_{\mathbb{K}}v_N^{i_N}\cdot_{\mathbb{K}}\Delta_{\mathscr{E}}(e_{i_1},e_{i_2},\ldots,e_{i_N})\\ &= \sum_{\rho\in\mathfrak{S}_N}v_1^{\rho(1)}\cdot_{\mathbb{K}}v_2^{\rho(2)}\cdot_{\mathbb{K}}\cdots\cdot_{\mathbb{K}}v_N^{\rho(N)}\cdot_{\mathbb{K}}\Delta_{\mathscr{E}}(e_{\rho(1)},e_{\rho(2)},\ldots,e_{\rho(N)})\\ &= \sum_{\rho\in\mathfrak{S}_N}v_1^{\rho(1)}\cdot_{\mathbb{K}}v_2^{\rho(2)}\cdot_{\mathbb{K}}\cdots\cdot_{\mathbb{K}}v_N^{\rho(N)}\cdot_{\mathbb{K}}\mathrm{sign}(\rho)\,\Delta_{\mathscr{E}}(\mathscr{E})\end{aligned}$$

$$= \sum_{\rho\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sign}(\rho)\, v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} .$$

Na koniec przywołujemy oczywistą równość

$$\dim_{\mathbb{K}} \bigwedge^N V^* = \binom{N}{N} = 1 ,$$

z której wyciągamy wniosek o istnieniu skalara[1] $\widetilde{\lambda}_\Delta \in \mathbb{K}$ spełniającego relację

$$\Delta_{\mathscr{E}} = \widetilde{\lambda}_\Delta \triangleright \Delta ,$$

więc ostatecznie

$$\xi_V(\cdot) = \Delta(\cdot) \triangleright e_\Delta ,$$

gdzie wektor $e_\Delta \in \mathrm{Cliff}(V,Q)$ stopnia $N$ jest dany jednoznacznie (w szczególności nie zależny od argumentu odwzorowania z lewej strony równości).

Mamy istotne

**Stwierdzenie 2.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\mathscr{E} = \{e_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ będzie dowolną bazą ortogonalną w przestrzeni kwadratowej $V$, a $\Delta_{\mathscr{E}}$ – wyznacznikiem na $V$ określonym przez tę bazę w standardowy sposób[2]. Element kanoniczny stowarzyszony z $\Delta_{\mathscr{E}}$ przyjmuje postać

$$e_{\Delta_{\mathscr{E}}} = e_1.e_2.\cdots.e_N . \tag{3}$$

Niechaj dalej $\Delta \in \bigwedge^N V^* \setminus \{0\}$ będzie dowolnym wyznacznikiem na $V$ i niech $\lambda_\Delta \in \mathbb{K}$ będzie skalarem, o którym mowa w tezie Stw. 5. Wówczas zachodzi tożsamość

$$e_\Delta^2 = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \lambda_\Delta \triangleright e^{\mathrm{C}} ,$$

jeśli zatem forma kwadratowa $Q$ jest niezwyrodniała, to element kanoniczny jest odwracalny w $\mathrm{Cliff}(V,Q)$, w przeciwnym zaś razie spełnia on tożsamość

$$e_\Delta^2 = \mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)} .$$

Ponadto

$$\forall_{\gamma\in\mathrm{Cliff}(V,Q)} \;:\; e_\Delta.\gamma = J_V^{N-1}(\gamma).e_\Delta . \tag{4}$$

*Dowód:* Równość (3) wynika bezpośrednio z rachunku przeprowadzonego w obrębie Uwagi 1. Jeśli teraz w formule definiującej $\lambda_\Delta$ wypisanej w treści Stw. 5 dokonamy podstawienia $v_i \equiv w_i := e_i$ , $i \in \overline{1,N}$, to otrzymamy równość

$$\begin{aligned} \lambda_{\Delta_{\mathscr{E}}} &\equiv \lambda_{\Delta_{\mathscr{E}}} \cdot_{\mathbb{K}} \Delta_{\mathscr{E}}(\mathscr{E}) \cdot_{\mathbb{K}} \Delta_{\mathscr{E}}(\mathscr{E}) = \det{}_{(N)} \big(\Phi(e_i,e_j)\big)_{i,j\in\overline{1,N}} = \prod_{i=1}^N \Phi_Q(e_i,e_i) \\ &\equiv \prod_{i=1}^N Q(e_i) , \end{aligned}$$

wobec czego – w świetle udowodnionej wcześniej równości (3) – dostajemy

$$\begin{aligned} e_{\Delta_{\mathscr{E}}}^2 &\equiv e_1.e_2.\cdots.e_N.e_1.e_2.\cdots.e_N = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} e_1^2.e_2^2.\cdots.e_N^2 = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \prod_{i=1}^N Q(e_i) \triangleright e^{\mathrm{C}} \\ &= (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \lambda_{\Delta_{\mathscr{E}}} \triangleright e^{\mathrm{C}} . \end{aligned}$$

Wobec oczywistych tożsamości

$$\begin{aligned} \lambda_{\Delta_{\mathscr{E}}} &\equiv \lambda_{\Delta_{\mathscr{E}}} \cdot_{\mathbb{K}} \Delta_{\mathscr{E}}(\mathscr{E})^2 = \det{}_{(N)} \big(\Phi(e_i,e_j)\big)_{i,j\in\overline{1,N}} = \lambda_\Delta \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(\mathscr{E})^2 , \\ e_{\Delta_{\mathscr{E}}} &\equiv \Delta_{\mathscr{E}}(\mathscr{E}) \triangleright e_{\Delta_{\mathscr{E}}} = \xi_V(e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_N) = \Delta(\mathscr{E}) \triangleright e_\Delta , \end{aligned}$$

[1] Łatwo widać, że skalar ten to $\Delta(\mathscr{E})^{-1}$.

[2] Przypomnijmy, że wyznacznik na przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej $V$ skończonego wymiaru $D \equiv \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ to (dowolny) niezerowy wektor z jednowymiarowej przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej $\bigwedge^D V^*$. Jako taki jest on jednoznacznie wyznaczony przez wartość przyjmowaną na (dowolnej) bazie $V$. Poprzez narzucenie warunku, iżby wartość ta była równa $1_{\mathbb{K}}$ dla ustalonej bazy *uporządkowanej* $\mathscr{E}$, wyróżniamy wyznacznik $\Delta_{\mathscr{E}}$, o którym mowa w treści stwierdzenia.

słusznych dla dowolnego niezerowego wyznacznika $\Delta$ na $V$ (a taki spełnia warunek $\Delta(\mathscr{E}) \neq 0_{\mathbb{K}}$), możemy w takim razie zapisać

$$\begin{aligned} e_\Delta^2 &= \Delta(\mathscr{E})^{-2} \triangleright e_{\Delta_{\mathscr{E}}}^2 = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \Delta(\mathscr{E})^{-2} \triangleright \big(\lambda_{\Delta_{\mathscr{E}}} \triangleright e^{\mathrm{C}}\big) \\ &= (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \Delta(\mathscr{E})^{-2} \cdot_{\mathbb{K}} \lambda_{\Delta_{\mathscr{E}}} \triangleright e^{\mathrm{C}} = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \lambda_\Delta \triangleright e^{\mathrm{C}} . \end{aligned}$$

Jeśli teraz $Q$ jest niezwyrodniała, to jak jasno wynika z rachunku otwierającego niniejszy dowód, $\lambda_{\Delta_{\mathscr{E}}} \neq 0_{\mathbb{K}}$, zatem także $\lambda_\Delta \neq 0_{\mathbb{K}}$, a wówczas

$$e_\Delta^{-1} = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \lambda_\Delta^{-1} \triangleright e^{\mathrm{C}} .$$

