O REPREZENTACJACH – PÓŁ-PROSTO I PÓŁ-KOMPLETNIE
(MAWF '22/23 1.XV & 1.XVI [RRS])

Spis treści

Mając w garści kompletną i zarazem strukturalną klasyfikację algebr Clifforda stowarzyszonych ze skończenie wymiarowymi przestrzeniami kwadratowymi nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, możemy obecnie przystąpić do badania ich reprezentacji, co da nam punkt wyjścia do dyskusji spinorów, więc obiektów o bezpośrednim znaczeniu fizykalnym. Jak pokazaliśmy dowodnie w poprzednim wykładzie, interesujące nas zagadnienie wpisuje się w kadr teorii reprezentacji bardzo szczególnych algebr prostych i półprostych o (dwóch) tożsamych składnikach prostych. Nasze dociekania zaczniemy zatem od wyprowadzenia ogólnych stwierdzeń dotyczących takich obiektów.

1. Elementy teorii reprezentacji algebr (pół)prostych

Algebry i struktury pochodne niosące nietrywialną informację fizykalną (jak choćby tę o symetriach stanów i procesów przyrodniczych, czy wreszcie o samej ewolucji stanów) ujawniają swą obecność w opisie obiektów i zjawisk bądź to bezpośrednio, bądź też za pośrednictwem struktur generycznych stowarzyszonych z wyborem algebraicznego zbioru-modelu owych zjawisk i podlegających im obiektów – najbardziej oczywiste przykłady takich wyborów to: konstrukcja algebry (Poissona–)Liego funkcji gładkich na rozmaitości symplektycznej (z nawiasem Poissona określonym przez formę symplektyczną) wykorzystywana do opisu stanów klasycznego układu fizycznego, z którą stowarzyszona jest pojemna struktura algebry Liego symplektycznych pól wektorowych na tejże rozmaitości, oraz konstrukcja przestrzeni Hilberta wykorzystywana do opisu stanów kwantowych układu fizycznego, z którą stowarzyszona jest nie mniej pojemna struktura (C^*-)algebry ograniczonych operatorów liniowych. W tym drugim przypadku relacje konstytutywne rzeczonych algebr są spełniane przez pewien podzbiór elementów struktury generycznej i określają relacje równoważności na zbiorze-modelu będącym jej nośnikiem. Relacje te porządkują elementy zbioru-modelu według kryterium przynależności do ich klas abstrakcji, co zwykle zyskuje interpretację w terminach „opisów równoważnych", „rodzajów/rodzin obiektów elementarnych", „multipletów symetrii"' lub „sektorów nadwyboru" w zbiorze-modelu zjawisk i obiektów. Abstrakcyjnego aparatu konstrukcji i analizy takiego „zapośredniczonego" schematu manifestacji algebr o znaczeniu fizycznym dostarcza teoria reprezentacji algebr, którą zajmiemy się w niniejszym rozdziale. Zaczynamy zatem od podstawowej

Definicja 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj $\big(\big((\mathfrak{A}+_{\mathfrak{A}}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \longmapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}}), \ell_{\mathfrak{A}}\big), m_{\mathfrak{A}}\big)$ będzie unitalną algebrą łączną nad pierścieniem przemiennym R_1, $\big((G, +_G, P_G, \bullet \longmapsto 0_G), \ell_G\big)$ zaś – modułem lewostronnym nad pierścieniem R_2, przy czym zakładamy, że oba pierścienie wiąże relacja $\mathscr{Z}(R_2) \supseteq R_1$. **Reprezentacja** (typu R_1) algebry $\mathfrak{A}$ na module G to unitalny homomorfizm R_1-algebr

$$\rho \;:\; \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{R_2}(G)\,,$$

przy czym struktura R_1-algebry na $\mathrm{End}_{R_2}(G)$ jest tutaj indukowana przez włożenie kanoniczne $\jmath_{R_1} \;:\; R_1 \rightarrowtail R_2$. Moduł G określamy w tym wypadku mianem **nośnika reprezentacji**. Kiedy jest on wolny, definiujemy **wymiar reprezentacji** jako rząd modułu G i zapisujemy

