

THE GRAND CHESSBOARD
(MAWF '22/23 1.XIII & 1.XIV [RRS])



SPIS TREŚCI

1. Rzeczywiste algebry Clifforda w skończonym wymiarze	1
2. Zespalone algebry Clifforda w skończonym wymiarze	8
Dodatek A. Uzupełnienie (przypomnienie?) z algebry liniowej	13
Dodatek B. Uzupełnienie z teorii przestrzeni kwadratowych – cd.	17
Dodatek C. Uzupełnienie z teorii algebr	17

W dalszej części wykładu przedstawimy kompletną klasyfikację algebr Clifforda stowarzyszonych ze skończone wymiarowymi przestrzeniami kwadratowymi nad ciałami liczbowymi o szczególnym znaczeniu w modelowaniu zjawisk fizycznych, tj. nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

1. RZECZYWISTE ALGEBRY CLIFFORDA W SKOŃCZONYM WYMIARZE

Tytułem wstępu sformułujemy porządkujące, a oczywiste

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy, w szczególności niechaj $\mathbb{R}^{p,q} \equiv (\mathbb{R}^{p+q}, \delta_E^{(p,q)} \equiv \delta_E^{(p)} \oplus (-\delta_E^{(q)}))$ będzie modelową pseudoeuklidesową przestrzenią kwadratową o sygnaturze (p, q) . Algebra Clifforda dowolnej rzeczywistej przestrzeni kwadratowej wyposażonej w niezwyrodniającą formę kwadratową o sygnaturze (p, q) jest izomorficzna z algebrą Clifforda przestrzeni (pseudo)euklidesowej $\mathbb{R}^{p,q}$. Tę ostatnią algebrę Clifforda oznaczamy symbolem

$$\text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q}) \equiv \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}.$$

Dowód: Natychmiastowa konsekwencja koniunkcji Twierdzenia Sylwestera o bezwładności i Stw. 5.8. □

Powyższe przygotowuje nas do klasyfikacji rzeczywistych algebr Clifforda, do której przejdziemy obecnie. Zaczynamy od

Twierdzenie 1 (Klasyfikacyjne I $\mathbb{R}$). Przyjmijmy zapis dotychczasowy i ustalmy (dowolnie) parę $(p, q) \in \mathbb{N}^{\times 2}$. Istnieją unitalne izomorfizmy $\mathbb{R}$ -algebr

$$\mathrm{Cl}_{p+2,q}^{\mathbb{R}} \cong \mathrm{Cl}_{q,p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}},$$

$$\mathrm{Cl}_{p,q+2}^{\mathbb{R}} \cong \mathrm{Cl}_{q,p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}}.$$

W szczególności

$$\mathrm{Cl}_{p+2,0}^{\mathbb{R}} \cong \mathrm{Cl}_{0,p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}},$$

$$\mathrm{Cl}_{0,q+2}^{\mathbb{R}} \cong \mathrm{Cl}_{q,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}}.$$

Dowód: W świetle Stw. 8 i 6.2 w przypadku obu algebr: $\mathrm{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}}$ i $\mathrm{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}}$ istnieją wyznaczniki unormowane $\Delta \in \wedge^{\bullet} \mathbb{R}^{\times 2}$, dla których $\lambda_{\Delta} = 1$, zachodzi więc tożsamość

$$e_{\Delta}^2 = (-1)^{\frac{2(2-1)}{2}} \lambda_{\Delta} \triangleright e^C = -e^C =: \varepsilon_2 \triangleright e^C.$$

Oznaczmy

$$\varepsilon_2 \mathbb{R}^{q,p} \equiv (\mathbb{R}^q \oplus \mathbb{R}^p, \varepsilon_2 (\delta_E^{(q)} \oplus (-\delta_E^{(p)}))) = (\mathbb{R}^q \oplus \mathbb{R}^p, (-\delta_E^{(q)}) \oplus \delta_E^{(p)}) = \mathbb{R}^{p,q}$$

i dokonajmy – jak w Tw. 6.3 – rozkładu ortogonalnego (względem $\delta_E^{(p+2,q)}$)

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{p+2,q} &= \mathbb{R}^{2,0} \bigoplus_{\delta_E^{(p+2,q)}} \mathbb{R}^{p,q} \equiv \mathbb{R}^{2,0} \bigoplus_{\delta_E^{(p+2,q)}} \varepsilon_2 \mathbb{R}^{q,p} \\ &\equiv (\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^{p+q}, \delta_E^{(2,0)} \oplus \varepsilon_2 \delta_E^{(q,p)}), \end{aligned}$$

a następnie przywołajmy tezę Tw. 6.3 (oraz Tw. 3.3), aby zapisać

$$\begin{aligned} \mathrm{Cl}_{p+2,q}^{\mathbb{R}} &\equiv \mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{2,0} \bigoplus_{\delta_E^{(p+2,q)}} \varepsilon_2 \mathbb{R}^{q,p}) \cong \mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{2,0}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{q,p}) \equiv \mathrm{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{q,p}^{\mathbb{R}} \\ &\cong \mathrm{Cl}_{q,p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Na podstawie analogicznego rozkładu

$$\mathbb{R}^{p,q+2} = \mathbb{R}^{0,2} \bigoplus_{\delta_E^{(p,q+2)}} \varepsilon_2 \mathbb{R}^{q,p}$$

otrzymujemy drugą z pożądaných tożsamości

$$\begin{aligned} \mathrm{Cl}_{p,q+2}^{\mathbb{R}} &\equiv \mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{0,2} \bigoplus_{\delta_E^{(p,q+2)}} \varepsilon_2 \mathbb{R}^{q,p}) \cong \mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{0,2}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{q,p}) \equiv \mathrm{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{q,p}^{\mathbb{R}} \\ &\cong \mathrm{Cl}_{q,p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

□

Mamy także

Twierdzenie 2 (Klasyfikacyjne II $\mathbb{R}$). Przyjmijmy zapis Stw. 1. Ilekroć składowe sygnatury $(p, q) \in \mathbb{N}^{\times 2}$ spełniają relację $q \equiv p \pmod{4}$, istnieje unitalny izomorfizm $\mathbb{R}$ -algebr

$$\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \cong \mathrm{Cl}_{q,p}^{\mathbb{R}}.$$

W szczególności

$$\forall_{n \in 4\mathbb{N}} : \mathrm{Cl}_{n,0}^{\mathbb{R}} \cong \mathrm{Cl}_{0,n}^{\mathbb{R}}.$$

Dowód: Zaczniemy od spostrzeżenia:

$$N = p + q = p - q + 2q = 4k + 2q = 2(2k + q) \in 2\mathbb{N}.$$

Jeśli zatem Δ jest wyznacznikiem unormowanym na $\mathbb{R}^{p,q}$, to

$$\lambda_{\Delta} = (-1)^q \equiv (-1)^{q+2k} = (-1)^{(q+2k)(2(2k+q)-1)} = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}},$$

możemy przeto zastosować Tw. 6.2, na mocy którego (w konwencji poprzedniego dowodu)

$$\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \equiv \mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q}) \cong \mathrm{Cliff}(-\mathbb{R}^{p,q}) \equiv \mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{q,p}) \equiv \mathrm{Cl}_{q,p}^{\mathbb{R}}.$$

□

W następnej kolejności napotykamy oczywiste, acz przydatne

Twierdzenie 3 (Klasyfikacyjne III $\mathbb{R}$). Przyjmijmy zapis Stw. 1. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieją unitalne izomorfizmy $\mathbb{R}$ -algebr

$$\mathrm{Cl}_{n+8,0}^{\mathbb{R}} \cong \mathrm{Cl}_{n,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{8,0}^{\mathbb{R}},$$

$$\mathrm{Cl}_{0,n+8}^{\mathbb{R}} \cong \mathrm{Cl}_{0,n}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{0,8}^{\mathbb{R}},$$

przy czym

$$\mathrm{Cl}_{8,0}^{\mathbb{R}} \cong \mathrm{Cl}_{0,8}^{\mathbb{R}}.$$

Dowód: Wybrawszy na $\mathbb{R}^{8,0}$ (wzgl. $\mathbb{R}^{0,8}$) wyznacznik unormowany, otrzymujemy $\lambda_{\Delta} = 1$, a zatem

$$e_{\Delta}^2 = (-1)^{\frac{8(8-1)}{2}} \triangleright e^C = e^C =: \varepsilon_8 \triangleright e^C,$$

skąd – w świetle Tw. 6.3 (oraz Tw. 3.3) i w konwencji przyjętej wcześniej –

$$\begin{aligned} \mathrm{Cl}_{n+8,0}^{\mathbb{R}} &\equiv \mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{8,0} \oplus \varepsilon_8 \mathbb{R}^{n,0}) \cong \mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{8,0}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{n,0}) \equiv \mathrm{Cl}_{8,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{n,0}^{\mathbb{R}} \\ &\cong \mathrm{Cl}_{n,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{8,0}^{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Drugiej tożsamości dowodzimy analogicznie. Ostatnia część tezy dowodzonego twierdzenia jest implikowana przez Tw. 2. □

Do pełnej klasyfikacji rzeczywistych algebr Clifforda brakuje nam już tylko dyskusji ich struktury w przypadku sygnatury mieszanej – ten opisuje

Twierdzenie 4 (Klasyfikacyjne IV $\mathbb{R}$). Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Dla dowolnych $p, q, r, s \in \mathbb{N}$ istnieją unitalne izomorfizmy $\mathbb{R}$ -algebr

$$\mathrm{Cl}_{p,p}^{\mathbb{R}} \cong \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\bigwedge^{\bullet} \mathbb{R}^{\times p}) \equiv \mathbb{R}(2^p),$$

$$\mathrm{Cl}_{p,p+r}^{\mathbb{R}} \cong \mathrm{Cl}_{p,p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{0,r}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}(2^p) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{0,r}^{\mathbb{R}},$$

$$\mathrm{Cl}_{q+s,q}^{\mathbb{R}} \cong \mathrm{Cl}_{q,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{s,0}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}(2^p) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{s,0}^{\mathbb{R}}.$$

Dowód: Istnienie dwóch ostatnich klas izomorfizmów jest bezpośrednią konsekwencją istnienia pierwszej rodziny izomorfizmów oraz tego, że element kanoniczny $\mathrm{Cl}_{p,p}^{\mathbb{R}}$ stowarzyszony z wyznacznikiem unormowanym spełnia tożsamość

$$e_{\Delta}^2 = (-1)^{\frac{2p(2p-1)}{2}} \cdot (-1)^p \triangleright e^C = e^C =: \varepsilon_{p,p} \triangleright e^C,$$

co – w świetle Tw. 6.3 i w konwencji przyjętej wcześniej – daje nam

$$\mathrm{Cl}_{p,p+r}^{\mathbb{R}} \equiv \mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,p} \oplus \varepsilon_{p,p} \mathbb{R}^{0,r}) \cong \mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,p}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{0,r}) \equiv \mathrm{Cl}_{p,p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{0,r}^{\mathbb{R}}$$

i analogiczny wynik dla $\mathrm{Cl}_{q+s,q}^{\mathbb{R}}$. Pozostaje zatem wykazać słuszność pierwszej części tezy. W tym celu dokonujemy rozkładu ortogonalnego

$$\mathbb{R}^{p,p} = \mathbb{R}^{p,0} \oplus_{\delta_{(p,p)}^E} \mathbb{R}^{0,p}$$

i wybieramy bazy (pseudo)ortonormalne: $\{e_i^+\}_{i \in \overline{1,p}} \subset \mathbb{R}^{p,0}$ oraz $\{e_j^-\}_{j \in \overline{1,p}} \subset \mathbb{R}^{0,p}$,

$$\Phi_{\delta_{(p,p)}^E}(e_i^+, e_j^{\pm}) = \pm \delta_{i,j}, \quad \Phi_{\delta_{(p,p)}^E}(e_i^+, e_j^-) = 0, \quad i, j \in \overline{1,p}.$$

Tych możemy użyć do zdefiniowania inwolucji $\omega \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2p})$ stanowiącej (jedyne) $\mathbb{R}$ -liniowe rozszerzenie przyporządkowania elementów baz:

$$\omega(e_i^{\pm}) := e_i^{\mp}, \quad i \in \overline{1, p}.$$

Bez trudu upewniamy się, że inwolucja ta jest skośnie symetryczna,

$$\begin{aligned} \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(p,p)}}(\omega^*(e_i^{\pm}), e_j^{\pm}) &\equiv \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(p,p)}}(e_i^{\pm}, \omega(e_j^{\pm})) = \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(p,p)}}(e_i^{\pm}, e_j^{\mp}) = 0 = \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(p,p)}}(-\omega(e_i^{\pm}), e_j^{\pm}), \\ \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(p,p)}}(\omega^*(e_i^{\pm}), e_j^{\mp}) &\equiv \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(p,p)}}(e_i^{\pm}, \omega(e_j^{\mp})) = \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(p,p)}}(e_i^{\pm}, e_j^{\pm}) = \pm \delta_{i,j} = -\Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(p,p)}}(e_i^{\mp}, e_j^{\mp}) \\ &\equiv \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(p,p)}}(-\omega(e_i^{\pm}), e_j^{\mp}), \end{aligned}$$

i jako taka pozwala na odniesienie do pary $(\mathbb{R}^{p,p}, \omega)$ tezy Stw. 6.4, która przesądza o istnieniu izomorfizmu