Jeśli natomiast $Q$ jest zwyrodniała, to $\lambda_\Delta = 0_{\mathbb{K}}$ i w konsekwencji $e_\Delta^2 = \mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}$. W dowodzie ostatniej składowej tezy stwierdzenia wykorzystujemy ustaloną wcześniej relację między $e_\Delta$ i $e_{\Delta_{\mathscr{E}}}$ w bezpośrednim rachunku, przeprowadzonym dla dowolnego $v = v^i \triangleright e_i \in V$ z wykorzystaniem relacji (2),

$$\begin{aligned} e_\Delta.v &\equiv v^i \triangleright e_\Delta.e_i = v^i \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(\mathscr{E})^{-1} \triangleright e_1.e_2.\cdots.e_N.e_i \\ &= (-1)^{N-i} v^i \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(\mathscr{E})^{-1} \triangleright e_1.e_2.\cdots.e_{i-1}.e_i^2.e_{i+1}.e_{i+2}.\cdots.e_N \\ &= (-1)^{N-i} (-1)^{i-1} v^i \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(\mathscr{E})^{-1} \triangleright e_i.e_1.e_2.\cdots.e_N \equiv (-1)^{N-1} v.e_\Delta \\ &\equiv J_V^{N-1}(v).e_\Delta . \end{aligned}$$

Postulowana tożsamość jawi nam się teraz jako prosta konsekwencja powyższego (wszak $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ jest generowana jako $\mathbb{K}$-algebra przez $\mathrm{Image}\, j_V^{\mathrm{C}}$) oraz homomorficznego charakteru inwolucji kanonicznej. □

Dalsze nasze dociekania podporządkowane celowi nadrzędnemu, jakim jest klasyfikacja rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda oraz ich reprezentacji, wiodą nas wprost do dyskusji centrum algebry Clifforda oraz jego super-partnera, którego opisuje

**Definicja 2.** Przyjmijmy zapis dotychchczasowy. **Centrum algebry Clifforda** $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ to jej podalgebra

$$\begin{aligned} Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) &= \{\ \gamma \in \mathrm{Cliff}(V,Q) \ \mid\ \forall_{\widetilde{\gamma} \in \mathrm{Cliff}(V,Q)} \ :\ [\gamma, \widetilde{\gamma}] = \mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}\ \} \\ &\equiv \{\ \gamma \in \mathrm{Cliff}(V,Q) \ \mid\ \forall_{v \in V} \ :\ [\gamma, v] = \mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}\ \} . \end{aligned}$$

**Antycentrum algebry Clifforda** $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ to jej podprzestrzeń $\mathbb{K}$-liniowa

$$\begin{aligned} AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) &= \{\ \gamma \in \mathrm{Cliff}(V,Q) \ \mid\ \forall_{\widetilde{\gamma} \in \mathrm{Cliff}(V,Q)} \ :\ \gamma.\widetilde{\gamma} = J_V(\widetilde{\gamma}).\gamma\ \} \\ &\equiv \{\ \gamma \in \mathrm{Cliff}(V,Q) \ \mid\ \forall_{v \in V} \ :\ \{\gamma, v\} = \mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}\ \} . \end{aligned}$$

Najprostszego uszczegółowienia charakterystyki wprowadzonych powyżej obiektów dostarcza

**Stwierdzenie 3.** Przyjmijmy zapis Def. 2. $Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)$ jest podalgebrą $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradowaną $\mathbb{K}$-algebry $\mathrm{Cliff}(V,Q)$, natomiast $AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)$ jest podprzestrzenią $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradowaną przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej $\mathrm{Cliff}(V,Q)$, w rozumieniu Def. 6-7.5.

*Dowód:* Zarówno centrum, jak i antycentrum $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ są podprzestrzeniami zachowywanymi przez inwolucję kanoniczną, gdyż

$$\begin{aligned} \forall_{(v,\gamma) \in V \times Z(\mathrm{Cliff}(V,Q))} \ :\ J_V(\gamma).v &= -J_V(\gamma).J_V(v) = -J_V(\gamma.v) = -J_V(v.\gamma) \\ &= -J_V(v).J_V(\gamma) = v.J_V(\gamma) \end{aligned}$$

i, podobnie,

$$\forall_{(v,\gamma)\in V\times AZ(\mathrm{Cliff}(V,Q))}\ :\ J_V(\gamma).v = -J_V(\gamma).J_V(v) = -J_V(\gamma.v) = J_V(v.\gamma) = J_V(v).J_V(\gamma) = -v.J_V(\gamma)\,.$$

Stąd też obie dziedziczą $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradację z $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ na mocy Stw. 8-9-10.7. Przy tym centrum jest w oczywisty sposób podalgebrą $\mathrm{Cliff}(V,Q)$. □

Strukturę centrum i antycentrum algebry Clifforda opisuje

**Twierdzenie 1.** Przyjmijmy zapis Def. 2 (przy założeniu $\mathrm{char}\,\mathbb{K}\neq 2$) i niech $N := \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, a wtedy

(i) $N\in 2\mathbb{N}+1 \implies e_\Delta \in Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)$;
(ii) $N\in 2\mathbb{N}+2 \implies e_\Delta \in AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)$.

Ponadto jeśli $Q$ jest niezwyrodniała, to

(i') $N\in 2\mathbb{N}+1 \implies \begin{cases} Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) = \langle e^{\mathrm{C}}\rangle_{\mathbb{K}} \oplus \langle e_\Delta\rangle_{\mathbb{K}} \\ AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) = \{\mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}\} \end{cases}$;

(ii') $N\in 2\mathbb{N}+2 \implies \begin{cases} Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) = \langle e^{\mathrm{C}}\rangle_{\mathbb{K}} \\ AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) = \langle e_\Delta\rangle_{\mathbb{K}} \end{cases}$.

*<u>Dowód:</u>* Punkty (i) i (ii) wynikają bezpośrednio z tożsamości (4). Załóżmy zatem, że $Q$ jest formą niezwyrodniałą, i rozważmy składowe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-jednorodne centrum i antycentrum algebry Clifforda, co możemy uczynić w odwołaniu do Stw.3. Niechaj $\gamma\in AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)^1 \equiv AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)\cap \mathrm{Cliff}(V,Q)^1$, a wtedy wobec

$$\forall_{v\in V}\ :\ \gamma.v = -v.\gamma$$

zachodzi

(5) $$\gamma.e_\Delta = (-1)^N\, e_\Delta.\gamma\,,$$

ale też – na mocy Równ. (4) i w świetle założenia dotyczącego parzystości $\gamma$ –

$$e_\Delta.\gamma = J_V^{N-1}(\gamma).e_\Delta = (-1)^{N-1}\,\gamma.e_\Delta\,,$$

więc ostatecznie

$$\gamma.e_\Delta = (-1)^N\cdot(-1)^{N-1}\,\gamma.e_\Delta = -\gamma.e_\Delta\,,$$

co przy $\mathrm{char}\,\mathbb{K}\neq 2$ (a takie poczyniliśmy założenie) oznacza równość

$$\gamma.e_\Delta = \mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}\,.$$

W świetle Stw. 2 wnioskujemy zatem, że

$$\gamma \equiv \gamma.e_\Delta.e_\Delta^{-1} = \mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}.e_\Delta^{-1} = \mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}\,,$$

czyli dla niezwyrodniałej formy kwadratowej dostajemy

(6) $$AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)^1 = \{\mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}\}\,.$$

Jeśli ponadto $N\in 2\mathbb{N}+1$, to z porównania tożsamości

$$\gamma.e_\Delta = -e_\Delta.\gamma\,,$$

słusznej dla dowolnego elementu antycentralnego $\gamma\in AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)\big(\equiv AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)^0\big)$, z tożsamością

$$e_\Delta.\gamma = J_V^{N-1}(\gamma).e_\Delta = \gamma.e_\Delta$$

wyciągamy oczekiwany wniosek

$$AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) = \{\mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}\}\,.$$

Rozważmy odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe

$$\varphi_\Delta\ :\ \mathrm{Cliff}(V,Q)\ \circlearrowleft\ :\ \gamma\longmapsto e_\Delta.\gamma\,.$$