$$\dim \rho \equiv \mathrm{rk}_{R_2}\, G\,.$$

Jeśli ρ jest monomorfizmem, mówimy o reprezentacji **wiernej**. Centralizator obrazu reprezentacji (patrz: Przykł. (6-7.1.12)),

$$C_{\mathrm{End}_{R_2}(G)}\big(\rho(\mathfrak{A})\big) \subset \mathrm{End}_{R_2}(G)\,,$$

nazywamy **maksymalną podalgebrą komutującą** reprezentacji.

Podmoduł ρ-niezmienniczy to podmoduł $H \subseteq G$ o własności

$$\forall_{a\in\mathfrak{A}} \;:\; \rho(a)(H) \subset H\,.$$

Wyznacza on **podreprezentację** reprezentacji ρ, czyli reprezentację algebry $\mathfrak{A}$ na podmodule H daną w postaci

$$\rho_{(H)} \;:\; \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{R_2}(H) \;:\; a \longmapsto \big(\jmath_H\!\upharpoonright_{\mathrm{Image}\,\jmath_H}\big)^{-1} \circ \rho(a) \circ \jmath_H\,.$$

Ilekroć pierścień bazowy $R_2 = \mathbb{K}$ jest ciałem, mówimy o **podprzestrzeni ρ-niezmienniczej**. Reprezentacja, której jedynymi przestrzeniami niezmienniczymi są G (cały nośnik) i $\{0_G\}$, nosi miano **nieprzywiedlnej**. Reprezentacja, która nie jest nieprzywiedlna, jest określana jako **przywiedlna**. Reprezentacja, której nośnik rozkłada się na sumę prostą przestrzeni niezmienniczych, to reprezentacja **półprosta**. Wreszcie taką, której nośnik nie rozkłada się na sumę prostą *nietrywialnych* przestrzeni niezmienniczych, nazywamy **nierozkładalną**.

Dla dowolnej pary reprezentacji $\rho_\alpha \;:\; \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_R(G_\alpha)$, $\alpha \in \{1,2\}$ algebry $\mathfrak{A}$, **homomorfizm reprezentacji**, zwany także **splataczem reprezentacji**, to odwzorowanie $\chi \in \mathrm{Hom}_{R_2}(G_1, G_2)$ spełniające warunek

$$\forall_{a\in\mathfrak{A}} \;:\; \rho_2(a) \circ \chi = \chi \circ \rho_1(a)\,.$$

Ilekroć splatacz χ jest izomorfizmem, mówimy o **równoważności reprezentacji** ρ_1 i ρ_2, którą zapisujemy symbolem

$$\rho_2 \sim \rho_1\,.$$

Reprezentacje R_1-algebry $\mathfrak{A}$ na R_2-modułach lewostronnych wraz z odnośnymi splataczami tworzą kategorię, którą będziemy oznaczać symbolem $\mathbf{Rep}_{R_1\subseteq R_2}(\mathfrak{A})$.

Uwaga 1. Każda reprezentacja nieprzywiedlna jest w oczywisty sposób nierozkładalna. O tym, że w ogólności jest to wynikanie jednokierunkowe, przekonuje analiza prostego przykładu: Oto przestrzeń $\mathbb{R}$-liniowa $\mathbb{R}^{\times 2}$ jest nośnikiem nierozkładalnej, lecz przywiedlnej reprezentacji unitalnej $\mathbb{R}$-algebry łącznej $\mathbb{R}[\cdot]$ określonej (jednoznacznie) przez przyporządkowanie generatorowi $t \in \mathbb{R}[\cdot]$ (zmiennej) macierzy