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{p,p}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,p}) \cong \text{End}_{\mathbb{R}}(\bigwedge^{\bullet} \text{Ker}(\omega - \text{id}_{\mathbb{R}^{p,p}})) \equiv \text{End}_{\mathbb{R}}(\bigwedge^{\bullet} \bigoplus_{i=1}^p \langle e_i^+ + e_i^- \rangle_{\mathbb{R}}) \\ &\equiv \text{End}_{\mathbb{R}}(\bigwedge^{\bullet} \mathbb{R}^{\times p}). \end{aligned}$$

□

W podsumowaniu dotychczasowych rozważań klasyfikacyjnych otrzymujemy

Twierdzenie 5 (Klasyfikacyjne $V \mathbb{R}$ – „Szachownica Clifforda”). Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Tablica 1 zawiera klasyfikację algebr Clifforda $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ dla $p, q \in \overline{0, 8}$ i tym samym określa $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ dla dowolnej sygnatury (p, q) . W szczególności odczytujemy z niej tożsamości

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{p,p+8k}^{\mathbb{R}} &\cong \mathbb{R}(2^{p+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p-1+8k}^{\mathbb{R}} &\cong \mathbb{R}(2^{p+4k}) \oplus \mathbb{R}(2^{p+4k}), & \text{Cl}_{p,p+1+8k}^{\mathbb{R}} &\cong \mathbb{C}(2^{p+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p-2+8k}^{\mathbb{R}} &\cong \mathbb{R}(2^{p-1+4k}), & \text{Cl}_{p,p+2+8k}^{\mathbb{R}} &\cong \mathbb{H}(2^{p+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p-3+8k}^{\mathbb{R}} &\cong \mathbb{C}(2^{p-1+4k}), & \text{Cl}_{p,p+3+8k}^{\mathbb{R}} &\cong \mathbb{H}(2^{p+4k}) \oplus \mathbb{H}(2^{p+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p-4+8k}^{\mathbb{R}} &\cong \mathbb{H}(2^{p-3+4k}), \end{aligned}$$

ślusne dla dowolnych $p, k, l \in \mathbb{Z}$, dla których powyższe formuły mają sens.

Dowód: Zawartość tabeli jest prostą konsekwencją Twierdzeń Klasyfikacyjnych I-IV $\mathbb{R}$, Stw. 9 oraz 5.2. Poniżej przedstawimy kilka spośród 81 rachunków szczegółowych, pozostawiając Czytelnika z elementarnym zadaniem sprawdzenia wszystkich pozostałych. Oto więc postać trywialnej algebry $\text{Cl}_{0,0}^{\mathbb{R}}$ wynika wprost z definicji algebry Clifforda, natomiast postać $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ dla $0 < p + q \leq 2$ odczytujemy ze Stw. 5.2. Zaczynamy więc od wyprowadzenia

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{3,0}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cl}_{1+2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{=} \text{Cl}_{0,1}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{5.2}{\cong} \text{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \stackrel{3.3}{\cong} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \text{C} \stackrel{9(i)}{\cong} \mathbb{C}(2), \\ \text{Cl}_{0,3}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cl}_{0,1+2}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{=} \text{Cl}_{1,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \stackrel{5.2}{\cong} (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \stackrel{3.5}{\cong} (\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \oplus (\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \\ &\stackrel{9(i)}{\cong} \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}, \\ \text{Cl}_{4,0}^{\mathbb{R}} &\stackrel{\cong}{=} \text{Cl}_{0,4}^{\mathbb{R}} \equiv \text{Cl}_{0,2+2}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{=} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \stackrel{5.2(iii,iv)}{\cong} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \stackrel{9(i)}{\cong} \mathbb{H}(2). \end{aligned}$$

(1)

Na podstawie powyższego wyznaczamy dalej

$$\text{Cl}_{5,0}^{\mathbb{R}} \equiv \text{Cl}_{3+2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{=} \text{Cl}_{0,3}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{(1),5.2(iii)}{\cong} (\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2)$$

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{\cong}{\underset{3.5}{=}} (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2)) \oplus (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2)) \stackrel{\cong}{\underset{3.3}{=}} (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \oplus (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \\
 & \stackrel{\cong}{\underset{9(i)}{=}} \mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2), \\
 \text{Cl}_{0,5}^{\mathbb{R}} & \equiv \text{Cl}_{0,3+2}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{1}{=}} \text{Cl}_{3,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{(1),5.2(iv)}{=}} \mathbb{C}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \stackrel{\cong}{\underset{9(iii)}{=}} (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \\
 & \stackrel{\cong}{\underset{3.4}{=}} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \stackrel{\cong}{\underset{9(iv)}{=}} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(4) \stackrel{\cong}{\underset{3.3}{=}} \mathbb{R}(4) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \stackrel{\cong}{\underset{9(i)}{=}} \mathbb{C}(4), \\
 \text{Cl}_{6,0}^{\mathbb{R}} & \equiv \text{Cl}_{4+2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{1}{=}} \text{Cl}_{0,4}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{(1),5.2(iii)}{=}} \mathbb{H}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \\
 & \stackrel{\cong}{\underset{3.3}{=}} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}(2) \stackrel{\cong}{\underset{9(i)}{=}} \mathbb{H}(4), \\
 \text{Cl}_{0,6}^{\mathbb{R}} & \equiv \text{Cl}_{0,4+2}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{1}{=}} \text{Cl}_{4,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{(1),5.2(iv)}{=}} (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \\
 & \stackrel{\cong}{\underset{3.4}{=}} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \stackrel{\cong}{\underset{9(iv)}{=}} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(4) \stackrel{\cong}{\underset{9(i)}{=}} \mathbb{R}(8).
 \end{aligned}$$

(2)

Biorąc pod uwagę rezultaty ostatniego rachunku, otrzymujemy następnie

$$\begin{aligned}
 \text{Cl}_{7,0}^{\mathbb{R}} & \equiv \text{Cl}_{5+2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{1}{=}} \text{Cl}_{0,5}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{(2),5.2(iii)}{=}} \mathbb{C}(4) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \stackrel{\cong}{\underset{3.3}{=}} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}(4) \\
 & \stackrel{\cong}{\underset{9(i)}{=}} \mathbb{C}(8), \\
 \text{Cl}_{0,7}^{\mathbb{R}} & \equiv \text{Cl}_{0,5+2}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{1}{=}} \text{Cl}_{5,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{(2),5.2(iv)}{=}} [(\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \oplus (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H})] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \\
 & \stackrel{\cong}{\underset{3.5}{=}} [(\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}] \oplus [(\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}] \\
 & \stackrel{\cong}{\underset{3.4}{=}} (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H})) \oplus (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H})) \\
 & \stackrel{\cong}{\underset{9(iv)}{=}} (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(4)) \oplus (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(4)) \stackrel{\cong}{\underset{9(i)}{=}} \mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8), \\
 \text{Cl}_{0,8}^{\mathbb{R}} & \stackrel{\cong}{\underset{2}{=}} \text{Cl}_{8,0}^{\mathbb{R}} \equiv \text{Cl}_{6+2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{1}{=}} \text{Cl}_{0,6}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{(2),5.2(iii)}{=}} \mathbb{R}(8) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \stackrel{\cong}{\underset{9(i)}{=}} \mathbb{R}(16).
 \end{aligned}$$

(3)

Ostatnia składowa tezy dowodzonego twierdzenia broni się na podstawie następującej obserwacji, opartej na Tw. 1 (jak również 3.3 i 3.4), Stw. 5.2 (iii) i (iv) oraz 9 (i) i Równ. (3),

$$\begin{aligned}
 \text{Cl}_{p+8,q}^{\mathbb{R}} & \cong \text{Cl}_{q,p+6}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \cong (\text{Cl}_{p+4,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}}) \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \cong \text{Cl}_{p+4,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} (\text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}}) \\
 & \cong \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} ((\text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}}) \otimes_{\mathbb{R}} (\text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}})) \cong \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{8,0}^{\mathbb{R}} \\
 & \cong \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(16), \\
 \text{Cl}_{p,q+8}^{\mathbb{R}} & \cong \text{Cl}_{q+6,p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \cong (\text{Cl}_{p,q+4}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}}) \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \cong \text{Cl}_{p,q+4}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} (\text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}}) \\
 & \cong \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} ((\text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}}) \otimes_{\mathbb{R}} (\text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}})) \cong \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,8}^{\mathbb{R}} \\
 & \cong \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(16).
 \end{aligned}$$

□

Rzut oka na Tablicę 1 przekonuje nas, że wszystkie rzeczywiste algebry Clifforda są – w świetle Stw. 4.3 – proste lub półproste, przy czym w tym drugim przypadku mamy do czynienia z sumami prostymi dwóch algebr prostych. Łatwo dostrzegalne prawidłowości w lokalizacji algebr

półprostych pośród rzeczywistych algebr Clifforda (i w szczególności w obrębie „szachownicy Clifforda”) oraz ich strukturę można bez trudu wyjaśnić w odwołaniu do konstrukcji elementu kanonicznego. Wprowadźmy pojęcie

Definicja 1. Przyjmijmy zapis Stw. 1 i niechaj $\{e_i\}_{i \in \overline{1, p+q}}$ będzie bazą standardową $\mathbb{R}^{\times p} \oplus \mathbb{R}^{\times q}$, (pseudo)ortonormalną względem formy kwadratowej $\delta_E^{(p,q)}$. **Element objętości** w $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ to wektor

$$\omega_{\mathbb{R}} := e_1 \cdot e_2 \cdots e_{p+q}.$$

Możemy już teraz wyśłowić wyjaśniające zaobserwowane regularności

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Dla dowolnej pary $(p, q) \in \mathbb{N}^{\times 2}$ prawdziwą jest równoważność

$$\omega_{\mathbb{R}}^2 = e^C \iff (p+q+1)(p+q) - 2p \in 4\mathbb{N}.$$

W jej konsekwencji dla dowolnej sygnatury spełniającej warunek

$$(4) \quad q - p = 3 \pmod{4}$$

istnieje rozkład

$$(5) \quad \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} = \text{Cl}_{p,q}^+ \oplus \text{Cl}_{p,q}^-$$

algebry Clifforda $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ na sumę prostą jej podalgebr (zredukowanych)

$$\text{Cl}_{p,q}^{\pm} := P_{\omega_{\mathbb{R}}}^{\pm} \cdot \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}},$$

o elementach spełniających warunki – odpowiednio – **samodwoistości** (lub inaczej **samodualności**)

$$\forall \gamma \in \text{Cl}_{p,q}^+ : \omega_{\mathbb{R}} \cdot \gamma = \gamma,$$

wzgl. **skośnej samodwoistości** (lub inaczej **antysamodualności**)

$$\forall \gamma \in \text{Cl}_{p,q}^- : \omega_{\mathbb{R}} \cdot \gamma = -\gamma.$$

Zachodzą relacje:

$$(6) \quad J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\text{Cl}_{p,q}^{\pm}) = \text{Cl}_{p,q}^{\mp}$$

oraz

$$(7) \quad \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}^0} = (\text{id}_{\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}} + J_{\mathbb{R}^{\times p+q}})(\text{Cl}_{p,q}^{\pm}).$$

Rozkład ten pokrywa się z rozkładem półprostej $\mathbb{R}$ -algebry $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ na składowe proste wynikającym z Tw. 5 (ukazanym w Tablicy 1), tj. dla dowolnych $k, l \in \mathbb{Z}$ o własnościach $p+3+8k, p+7+8l \geq 0$ istnieją izomorfizmy $\mathbb{R}$ -algebr prostych

$$(8) \quad \text{Cl}_{p,p+3+8k}^{\pm} \cong \mathbb{H}(2^{p+4k}), \quad \text{Cl}_{p,p+7+8l}^{\pm} \cong \mathbb{R}(2^{p+3+4l}).$$

Dowód: Pierwszą część tezy sprawdzamy w bezpośrednim rachunku, wykorzystującym ortonormalność bazy standardowej,