Wobec odwracalności elementu kanonicznego jest ono automorfizmem przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej $\mathrm{Cliff}(V,Q)$, a przy tym jeśli $\gamma\in Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)$, to

$$\forall_{v\in V}\ :\ \varphi_\Delta(\gamma).v\equiv e_\Delta.\gamma.v=e_\Delta.v.\gamma=J_V^{N-1}(v).e_\Delta.\gamma=(-1)^{N-1}\,v.\varphi_\Delta(\gamma)\,,$$

i – podobnie – jeśli $\gamma\in AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)$, to

$$\forall_{v\in V}\ :\ \varphi_\Delta(\gamma).v\equiv e_\Delta.\gamma.v=-e_\Delta.v.\gamma=-J_V^{N-1}(v).e_\Delta.\gamma=(-1)^{N}\,v.\varphi_\Delta(\gamma)\,,$$

zatem prawdziwe są następujące implikacje:

$$N\in 2\mathbb{N}+1\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}\varphi_\Delta\Big(Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)\Big)=Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)\\ \varphi_\Delta\Big(AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)\Big)=AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)\end{cases},$$

(7)

$$N\in 2\mathbb{N}+2\quad\Longrightarrow\quad\varphi_\Delta\Big(Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)\Big)=AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)\,.$$

Jak jasno widać, uzupełnienie dyskusji struktury antycentrum w przypadku $N\in 2\mathbb{N}+2$ wymaga więc zrozumienia struktury centrum, czym zajmiemy się obecnie.

Zaczniemy od wyznaczenia składowej parzystej centrum, $Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)^0\equiv Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)\cap\mathrm{Cliff}(V,Q)^0$. Twierdzimy, że – niezależnie od parzystości wymiaru $V$ – składowa ta jest rozpięta na jedności algebry,

(8) $$Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)^0=\big\langle e^{\mathrm{C}}\big\rangle_{\mathbb{K}}\,,$$

a dowód opieramy na indukcji względem tegoż wymiaru $N$. Słuszność postulowanej równości w przypadku $N=1$ staje się oczywista, gdy wziąć pod uwagę model algebry Clifforda skonstruowany w pierwszym kroku indukcyjnego dowodu Stw. 1, załóżmy zatem, że równość ta jest prawdziwa dla $N<N_0$ ($N_0$ ustalone) i niech $\dim_{\mathbb{K}}V=N_0$. Wybierzmy $v\in V$ o własności $Q(v)\neq 0$ (na co pozwala założenie o niezwyrodnieniu $Q$), a wtedy – w świetle twierdzenia o istnieniu dopełnienia ortogonalnego dowolnej niezwyrodniałej (skończenie wymiarowej) podprzestrzeni przestrzeni kwadratowej – możemy dokonać rozkładu $Q$-ortogonalnego

$$V=\langle v\rangle_{\mathbb{K}}\textcircled{\scriptsize$\perp$}_Q\,\langle v\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}\,,$$

przy czym – rzecz jasna – $\dim_{\mathbb{K}}\langle v\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}=\dim_{\mathbb{K}}V-1<N_0$. W tym momencie możemy odwołać się do Tw. 8-9-10.3, aby przerzucić rachunki do algebry kanonicznie izomorficznej z $\mathrm{Cliff}(V,Q)$, jaką jest $\mathrm{Cliff}(\langle v\rangle_{\mathbb{K}},Q\restriction_{\langle v\rangle_{\mathbb{K}}})\widehat{\otimes}_{\mathbb{K}}\mathrm{Cliff}(\langle v\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q},Q\restriction_{\langle v\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}})$, co okaże się nader wygodne. Przyjąwszy dla skrótu oznaczenia $C_v\equiv\mathrm{Cliff}(\langle v\rangle_{\mathbb{K}},Q\restriction_{\langle v\rangle_{\mathbb{K}}})$ i $C_\perp\equiv\mathrm{Cliff}(\langle v\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q},Q\restriction_{\langle v\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}})$ i wybrawszy dla $C_v$ model $\big\langle e_v^{\mathrm{C}},v\big\rangle_{\mathbb{K}}$ jak w dowodzie Stw. 1, rozważmy obraz dowolnego elementu $\gamma\in Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)^0$ w $C_v\widehat{\otimes}_{\mathbb{K}}C_\perp$ – ten jest postaci

$$\eta(\gamma)=e_v^{\mathrm{C}}\otimes_{\mathbb{K}}w^0+v\otimes_{\mathbb{K}}w^1$$

dla pewnych $w^k\in C_\perp^k,\ k\in\{0,1\}$ (wszak suma stopni czynników tensorowych w każdym ze składników sumy ma być parzysta, bo taki jest stopień $\gamma$). Podobnie dla dowolnego $x=\lambda\triangleright_V v+y\in V$, zapisanego w terminach $\lambda\in\mathbb{K}$ i $y\in\langle v\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}$, otrzymujemy

$$\eta(x)=e_v^{\mathrm{C}}\otimes_{\mathbb{K}}y+\lambda\triangleright v\otimes_{\mathbb{K}}e_\perp^{\mathrm{C}}\,,$$

gdzie $e_\perp^{\mathrm{C}}\in C_\perp$ jest odnośną jednością. Na podstawie powyższych wzorów obliczamy

$$\begin{aligned}\eta(\gamma.x)&=\big(e_v^{\mathrm{C}}\otimes_{\mathbb{K}}w^0+v\otimes_{\mathbb{K}}w^1\big)\widehat{\cdot}\big(e_v^{\mathrm{C}}\otimes_{\mathbb{K}}y+\lambda\triangleright v\otimes_{\mathbb{K}}e_\perp^{\mathrm{C}}\big)\\&=e_v^{\mathrm{C}}\otimes_{\mathbb{K}}w^0.y+\lambda\triangleright v\otimes_{\mathbb{K}}w^0+v\otimes_{\mathbb{K}}w^1.y-\lambda\cdot_{\mathbb{K}}Q(v)\triangleright e_v^{\mathrm{C}}\otimes_{\mathbb{K}}w^1\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\eta(x.\gamma)&=\big(e_v^{\mathrm{C}}\otimes_{\mathbb{K}}y+\lambda\triangleright v\otimes_{\mathbb{K}}e_\perp^{\mathrm{C}}\big)\widehat{\cdot}\big(e_v^{\mathrm{C}}\otimes_{\mathbb{K}}w^0+v\otimes_{\mathbb{K}}w^1\big)\\&=e_v^{\mathrm{C}}\otimes_{\mathbb{K}}y.w^0+\lambda\triangleright v\otimes_{\mathbb{K}}w^0-v\otimes_{\mathbb{K}}y.w^1+\lambda\cdot_{\mathbb{K}}Q(v)\triangleright e_v^{\mathrm{C}}\otimes_{\mathbb{K}}w^1\,,\end{aligned}$$

a stąd – wobec centralności $\gamma$ –

$$\begin{aligned} 0 &= \eta\big([\gamma,x]\big) = e_v^{\mathrm{C}} \otimes_{\mathbb{K}} [w^0,y] + v \otimes_{\mathbb{K}} \{w^1,y\} - 2\lambda \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright e_v^{\mathrm{C}} \otimes_{\mathbb{K}} w^1 \\ &= e_v^{\mathrm{C}} \otimes_{\mathbb{K}} \big([w^0,y] - 2\lambda \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright w^1\big) + v \otimes_{\mathbb{K}} \{w^1,y\}\,, \end{aligned}$$

co z racji liniowej niezależności składników pozwala wnioskować, że

$$\forall_{y \in \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}} \; : \; \{w^1,y\} = \mathbf{0}_{C_\perp}\,,$$

czyli – w świetle Równ. (6) –

$$w^1 \in AZ(C_\perp) \cap C_\perp^1 \equiv AZ(C_\perp)^1 = \{\mathbf{0}_{C_\perp}\}\,,$$

a dalej – wobec tego –

$$\forall_{y \in \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}} \; : \; [w^0,y] = [w^0,y] - 2\lambda \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright w^1 = \mathbf{0}_{C_\perp}\,,$$

co na gruncie założenia indukcyjnego przyprowadza nas do przekonania, że

$$w^0 \in Z(C_\perp) \cap C_\perp^0 \equiv Z(C_\perp)^0 = \big\langle e_\perp^{\mathrm{C}} \big\rangle_{\mathbb{K}}\,,$$

tj. $w^0 = \mu \triangleright e_\perp^{\mathrm{C}}$ dla pewnego skalara $\mu \in \mathbb{K}$. Koniec końców otrzymujemy

$$\gamma = \chi\big(e_v^{\mathrm{C}} \otimes_{\mathbb{K}} w^0 + v \otimes_{\mathbb{K}} w^1\big) = \chi\big(e_v^{\mathrm{C}} \otimes_{\mathbb{K}} \mu \triangleright e_\perp^{\mathrm{C}}\big) \equiv \mu \triangleright \chi(\mathbf{1}_{C_v \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_\perp}) = \mu \triangleright e^{\mathrm{C}}\,.$$