$$\rho(t) := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\,.$$

Jedyną podprzestrzenią ρ-niezmienniczą jest tutaj $\langle\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\rangle_{\mathbb{R}}$, przy czym podprzestrzeń ta nie ma (prostego) ρ-niezmienniczego dopełnienia w $\mathbb{R}^{\times 2}$, co wynika z rachunku

$$\forall_{r\in\mathbb{R}}\ :\ \left(\begin{smallmatrix}1&2\\0&1\end{smallmatrix}\right)\odot\left(\begin{smallmatrix}r\\1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}r\\1\end{smallmatrix}\right)+2\triangleright\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\notin\langle\left(\begin{smallmatrix}r\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle_{\mathbb{R}}\,.$$

Przykłady 1.

(1) **Reprezentacja trywialna** R-algebry $\mathfrak{A}$ na R-module G to taka, która spełnia warunek $\forall_{a\in\mathfrak{A}\setminus\{1_{\mathfrak{A}}\}}\ :\ \rho(a)=0$.
(2) **Reprezentacja lewa regularna** R-algebry $\mathfrak{A}$ na R-module $\mathfrak{A}$ to $l.\ :\ \mathfrak{A}\longrightarrow\mathrm{End}_R(\mathfrak{A})\ :\ a\longmapsto m_{\mathfrak{A}}(a,\cdot)$. Analogicznie definiujemy **reprezentację prawą regularną**. Ilekroć $\mathfrak{A}$ jest unitalna, reprezentacje te są wierne.
(3) **Reprezentacja zredukowana względem ideału** lewostronnego (wzgl. prawostronnego) $\mathfrak{I}\subset\mathfrak{A}$ R-algebry $\mathfrak{A}$ na R-module $\mathfrak{I}$ to odwzorowanie $l^{\mathfrak{I}}_{\cdot}\ :\ \mathfrak{A}\longrightarrow\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{I})$ indukowane przez reprezentację lewą (wzgl. prawą) regularną wskutek ograniczenia wyjściowego R-modułu $\mathfrak{A}$ do jego podmodułu $\mathfrak{I}$. Reprezentacja ta jest w oczywisty sposób nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{I}$ jest minimalny, tj. gdy $\mathfrak{I}$ nie zawiera podideałów innych niż $\{0_{\mathfrak{A}}\}$ oraz $\mathfrak{I}$.
(4) Wybór bazy w R-module G rzędu $\mathrm{rk}_R\,G=N\in\mathbb{N}$ określa reprezentację macierzową $\mathrm{End}_R(G)\xrightarrow{\cong}\mathrm{End}_R(R^{\times N})\equiv\mathbb{R}(N)$.
(5) Reprezentacje ciała $\mathbb{K}$ traktowanego jako unitalna $\mathbb{Z}$-algebra to przestrzenie $\mathbb{K}$-liniowe.

Naturalne operacje na modułach i algebrach nad pierścieniem przemiennym są dziedziczone przez reprezentacje, czemu daje wyraz

Definicja 2. Przyjmijmy zapis dotychchczasowy. Niechaj $\rho_\alpha\ :\ \mathfrak{A}\longrightarrow\mathrm{End}_{R_2}(G_\alpha)$, $\alpha\in\{1,2\}$ będą reprezentacjami R_1-algebry $\mathfrak{A}$ na R_2-modułach lewostronnych G_α. **Suma prosta reprezentacji** ρ_α to reprezentacja

$$\rho_1\oplus\rho_2\ :\ \mathfrak{A}\longrightarrow\mathrm{End}_R(G_1)\oplus\mathrm{End}_R(G_2)\ :\ a\longmapsto\rho_1(a)\oplus\rho_2(a)\,.$$

Iloczyn tensorowy reprezentacji ρ_α to reprezentacja

$$\rho_1\otimes\rho_2\ :\ \mathfrak{A}\longrightarrow\mathrm{End}_{R_2}(G_1)\otimes_{R_1}\mathrm{End}_{R_2}(G_2)\ :\ a\longmapsto\rho_1(a)\otimes_{R_1}\rho_2(a)\,.$$