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbb{R}}^2 &= e_1 \cdot e_2 \cdots e_{p+q} \cdot e_1 \cdot e_2 \cdots e_{p+q} = (-1)^{\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}} e_1^2 \cdot e_2^2 \cdots e_{p+q}^2 \\ &= (-1)^{\frac{(p+q)(p+q-1)}{2} + q} e^C = (-1)^{\frac{(p+q)^2 - p + q}{2}} e^C, \end{aligned}$$

z którego wynika wprost dowodzony postulat. Przy tym zgodnie z tezą Tw. 6.1 $\omega_{\mathbb{R}}$ jest elementem centralnym tylko dla $p+q \in 2\mathbb{N}+1$, co w świetle Stw. 4.6 prowadzi do rozkładu jak w Równ. (5), kiedy dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ spełniony jest układ warunków

$$p+q = 2k+1 \quad \wedge \quad 2k+2q \in 4\mathbb{N}.$$

Po podstawieniu pierwszego z nich do drugiego otrzymujemy warunek (4) jako rozwiązanie układu. Relacja (6) jest następstwem oczywistej tożsamości

$$J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(P_{\omega_{\mathbb{R}}}^{\pm}) = P_{\omega_{\mathbb{R}}}^{\mp} \iff J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\omega_{\mathbb{R}}) = -\omega_{\mathbb{R}}.$$

Istotnie, na jej podstawie wyprowadzamy relacje

$$J_{\mathbb{R} \times p+q}(\text{Cl}_{p,q}^{\pm}) \subset \text{Cl}_{p,q}^{\mp},$$

a ewaluując na tych ostatnich obustronnie $J_{\mathbb{R} \times p+q}$ – także relacje odwrotne

$$\text{Cl}_{p,q}^{\pm} \subset J_{\mathbb{R} \times p+q}(\text{Cl}_{p,q}^{\mp}).$$

Z kolei relację (7) wyprowadzamy z następujących obserwacji. Z jednej strony zachodzi

$$\begin{aligned} J_{\mathbb{R} \times p+q} \circ (\text{id}_{\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}} + J_{\mathbb{R} \times p+q}) &= (\text{id}_{\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}} + J_{\mathbb{R} \times p+q}) \\ \implies (\text{id}_{\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}} + J_{\mathbb{R} \times p+q})(\text{Cl}_{p,q}^{\pm}) &\subset \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}. \end{aligned}$$

Z drugiej strony niechaj $\gamma_0 = (\gamma_0^+, \gamma_0^-)$ będzie rozkładem elementu $\gamma_0 \in \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}$ na składowe z $\text{Cl}_{p,q}^{\pm} \ni \gamma_0^{\pm}$, a wówczas – wobec (6) – otrzymujemy równość

$$(\gamma_0^+, \gamma_0^-) = \gamma_0 = J_{\mathbb{R} \times p+q}(\gamma_0) = (J_{\mathbb{R} \times p+q}(\gamma_0^-), J_{\mathbb{R} \times p+q}(\gamma_0^+)),$$

z której już wprost wynika wniosek, że

$$\gamma_0 = (\gamma_0^+, \gamma_0^-) = (\gamma_0^+, J_{\mathbb{R} \times p+q}(\gamma_0^+)) \in (\text{id}_{\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}} + J_{\mathbb{R} \times p+q})(\text{Cl}_{p,q}^+)$$

oraz

$$\gamma_0 = (\gamma_0^+, \gamma_0^-) = (J_{\mathbb{R} \times p+q}(\gamma_0^-), \gamma_0^-) \in (\text{id}_{\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}} + J_{\mathbb{R} \times p+q})(\text{Cl}_{p,q}^-).$$

Ażeby przekonać się, że wskazany rozkład pokrywa się z rozkładem algebry Clifforda na podalgebry proste, wystarczy zauważyć, że przewidziane przez Tw. 5 (w połączeniu z powyższymi ustaleniami) izomorfizmy $\mathbb{R}$ -algebr

$$\begin{aligned} \iota_3 &: \mathbb{H}(2^{p+4k}) \oplus \mathbb{H}(2^{p+4k}) \xrightarrow{\cong} \text{Cl}_{p,p+8k+3}^+ \oplus \text{Cl}_{p,p+8k+3}^-, \\ \iota_7 &: \mathbb{R}(2^{p+4l+3}) \oplus \mathbb{R}(2^{p+4l+3}) \xrightarrow{\cong} \text{Cl}_{p,p+8l+7}^+ \oplus \text{Cl}_{p,p+8l+7}^- \end{aligned}$$

odwzorowują *proste* składniki $\mathbb{H}(2^{p+4k})$ wzgl. $\mathbb{R}(2^{p+4l+3})$ dziedziny w *takież* podalgebry przeciwdziedziny, gdyby zatem istniały nietrywialne rozkłady

$$\mathfrak{M}_3 := \iota_3(\mathbb{H}(2^{p+4k}) \oplus \{\mathbf{0}_{2^{p+4k}}\}) = \mathfrak{M}_3 \cap \text{Cl}_{p,p+8k+3}^+ \oplus \mathfrak{M}_3 \cap \text{Cl}_{p,p+8k+3}^-,$$

$$\mathfrak{M}_7 := \iota_7(\mathbb{R}(2^{p+4l+3}) \oplus \{\mathbf{0}_{2^{p+4l+3}}\}) = \mathfrak{M}_7 \cap \text{Cl}_{p,p+8l+7}^+ \oplus \mathfrak{M}_7 \cap \text{Cl}_{p,p+8l+7}^-,$$

to każdy ze składników prostych po prawej stronie powyższych równości byłby nietrywialnym obustronnym ideałem w odnośnej algebrze $\mathfrak{M}_m$, $m \in \{3, 7\}$, a to z tej racji, że składniki proste w rozkładzie (5) są podalgebrami, zatem

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M}_m \cap \text{Cl}_{p,p+8k+m}^{\pm}) \cdot (\mathfrak{M}_m \cap \text{Cl}_{p,p+8k+m}^{\pm}) &\subseteq \mathfrak{M}_m \cap \text{Cl}_{p,p+8k+m}^{\pm}, \\ (\mathfrak{M}_m \cap \text{Cl}_{p,p+8k+m}^{\pm}) \cdot (\mathfrak{M}_m \cap \text{Cl}_{p,p+8k+m}^{\mp}) &= \{0_{\text{Cl}_{p,p+8k+m}^{\mathbb{R}}}\} \\ &\subseteq (\mathfrak{M}_m \cap \text{Cl}_{p,p+8k+m}^{\pm}) \cap (\mathfrak{M}_m \cap \text{Cl}_{p,p+8k+m}^{\mp}). \end{aligned}$$

To jednak leży w sprzeczności z prostotą $\mathfrak{M}_m$, wnioskujemy zatem, że albo $\mathfrak{M}_m \subseteq \text{Cl}_{p,p+8k+m}^+$, albo też $\mathfrak{M}_m \subseteq \text{Cl}_{p,p+8k+m}^-$. Teza jest teraz natychmiastową konsekwencją rachunku wymiarów. $\square$

Zanim przejdziemy do dyskusji zespolonych algebr Clifforda, zatrzymamy się nad jednym jeszcze wynikiem strukturalnym dotyczącym algebr rzeczywistych, który odegra niebagatelną rolę w rachunku spinorowym. Oto więc mamy

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Dla dowolnej sygnatury $(p, q) \in \mathbb{N}^{\times 2}$ istnieje unitalny izomorfizm $\mathbb{R}$ -algebr

$$\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \cong \text{Cl}_{p,q+1}^{\mathbb{R}0}.$$

Dowód: Wybierzmy w $\mathbb{R}^{p,q+1}$ (o formie kwadratowej $Q = \delta_E^{(p,q+1)}$) bazę standardową (pseudo)ortonormalną $\{e_i\}_{i \in \overline{1, p+q+1}}$ uporządkowaną tak, że wektory e_j , $j \in \overline{1, p}$ rozpinają podprzestrzeń o sygnaturze $(p, 0)$, a pozostałe wektory e_k , $k \in \overline{p+1, p+q+1}$ – podprzestrzeń o sygnaturze $(0, q+1)$. Następnie zdefiniujemy podprzestrzeń

$$\mathbb{R}^{p+q} := \bigoplus_{i=1}^{p+q} \langle e_i \rangle_{\mathbb{R}},$$

a na niej – odwzorowanie

$$\varphi : \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow \text{Cl}_{p,q+1}^{\mathbb{R}0} : v \longmapsto v \cdot e_{p+q+1},$$

które ma własność Clifforda, co pokazujemy – dla dowolnego wektora $v := \sum_{i=1}^N \lambda^i \triangleright e_i \in \mathbb{R}^{p+q}$ – w bezpośrednim rachunku:

$$\begin{aligned} \varphi(v)^2 &= \sum_{i,j=1}^N \lambda^i \cdot \lambda^j \triangleright e_i \cdot e_{p+q+1} \cdot e_j \cdot e_{p+q+1} = - \sum_{i,j=1}^N \lambda^i \cdot \lambda^j \triangleright e_i \cdot e_j \cdot e_{p+q+1}^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^N \lambda^i \cdot \lambda^j \triangleright e_i \cdot e_j \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \lambda^i \cdot \lambda^j \triangleright \{e_i, e_j\} = Q(v) \triangleright e^C. \end{aligned}$$

To gwarantuje istnienie unitalnego homomorfizmu $\mathbb{R}$ -algebr

$$\tilde{\varphi} : \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{Cl}_{p,q+1}^{\mathbb{R}0},$$

przy czym dowolny generator $\text{Cl}_{p,q+1}^{\mathbb{R}0}$ otrzymujemy z elementu dziedziny w następujący sposób: dla $1 \leq i < j \leq p+q$ mamy

$$e_i \cdot e_j = \tilde{\varphi}(e_i) \cdot \tilde{\varphi}(e_j) = \tilde{\varphi}(e_i \cdot e_j),$$

a dla $1 \leq k \leq p+q$ jest

$$e_k \cdot e_{p+q+1} = \tilde{\varphi}(e_k).$$

Jest zatem $\tilde{\varphi}$ epimorfizmem, a ponieważ – jak łatwo sprawdzić – $\dim_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{p,q+1}^{\mathbb{R}0} = \dim_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$, przeto odwzorowanie to jest poszukiwanym izomorfizmem. $\square$

Poklasyfikowawszy rzeczywiste algebry Clifforda, przejdziemy obecnie do analizy ich zespolonych odpowiedników.

2. ZESPOLONE ALGEBRY CLIFFORDA W SKOŃCZONYM WYMIARZE

Bestiariusz niezwyrodniałych algebr Clifforda nad zespolonymi przestrzeniami kwadratowymi osłaja i systematyzuje poniższe

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Algebra Clifforda dowolnej zespolonej przestrzeni kwadratowej wyposażonej w niezwyrodniałą formę kwadratową rzędu $n \in \mathbb{N}$ jest izomorficzna z algebrą Clifforda przestrzeni $\mathbb{C}^n$ z euklidesową formą kwadratową $\delta_E^{(n)}$. Tę ostatnią algebrę Clifforda oznaczamy symbolem

$$\text{Cliff}(\mathbb{C}^n, \delta_E^{(n)}) \equiv \text{Cl}_n^{\mathbb{C}}.$$

Dowód: Wynika wprost z istnienia izometrycznej izometrii pomiędzy dowolnymi dwiema niezwyrodniałymi przestrzeniami kwadratowymi tego samego wymiaru oraz ze Stw. 5.8. $\square$

Stwierdzenie to pozwala udzielić natychmiastowej odpowiedzi na pytanie o postać zespolonych algebr Clifforda na gruncie dotychczasowych naszych rezultatów dotyczących rzeczywistych algebr Clifforda, co dowodnie pokazuje

Twierdzenie 6 (O naturalności kompleksyfikacji algebr Clifforda). Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\mathbf{CliffAlg}_{\mathbb{K}}$ będzie kategorią algebr Clifforda nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, stanowiącą podkategorię kategorii $\mathbf{uAssAlg}_{\mathbb{K}}$. Istnieje izomorfizm naturalny

$$\begin{array}{ccc}
 \square \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{(\cdot)^c} & \square \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}} \\
 \downarrow \text{Cliff} & \nearrow \eta & \downarrow \text{Cliff} \\
 \mathbf{CliffAlg}_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{(\cdot)^c \upharpoonright_{\mathbf{CliffAlg}_{\mathbb{R}}}} & \mathbf{CliffAlg}_{\mathbb{C}}
 \end{array}$$

W szczególności więc dla dowolnego $p \in \overline{0, n}$ istnieje unitalny izomorfizm $\mathbb{C}$ -algebr

$$\mathbf{Cl}_n^{\mathbb{C}} \cong \mathbf{Cl}_{p, n-p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Dowód: Kanoniczny monomorfizm przestrzeni $\mathbb{R}$ -liniowych

$$j_V : V \rightarrow V^{\mathbb{C}} \equiv V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} : v \mapsto v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0)$$

jest izometrią (w odniesieniu do stosownego ograniczenia skompleksyfikowanej formy kwadratowej $Q^{\mathbb{C}}$ z Def. 3) na obraz, niosący naturalną strukturę przestrzeni $\mathbb{R}$ -liniowej. Istotnie,

$$Q^{\mathbb{C}} \circ j_V(v) \equiv j_{\mathbb{R}} \circ Q(v) \cdot (1, 0)^2 = j_{\mathbb{R}} \circ Q(v) \equiv Q(v).$$