Udowodniona tym samym równość (8) pozwala dokończyć dowód twierdzenia przy użyciu obserwacji (7), oto bowiem w przypadku $N \in 2\mathbb{N}+2$

$$\begin{aligned} AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) &\equiv AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)^0 = \varphi_\Delta\big(Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)^0\big) = \varphi_\Delta\big(\big\langle e^{\mathrm{C}}\big\rangle_{\mathbb{K}}\big) \\ &= \big\langle \varphi_\Delta\big(e^{\mathrm{C}}\big)\big\rangle_{\mathbb{K}} = \langle e_\Delta \rangle_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

(co wynika z Równ. (6) oraz z tego, że $\varphi_\Delta$ jest parzysty), więc też – wtórnie –

$$Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) = \varphi_\Delta\big(AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)\big) = \varphi_\Delta\big(\langle e_\Delta \rangle_{\mathbb{K}}\big) = \big\langle e^{\mathrm{C}} \big\rangle_{\mathbb{K}}\,,$$

a w przypadku $N \in 2\mathbb{N}+1$

$$Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)^1 = \varphi_\Delta\big(Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)^0\big) = \langle e_\Delta \rangle_{\mathbb{K}}$$

(co wynika z faktu, że $\varphi_\Delta$ jest nieparzysty), zatem

$$Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) = Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)^0 \oplus Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)^1 = \big\langle e^{\mathrm{C}} \big\rangle_{\mathbb{K}} \oplus \langle e_\Delta \rangle_{\mathbb{K}}\,.$$

□

Pierwszy z istotnych wyników pozwalających oswoić nieco bestiarium algebr Clifforda przy użyciu wprowadzonych powyżej obiektów przynosi

**Twierdzenie 2.** Przyjmijmy zapis Def. 1 oraz Stw. 5, zakładając przy tym, że forma kwadratowa $Q$ na przestrzeni $V$ wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V = N < \infty$ jest niezwyrodniała. Ilekroć można wybrać wyznacznik $\Delta \in \bigwedge^N V^*$ w taki sposób, że

(9) $$\lambda_\Delta = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}\,,$$

czyli w szczególności $e_\Delta^2 = e^{\mathrm{C}}$, to istnieje kanoniczny unitalny homomorfizm $\mathbb{K}$-algebr

$$\widetilde{\mu} \; : \; \mathrm{Cliff}(V,Q) \longrightarrow \mathrm{Cliff}(V,-Q)$$

o własności

$$\widetilde{\mu}(e_\Delta) = (-1)^{\frac{N(N-1)^2}{2}} \triangleright \big(e_\Delta^-\big)^{N+1}\,,$$

gdzie $e_\Delta^-$ jest elementem kanonicznym algebry $\mathrm{Cliff}(V,-Q)$ stowarzyszonym z tym samym wyznacznikiem $\Delta$ na przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej $V$ będącej nośnikiem przeciwnej struktury kwadratowej $-Q$. W przypadku $N \in 2\mathbb{N}+2$ homomorfizm ten jest izomorfizmem.

<u>*Dowód:*</u> Niechaj $\lambda_\Delta$ będzie skalarem określonym, w sposób opisany w Stw. 5, przez dowolny niezerowy wyznacznik $\Delta$ na przestrzeni $V$ z formą kwadratową $Q$ i oznaczmy jako $\lambda_\Delta^-$ skalar określonym przez ten sam wyznacznik, gdy $V$ wyposażymy w formę kwadratową $-Q$. Wówczas dla dowolnych układów wektorów $v_i, w_i \in V,\ i \in \overline{1,N}$ otrzymujemy równość

$$\lambda_\Delta^- \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(v_1, v_2, \ldots, v_N) \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(w_1, w_2, \ldots, w_N) = \det_{(N)}\big(\Phi_{-Q}(v_i, w_j)\big)_{i,j\in\overline{1,N}}$$

$$\equiv \det_{(N)}\big(-\Phi_Q(v_i, w_j)\big)_{i,j\in\overline{1,N}} = (-1)^N \det_{(N)}\big(\Phi_Q(v_i, w_j)\big)_{i,j\in\overline{1,N}}$$

$$= (-1)^N \lambda_\Delta \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(v_1, v_2, \ldots, v_N) \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(w_1, w_2, \ldots, w_N)\,,$$

z której wynika tożsamość

$$\lambda_\Delta^- = (-1)^N \lambda_\Delta\,. \tag{10}$$

Zdefiniujmy odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe

$$\mu\ :\ V \longrightarrow \mathrm{Cliff}(V, -Q) \equiv C_-\ :\ v \longmapsto e_\Delta^- \bullet v\,,$$

wprowadzając przy tym – gwoli przejrzystości zapisu dalszego rozumowania – osobny symbol $\bullet$ na oznaczenie mnożenia w algebrze $C_-$ (z jednością, którą oznaczymy jako $e_-^{\mathrm{C}}$). Przywoławszy Stw. 2 w odniesieniu do trójki $\big(C_-, e_\Delta^-, \lambda_\Delta^-\big)$ oraz Równ. (10), stwierdzamy bez trudu, że odwzorowanie powyższe spełnia – na mocy założenia (9) – warunek Clifforda względem struktury kwadratowej $Q$, oto bowiem

$$\begin{aligned}\mu(v)^2 &= e_\Delta^- \bullet v \bullet e_\Delta^- \bullet v = \big(e_\Delta^-\big)^2 \bullet J_V^{N-1}(v) \bullet v = (-1)^{N-1} \cdot (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \lambda_\Delta^- \triangleright v \bullet v \\ &= (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}-1} \lambda_\Delta \triangleright \big((-Q)(v) \triangleright e_-^{\mathrm{C}}\big) = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \lambda_\Delta \triangleright \big(Q(v) \triangleright e_-^{\mathrm{C}}\big) \\ &= Q(v) \triangleright e_-^{\mathrm{C}}\,.\end{aligned}$$

Rozszerza się ono zatem kanonicznie i jednoznacznie do unitalnego homomorfizmu $\mathbb{K}$-algebr

$$\widetilde{\mu}\ :\ \mathrm{Cliff}(V, Q) \longrightarrow \mathrm{Cliff}(V, -Q)$$

o własności

$$\forall_{v\in V}\ :\ \widetilde{\mu}(v) = e_\Delta^- \bullet v\,.$$

Wybierzmy bazę $\mathscr{E} = \{e_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ w $V$ ortogonalną względem $Q$, a zatem także względem $-Q$. Na mocy Stw. 2 i rozumowania przeprowadzonego w jego dowodzie możemy zapisać

$$e_\Delta = \Delta(\mathscr{E})^{-1} \triangleright e_1.e_2.\cdots.e_N\,, \qquad e_\Delta^- = \Delta(\mathscr{E})^{-1} \triangleright e_1 \bullet e_2 \bullet \cdots \bullet e_N\,,$$

a w takim razie

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu}(e_\Delta) &\equiv \Delta(\mathscr{E})^{-1} \triangleright \widetilde{\mu}(e_1.e_2.\cdots.e_N) = \Delta(\mathscr{E})^{-1} \triangleright \mu(e_1) \bullet \mu(e_2) \bullet \cdots \bullet \mu(e_N) \\ &= \Delta(\mathscr{E})^{-1} \triangleright e_\Delta^- \bullet e_1 \bullet e_\Delta^- \bullet e_2 \bullet \cdots \bullet e_\Delta^- \bullet e_N \\ &= (-1)^{(N-1)\cdot\frac{N(N-1)}{2}} \Delta(\mathscr{E})^{-1} \triangleright \big(e_\Delta^-\big)^N \bullet e_1 \bullet e_2 \bullet \cdots \bullet e_N \equiv (-1)^{\frac{N(N-1)^2}{2}} \big(e_\Delta^-\big)^{N+1}\,.\end{aligned}$$