Niechaj teraz $\rho\ :\ \mathfrak{A}\longrightarrow\mathrm{End}_{R_2}(G)$ będzie reprezentacją R_1-algebry $\mathfrak{A}$ na R_2-module G, przy czym zakładamy (dla uproszczenia), że także R_2 jest pierścieniem przemiennym. **Reprezentacja dwoista** (lub **dualna**) do ρ to reprezentacja

$$\rho^*\ :\ \mathfrak{A}^{\mathrm{opp}}\longrightarrow\mathrm{End}_{R_2}(G^*)\ :\ a\longmapsto\rho(a)^*\,,$$

gdzie

$$\rho(a)^*\ :\ G^*\ \circlearrowleft\ :\ \varphi\longmapsto\varphi\circ\rho(a)\,.$$

Mając na uwadze przyszłe konkretne zastosowania fizykalne teorii reprezentacji, uzupełnimy dotychczasową jej dyskusję o elementy nawiązujące bezpośrednio do konstrukcji przedstawionych w Def. 7.5 i Stw. 7.6. Oto więc mamy

Definicja 3. Przyjmijmy zapis dotychchczasowy i niechaj $\mathfrak{A}$ będzie algebrą nad ciałem $\mathbb{R}$. Jej reprezentację nazwiemy **reprezentacją typu** R dla $R\in\{\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}\}$ (tj. **rzeczywistego**, **zespolonego** lub – odpowiednio – **kwaternionowego**), jeśli jej przeciwdziedziną jest $\mathbb{R}$-algebra endomorfizmów $\mathrm{End}_{R^{\mathrm{opp}}}(G)$ modułu prawostronnego G nad pierścieniem R, tj.

$$\rho\ :\ \mathfrak{A}\longrightarrow\mathrm{End}_{R^{\mathrm{opp}}}(G)\,.$$

Równoważnego opisu reprezentacji typu $\mathbb{R},\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$ dostarcza oczywiste, lecz zarazem wygodne

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis dotychchczasowy. Reprezentacja zespolona $\mathbb{R}$-algebry $\mathfrak{A}$ to taka jej reprezentacja rzeczywista, której maksymalna podalgebra komutująca spełnia warunek

$$C_{\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(G)}\big(\rho(\mathfrak{A})\big)\supset\langle\mathrm{id}_G,I\rangle_{\mathbb{R}}\cong\mathbb{C}\,.$$

Reprezentacja kwaternionowa $\mathbb{R}$-algebry $\mathfrak{A}$ to taka jej reprezentacja rzeczywista, której maksymalna podalgebra komutująca spełnia warunek

$$C_{\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(G)}\big(\rho(\mathfrak{A})\big) \supset \langle \mathrm{id}_G, I, J, K\rangle_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{H}\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Bezpośrednia konsekwencja Def. 3 oraz oraz Stw. 7.6, podparta istnieniem monomorfizmów $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{H}$. □

O dodatkowych mechanizmach indukcji zespolonych reprezentacji algebr rzeczywistych i ich kompleksyfikacji opowiada

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj $\mathfrak{A} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alg}_{\mathbb{R}}$ oraz $V \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$ i $W \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{\mathbb{H}^{\mathrm{opp}}}$. Dowolna reprezentacja zespolona $\rho\ :\ \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ kanonicznie indukuje reprezentację

$$\rho^{\mathbb{C}}\ :\ \mathfrak{A}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$$

stanowiącą jedyne $\mathbb{C}$-liniowe rozszerzenie przyporządkowania

$$\rho^{\mathbb{C}}(a \otimes_{\mathbb{R}} z) \coloneqq \rho(a) \circ \ell_z \equiv \ell_z \circ \rho(a)\,,$$

zapisanego dla dowolnych $(a,z) \in \mathfrak{A} \times \mathbb{C}$. Ponadto dowolna reprezentacja kwaternionowa $\widetilde{\rho}\ :\ \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{H}^{\mathrm{opp}}}(W)$ kanonicznie (tożsamościowo) indukuje reprezentację zespoloną

$$\underline{\widetilde{\rho}}\ :\ \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Trywialny. □