W świetle Stw. 5.8 istnieje zatem funktorialne podniesienie $j_V \upharpoonright$ (ko-obciętego do swego obrazu, co oznaczamy symbolem $\upharpoonright$) do unitalnego izomorfizmu $\mathbb{R}$ -algebr

$$\text{Cliff}(j_V \upharpoonright) : \text{Cliff}(V, Q) \rightarrow \text{Cliff}(\text{Image } j_V, Q^{\mathbb{C}} \upharpoonright_{\text{Image } j_V}) \subset \text{Cliff}(V^{\mathbb{C}}, Q^{\mathbb{C}}),$$

który naturalnie (trywialnie) rozszerza się do monomorfizmu $\mathbb{R}$ -algebr

$$\underline{\varphi}_{(V, Q)} : \text{Cliff}(V, Q) \rightarrow \text{Cliff}(V^{\mathbb{C}}, Q^{\mathbb{C}}),$$

jako że $\text{Image } j_V$ generuje podalgebrę (unitalną, nad $\mathbb{R}$) w $\text{Cliff}(V^{\mathbb{C}}, Q^{\mathbb{C}})$. To rozszerzenie możemy następnie wykorzystać do skonstruowania odwzorowania $\mathbb{C}$ -liniowego

$$\varphi_{(V, Q)} : \text{Cliff}(V, Q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow \text{Cliff}(V^{\mathbb{C}}, Q^{\mathbb{C}}),$$

określonego na tensorach prostych $\gamma \otimes_{\mathbb{R}} z \in \text{Cliff}(V, Q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ wzorem

$$\varphi_{(V, Q)}(\gamma \otimes_{\mathbb{R}} z) := z \triangleright \underline{\varphi}_{(V, Q)}(\gamma).$$

Odwzorowanie to spełnia warunek

$$\begin{aligned}
 \varphi_{(V, Q)} \circ m_{\otimes}((\gamma_1 \otimes_{\mathbb{R}} z_1), (\gamma_2 \otimes_{\mathbb{R}} z_2)) &= \varphi_{(V, Q)}(\gamma_1 \cdot \gamma_2 \otimes_{\mathbb{R}} z_1 \cdot z_2) \\
 &= (z_1 \cdot z_2) \triangleright \underline{\varphi}_{(V, Q)}(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \\
 &= (z_1 \cdot z_2) \triangleright (\underline{\varphi}_{(V, Q)}(\gamma_1) \cdot \underline{\varphi}_{(V, Q)}(\gamma_2)) \\
 &= (z_1 \triangleright \underline{\varphi}_{(V, Q)}(\gamma_1)) \cdot (z_2 \cdot \underline{\varphi}_{(V, Q)}(\gamma_2)) \\
 &\equiv \varphi_{(V, Q)}(\gamma_1 \otimes_{\mathbb{R}} z_1) \cdot \varphi_{(V, Q)}(\gamma_2 \otimes_{\mathbb{R}} z_2),
 \end{aligned}$$

jest zatem (jawnie unitalnym) homomorfizmem $\mathbb{C}$ -algebr. Punktem wyjścia do konstrukcji jego odwrotności jest odwzorowanie $\mathbb{C}$ -liniowe

$$\begin{aligned}
 \psi_{(V, Q)} &: V^{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Cliff}(V, Q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\
 &: v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \mapsto j_V^{\mathbb{C}}(v) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + j_V^{\mathbb{C}}(w) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1),
 \end{aligned}$$

spełniające warunek Clifforda,

$$\psi_{(V, Q)}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1))^2$$

$$\begin{aligned}
 &= (j_V^{\mathbb{C}}(v) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) + j_V^{\mathbb{C}}(w) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)) \cdot (j_V^{\mathbb{C}}(v) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) + j_V^{\mathbb{C}}(w) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)) \\
 &= v^2 \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)^2 + \{v, w\} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) \cdot_{\mathbb{C}} (0,1) + w^2 \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)^2 \\
 &= (Q(v) - Q(w)) \triangleright e^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) + 2\Phi_Q(v, w) \triangleright e^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) \\
 &= e^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} (Q(v) - Q(w), 2\Phi_Q(v, w)) \\
 &= Q^{\mathbb{C}}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)) \triangleright (e^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)) \\
 &\equiv Q^{\mathbb{C}}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)) \triangleright e_{\otimes}^{\mathbb{C}},
 \end{aligned}$$

w którego wyprowadzeniu korzystamy z tożsamości

$$\begin{aligned}
 &Q^{\mathbb{C}}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)) \\
 &\equiv \Phi_{Q^{\mathbb{C}}}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0,1), v \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)) \\
 &= \Phi_{Q^{\mathbb{C}}}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1,0), v \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)) + \Phi_{Q^{\mathbb{C}}}(w \otimes_{\mathbb{R}} (0,1), w \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)) \\
 &\quad + 2\Phi_{Q^{\mathbb{C}}}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1,0), w \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)) \\
 &\equiv Q^{\mathbb{C}}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)) + Q^{\mathbb{C}}(w \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)) + 2\Phi_{Q^{\mathbb{C}}}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1,0), w \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)) \\
 &= (1,0)^2 \cdot_{\mathbb{C}} Q(v) + (0,1)^2 \cdot_{\mathbb{C}} Q(w) + (1,0) \cdot_{\mathbb{C}} (0,1) \cdot_{\mathbb{C}} 2\Phi_Q(v, w) \\
 &= (Q(v) - Q(w), 2\Phi_Q(v, w)).
 \end{aligned}$$

Powyższe przesądza o istnieniu (jedyne) unitalnego homomorfizmu $\mathbb{C}$ -algebr

$$\tilde{\psi}_{(V,Q)} : \text{Cliff}(V^{\mathbb{C}}, Q^{\mathbb{C}}) \longrightarrow \text{Cliff}(V, Q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

o własności

$$\tilde{\psi}_{(V,Q)} \circ j_{V^{\mathbb{C}}}^{\mathbb{C}}(v \otimes_{\mathbb{R}} z) = j_V^{\mathbb{C}}(v) \otimes_{\mathbb{R}} z.$$

Ten ostatni w oczywisty sposób spełnia tożsamości

$$\tilde{\psi}_{(V,Q)} \circ \varphi_{(V,Q)} = \text{id}_{\text{Cliff}(V,Q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}}, \quad \varphi_{(V,Q)} \circ \tilde{\psi}_{(V,Q)} = \text{id}_{\text{Cliff}(V^{\mathbb{C}}, Q^{\mathbb{C}})},$$

które bez trudu sprawdzamy na generatorach, i tym samym zyskuje interpretację odwrotności $\varphi_{(V,Q)}$. Dla dowolnej rzeczywistej przestrzeni kwadratowej otrzymujemy zatem unitalny izomorfizm $\mathbb{C}$ -algebr

$$\eta_{(V,Q)} := \tilde{\psi}_{(V,Q)} : \text{Cliff}(V^{\mathbb{C}}, Q^{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\cong} \text{Cliff}(V, Q)^{\mathbb{C}}.$$

Łatwo sprawdzamy (na generatorach $v \otimes_{\mathbb{R}} z \in V_1 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$) jego naturalność licząc – dla dowolnej izometrii $\chi : V_1 \longrightarrow V_2$ między parą rzeczywistych przestrzeni kwadratowych (o odnośnych formach kwadratowych Q_1 i Q_2) –

$$\begin{aligned}
 \eta_{(V_2, Q_2)} \circ \text{Cliff}(\chi^{\mathbb{C}}) \circ j_{V_1^{\mathbb{C}}}^{\mathbb{C}}(v \otimes_{\mathbb{R}} z) &= \eta_{(V_2, Q_2)} \circ j_{V_2^{\mathbb{C}}}^{\mathbb{C}} \circ \chi^{\mathbb{C}}(v \otimes_{\mathbb{R}} z) \\
 &= \eta_{(V_2, Q_2)} \circ j_{V_2^{\mathbb{C}}}^{\mathbb{C}}(\chi(v) \otimes_{\mathbb{R}} z) = j_{V_2}^{\mathbb{C}} \circ \chi(v) \otimes_{\mathbb{R}} z \\
 &\equiv \text{Cliff}(\chi) \circ j_{V_1}^{\mathbb{C}}(v) \otimes_{\mathbb{R}} z \\
 &= \text{Cliff}(\chi)^{\mathbb{C}}(j_{V_1}^{\mathbb{C}}(v) \otimes_{\mathbb{R}} z) \\
 &\equiv \text{Cliff}(\chi)^{\mathbb{C}} \circ \eta_{(V_1, Q_1)} \circ j_{V_1^{\mathbb{C}}}^{\mathbb{C}}(v \otimes_{\mathbb{R}} z).
 \end{aligned}$$

□

Powyższe twierdzenie pozwala ustalić postać niskowymiarowych zespolonych algebr Clifforda i sformułować reguły (pseudo)okresowości ich struktury na podstawie wcześniejszych twierdzeń klasyfikacyjnych z dziedziny rzeczywistej. Nie daje nam ono natomiast wglądu w dodatkowe strukturalne relacje między zespolonymi algebraami Clifforda nie będące prostą pochodną relacji między ich rzeczywistymi odpowiednikami. Ta konstatacja każe nam poświęcić więcej jeszcze czasu i uwagi na bezpośrednie zbadanie interesującej nas struktury i zarezerwować dla powyższego twierdzenia rolę wyniku porządkującego i wyjaśniającego ledwie część prawidłowości, jakie wyłonią się ostatecznie z naszych rozważań. Oto więc mamy

Twierdzenie 7 (Klasyfikacyjne I $\mathbb{C}$). Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ istnieje unitalny izomorfizm $\mathbb{C}$ -algebr

$$\text{Cl}_{2m+n}^{\mathbb{C}} \cong \text{Cl}_{2m}^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \text{Cl}_n^{\mathbb{C}}.$$

Dowód: Zauważmy przede wszystkim, że wobec algebraicznej domkniętości $\mathbb{C}$ na dowolnej przestrzeni $\mathbb{C}^{\times N}$, $N \in \mathbb{N}$ istnieje wyznacznik (unormowany) o własności $\lambda_{\Delta} = 1$, przy czym jest on określony z dokładnością do znaku. Na mocy Stw. 6.2 odnośny element kanoniczny $\text{Cl}_N^{\mathbb{C}}$ spełnia tożsamość

$$e_{\Delta}^2 = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} e^{\mathbb{C}},$$

wobec czego dla $N = 2m+n$ otrzymujemy – w świetle Stw. 4 i Tw. 6.3 – pożądaną ciąg izomorfizmów

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{2m+n}^{\mathbb{C}} &\equiv \text{Cliff}(\mathbb{C}^{\times 2m+n}, \delta_E^{(2m+n)}) = \text{Cliff}(\mathbb{C}^{\times 2m} \oplus \mathbb{C}^{\times n}, \delta_E^{(2m)} \oplus \delta_E^{(n)}) \\ &\cong \text{Cliff}(\mathbb{C}^{\times 2m} \oplus \mathbb{C}^{\times n}, \delta_E^{(2m)} \oplus (-1)^{\frac{2m(2m-1)}{2}} \delta_E^{(n)}) \\ &\cong \text{Cliff}(\mathbb{C}^{\times 2m}, \delta_E^{(2m)}) \otimes_{\mathbb{C}} \text{Cliff}(\mathbb{C}^{\times n}, \delta_E^{(n)}) \equiv \text{Cl}_{2m}^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \text{Cl}_n^{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

□

Ostatnie stwierdzenie w połączeniu ze Stw. 5.2 (vi) pozwala nam sprowadzić zadanie klasyfikacji zespolonych algebr Clifforda do konstrukcji modelu algebry Clifforda (dowolnej) euklidesowej przestrzeni $\mathbb{C}$ -liniowej parzystego wymiaru. Tę oczywistą tezę precyzuje

Twierdzenie 8 (Klasyfikacyjne II $\mathbb{C}$). Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ istnieje unitalny izomorfizm $\mathbb{C}$ -algebr

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{2m}^{\mathbb{C}} &\cong \text{End}_{\mathbb{C}}\left(\bigwedge^{\bullet} \mathbb{C}^{\times m}\right) \equiv \mathbb{C}(2^m), \\ \text{Cl}_{2m+1}^{\mathbb{C}} &\cong \mathbb{C}(2^m) \oplus \mathbb{C}(2^m). \end{aligned}$$