Niech teraz $N = 2m \in 2\mathbb{N} + 2$, a wtedy skalary $\lambda_\Delta$ i $\lambda_\Delta^-$ przyjmują postać

$$\lambda_\Delta = (-1)^m = \lambda_\Delta^-$$

i otrzymujemy

$$\widetilde{\mu}(e_\Delta) = (-1)^m \big(e_\Delta^-\big)^{2m+1}\,,$$

co implikuje natychmiast, że odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe

$$\psi\ :\ V \longrightarrow \mathrm{Cliff}(V, Q)\ :\ v \longmapsto e_\Delta.v$$

spełnia warunek Clifforda względem struktury kwadratowej $-Q$,

$$\psi(v)^2 = e_\Delta.v.e_\Delta.v = e_\Delta^2.J_V^{2m-1}(v).v = -e_\Delta^2.v.v = (-1)^{m(2m-1)} \lambda_\Delta \triangleright \big((-Q)(v) \triangleright e^{\mathrm{C}}\big)$$

$$= \quad (-Q)(v) \triangleright e^{\mathrm{C}} ,$$

więc rozszerza się kanonicznie i jednoznacznie do unitalnego homomorfizmu $\mathbb{K}$-algebr

$$\widetilde{\psi} \; : \; \mathrm{Cliff}(V,-Q) \longrightarrow \mathrm{Cliff}(V,Q)$$

o własności

$$\forall_{v \in V} \; : \; \widetilde{\psi}(v) = e_\Delta . v \, .$$

Relację pomiędzy oboma homomorfizmami ustalamy na zbiorze generatorów obu algebr na podstawie rezultatów dotychczasowych dociekań. Oto więc

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi} \circ \widetilde{\mu}(v) &= \widetilde{\psi}(e^-_\Delta \bullet v) = \widetilde{\psi}(e^-_\Delta).\widetilde{\psi}(v) = (-1)^m \, (e_\Delta)^{2m+1} . e_\Delta . v \equiv (-1)^m \left( e^2_\Delta \right)^{m+1} . v \\ &= (-1)^m \, v \equiv J^m_V(v) \, , \end{aligned}$$

czyli w ogólności (wszak $\widetilde{\mu}$ i $\widetilde{\psi}$ to homomorfizmy $\mathbb{K}$-algebr)

$$\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\mu} = J^m_V \, .$$

Analogicznie wyprowadzamy relację

$$\widetilde{\mu} \circ \widetilde{\psi} = \left( J^-_V \right)^m ,$$

gdzie $J^-_V$ jest kanoniczną inwolucją na $C_-$. Zważywszy oczywistą tożsamość

$$\widetilde{\mu} \circ J_V = J^-_V \circ \widetilde{\mu} \qquad \Longleftarrow \qquad J^-_V\big(e^-_\Delta\big) = (-1)^{2m} \, e^-_\Delta = e^-_\Delta$$

(oraz inwolutyny charakter $J_V$ i $J^-_V$), możemy zatem przepisać powyższe relacje w postaci

$$\big( J^m_V \circ \widetilde{\psi} \big) \circ \widetilde{\mu} = \mathrm{id}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)} \, , \qquad \widetilde{\mu} \circ \big( J^m_V \circ \widetilde{\psi} \big) = \mathrm{id}_{\mathrm{Cliff}(V,-Q)} \, ,$$

z których jasno wynika, że $\widetilde{\mu}$ jest izomorfizmem (o odwrotności $J^m_V \circ \widetilde{\psi}$). □

Kolejny arcyważny wynik artykułuje

**Twierdzenie 3** (O kanonicznym iloczynie tensorowym algebr Clifforda)**.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\big( \big( (V, +_V, \mathsf{P}_V, \bullet \longmapsto 0_V), \ell_V \big), Q_V \big)$ będzie przestrzenią kwadratową nad ciałem $\mathbb{K}$ wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V = 2m \in 2\mathbb{N}+2$, z wyróżnionym wyznacznikiem $\Delta \in \bigwedge^{2m} V^*$ o stowarzyszonym elemencie kanonicznym $e_\Delta \in \mathrm{Cliff}(V, Q_V)$, który spełnia warunek

$$e^2_\Delta = \varepsilon \triangleright e^{\mathrm{C}} \, , \qquad \varepsilon \in \{-1, 1\} \, .$$

Wówczas dla dowolnej $\big( \big( (\widetilde{V}, +_{\widetilde{V}}, \mathsf{P}_{\widetilde{V}}, \bullet \longmapsto 0_{\widetilde{V}}), \ell_{\widetilde{V}} \big), Q_{\widetilde{V}} \big) \in \mathrm{Ob}\, \square\, \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ istnieje kanoniczny unitalny homomorfizm $\mathbb{K}$-algebr

$$\mathrm{Cliff}\big( V \oplus \widetilde{V}, Q_V \oplus \varepsilon \triangleright Q_{\widetilde{V}} \big) \cong \mathrm{Cliff}(V, Q_V) \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Cliff}(\widetilde{V}, Q_{\widetilde{V}}) \, .$$

*Dowód:* Rozważmy kanoniczne izometryczne włożenia

$$\jmath_V \; : \; V \rightarrowtail V \oplus \widetilde{V} \, , \qquad \jmath_{\widetilde{V}} \; : \; \widetilde{V} \rightarrowtail V \oplus \widetilde{V} \, ,$$

przy czym w drugim przypadku *implicite* traktujemy $\widetilde{V}$ jako nośnik struktury kwadratowej $\varepsilon \triangleright Q_{\widetilde{V}}$. Wobec parzystości wymiaru $V$ tożsamość (4) implikuje

$$\forall_{v \in V} \; : \; \{e_\Delta, v\} = \mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V, Q_V)} \, .$$

Ponadto w świetle (dowodu) Tw. 8-9-10.3 indukowane unitalne homomorfizmy $\mathbb{K}$-algebr

$$\begin{aligned} \widetilde{\jmath}_V \equiv \mathrm{Cliff}(\jmath_V) \quad &: \quad \mathrm{Cliff}(V, Q_V) \longrightarrow \mathrm{Cliff}(V \oplus \widetilde{V}, Q_V \oplus \varepsilon \triangleright Q_{\widetilde{V}}) \equiv C_\oplus \, , \\ \widetilde{\jmath}_{\widetilde{V}} \equiv \mathrm{Cliff}(\jmath_{\widetilde{V}}) \quad &: \quad \mathrm{Cliff}(\widetilde{V}, \varepsilon \triangleright Q_{\widetilde{V}}) \longrightarrow C_\oplus \end{aligned}$$

spełniają – dla dowolnego elementu $\widetilde{\gamma} \in \mathrm{Cliff}(\widetilde{V}, \varepsilon \triangleright Q_{\widetilde{V}})$ – warunek ($\widetilde{e}^{\mathrm{C}}$ jest jednością w $\mathrm{Cliff}(\widetilde{V}, \varepsilon \triangleright Q_{\widetilde{V}})$)