Powracając do dyskusji ogólnych własności reprezentacji algebr unitalnych, wypowiemy obecnie wynik strukturalny o fundamentalnym znaczeniu dla całej teorii reprezentacji, mimo całą swą trywialność.

Stwierdzenie 3 (Lematy Schura)**.** Przyjmijmy zapis Def. 1 i niechaj $\rho_\alpha\ :\ \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_\alpha)$, $\alpha \in \{1,2\}$ będą dwiema reprezentacjami $\mathbb{K}$-algebry $\mathfrak{A}$ na odnośnych przestrzeniach wektorowych V_α nad ciałem $\mathbb{K}$, odwzorowanie $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ zaś – homomorfizmem reprezentacji. Wówczas $\mathrm{Ker}\,\chi$ jest podprzestrzenią ρ_1-niezmienniczą przestrzeni V_1, a $\mathrm{Image}\,\chi$ jest podprzestrzenią ρ_2-niezmienniczą przestrzeni V_2. Ilekroć ρ_1 jest nieprzywiedlna, zachodzi alternatywa

$$\mathrm{Ker}\,\chi = V_1 \qquad \vee \qquad \mathrm{Ker}\,\chi = \{0_{V_1}\}\,,$$

kiedy natomiast to ρ_2 jest nieprzywiedlna, zachodzi alternatywa

$$\mathrm{Image}\,\chi = \{0_{V_2}\} \qquad \vee \qquad \mathrm{Image}\,\chi = V_2\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Oczywisty. □

Jego natychmiastową konsekwencją jest

Stwierdzenie 4 (Lemat Schura nad ciałem algebraicznie domkniętym)**.** Przyjmijmy zapis Def. 1 i niechaj $\rho\ :\ \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ będzie nieprzywiedlną reprezentacją $\mathbb{K}$-algebry unitalnej $\mathfrak{A}$ na przestrzeni wektorowej V nad ciałem algebraicznie domkniętym $\mathbb{K}$, odwzorowanie $\chi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ zaś – endomorfizmem reprezentacji ρ. Wówczas istnieje skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ spełniający warunek

$$\chi = \lambda \triangleright \mathrm{id}_V\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Algebraiczna domkniętość $\mathbb{K}$ przesądza o istnieniu skalara $\lambda \in \mathrm{Sp}(\chi)$, którego możemy użyć do zdefiniowania endomorfizmu

$$\chi_\lambda \coloneqq \chi - \lambda \triangleright \mathrm{id}_V$$

reprezentacji ρ. Niech $w_\chi \in \mathbb{K}[t]$ będzie wielomianem charakterystycznym χ, a $P_{w_\chi}\ :\ \mathbb{K}\ \circlearrowleft$ – funkcją wielomianową z nim stowarzyszoną. Wobec tożsamości $\det(\chi_\lambda) \equiv P_{w_\chi}(\lambda) = 0_{\mathbb{K}}$ stwierdzamy, że χ_λ nie jest monomorfizmem, co w świetle Stw. 3 implikuje postulowaną tożsamość $\chi_\lambda = 0$. $\square$

Na gruncie dotychczasowych rozważań natury ogólnej możemy obecnie przystąpić do szczegółowej dyskusji reprezentacji algebr o szczególnej strukturze, które napotkamy w dalszej części kursu. Jednym z wyróżników tej klasy algebr pośród innych obiektów kategorii $\mathbf{Alg}_{\mathbb{K}}$ jest szczególna prostota ich teorii reprezentacji, której świadectwa dostarcza poniższe

Twierdzenie 1. Wszystkie wierne reprezentacje nieprzywiedlne skończenie wymiarowej łącznej algebry prostej są wzajem równoważne.