Dowód: Drugi z postulowanych izomorfizmów jest bezpośrednim następstwem pierwszego z nich, Tw. 7 (dla $n = 1$) oraz Stw. 5.2 (vi), wystarczy zatem udowodnić istnienie pierwszego z nich. W tym celu dokonujemy (dowolnego) rozkładu $\delta_E^{(2m)}$ -ortogonalnego

$$\mathbb{C}^{\times 2m} \cong \mathbb{C}^{\times m} \bigoplus_{\delta_E^{(2m)}} \mathbb{C}^{\times m},$$

wybierając przy tym bazy ortonormalne $\{e_i^A\}_{i \in \overline{1, m}}$, $A \in \{1, 2\}$ w każdej z kopii $\mathbb{C}^{\times m}$ w tym rozkładzie. Następnie definiujemy inwolucję $\omega \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{\times 2m})$ jako (jedyne) $\mathbb{C}$ -liniowe rozszerzenie przyporządkowania elementów baz:

$$\begin{aligned} \omega &: e_i^1 \mapsto (0, 1) \triangleright e_i^2, \\ &: e_i^2 \mapsto (0, -1) \triangleright e_i^1, \quad i \in \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Bez trudu stwierdzamy, że odwzorowanie to jest skośnie symetryczne, oto bowiem – dla dowolnych $i, j \in \overline{1, m}$ –

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(\omega^*(e_i^1), e_j^1) &\equiv \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(e_i^1, \omega(e_j^1)) = \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(e_i^1, (0, 1) \triangleright e_j^2) = (0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(e_i^1, e_j^2) = 0 \\
 &= -(0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(e_i^2, e_j^1) = \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(-(0, 1) \triangleright e_i^2, e_j^1) \\
 &\equiv \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(-\omega(e_i^1), e_j^1), \\
 \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(\omega^*(e_i^2), e_j^2) &\equiv \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(e_i^2, \omega(e_j^2)) = \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(e_i^2, (0, -1) \triangleright e_j^1) = (0, -1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(e_i^2, e_j^1) \\
 &= 0 = (0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(e_i^1, e_j^2) = \Phi_{\delta_E^{(2m)}}((0, 1) \triangleright e_i^1, e_j^2) \\
 &\equiv \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(-\omega(e_i^2), e_j^2)
 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(\omega^*(e_i^1), e_j^2) &\equiv \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(e_i^1, \omega(e_j^2)) = \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(e_i^1, (0, -1) \triangleright e_j^1) = (0, -1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(e_i^1, e_j^1) \\
 &= (0, -1) \triangleright \delta_{ij} = (0, -1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(e_i^2, e_j^2) = \Phi_{\delta_E^{(2m)}}((0, -1) \triangleright e_i^2, e_j^2) \\
 &\equiv \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(-\omega(e_i^1), e_j^2), \\
 \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(\omega^*(e_i^2), e_j^1) &\equiv \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(e_i^2, \omega(e_j^1)) = \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(e_i^2, (0, 1) \triangleright e_j^2) = (0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(e_i^2, e_j^2) \\
 &= (0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} \delta_{ij} = (0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(e_i^1, e_j^1) = \Phi_{\delta_E^{(2m)}}((0, 1) \triangleright e_i^1, e_j^1) \\
 &\equiv \Phi_{\delta_E^{(2m)}}(-\omega(e_i^2), e_j^1).
 \end{aligned}$$

Wobec tej jego własności możemy przywołać tezę Stw.6.4, która w obecnej sytuacji daje nam izomorfizm

$$C_{2m}^{\mathbb{C}} \equiv \text{Cliff}(\mathbb{C}^{\times 2m}, \delta_E^{(2m)}) \cong \text{End}_{\mathbb{C}}(\bigwedge^{\bullet} \text{Ker}(\omega - \text{id}_{\mathbb{C}^{\times 2m}})).$$

Ten z racji oczywistej równości

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(\omega - \text{id}_{\mathbb{C}^{\times 2m}}) = m$$

jest izomorfizmem, o którym mowa w treści dowodzonego twierdzenia. $\square$

Dyskusję naszą rekapitułuje

Twierdzenie 9 (Klasyfikacyjne III C). Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Tablica 2 zawiera klasyfikację algebr Clifforda $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$ dla $n \in \overline{0, 8}$ i tym samym określa $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$ dla dowolnego n . Istnieją zatem – dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ – izomorfizmy $\mathbb{C}$ -algebr

$$\text{Cl}_{2m}^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}(2^m), \quad \text{Cl}_{2m+1}^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}(2^m) \oplus \mathbb{C}(2^m).$$

Dowód: Teza twierdzenia wynika bezpośrednio z Tw.8. Można ją też wyprowadzić z Tw.5, przywoławszy na pomoc Tw.6. $\square$

Prawidłowości w rozmieszczeniu algebr półprostych pośród zespolonych algebr Clifforda (i w szczególności w Tablicy 2) oraz ich strukturę tłumaczymy – tak jak w przypadku rzeczywistym – przy użyciu stosownego elementu kanonicznego.

Definicja 2. Przyjmijmy zapis Stw.4 i niechaj $\{e_i\}_{i \in \overline{1, n}}$ będzie bazą standardową $\mathbb{C}^{\times n}$, ortonormalną względem formy kwadratowej $\delta_E^{(n)}$. **Element objętości** w $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$ to wektor

$$\omega_{\mathbb{C}} := i^{n+E(\frac{n+1}{2})} \triangleright e_1 \cdot e_2 \cdots e_n,$$

w którego definicji $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest częścią całkowitą (funkcją *entier*).

Możemy już teraz wyśłowić wyjaśniające zaobserwowane regularności

Stwierdzenie 5. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\omega_{\mathbb{C}}^2 = e^{\mathbb{C}}.$$

W jej konsekwencji ilekroć $n \in 2\mathbb{N} + 1$, istnieje rozkład

$$(9) \quad \text{Cl}_n^{\mathbb{C}} = \text{Cl}_n^+ \oplus \text{Cl}_n^-$$

algebry Clifforda $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$ na sumę prostą jej podalgebr (zredukowanych)

$$\text{Cl}_n^{\pm} := P_{\omega_{\mathbb{C}}}^{\pm} \cdot \text{Cl}_n^{\mathbb{C}},$$

o elementach spełniających warunki – odpowiednio – samodwoistości (czyli samodualności)

$$\forall_{\gamma \in \text{Cl}_n^+} : \omega_{\mathbb{C}} \cdot \gamma = \gamma,$$

wzgl. skośnej samodwoistości (lub inaczej antysamodualności)

$$\forall_{\gamma \in \text{Cl}_n^-} : \omega_{\mathbb{C}} \cdot \gamma = -\gamma.$$

Zachodzą relacje:

$$J_{\mathbb{C}^{\times n}}(\text{Cl}_n^{\pm}) = \text{Cl}_n^{\mp}$$

oraz

$$\text{Cl}_n^{\mathbb{C}0} = (\text{id}_{\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}} + J_{\mathbb{C}^{\times n}})(\text{Cl}_n^{\pm}).$$

Rozkład ten pokrywa się z rozkładem półprostej $\mathbb{C}$ -algebry $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$ na składowe proste opisanym w Tw. 9, tj. dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ istnieje izomorfizm $\mathbb{C}$ -algebr prostych

$$\text{Cl}_{2m+1}^{\pm} \cong \mathbb{C}(2^m).$$

Dowód: W pełni analogiczny do dowodu Stw. 2. □

DODATEK A. UZUPEŁNIENIE (PRZYPOMNIENIE?) Z ALGEBRY LINIOWEJ

Istotnym zastosowaniem iloczynu tensorowego modułów jest kanoniczna konstrukcja modułów nad pierścieniami liczbowymi $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$, o szczególnym znaczeniu w modelowaniu zjawisk, na bazie struktur z kategorii $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$.

Definicja 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Wyposażmy grupy przemienne $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^{\times 2}$ oraz $\mathbb{H} \equiv \mathbb{R}^{\times 4}$ w naturalną strukturę przestrzeni $\mathbb{R}$ -liniowych („po współrzędnych”). **Kompleksyfikacja** rzeczywistej przestrzeni wektorowej to funktor kowariantny

$$(\cdot)^{\mathbb{C}} : \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$$

o składowej obiektowej

$$\text{Ob } \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{Ob } \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$$

(10)

$$: ((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V) \mapsto ((V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, +_{\otimes}, P_{\otimes}, \bullet \mapsto 0_{\otimes}), \ell_V^{\mathbb{C}}),$$

przyporządkowującej przestrzeni $\mathbb{R}$ -liniowej V iloczyn tensorowy tej ostatniej z przestrzenią $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^{\times 2}$ nad $\mathbb{R}$ wyposażony w działanie

$$\ell_V^{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times (V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

określone na tensorach prostych formułą

$$\ell_V^{\mathbb{C}}(\tilde{z}, v \otimes_{\mathbb{R}} z) := v \otimes_{\mathbb{R}} (\tilde{z} \cdot_{\mathbb{C}} z),$$

oraz o składowej morfizmowej

$$(11) \quad \text{Mor } \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}} : \chi \mapsto \chi \otimes \text{id}_{\mathbb{C}}.$$

Kompleksyfikacja rzeczywistej przestrzeni kwadratowej to funktor kowariantny

$$(\cdot)^{\mathbb{C}} : \square \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \square \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$$

stanowiący rozszerzenie funktora określonego na kategorii przestrzeni $\mathbb{R}$ -liniowych, tj. taki, który przestrzeni $\mathbb{R}$ -liniowej będącej nośnikiem struktury kwadratowej przyporządkowuje jej kompleksyfikację w rozumieniu Równ. (10), a izometrii między przestrzeniami – jej kompleksyfikację w rozumieniu Równ. (11), przy czym istotą rozszerzenia jest odwzorowanie formy kwadratowej $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ w formę kwadratową $Q^{\mathbb{C}} : V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ zadaną na tensorach prostych wzorem

$$\forall_{(v,z) \in V \times \mathbb{C}} : Q^{\mathbb{C}}(v \otimes_{\mathbb{R}} z) := j_{\mathbb{R}} \circ Q(v) \cdot z^2.$$

Kwaternionifikacja rzeczywistej przestrzeni wektorowej to funktor kowariantny

$$(\cdot)^{\mathbb{H}} : \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{H}^{\text{opp}}}$$

o składowej obiektowej

$$\text{Ob } \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{Ob } \mathbf{Mod}_{\mathbb{H}^{\text{opp}}}$$

(12)

$$: ((V, +_V, P_V, \bullet \longmapsto 0_V), \ell_V) \longmapsto ((V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}, +_{\otimes}, P_{\otimes}, \bullet \longmapsto 0_{\otimes}), \wp_V^{\mathbb{H}}),$$

przyporządkowującej przestrzeni $\mathbb{R}$ -liniowej V iloczyn tensorowy tej ostatniej z przestrzenią $\mathbb{H} \equiv \mathbb{R}^{*4}$ nad $\mathbb{R}$ wyposażony w (prawostronne) działanie

$$\wp_V^{\mathbb{H}} : (V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \times \mathbb{H} \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$$

określone na tensorach prostych formułą

$$\wp_V^{\mathbb{H}}(v \otimes_{\mathbb{R}} q, \tilde{q}) := v \otimes_{\mathbb{R}} (q \cdot_{\mathbb{H}} \tilde{q}),$$

oraz o składowej morfizmowej

$$(13) \quad \text{Mor } \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{Mod}_{\mathbb{H}^{\text{opp}}} : \chi \longmapsto \chi \otimes \text{id}_{\mathbb{H}}.$$

Jako że kwaterniony są pierścieniem z dzieleniem, (prawe¹) moduły nad tym pierścieniem (nieodwrotnie wolne) określa się mianem **kwaternionowych przestrzeni wektorowych**.

Na marginesie powyższych rozważań warto wspomnieć o istnieniu wygodnej alternatywy dla standardowej definicji zespolonej oraz kwaternionowej przestrzeni wektorowej², którą opisuje

Stwierdzenie 6. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj $(V, +_V, P_V, \bullet \longmapsto 0_V)$ będzie grupą przemenną. Poniższe dwa zdania są wzajem równoważne:

- (C1) na V określone jest działanie $\mathbb{C}$, które czyni z V przestrzeń wektorową nad $\mathbb{C}$;
- (C2) na V określone jest działanie $\mathbb{R}$, które czyni z V przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$, przy czym istnieje endomorfizm $I \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ o własności

$$(14) \quad I \circ I = -\text{id}_V,$$

zwany **strukturą zespoloną** na V .

To samo dotyczy poniższych dwóch zdań:

- (H1) na V określone jest działanie $\mathbb{H}$, które czyni z V kwaternionową przestrzeń wektorową;
- (H2) na V określone jest działanie $\mathbb{R}$, które czyni z V przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$, przy czym istnieje trójka endomorfizmów $I, J, K \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ o własnościach

$$(15) \quad I \circ I = J \circ J = K \circ K = -\text{id}_V, \quad I \circ J = K,$$

zwanych **strukturą kwaternionową** na V , które przesądzają o tym, że endomorfizmy I, J, K spełniają algebrę (4.3).

¹Wybór ten jest kwestią konwencji – w tej przyjętej przez nas odwzorowaniach $\mathbb{H}$ -liniowymi przestrzeni modułowych $\mathbb{H}^{*n}$, $n \in \mathbb{N}$ stają się macierze o współczynnikach kwaternionowych obliczające się na wektorach w standardowy sposób, tj. z lewej strony.