$$\widetilde{\jmath}_V(e_\Delta) . \widetilde{\jmath}_{\widetilde{V}}(\widetilde{\gamma}) \quad \equiv \quad m_{C_\oplus} \circ \big( \widetilde{\jmath}_V \otimes \widetilde{\jmath}_{\widetilde{V}} \big)(e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \widetilde{\gamma}) \equiv \chi(e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \widetilde{\gamma}) = \chi(e^{\mathrm{C}} . e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \widetilde{\gamma} . \widetilde{e}^{\mathrm{C}})$$

$$= \chi\big((-1)^{\deg\widetilde{\gamma}\cdot\deg e_\Delta}\,\big(e^{\rm C}\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{\gamma}\big)\widetilde{\cdot}\big(e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\rm C}\big)\big)$$

$$= \chi\big(\big(e^{\rm C}\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{\gamma}\big)\widetilde{\cdot}\big(e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\rm C}\big)\big) = \chi\big(e^{\rm C}\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{\gamma}\big).\chi\big(e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\rm C}\big)$$

$$= \jmath_{\widetilde{V}}(\widetilde{\gamma}).\jmath_V(e_\Delta)\,,$$

przeto odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe

$$\varphi\ :\ \widetilde{V}\longrightarrow C_\oplus\ :\ v\longmapsto \jmath_V(e_\Delta).\jmath_{\widetilde{V}}(v)$$

spełnia warunek Clifforda (wzgl. $\widetilde{Q}$),

$$\varphi(v)^2 \equiv \jmath_V(e_\Delta).\jmath_{\widetilde{V}}(v).\jmath_V(e_\Delta).\jmath_{\widetilde{V}}(v) = \jmath_V(e_\Delta)^2.\jmath_{\widetilde{V}}(v)^2 = \jmath_V\big(e_\Delta^2\big).\jmath_{\widetilde{V}}\big(v^2\big)$$

$$= \varepsilon\big(\varepsilon\,\widetilde{Q}(v)\big)\triangleright\mathbf{1}_\oplus = Q(v)\triangleright\mathbf{1}_\oplus\,,$$

i z tej racji rozszerza się jednoznacznie i kanonicznie do unitalnego homomorfizmu $\mathbb{K}$-algebr

$$\widetilde{\varphi}\ :\ {\rm Cliff}\big(\widetilde{V},Q_{\widetilde{V}}\big)\longrightarrow C_\oplus\,.$$

Przy tym – dla dowolnych $(v,\widetilde{v})\in V\times\widetilde{V}$ – zachodzi równość

$$\jmath_V(v).\widetilde{\varphi}(\widetilde{v}) \equiv \jmath_V(v).\jmath_V(e_\Delta).\jmath_{\widetilde{V}}(\widetilde{v}) = \jmath_V(v.e_\Delta).\jmath_{\widetilde{V}}(\widetilde{v}) = \jmath_V\big(e_\Delta.J_V(v)\big).\jmath_{\widetilde{V}}(\widetilde{v})$$

$$= -\jmath_V(e_\Delta.v).\jmath_{\widetilde{V}}(\widetilde{v}) = -\jmath_V(e_\Delta).\jmath_V(v).\jmath_{\widetilde{V}}(\widetilde{v}) \equiv -\jmath_V(e_\Delta).\chi(v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v})$$

$$= -\jmath_V(e_\Delta).\chi\big(e^{\rm C}.v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}.\widetilde{e}^{\rm C}\big) = -\jmath_V(e_\Delta).\chi\big((-1)^{\deg v\cdot\deg\widetilde{v}}\,\big(e^{\rm C}\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}\big).\big(v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\rm C}\big)\big)$$

$$= \jmath_V(e_\Delta).\chi\big(e^{\rm C}\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}\big).\chi\big(v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\rm C}\big) = \jmath_V(e_\Delta).\jmath_{\widetilde{V}}(\widetilde{v}).\jmath_V(v)$$

$$\equiv \widetilde{\varphi}(\widetilde{v}).\jmath_V(v)\,,$$

zatem

$$\forall_{(\gamma,\widetilde{\gamma})\in{\rm Cliff}(V,Q_V)\times{\rm Cliff}(\widetilde{V},Q_{\widetilde{V}})}\ :\ \jmath_V(\gamma).\widetilde{\varphi}(\widetilde{\gamma}) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{\gamma}).\jmath_V(\gamma)\,.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe

$$\Phi\ :\ {\rm Cliff}(V,Q_V)\otimes_{\mathbb{K}}{\rm Cliff}(\widetilde{V},Q_{\widetilde{V}})\longrightarrow C_\oplus$$

stanowiące (jedyne) rozszerzenie przyporządkowania określonego na tensorach prostych jako

$$\Phi(\gamma\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{\gamma}) := \jmath_V(\gamma).\widetilde{\varphi}(\widetilde{\gamma})\,.$$

Pokażemy, że $\Phi$ jest unitalnym izomorfizmem $\mathbb{K}$-algebr, kostruując jego odwrotność. W tym celu rozważmy odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe

$$\Psi\ :\ V\oplus\widetilde{V}\longrightarrow{\rm Cliff}(V,Q_V)\otimes_{\mathbb{K}}{\rm Cliff}(\widetilde{V},Q_{\widetilde{V}})\ :\ (v,\widetilde{v})\longmapsto v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\rm C}+\varepsilon\triangleright e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}\,,$$

które spełnia warunek Clifforda

$$\Psi(v,\widetilde{v})^2 = \big(v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\rm C}+\varepsilon\triangleright e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}\big)\cdot\big(v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\rm C}+\varepsilon\triangleright e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}\big)$$

$$= v^2\otimes_{\mathbb{K}}e^{\rm C}+\varepsilon\triangleright v.e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}+\varepsilon\triangleright e_\Delta.v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}+e_\Delta^2\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}^2$$

$$= Q_V(v)\triangleright e^{\rm C}\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\rm C}+\varepsilon\triangleright v.e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}-\varepsilon\triangleright v.e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}+\varepsilon\,Q_{\widetilde{V}}(\widetilde{v})\triangleright e^{\rm C}\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\rm C}$$

$$\equiv \big(Q_V\oplus\varepsilon\triangleright Q_{\widetilde{V}}\big)(v,\widetilde{v})\triangleright e^{\rm C}\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\rm C}\,,$$

a zatem indukuje (jedyny) unitalny homomorfizm $\mathbb{K}$-algebr

$$\widetilde{\Psi}\ :\ C_\oplus\longrightarrow{\rm Cliff}(V,Q_V)\otimes_{\mathbb{K}}{\rm Cliff}(\widetilde{V},Q_{\widetilde{V}})$$

o własności

$$\widetilde{\Psi}(v,\widetilde{v}) = v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\rm C}+\varepsilon\triangleright e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}\,.$$

Zauważmy, że reprezentacja (3) elementu kanonicznego pozwala nam obliczyć wprost

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi}\circ\widetilde{\jmath}_V(e_\Delta) &\equiv \Delta(\mathscr{E})^{-1}\triangleright\widetilde{\Psi}\circ\widetilde{\jmath}_V(e_1.e_2.\cdots.e_{2m}) = \Delta(\mathscr{E})^{-1}\triangleright\widetilde{\Psi}\big(\jmath_V(e_1).\jmath_V(e_2).\cdots.\jmath_V(e_{2m})\big)\\ &= \Delta(\mathscr{E})^{-1}\triangleright\Psi(e_1,0).\Psi(e_2,0).\cdots.\Psi(e_{2m},0) = \Delta(\mathscr{E})^{-1}\triangleright\big(e_1\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}\big).\big(e_2\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}\big).\cdots.\big(e_{2m}\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}\big)\\ &= e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}\,.\end{aligned}$$