Dowód: Niechaj $\mathfrak{A} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alg}_{\mathbb{K}}$ będzie algebrą prostą skończonego wymiaru. W przypadku $\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$ dowód jest banalny, załóżmy zatem, że $\mathfrak{A}$ jest nietrywialna. Zacznijmy od skonstruowania wyróżnionej reprezentacji referencyjnej. W tym celu wybierzmy dowolny minimalny (niezerowy) ideał lewostronny $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{A}$, którego istnienie zapewnia skończoność wymiaru $\mathfrak{A}$ (wystarczy zacząć jego poszukiwania od ideału $\mathfrak{A}$, w którym w następnym kroku wybieramy dowolny nietrywialny podideał lewostronny, o ile takowy istnieje, i procedurę powtarzamy (co najwyżej $(\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{A} - 2)$-krotnie)), i rozważmy reprezentację $l^{\mathfrak{J}}_{\cdot}$ zredukowaną względem $\mathfrak{J}$ (w rozumieniu Przykł. 1 (3)). Reprezentacja ta jest nieprzywiedlna z racji minimalności $\mathfrak{J}$, pozostaje zatem zbadać jej wierność. Jeśli $\mathfrak{J} = \mathfrak{A}$, to $\mathfrak{J}.\mathfrak{J} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$ wprost na mocy definicji algebry prostej, a zatem możemy zastosować tezę Stw. 6-7.7, która pozwala stwierdzić, że $\mathfrak{J} = \mathfrak{A}.P \equiv \mathfrak{J}.P$ dla pewnego idempotenta $P \in \mathfrak{J} \equiv \mathfrak{A}$. Załóżmy, że $l^{\mathfrak{J}}_{\cdot}$ nie jest wierna, tj. $\mathrm{Ker}\, l^{\mathfrak{J}}_{\cdot} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$, a wtedy nieodzownie $\mathrm{Ker}\, l^{\mathfrak{J}}_{\cdot} = \mathfrak{A}$, gdyż $\mathrm{Ker}\, l^{\mathfrak{J}}_{\cdot}$ jest ideałem obustronnym. Wobec łączności mnożenia w $\mathfrak{A}$, to daje nam

$$l^{\mathfrak{J}}_{\cdot} \;:\; \mathfrak{A} \times \mathfrak{J} \longrightarrow \mathfrak{J} \;:\; (a, b.P) \longmapsto a.(b.P) \equiv (a.b).P = 0_{\mathfrak{A}}\,,$$

przy czym $a.b \in \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{J}$, możemy przeto (wobec $P \neq 0_{\mathfrak{A}}$) zaadaptować argumentację z dowodu Stw. 6-7.7: Wobec powyższego $a.b \in \mathcal{L}_P = \{\ x \in \mathfrak{A} \ \mid\ x.P = 0_{\mathfrak{A}}\ \}$, ten ostatni zaś jest ideałem lewostronnym w $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{J}$, przy czym nie jest on tożsamy z $\mathfrak{A}$, bo w przeciwnym przypadku byłoby $\mathfrak{A} = \mathfrak{J} = \mathfrak{A}.P \equiv \{0_{\mathfrak{A}}\}$, co jest sprzeczne z założeniem. W takim jednak razie $\mathcal{L}_P = \{0_{\mathfrak{A}}\}$ wobec minimalności $\mathfrak{J} = \mathfrak{A}$, konstatujemy więc, że $\forall_{a,b \in \mathfrak{A}} \;:\; a.b = 0_{\mathfrak{A}}$, w sprzeczności z założeniem o prostocie $\mathfrak{A}$. Pozostaje jeszcze rozpatrzeć przypadek $\mathfrak{J} \subsetneq \mathfrak{A}$. I w tym przypadku załóżmy, że $\mathrm{Ker}\, l^{\mathfrak{J}}_{\cdot} = \mathfrak{A}$. Wobec niezerowości $\mathfrak{J}$ możemy wybrać $x \in \mathfrak{J} \setminus \{0_{\mathfrak{A}}\}$, z którym następnie stowarzyszamy ideał prawostronny $x.\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}$. Poczynione założenie przesądza o tym, że jest to ideał obustronny, oto bowiem