²Ta alternatywa definicji poddaje się wygodnej geometryzacji, prowadzącej do konstrukcji zespolonych i kwaternionowych różniczkowych.

Dowód: Przeprowadzimy dowód równoważności orzeczeń dotyczących struktury $\mathbb{C}$ -liniowej. Dowód równoważności orzeczeń dotyczących struktury $\mathbb{H}$ -liniowej jest w pełni analogiczny i stanowi elementarne ćwiczenie, które pozostawiamy do wykonania Czytelnikowi.

(C1) $\Rightarrow$ (C2) Działanie $\ell : \mathbb{C} \times V \longrightarrow V$ indukuje działanie $\ell^{\mathbb{R}} := \ell_{\mathbb{R}(\cdot)} : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$, a nadto wyróżnia endomorfizm $I := \ell_{(0,1)} \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ o pożądanej własności. Istotnie,

$$\forall_{(r,v) \in \mathbb{R} \times V} : I \circ \ell_r^{\mathbb{R}}(v) \equiv \ell_{(0,1)} \circ \ell_{(r,0)}(v) = \ell_{(0,r)}(v) = \ell_{(r,0)} \circ \ell_{(0,1)}(v) \equiv \ell_r^{\mathbb{R}} \circ I(v),$$

$$I \circ I \equiv \ell_{(0,1)} \circ \ell_{(0,1)} = \ell_{(0,1)^2} = \ell_{-(1,0)} = -\text{id}_V.$$

(C1) $\Leftarrow$ (C2) Działanie $\ell : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ wraz z wyróżnionym endomorfizmem $I \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ o własności (14) pozwalają zdefiniować odwzorowanie

$$\ell^{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times V \longrightarrow V : ((x, y), v) \longmapsto \ell_x(v) +_V I \circ \ell_y(v),$$

którego rozdzielność względem $+_V$ i $+_{\mathbb{C}}$ jest oczywista i które ponadto spełnia – dla dowolnych $((x_1, y_1), (x_2, y_2), v) \in \mathbb{C}^{\times 2} \times V$ – warunek

$$\begin{aligned} \ell_{(x_1, y_1) \cdot_{\mathbb{C}} (x_2, y_2)}^{\mathbb{C}}(v) &= \ell_{(x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)}^{\mathbb{C}}(v) = \ell_{x_1 x_2 - y_1 y_2}(v) +_V I \circ \ell_{x_1 y_2 + x_2 y_1}(v) \\ &= \ell_{x_1 x_2}(v) +_V P_V \circ \ell_{y_1 y_2}(v) +_V I \circ \ell_{x_1 y_2}(v) +_V I \circ \ell_{x_2 y_1}(v) \\ &= \ell_{x_1} \circ \ell_{x_2}(v) +_V (I \circ \ell_{y_1}) \circ (I \circ \ell_{y_2})(v) +_V \ell_{x_1} \circ (I \circ \ell_{y_2})(v) \\ &\quad +_V (I \circ \ell_{y_1}) \circ \ell_{x_2}(v) \equiv \ell_{(x_1, y_1)}^{\mathbb{C}} \circ \ell_{(x_2, y_2)}^{\mathbb{C}}(v). \end{aligned}$$

□

Powyższa alternatywa okazuje się być przydatną m.in. w dyskusji uprzywilejowanej (w istocie wyjątkowej) pozycji, jaką pośród hilbertowskich realizacji algebr zdań (logicznych) reprezentujących – w duchu teorii Pirona – wyniki doświadczeń elementarnych zajmują zespolone przestrzenie wektorowe. Znajdziemy dla niej także nieco bardziej elementarne zastosowanie w kontekście teorii reprezentacji algebr Clifforda.

W konkretnych sytuacjach (w szczególności w kontekście teorii reprezentacji algebr właściwie) wygodną bywa logika odmienna, w której punktem wyjścia do dalszych rozważań algebraicznych jest istnienie struktury zespolonej, a przedmiotem poszukiwań staje się struktura rzeczywista wzgl. kwaternionowa.

Definicja 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $((V, +_V, P_V, \bullet \longmapsto 0_V), \ell_V)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{C}$. Odwzorowanie $\varepsilon : V \curvearrowright$ określamy mianem **struktury rzeczywistej**, jeśli spełnione są następujące warunki:

(SR1) ε jest **odwzorowaniem anty- $\mathbb{C}$ -liniowym**, tj.

$$\forall_{(\lambda, v) \in \mathbb{C} \times V} : \varepsilon(\lambda \triangleright v) = \bar{\lambda} \triangleright \varepsilon(v);$$

(SR2) $\varepsilon^2 = \text{id}_V$.

Podobnie, odwzorowanie $J : V \curvearrowright$ określamy mianem **struktury kwaternionowej**, jeśli spełnione są następujące warunki:

(SK1) J jest odwzorowaniem anty- $\mathbb{C}$ -liniowym;

(SK2) $J^2 = -\text{id}_V$.

Formalne podobieństwo obu par warunków maskuje istotną różnicę ich znaczeń, o ile bowiem pierwszy układ w istocie określa operację sprzężenia zespolonego i pozwala wyodrębnić podprzestrzeń, której kompleksyfikacja odtwarza V , o tyle drugi układ pozwala określić działanie pierścienia $\mathbb{H}$. Obserwację tę precyzuje

Stwierdzenie 7. Przyjmijmy zapis Def. 3 oraz 4 i niechaj $((V, +_V, P_V, \bullet \longmapsto 0_V), \ell_V)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{C}$. Poniższe dwa zdania są wzajem równoważne:

- (R1) na V jest określona struktura rzeczywista ε ;
 (R2) w V istnieje podprzestrzeń $\mathbb{R}$ -liniowa V_+ (będąca podzbiorem względem struktury $\mathbb{C}$ -liniowej) o własnościach

$$V = V_+ +_V (0, 1) \triangleright V_+ \quad \wedge \quad V_+ \cap (0, 1) \triangleright V_+ = \{0_V\},$$

z których wynika istnienie kanonicznego izomorfizmu przestrzeni $\mathbb{C}$ -liniowych

$$V_+^{\mathbb{C}} \cong V.$$

To samo dotyczy poniższych dwóch zdań:

- (K1) na V jest określona struktura kwaternionowa J ;
 (K2) na V określone jest działanie $\mathbb{H}$, które czyni z V kwaternionową przestrzeń wektorową.

Dowód: (częściowy)

- (R1) $\Rightarrow$ (R2) Niechaj ε będzie strukturą rzeczywistą na V , a wtedy $\text{Sp}(\varepsilon) \subset \{-1, 1\}$. Zdefiniujmy odwzorowania

$$P_{\pm} := \frac{1}{2} \triangleright (\text{id}_V \pm \varepsilon)$$

i oznaczmy symbolem $V_{\pm}$ zbiór wszystkich wektorów własnych ε odpowiadających wartości własnej ± 1 . Oba zbiory są niepuste, oto bowiem dla dowolnego wektora $v \in V$ zachodzi $v_{\pm} := P_{\pm}(v) \in V_{\pm}$. Ponadto każdy wektor $v \in V$ możemy zapisać w postaci $v \equiv P_+(v) +_V P_-(v)$, zatem $V = V_+ +_V V_-$, przy czym – rzecz jasna – $v = \varepsilon(v) = -v$ jest równoznaczne z $v = 0_V$, więc $V_+ \cap V_- = \{0_V\}$. Anty- $\mathbb{C}$ -liniowość ε prowadzi do tożsamości $\varepsilon((0, 1) \triangleright v) = \overline{(0, 1)} \triangleright \varepsilon(v) = -(0, 1) \triangleright \varepsilon(v)$, która implikuje relacje $(0, 1) \triangleright V_+ \subset V_-$ oraz $(0, 1) \triangleright V_- \subset V_+$, z tych zaś wynika tożsamość zbiorów $V_- = (0, 1) \triangleright V_+$. Mamy też oczywistą inkluzję $\forall_{r \in \mathbb{R}} : r \triangleright V_{\pm} \subset V_{\pm}$. Możemy teraz wypisać izomorfizm

$$\iota : V_+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} V$$

w jawnej i jawnie $\mathbb{C}$ -liniowej postaci (na tensorach prostych):

$$\iota(v_+ \otimes_{\mathbb{R}} (x, y)) := (x, y) \triangleright v_+.$$

Jego odwrotnością jest odwzorowanie

$$\iota^{-1} : V \xrightarrow{\cong} V_+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} : v \mapsto P_+(v) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) +_V (0, -1) \triangleright P_-(v) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1).$$

Istotnie,

$$\begin{aligned} \iota^{-1} \circ \iota(v_+ \otimes_{\mathbb{R}} (x, y)) &= \frac{1}{2} \triangleright ((x, y) \triangleright v_+ +_V (x, -y) \triangleright \varepsilon(v_+)) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\ &\quad +_V \frac{1}{2} (0, -1) \triangleright ((x, y) \triangleright v_+ +_V (-x, y) \triangleright \varepsilon(v_+)) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \\ &= \frac{1}{2} \triangleright ((x, y) \triangleright v_+ +_V (x, -y) \triangleright v_+) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\ &\quad +_V \frac{1}{2} (0, -1) \triangleright ((x, y) \triangleright v_+ +_V (-x, y) \triangleright v_+) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \\ &= (x, 0) \triangleright v_+ \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) +_V (y, 0) \triangleright v_+ \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) = v_+ \otimes_{\mathbb{R}} (x, y) \end{aligned}$$

oraz

$$\iota \circ \iota^{-1}(v) = (1, 0) \triangleright P_+(v) +_V (0, 1) \triangleright ((0, -1) \triangleright P_-(v)) = (P_+ + P_-)(v) = v.$$

Bez trudu przekonujemy się także o $\mathbb{C}$ -liniowości ι^{-1} ,

$$\begin{aligned} \iota^{-1}((x, y) \triangleright v) &= \frac{1}{2} \triangleright ((x, y) \triangleright v +_V (x, -y) \triangleright \varepsilon(v)) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\ &\quad +_V \frac{1}{2} (0, -1) \triangleright ((x, y) \triangleright v +_V (-x, y) \triangleright \varepsilon(v)) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \\ &= (x, 0) \triangleright P_+(v) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) +_V (-y, 0) \cdot_{\mathbb{C}} (0, -1) \triangleright P_-(v) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\ &\quad +_V (x, 0) \cdot_{\mathbb{C}} (0, -1) \triangleright P_-(v) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) +_V (y, 0) \triangleright P_+(v) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= P_+(v) \otimes_{\mathbb{R}} (x, y) +_V (0, -1) \triangleright P_-(v) \otimes_{\mathbb{R}} (-y, x) \\
 &= P_+(v) \otimes_{\mathbb{R}} (x, y) \cdot_{\mathbb{C}} (1, 0) +_V (0, -1) \triangleright P_-(v) \otimes_{\mathbb{R}} (x, y) \cdot_{\mathbb{C}} (0, 1) \\
 &\equiv (x, y) \triangleright \iota^{-1}(v).
 \end{aligned}$$

□

DODATEK B. UZUPEŁNIENIE Z TEORII PRZESTRZENI KWADRATOWYCH – CD.

Stwierdzenie 8. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Na dowolnej rzeczywistej przestrzeni kwadratowej (wymiaru $\dim_{\mathbb{R}} V = p + q$) wyposażonej w formę kwadratową Q o sygnaturze (p, q) istnieje **wyznacznik unormowany** $\Delta \in \wedge^{\bullet} V^*$, tj. taki, który spełnia warunek

$$\lambda_{\Delta} = (-1)^q.$$

Dowód: Wybierzmy w V bazę (pseudo)ortogonalną $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ i rozważmy stowarzyszony z nią wyznacznik $\Delta_{\mathcal{E}}$. Obliczamy bezpośrednio

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} &\equiv \lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} \cdot \Delta_{\mathcal{E}}(\mathcal{E})^2 = \det_{(N)} \left(\Phi_Q(e_i, e_j) \right)_{i, j \in \overline{1, N}} \\
 &\equiv \det_{(N)} \left(\underbrace{\text{diag}(1, 1, \dots, 1)}_{p \text{ razy}}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{q \text{ razy}} \right) = (-1)^q.
 \end{aligned}$$

□

DODATEK C. UZUPEŁNIENIE Z TEORII ALGEBR

Zacznijmy od uogólnienia konstrukcji z Def. 3 do kategorii algebr.

Definicja 5. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niech $\mathfrak{A} \in \text{Ob Alg}_{\mathbb{R}}$. **Kompleksyfikacja** algebry rzeczywistej to funktor kowariantny

$$(\cdot)^{\mathbb{C}} : \text{Alg}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{Alg}_{\mathbb{C}}$$

stanowiący rozszerzenie (w duchu Def. 3) funktora określonego na kategorii przestrzeni $\mathbb{R}$ -liniowych, przy czym istotą rozszerzenia jest odwzorowanie mnożenia $m_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ w mnożenie $m_{\otimes} : (\mathfrak{A} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathfrak{A} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{A} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, o którym mowa w Stw. 4.8.