Tożsamości

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi}\circ\Phi\big(v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}+e^{\mathrm{C}}\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}\big) &= \widetilde{\Psi}\big((v,0).\widetilde{\varphi}\big(e^{\mathrm{C}}\big)+\widetilde{\jmath}_V\big(e^{\mathrm{C}}\big).\widetilde{\varphi}(\widetilde{v})\big)\\ &= \widetilde{\Psi}\big((v,0).\mathbf{1}_{C_\oplus}+\mathbf{1}_{C_\oplus}.\widetilde{\jmath}_V(e_\Delta).\widetilde{\jmath}_{\widetilde{V}}(\widetilde{v})\big)\\ &= \widetilde{\Psi}(v,0)+\widetilde{\Psi}\circ\widetilde{\jmath}_V(e_\Delta).\widetilde{\Psi}(0,\widetilde{v})\\ &= v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}+\big(e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}\big).\big(\varepsilon\triangleright e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}\big)\\ &= v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}+\varepsilon\triangleright e_\Delta^2\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}\\ &= v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}+e^{\mathrm{C}}\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\Phi\circ\widetilde{\Psi}(v,\widetilde{v}) &= \Phi\big(v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}+\varepsilon\triangleright e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}\big) = \Phi\big(v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}\big)+\varepsilon\triangleright\Phi\big(e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}\big)\\ &= \widetilde{\jmath}_V(v).\widetilde{\varphi}\big(\widetilde{e}^{\mathrm{C}}\big)+\varepsilon\triangleright\widetilde{\jmath}_V(e_\Delta).\widetilde{\varphi}(\widetilde{v})\\ &= (v,0).\mathbf{1}_{C_\oplus}+\varepsilon\triangleright\widetilde{\jmath}_V(e_\Delta).\widetilde{\jmath}_V(e_\Delta).\widetilde{\jmath}_{\widetilde{V}}(\widetilde{v})\\ &= (v,0)+\varepsilon\triangleright\widetilde{\jmath}_V\big(e_\Delta^2\big).(0,\widetilde{v}) = (v,0)+(0,\widetilde{v})\equiv(v,\widetilde{v})\,.\end{aligned}$$

pokazują dowodnie – na (nietrywialnych) generatorach, więc i ogólnie (wobec homomorficznego charakteru rozpatrywanych odwzorowań) – antycypowaną odwracalność $\Phi$. □

Na zakończenie rozważań ogólnych, wytyczających szlak ku twierdzeniom klasyfikacyjnym dla rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda, wypowiemy jeszcze istotne

**Twierdzenie 4.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\big((V_\alpha,+_\alpha,\mathsf{P}_\alpha,\bullet\longmapsto 0_\alpha),\ell_\alpha\big),\ \alpha\in\{1,2\}$ będą przestrzeniami $\mathbb{K}$-liniowymi wymiaru $\dim_{\mathbb{K}}V_1=\dim_{\mathbb{K}}V_2=:N<\infty$, a nadto niech $\Delta\ :\ V_1\times V_2\longrightarrow\mathbb{K}$ będzie dwoistością[3]. Określmy na $V_1\oplus V_2$ formę kwadratową

$$Q_\Delta\ :\ V_1\oplus V_2\longrightarrow\mathbb{K}\ :\ (v_1,v_2)\longmapsto\Delta(v_1,v_2)\equiv\Delta\circ\big(\mathrm{pr}_1\times\mathrm{pr}_2\big)\big((v_1,v_2),(v_1,v_2)\big)\,.$$

Istnieje kanoniczny unitalny izomorfizm $\mathbb{K}$-algebr

$$\mathrm{Cliff}(V_1\oplus V_2,Q_\Delta)\cong\mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\textstyle\bigwedge^\bullet V_1\big)\,.$$

*Dowód:* Zacznijmy od odnotowania, że sensowność definicji formy kwadratowej $Q_\Delta$ jest prostą kownsekwencją dwuliniowości dwoistości $\Delta$. To rzekłszy, możemy wykorzystać izomorfizm przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowych (odwzorowanie prawostronnie stowarzyszone z $\Delta$)

$$r_\Delta\ :\ V_2\xrightarrow{\cong}V_1^*\ :\ v\longmapsto\Delta(\cdot,v)$$

[3]Przypomnijmy, że dwoistość dla pary $(G_1,G_2)$ modułów nad pierścieniem przemiennym $R$ to odwzorowanie $\Delta\ :\ G_1\times G_2\longrightarrow R$ nieosobliwe, tj. takie, dla którego oba odwzorowania jednostronnie stowarzyszone $l_\Delta\ :\ G_1\longrightarrow G_2^*\ :\ g_1\longmapsto\Delta(g_1,\cdot)$ (lewostronnie) i $l_\Delta\ :\ G_2\longrightarrow G_1^*\ :\ g_2\longmapsto\Delta(\cdot,g_2)$ (prawostronnie) są bijekcjami.

w połączeniu z tezą Stw. 8-9-10.4 pozwala nam wypisać wygodny układ generujący $\mathbb{K}$-algebry $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\bigwedge^\bullet V_1\big)$ złożony z endomorfizmów $\mu_{v_1},\ v_1 \in V_1$ oraz $\imath_{r_\Delta(v_2)},\ v_2 \in V_2$, które spełniają proste relacje

$$\mu_{v_1}^2 = 0 = \imath_{r_\Delta(v_2)}^2\,, \qquad\qquad \{\imath_{r_\Delta(v_2)}, \mu_{v_1}\} = \Delta(v_1,v_2) \triangleright \mathrm{id}_{\bigwedge^\bullet V_1}\,.$$

O ile dwie pierwsze nie wymagają dodatkowego komentarza, ostatnią sprawdzamy w bezpośrednim rachunku (na tensorach prostych, dla dowolnych $w_i \in V_1,\ i \in \overline{1,n}$):

$$\begin{aligned}
\{\imath_{r_\Delta(v_2)}, \mu_{v_1}\}(w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n) &= \imath_{r_\Delta(v_2)}(v_1 \wedge w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n) \\
&\quad + v_1 \wedge \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\,\Delta(w_k,v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \underset{\widehat{k}}{\cdots} \wedge w_n \\
&= \Delta(v_1,v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n \\
&\quad - v_1 \wedge \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\,\Delta(w_k,v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \underset{\widehat{k}}{\cdots} \wedge w_n \\
&\quad + v_1 \wedge \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\,\Delta(w_k,v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \underset{\widehat{k}}{\cdots} \wedge w_n \\
&= \Delta(v_1,v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n \\
&\equiv \Delta(v_1,v_2) \triangleright \mathrm{id}_{\bigwedge^\bullet V_1}(w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n)\,.
\end{aligned}$$

Zdefiniujmy odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe

$$\varphi\ :\ V_1 \oplus V_2 \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\textstyle\bigwedge^\bullet V_1\big)\ :\ (v_1,v_2) \longmapsto \mu_{v_1} + \imath_{r_\Delta(v_2)}\,.$$

Na podstawie wypisanych wyżej tożsamości bez trudu sprawdzamy, że spełnia ono warunek Clifforda,

$$\begin{aligned}
\varphi(v_1,v_2)^2 &\equiv \big(\mu_{v_1} + \imath_{r_\Delta(v_2)}\big) \circ \big(\mu_{v_1} + \imath_{r_\Delta(v_2)}\big) = \mu_{v_1}^2 + \imath_{r_\Delta(v_2)}^2 + \{\imath_{r_\Delta(v_2)}, \mu_{v_1}\} \\
&= \Delta(v_1,v_2) \triangleright \mathrm{id}_{\bigwedge^\bullet V_1} \equiv Q_\Delta(v_1,v_2) \triangleright \mathbf{1}_{\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^\bullet V_1)}\,,
\end{aligned}$$

rozszerza się ono zatem kanonicznie do unitalnego homomorfizmu $\mathbb{K}$-algebr

$$\widetilde{\varphi}\ :\ \mathrm{Cliff}(V_1 \oplus V_2, Q_\Delta) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\textstyle\bigwedge^\bullet V_1\big)$$

o własności

$$\widetilde{\varphi}(v_1,v_2) = \mu_{v_1} + \imath_{r_\Delta(v_2)}\,.$$

Na mocy Stw. 8-9-10.4 podprzestrzeń $\mathrm{Image}\,\widetilde{\varphi}\restriction_{j^{\mathrm{C}}_{V_1\oplus V_2}(V_1\oplus V_2)} \equiv \mathrm{Image}\,\varphi$ generuje $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\bigwedge^\bullet V_1\big)$ jako $\mathbb{K}$-algebrę, zatem $\widetilde{\varphi}$ jest epimorfizmem. Ale zarazem – w świetle Równ. (1) –