$$\forall_{a \in \mathfrak{A}} \;:\; a.(x.\mathfrak{A}) = (a.x).\mathfrak{A} \equiv l^{\mathfrak{J}}_a(x).\mathfrak{A} = 0_{\mathfrak{A}}.\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\} \subset x.\mathfrak{A}\,.$$

Wobec prostoty $\mathfrak{A}$ wnioskujemy, że albo $x.\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$, albo też $x.\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$. Jeśli $x.\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$, to bez trudu stwierdzamy, że także $\langle x \rangle_{\mathbb{K}}$ jest ideałem obustronnym, gdyż

$$\forall_{(a,\lambda) \in \mathfrak{A} \times \mathbb{K}} \;:\; a.(\lambda \triangleright x) = \lambda \triangleright (a.x) \equiv \lambda \triangleright l^{\mathfrak{J}}_a(x) = \lambda \triangleright 0_{\mathfrak{A}} = 0_{\mathfrak{A}}$$

oraz

$$\forall_{(a,\lambda) \in \mathfrak{A} \times \mathbb{K}} \;:\; (\lambda \triangleright x).a = \lambda \triangleright (x.a) \in x.\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\}\,,$$

a ponieważ $\langle x \rangle_{\mathbb{K}} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$ (wszak $x \neq 0_{\mathfrak{A}}$), przeto koniecznie $\langle x \rangle_{\mathbb{K}} = \mathfrak{A}$. Wtedy jednak zachodzi równość $\mathfrak{A}.\mathfrak{A} \equiv \langle x \rangle_{\mathbb{K}}.\mathfrak{A} = x.\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$, co jest w sprzeczności z założeniem o prostocie $\mathfrak{A}$. Jeżeli natomiast $x.\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, to

$$\forall_{a, b = x.c \in \mathfrak{A}} \;:\; a.b \equiv a.(x.c) = (a.x).c \equiv l^{\mathfrak{J}}_a(x).c = 0_{\mathfrak{A}}.c = 0_{\mathfrak{A}}\,,$$

znów w sprzeczności z założeniem $\mathfrak{A}.\mathfrak{A} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$. Ostatecznie więc nieodzownie $\mathrm{Ker}\, l^{\mathfrak{J}}_{\cdot} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$, czyli mamy do czynienia z wierną i – jak pokazaliśmy wcześniej – nieprzywiedlną reprezentacją $l^{\mathfrak{J}}_{\cdot}$.

Niechaj teraz $\rho \;:\; \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ będzie wierną reprezentacją nieprzywiedlną na przestrzeni wektorowej V. Wierność ρ oznacza, że $\forall_{a \in \mathfrak{J} \setminus \{0_{\mathfrak{A}}\}} \;:\; \rho(a) \neq 0$, czyli

$$\forall_{a \in \mathfrak{J} \setminus \{0_{\mathfrak{A}}\}}\, \exists_{v \in V} \;:\; \rho(a)(v) \neq 0_V\,.$$

Ustalmy $a_0 \in \mathfrak{I} \smallsetminus \{0_{\mathfrak{A}}\}$ oraz odnośny wektor $v_0 \in V$ (o powyższej własności) i zdefiniujmy odwzorowanie (jawnie) $\mathbb{K}$-liniowe

$$\chi_0 \;:\; \mathfrak{I} \longrightarrow V \;:\; a \longmapsto \rho(a)(v_0)\,.$$