W następnej kolejności wyprowadzimy kilka przydatnych konkretnych izomorfizmów algebr nad ciałem liczb rzeczywistych.

Stwierdzenie 9. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Istnieją unitalne izomorfizmy $\mathbb{R}$ -algebr:

- (i) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}} : \mathbb{R}(m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}(n) \cong \mathbb{K}(m \cdot n);$
- (ii) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C};$
- (iii) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{C}(2);$
- (iv) $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{R}(4).$

Dowód:

Ad (i) W szczególnym przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ izomorfizm przybiera postać

$$E_{i,j}^{(m)} \otimes_{\mathbb{R}} E_{k,l}^{(n)} \longmapsto E_{n(i-1)+k, n(j-1)+l}^{(m \cdot n)}, \quad i, j \in \overline{1, m}, \quad k, l \in \overline{1, n}$$

na bazie standardowej z Przykł. 4.1 (1). Z kolei dla $n = 1$ jest on postaci

$$E_{i,j}^{(m)} \otimes_{\mathbb{R}} k \longmapsto k \triangleright \widetilde{f}_{\mathbb{R}}(E_{i,j}^{(m)}), \quad i, j \in \overline{1, m}, \quad k \in \mathbb{K},$$

także na naturalnej bazie i w konwencji, w której $\tilde{J}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}(m) \rightarrow \mathbb{K}(m)$ jest kanonicznym podniesieniem monomorfizmu $J_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : r \mapsto (r, 0)$ (wzgl. $J_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H} : r \mapsto (r, 0, 0, 0)$) do przestrzeni $\mathbb{R}(m) \equiv \mathbb{R}^{m^2}$ (oraz $\mathbb{C}(m) \equiv \mathbb{C}^{m^2}$ wzgl. $\mathbb{H}(m) \equiv \mathbb{H}^{m^2}$). Uzyskane tym sposobem izomorfizmy

$$\mathbb{R}(m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(n) \cong \mathbb{R}(m \cdot n), \quad \mathbb{R}(m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K} \cong \mathbb{K}(m)$$

pozwalają wyprowadzić izomorfizm w postaci najogólniejszej (w odwołaniu do Tw. 3.4)

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}(n) &\cong \mathbb{R}(m) \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}) \\ &\cong (\mathbb{R}(m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(n)) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K} \\ &\cong \mathbb{R}(m \cdot n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K} \cong \mathbb{K}(m \cdot n). \end{aligned}$$

Ad (ii) Izomorfizm stanowi (jedyne) $\mathbb{R}$ -liniowe rozszerzenie przyporządkowania baz

$$1 \otimes_{\mathbb{R}} 1 \mapsto (1, 1), \quad 1 \otimes_{\mathbb{R}} i \mapsto (-i, i), \quad i \otimes_{\mathbb{R}} 1 \mapsto (i, i), \quad i \otimes_{\mathbb{R}} i \mapsto (1, -1).$$

Ad (iii) Na gruncie zwięzłej dyskusji konstrukcji Cayleya–Dicksona przedstawionej w Przykł. 4.1 (4) możemy dokonać utożsamienia przestrzeni $\mathbb{C}$ -liniowych

$$\mathbb{H} \equiv \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

W tym ujęciu algebra kwaternionów zyskuje naturalną strukturę $\mathbb{C}$ -modułu z działaniem

$$\mathbb{C} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$$

$$\begin{aligned} : (x + yi, (a + bi) \triangleright 1 + (c + di) \triangleright j) &\longmapsto ((x + yi) \cdot_{\mathbb{C}} (a + bi)) \triangleright 1 \\ &\quad + ((x + yi) \cdot_{\mathbb{C}} (c + di)) \triangleright j. \end{aligned}$$

Wobec powyższego możemy również utożsamić odnośne ($\mathbb{C}$ -, więc też $\mathbb{R}$ -)algebry endomorfizmów

$$\mu_{\mathbb{C}} : \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}) \xrightarrow{\cong} \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \equiv \mathbb{C}(2).$$

Zdefiniujmy odwzorowanie (por. Równ. (4.4))

$$\Phi : \mathbb{C} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}(2) : (z, q) \mapsto \mu_{\mathbb{C}}(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q^*) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z), \cdot)) \equiv \Phi_{z,q},$$

gdzie

$$m_{\mathbb{H}}(\cdot, q^*) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z), \cdot) : \mathbb{H} \curvearrowright : q_0 \mapsto j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z) \cdot_{\mathbb{H}} q_0 \cdot_{\mathbb{H}} q^*.$$

Będąc jawnie dwu- $\mathbb{R}$ -liniowym, indukuje ono (jedyne) odwzorowanie

$$\tilde{\Phi} : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}(2)$$

o własności

$$\forall_{(z,q) \in \mathbb{C} \times \mathbb{H}} : \tilde{\Phi}(z \otimes_{\mathbb{R}} q) = \Phi_{z,q},$$

przy czym dla dowolnej pary $(z_1, q_1), (z_2, q_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{H}$ zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned} &\tilde{\Phi}(z_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_1) \circ \tilde{\Phi}(z_2 \otimes_{\mathbb{R}} q_2) \\ &\equiv \mu_{\mathbb{C}}(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_1^*) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_1), \cdot)) \circ \mu_{\mathbb{C}}(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_2^*) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_2), \cdot)) \\ &= \mu_{\mathbb{C}}(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_1^*) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_1), \cdot) \circ m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_2^*) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_2), \cdot)) \\ &= \mu_{\mathbb{C}}(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_1^*) \circ m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_2^*) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_1), \cdot) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_2), \cdot)) \\ &= \mu_{\mathbb{C}}(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_2^* \cdot_{\mathbb{H}} q_1^*) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_1) \cdot_{\mathbb{H}} j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_2), \cdot)) \\ &= \mu_{\mathbb{C}}(m_{\mathbb{H}}(\cdot, (q_1 \cdot_{\mathbb{H}} q_2)^*) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_1 \cdot_{\mathbb{C}} z_2), \cdot)) \end{aligned}$$

$$\equiv \tilde{\Phi}((z_1 \cdot_{\mathbb{C}} z_2) \otimes_{\mathbb{R}} (q_1 \cdot_{\mathbb{H}} q_2)) = \tilde{\Phi} \circ m_{\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}}(z_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_1, z_2 \otimes_{\mathbb{R}} q_2),$$

mamy przeto do czynienia z homomorfizmem $\mathbb{R}$ -algebr. W bezpośrednim rachunku sprawdzamy, że przeprowadza on naturalną bazę swej dziedziny w bazę przeciwdziedziny,

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}((1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0, 0, 0)) &= \begin{pmatrix} (1, 0) & (0, 0) \\ (0, 0) & (1, 0) \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Phi}((1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1, 0, 0)) &= \begin{pmatrix} (0, -1) & (0, 0) \\ (0, 0) & (0, 1) \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Phi}((1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 0, 1, 0)) &= \begin{pmatrix} (0, 0) & (1, 0) \\ (-1, 0) & (0, 0) \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Phi}((1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 0, 0, 1)) &= \begin{pmatrix} (0, 0) & (0, -1) \\ (0, -1) & (0, 0) \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Phi}((0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0, 0, 0)) &= \begin{pmatrix} (0, 1) & (0, 0) \\ (0, 0) & (0, 1) \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Phi}((0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1, 0, 0)) &= \begin{pmatrix} (1, 0) & (0, 0) \\ (0, 0) & (-1, 0) \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Phi}((0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 0, 1, 0)) &= \begin{pmatrix} (0, 0) & (0, 1) \\ (0, -1) & (0, 0) \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Phi}((0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 0, 0, 1)) &= \begin{pmatrix} (0, 0) & (1, 0) \\ (1, 0) & (0, 0) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

co oznacza, że jest (pożądanym) izomorfizmem.

Ad (iv) Tym razem potraktujemy kwaterniony jako elementy $\mathbb{R}$ -algebry

$$\iota_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3} : q \equiv a + bi + cj + dk \mapsto (a, (b, c, d)) \equiv (\underline{q}, \vec{q}),$$

w zgodzie z Równ. (4.5), wykorzystując monomorfizm $\mathbb{R}$ -algebr

$$j_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3} : r \mapsto (r, (0, 0, 0))$$

do wyindukowania na $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}$ działania

$$\begin{aligned} \ell := m_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}} \circ (j_1 \times \text{id}_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}}) &: \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}) \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3} \\ &: (r, (s, v)) \mapsto (r \cdot s, r \triangleright v). \end{aligned}$$

Istnienie izomorfizmu $\mathbb{R}$ -algebr (będącego w szczególności izomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}$ -liniowych) pozwala utożsamić odnośne ($\mathbb{R}$ -)algebry endomorfizmów

$$\mu_{\mathbb{R}} : \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \xrightarrow{\cong} \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}) \equiv \mathbb{R}(4).$$

Definiujemy odwzorowanie

$$\Psi : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}(4) : (q_1, q_2) \mapsto \mu_{\mathbb{R}}(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_2^*) \circ m_{\mathbb{H}}(q_1, \cdot)) \equiv \Psi_{q_1, q_2},$$

gdzie

$$m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_2^*) \circ m_{\mathbb{H}}(q_1, \cdot) : \mathbb{H} \curvearrowright : \tilde{q} \mapsto q_1 \cdot_{\mathbb{H}} \tilde{q} \cdot_{\mathbb{H}} q_2^*,$$

które z racji swej dwu- $\mathbb{R}$ -liniowości indukuje (jedyne) odwzorowanie

$$\tilde{\Psi} : \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}(4)$$

o własności

$$\forall_{(q_1, q_2) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}} : \tilde{\Psi}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2) = \Psi_{q_1, q_2},$$

przy czym z tych samych powodów co w przypadku odwzorowania $\tilde{\Psi}$ z dowodu punktu (iii) odwzorowanie indukowane $\tilde{\Psi}$ jawi się homomorfizmem $\mathbb{R}$ -algebr. Dowód jego bijectywności można z powodzeniem przeprowadzić według schematu z punktu poprzedniego, my jednak – gwoili rozbudowania arsenału formalnego – pójdziemy drogą odmienną. Jej początek wyznacza wskazanie na obu rozważanych przestrzeniach $\mathbb{R}$ -liniowych, $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ i $\mathbb{R}(4)$, niezwyrodniałych form kwadratowych:

$$Q_{\otimes} := m_{\mathbb{R}} \circ (\delta_{\mathbb{H}} \otimes \delta_{\mathbb{H}}) : \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R},$$

gdzie

$$\delta_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R} : q \longmapsto q \cdot_{\mathbb{H}} q^* \equiv \|q\|_{\mathbb{H}}^2,$$

więc też

$$Q_{\otimes}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2) = \|q_1\|_{\mathbb{H}}^2 \cdot \|q_2\|_{\mathbb{H}}^2 = \|q_1 \cdot_{\mathbb{H}} q_2\|_{\mathbb{H}}^2,$$

oraz

$$Q_{\text{Mat}} : \mathbb{R}(4) \longrightarrow \mathbb{R} : M \longmapsto \frac{1}{4} \text{tr}_{(4)}(M^T \odot M),$$

gdzie $(\cdot)^T$ jest transpozycją macierzy, $\text{tr}_{(4)}$ zaś – śladem macierzowym na $\mathbb{R}(4)$. W następnym kroku zbadamy izometryczne własności homomorfizmu $\tilde{\Psi}$. W tym celu policzymy bezpośrednio transpozycję Ψ_{q_1, q_2}^T , czyli – innymi słowy – sprzężenie endomorfizmu Ψ_{q_1, q_2} względem standardowego euklidesowego iloczynu skalarnego

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_{\text{E}} : (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3})^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R} : ((r, v), (s, w)) \longmapsto r \cdot s + \Phi_{\delta_{\text{E}}^{(3)}}(v, w),$$

por.: Równ. (4.6), przy czym wygodnie będzie przepisać macierz poddawaną transpozycji w postaci

$$\Psi_{q_1, q_2} \equiv r_{(\underline{q}_2, -\bar{q}_2)} \odot l_{(\underline{q}_1, \bar{q}_1)},$$

gdzie użyliśmy skrótowego zapisu

$$l_{(\underline{q}_1, \bar{q}_1)} := m_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}}((\underline{q}_1, \bar{q}_1), \cdot), \quad r_{(\underline{q}_2, -\bar{q}_2)} := m_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}}(\cdot, (\underline{q}_2, -\bar{q}_2)).$$