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Cliff}(V_1 \oplus V_2, Q_\Delta) = 2^{\dim_{\mathbb{K}}(V_1\oplus V_2)} = 2^{\dim_{\mathbb{K}} V_1 + \dim_{\mathbb{K}} V_2} = 2^{2\dim_{\mathbb{K}} V_1}$$

oraz – tym razem na gruncie Tw. 8-9-10.4 oraz Stw. 8-9-10.3 –

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\textstyle\bigwedge^\bullet V_1\big) = \big(\dim_{\mathbb{K}} \textstyle\bigwedge^\bullet V_1\big)^2 = \big(2^{\dim_{\mathbb{K}} V_1}\big)^2 \equiv 2^{2\dim_{\mathbb{K}} V_1}\,,$$

co pokazuje dowodnie, że $\widetilde{\varphi}$ jest w istocie izomorfizmem. □

Jako proste corollarium do poprzedniego twierdzenia otrzymujemy

**Stwierdzenie 4.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy, zakładając przy tym, że $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$, przestrzeń kwadratowa $V$ jest niezwyrodniała i ma $\dim_{\mathbb{K}} V \in 2\mathbb{N}$. Niechaj $\omega \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ będzie inwolucją, $\omega^2 = \mathrm{id}_V$, skośnie symetryczną względem formy kwadratowej $Q$, tj. taką, która spełnia warunek

$$\omega^* = -\omega$$

wypisany dla

$$\forall_{v_1,v_2 \in V}\ :\ \Phi_Q\big(\omega^*(v_1),v_2\big) \coloneqq \Phi_Q\big(v_1,\omega(v_2)\big)\,.$$

Wówczas istnieje kanoniczny unitalny izomorfizm $\mathbb{K}$-algebr

$$\mathrm{Cliff}(V,Q) \cong \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\bigwedge^{\bullet} \mathrm{Ker}\,(\omega - \mathrm{id}_V)\big)\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Inwolucja $\omega$ zadaje – w świetle stwierdzenia dotyczącego odpowiedniości pomiędzy rozkładami modułów nad pierścieniem na sumy proste ich podmodułów a zupełnymi rodzinami rzutów komplementarnych na tychże modułach – rozkład

$$V = \mathrm{Ker}\,(\omega - \mathrm{id}_V)\big) \oplus \mathrm{Ker}\,(\omega + \mathrm{id}_V) \equiv V_- \oplus V_+\,,$$

gdyż para $P_\pm := 2_{\mathbb{K}}^{-1} \triangleright (\omega \pm \mathrm{id}_V)$ stanowi zupełny układ rzutów komplementarnych. Ponadto dla dowolnych $v_\pm, w_\pm \in V_\pm$ zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned}\Phi_Q(v_\pm, w_\pm) &= \Phi_Q\big(\mp\omega(v_\pm), \mp\omega(w_\pm)\big) = \Phi_Q\big(\omega^* \circ \omega(v_\pm), w_\pm\big) = -\Phi_Q\big(\omega^2(v_\pm), w_\pm\big) \\ &= -\Phi_Q(v_\pm, w_\pm)\,,\end{aligned}$$

przeto

$$V_\pm \perp_Q V_\pm\,,$$

natomiast w ograniczeniu do $V_\pm \times V_\mp$ forma dwuliniowa $\Phi_Q$ jest niezwyrodniała – istotnie, ilekroć dla ustalonego $v_\pm \in V_\pm$ jest

$$\forall_{w_\mp \in V_\mp} \ : \ \Phi_Q(v_\pm, w_\mp) = 0_{\mathbb{K}}\,,$$

to dowolny wektor $V \ni w = \widetilde{w}_- \oplus w_+$ wzgl. $w = w_- \oplus \widetilde{w}_+$ spełnia warunek

$$\Phi_Q(v_\pm, w) = \Phi_Q(v_\pm, \widetilde{w}_\pm) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v_\pm, w_\mp) = \Phi_Q(v_\pm, w_\mp) = 0_{\mathbb{K}}\,,$$

zatem – wobec niezwyrodnienia $Q$ – koniecznie

$$v_\pm = 0_V\,.$$

W rezultacie otrzymujemy parę dwoistą $(V_-, V_+)$ związaną dwoistością

$$\Delta_Q := 2\Phi_Q \restriction_{V_- \times V_+}\,,$$

dla której wyprowadzamy tożsamość

$$\begin{aligned}\Phi_Q(v_- \oplus v_+, w_- \oplus w_+) &= \Phi_Q(v_-, w_-) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v_+, w_+) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v_-, w_+) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v_+, w_-) \\ &= \Phi_Q(v_-, w_+) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(w_-, v_+) \\ &\equiv 2_{\mathbb{K}}^{-1} \triangleright \big(\Delta_Q(v_-, w_+) +_{\mathbb{K}} \Delta_Q(w_-, v_+)\big)\,,\end{aligned}$$

a z niej – równość

$$Q(v_- \oplus v_+) = \Delta_Q(v_-, v_+)\,,$$

usprawiedliwiającą – w połączeniu z wcześniejszymi obserwacjami – bezpośrednie odwołanie się do Tw. 4. Na tej podstawie stwierdzamy, zgodnie z tezą będącą przedmiotem dowodu,

$$\mathrm{Cliff}(V,Q) \equiv \mathrm{Cliff}(V_- \oplus V_+, Q \equiv Q_{\Delta_Q}) \cong \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\bigwedge^{\bullet} V_-\big)\,.$$

□

## Dodatek A. Uzupełnienie z teorii przestrzeni kwadratowych

Poniższe stwierdzenie ustala prostą relację między formą kwadratową na przestrzeni wektorowej i dowolnym (niezerowym) wynacznikiem na tej ostatniej, do którego będziemy się odwoływać w trakcie badań nad anatomią algebr Clifforda.

**Stwierdzenie 5.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $V$ będzie przestrzenią (kwadratową) wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V = N < \infty$. Dowolny wyznacznik $\Delta \in \bigwedge^N V^* \setminus \{0\}$ określa jednoznacznie skalar $\lambda_\Delta \in \mathbb{K}$ spełniający – dla dowolnych $v_i, w_i \in V$, $i \in \overline{1,N}$ – tożsamości

$$\det_{(N)}\big(\Phi_Q(v_i, w_j)\big)_{i,j\in\overline{1,N}} = \lambda_\Delta \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(v_1, v_2, \ldots, v_N) \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(w_1, w_2, \ldots, w_N)\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Przy ustalonych (dowolnie) wektorach $w_i$, $i \in \overline{1,N}$ odwzorowanie

$$\delta(w_1, w_2, \ldots, w_N)\ :\ V^{\times N} \longrightarrow \mathbb{K}\ :\ (v_1, v_2, \ldots, v_N) \longmapsto \det_{(N)}\big(\Phi_Q(v_i, w_j)\big)_{i,j\in\overline{1,N}}$$

jest jawnie $N$-liniowe i alternujące, przeto

$$\delta(w_1, w_2, \ldots, w_N) \in \bigwedge{}^N V^*\,,$$

co wobec oczywistej równości

$$\dim_{\mathbb{K}} \bigwedge{}^N V^* = \binom{N}{N} = 1$$

implikuje dla ustalonego (dowolnie) wyznacznika $\Delta \in \bigwedge^N V^*$ istnienie skalara $\lambda_\Delta(w_1, w_2, \ldots, w_N)$ spełniającego relację

$$\delta(w_1, w_2, \ldots, w_N) = \lambda_\Delta(w_1, w_2, \ldots, w_N) \triangleright \Delta\,.$$

Symetryzacja powyższej obserwacji prowadzi wprost do tezy dowodzonego stwierdzenia. $\square$