Teraz już bez trudu wyznaczamy – dla dowolnych $(r, v), (s, w) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}$, a korzystając z interpretacji geometrycznej wyrażenia $\Phi_{\delta_{\text{E}}^{(3)}}(v, \bar{q}_1 \times w)$ jako (zorientowanej) objętości równoległościanu rozpiętego na trójce wektorów $(v, \bar{q}_1, w)$, tożsamego z równoległościanem rozpiętym na trójce $(w, v, \bar{q}_1)$ –

$$\begin{aligned} \left\langle (r, v) | l_{(\underline{q}_1, \bar{q}_1)}(s, w) \right\rangle_{\text{E}} &= \left\langle (r, v) | (\underline{q}_1 \cdot s - \Phi_{\delta_{\text{E}}^{(3)}}(\bar{q}_1, w), \bar{q}_1 \times w + \underline{q}_1 \triangleright w + s \triangleright \bar{q}_1) \right\rangle_{\text{E}} \\ &= r \cdot (\underline{q}_1 \cdot s) - r \cdot \Phi_{\delta_{\text{E}}^{(3)}}(\bar{q}_1, w) + \Phi_{\delta_{\text{E}}^{(3)}}(v, \bar{q}_1 \times w) + \Phi_{\delta_{\text{E}}^{(3)}}(v, \underline{q}_1 \triangleright w) + \Phi_{\delta_{\text{E}}^{(3)}}(v, s \triangleright \bar{q}_1) \\ &= (\underline{q}_1 \cdot r) \cdot s - \Phi_{\delta_{\text{E}}^{(3)}}(-\bar{q}_1, v) \cdot s + \Phi_{\delta_{\text{E}}^{(3)}}((-\bar{q}_1) \times v, w) + \Phi_{\delta_{\text{E}}^{(3)}}(\underline{q}_1 \triangleright v, w) + \Phi_{\delta_{\text{E}}^{(3)}}(r \triangleright (-\bar{q}_1), w) \\ &= \left\langle (\underline{q}_1 \cdot r - \Phi_{\delta_{\text{E}}^{(3)}}(-\bar{q}_1, v), (-\bar{q}_1) \times v + \underline{q}_1 \triangleright v + r \triangleright (-\bar{q}_1)) | (s, w) \right\rangle_{\text{E}} \\ &\equiv \left\langle l_{(\underline{q}_1, -\bar{q}_1)}(r, v) | (s, w) \right\rangle_{\text{E}}, \end{aligned}$$

czyli też – wobec niezwyrodnienia rozpatrywanego iloczynu skalarnego na $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}$ –

$$l_{(\underline{q}_1, \bar{q}_1)}^T = l_{(\underline{q}_1, -\bar{q}_1)},$$

oraz, analogicznie,

$$\begin{aligned} \left\langle (r, v) | r_{(\underline{q}_2, -\bar{q}_2)}(s, w) \right\rangle_{\text{E}} &= \left\langle (r, v) | (s \cdot \underline{q}_2 - \Phi_{\delta_{\text{E}}^{(3)}}(w, -\bar{q}_2), w \times (-\bar{q}_2) + s \triangleright (-\bar{q}_2) + \underline{q}_2 \triangleright w) \right\rangle_{\text{E}} \\ &= r \cdot (s \cdot \underline{q}_2) - r \cdot \Phi_{\delta_{\text{E}}^{(3)}}(w, -\bar{q}_2) + \Phi_{\delta_{\text{E}}^{(3)}}(v, w \times (-\bar{q}_2)) + \Phi_{\delta_{\text{E}}^{(3)}}(v, s \triangleright (-\bar{q}_2)) + \Phi_{\delta_{\text{E}}^{(3)}}(v, \underline{q}_2 \triangleright w) \\ &= (r \cdot \underline{q}_2) \cdot s - \Phi_{\delta_{\text{E}}^{(3)}}(v, \bar{q}_2) \cdot s + \Phi_{\delta_{\text{E}}^{(3)}}(v \times \bar{q}_2, w) + \Phi_{\delta_{\text{E}}^{(3)}}(r \triangleright \bar{q}_2, w) + \Phi_{\delta_{\text{E}}^{(3)}}(\underline{q}_2 \triangleright v, w) \\ &= \left\langle (r \cdot \underline{q}_2 - \Phi_{\delta_{\text{E}}^{(3)}}(v, \bar{q}_2), v \times \bar{q}_2 + r \triangleright \bar{q}_2 + \underline{q}_2 \triangleright v) | (s, w) \right\rangle_{\text{E}} \\ &\equiv \left\langle r_{(\underline{q}_2, \bar{q}_2)}(r, v) | (s, w) \right\rangle_{\text{E}}, \end{aligned}$$

przeto

$$r_{(\underline{q}_2, -\bar{q}_2)}^T = r_{(\underline{q}_2, \bar{q}_2)},$$

Koniec końców, biorąc pod uwagę powyższe wyniki oraz przemienność obu czynników macierzy Ψ_{q_1, q_2} , wyznaczamy

$$\Psi_{q_1, q_2}^T \equiv l_{(\underline{q}_1, \vec{q}_1)}^T \odot r_{(\underline{q}_2, -\vec{q}_2)}^T = l_{(\underline{q}_1, -\vec{q}_1)} \odot r_{(\underline{q}_2, \vec{q}_2)} = r_{(\underline{q}_2, \vec{q}_2)} \odot l_{(\underline{q}_1, -\vec{q}_1)} \equiv \Psi_{q_1^*, q_2^*}$$

i na tej podstawie także

$$\begin{aligned} \Phi_{Q_{\text{Mat}}}(\tilde{\Psi}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2), \tilde{\Psi}(q_3 \otimes_{\mathbb{R}} q_4)) &= \frac{1}{4} \text{tr}_{(4)}(\Psi_{q_1, q_2}^T \odot \Psi_{q_3, q_4}) \\ &= \frac{1}{4} \text{tr}_{(4)}(\tilde{\Psi}(q_1^* \otimes_{\mathbb{R}} q_2^*) \odot \tilde{\Psi}(q_3 \otimes_{\mathbb{R}} q_4)) \\ &= \frac{1}{4} \text{tr}_{(4)}(\tilde{\Psi} \circ m_{\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}}(q_1^* \otimes_{\mathbb{R}} q_2^*, q_3 \otimes_{\mathbb{R}} q_4)) \\ &= \frac{1}{4} \text{tr}_{(4)}(\tilde{\Psi}(q_1^* \cdot_{\mathbb{H}} q_3 \otimes_{\mathbb{R}} q_2^* \cdot_{\mathbb{H}} q_4)). \end{aligned}$$

Rachunek pomocniczy, poprowadzony w bazie standardowej $\{E_0 := (1, 0), E_k := (0, e_k)\}_{k \in \{1, 2, 3\}}$ przestrzeni $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}$ i dwoistej do niej $\{E_l^*\}_{l \in \{0, 1, 2, 3\}}$, w bezpośrednim odwołaniu do Def. 5.5 oraz Uwagi 5.4 i z uwzględnieniem relacji $v \times e_k \in \langle e_l \rangle_{\mathbb{R}}^{l \in \{1, 2, 3\} \setminus \{k\}}$,

$$\begin{aligned} \text{tr}_{(4)}(\tilde{\Psi}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2)) &= \text{tr}_{(4)}(r_{(\underline{q}_2, -\vec{q}_2)} \odot l_{(\underline{q}_1, \vec{q}_1)}) \equiv \sum_{l=0}^3 E_l^*((\underline{q}_1, \vec{q}_1) \cdot E_l \cdot (\underline{q}_2, -\vec{q}_2)) \\ &= E_1^*((\underline{q}_1, \vec{q}_1) \cdot (\underline{q}_2, -\vec{q}_2)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^3 (0, e_k^*)((\underline{q}_1, \vec{q}_1) \cdot (\Phi_{\delta_E^{(3)}}(e_k, \vec{q}_2), -e_k \times \vec{q}_2 + \underline{q}_2 \triangleright e_k)) \\ &= \underline{q}_1 \cdot \underline{q}_2 + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(\vec{q}_1, \vec{q}_2) \\ &\quad + \sum_{k=1}^3 e_k^*(-\vec{q}_1 \times (e_k \times \vec{q}_2) + \underline{q}_2 \triangleright (\vec{q}_1 \times e_k) - \underline{q}_1 \triangleright (e_k \times \vec{q}_2) \\ &\quad \quad \quad + \underline{q}_1 \cdot \underline{q}_2 \triangleright e_k + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(e_k, \vec{q}_2) \triangleright \vec{q}_1) \\ &= \underline{q}_1 \cdot \underline{q}_2 \cdot (1 + \sum_{k=1}^3 e_k^*(e_k)) + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(\vec{q}_1, \vec{q}_2) \\ &\quad + \sum_{k=1}^3 \Phi_{\delta_E^{(3)}}(e_k, \vec{q}_2) \cdot \Phi_{\delta_E^{(3)}}(e_k, \vec{q}_1) - \sum_{k=1}^3 e_k^*(\vec{q}_1 \times (e_k \times \vec{q}_2)) \\ &= 4\underline{q}_1 \cdot \underline{q}_2 + 2\Phi_{\delta_E^{(3)}}(\vec{q}_1, \vec{q}_2) \\ &\quad - \sum_{k=1}^3 e_k^*(\Phi_{\delta_E^{(3)}}(\vec{q}_1, \vec{q}_2) \triangleright e_k - \Phi_{\delta_E^{(3)}}(\vec{q}_1, e_k) \triangleright \vec{q}_2) \\ &= 4\underline{q}_1 \cdot \underline{q}_2 \equiv 4\Phi_{\delta_{\mathbb{H}}}(q_1, 1) \cdot \Phi_{\delta_{\mathbb{H}}}(q_2, 1), \end{aligned}$$

pozwała ostatecznie zapisać

$$\begin{aligned} \Phi_{Q_{\text{Mat}}}(\tilde{\Psi}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2), \tilde{\Psi}(q_3 \otimes_{\mathbb{R}} q_4)) &= \Phi_{\delta_{\mathbb{H}}}(q_1^* \cdot_{\mathbb{H}} q_3, 1) \cdot \Phi_{\delta_{\mathbb{H}}}(q_2^* \cdot_{\mathbb{H}} q_4, 1) \\ &= \frac{1}{2}((q_1^* \cdot_{\mathbb{H}} q_3) \cdot 1^* + 1 \cdot (q_1^* \cdot_{\mathbb{H}} q_3)^*) \\ &\quad \cdot \frac{1}{2}((q_2^* \cdot_{\mathbb{H}} q_4) \cdot 1^* + 1 \cdot (q_2^* \cdot_{\mathbb{H}} q_4)^*) \\ &\equiv \Phi_{\delta_{\mathbb{H}}}(q_1, q_3) \cdot \Phi_{\delta_{\mathbb{H}}}(q_2, q_4) \\ &\equiv \Phi_{Q_{\otimes}}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2, q_3 \otimes_{\mathbb{R}} q_4). \end{aligned}$$

Jest zatem $\tilde{\Psi}$ izometrią, przeto także – wobec niezwyrodnienia obu form kwadratowych – injekcją, oto bowiem równość $\tilde{\Psi}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2) = \mathbf{0}_4$ implikuje

$$\|q_1\|_{\mathbb{H}}^2 \cdot \|q_2\|_{\mathbb{H}}^2 = Q_{\otimes}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2) = Q_{\text{Mat}} \circ \tilde{\Psi}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2) \equiv Q_{\text{Mat}}(\mathbf{0}_4) = 0,$$

a wtedy $q_1 = 0$ lub $q_2 = 0$, więc zawsze $q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2 = 0$. Porównanie wymiarów rzeczywistych dziedziny i przeciwdziedziny $\tilde{\Psi}$ na gruncie Stw. 3.8,

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) = (\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}))^2 = 4^2 = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}(4)),$$

przesądza o tym, że jest on izomorfizmem.

□

TABLE 1. Niskowymiarowe rzeczywiste algebry Clifforda.

$C_{p,q}^{\mathbb{R}}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\xrightarrow{q}$
0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	
1	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16) \oplus \mathbb{R}(16)$	
2	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{R}(2) \oplus \mathbb{R}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(4) \oplus \mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{R}(32)$	
3	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{R}(4) \oplus \mathbb{R}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(8) \oplus \mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{C}(32)$	
4	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(16) \oplus \mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(32)$	
5	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16) \oplus \mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(32)$	$\mathbb{C}(32)$	$\mathbb{H}(32)$	$\mathbb{H}(32) \oplus \mathbb{H}(32)$	
6	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(4) \oplus \mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{R}(32)$	$\mathbb{R}(32) \oplus \mathbb{R}(32)$	$\mathbb{R}(64)$	$\mathbb{C}(64)$	$\mathbb{H}(64)$	
7	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(8) \oplus \mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{C}(32)$	$\mathbb{R}(64)$	$\mathbb{R}(64) \oplus \mathbb{R}(64)$	$\mathbb{R}(128)$	$\mathbb{C}(128)$	
8	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(16) \oplus \mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(32)$	$\mathbb{C}(64)$	$\mathbb{R}(128)$	$\mathbb{R}(128) \oplus \mathbb{R}(128)$	$\mathbb{R}(256)$	
$p \downarrow$										

TABLE 2. Niskowymiarowe zespolone algebry Clifforda.

$\xrightarrow{n}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$C_n^{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(16)$