Odwzorowanie to spełnia – dla dowolnych $(a,b) \in \mathfrak{A} \times (\mathfrak{I} \smallsetminus \{0_{\mathfrak{A}}\})$ – warunek

$$\chi_0 \circ l_a^{\mathfrak{I}}(b) \equiv \chi_0(a \cdot_{\mathfrak{A}} b) \equiv \rho(a \cdot_{\mathfrak{A}} b)(v_0) = \rho(a) \circ \rho(b)(v_0) \equiv \rho(a) \circ \chi_0(b)\,,$$

tj. splata ze sobą nieprzywiedlne reprezentacje $\mathfrak{A}$: reprezentację zredukowaną względem $\mathfrak{I}$ oraz ρ, patrz: Przykł. 1 (3). Ponieważ jednak zarówno $\mathrm{Ker}\,\chi_0 \neq \mathfrak{I}$ (gdyż $\chi_0(a_0) \neq 0_V$), jak i $\mathrm{Image}\,\chi_0 \neq \{0_V\}$ (z tego samego powodu), przeto – na mocy Stw. 3 – χ_0 jest izomorfizmem. Na tej podstawie wnioskujemy, że każda wierna reprezentacja nieprzywiedlna $\rho \;:\; \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ jest równoważna reprezentacji zredukowanej $l_\cdot^{\mathfrak{I}}$ względem dowolnego (minimalnego) ideału lewostronnego $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$. □

Jego treść uzupełnia w nader istotny sposób

Stwierdzenie 5. Wszystkie nietrywialne reprezentacje unitalnej łącznej algebry prostej są wierne.

<u>*Dowód:*</u> Niechaj $\mathfrak{A} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}}$ będzie algebrą prostą, $\rho \;:\; \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ zaś – jej reprezentacją, przy czym zakładamy, że $\mathrm{Ker}\,\rho \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$. Wybierzmy dowolny element $a \in \mathrm{Ker}\,\rho \smallsetminus \{0_{\mathfrak{A}}\}$ i wygenerujmy zeń ideał obustronny

$$\langle a \rangle_{\mathfrak{A}} := \Big\{ \sum_{i=1}^{N} b_i \cdot_{\mathfrak{A}} a \cdot_{\mathfrak{A}} c_i \quad \Big| \quad b_i, c_i \in \mathfrak{A}\,,\; i \in \overline{1,N}\,,\; N \in \mathbb{N} \Big\}\,.$$

Ideał ów zawiera $a \neq 0_{\mathfrak{A}}$, gdyż $a \equiv \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}.a.\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$, a zatem z racji prostoty $\mathfrak{A}$ zachodzi równość $\langle a \rangle_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$, która jednak pociąga za sobą tożsamość (zapisaną symbolicznie)

$$\rho(\mathfrak{A}) \equiv \rho(\mathfrak{A}.a.\mathfrak{A}) = \rho(\mathfrak{A}) \circ \rho(a) \circ \rho(\mathfrak{A}) = 0\,,$$

więc też trywialność ρ. □

Z połączenia obu poprzednich wyników wyprowadzamy

Corollarium 1. Wszystkie nietrywialne reprezentacje nieprzywiedlne unitalnej łącznej algebry prostej są wzajem równoważne.

W kontekście Stw.6-7.5 i Def. 2 rodzi się naturalne pytanie o konsekwencje, jakie powyższe rozważania niosą dla teorii reprezentacji algebr będących sumami prostymi unitalnych algebr prostych (czyli szczególnymi przypadkami tzw. **algebr półprostych**), przy czym – jak niemal zawsze w niniejszym kursie – ostatecznej sankcji logicznej dla tego pytania dostarczają istotne fizykalne zastosowania owych algebr, jak choćby napotkana przez nas klasyfikacja rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda. Ilościowej odpowiedzi na nie udziela

Stwierdzenie 6. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj $\{\mathfrak{A}\}_{i\in\overline{1,N}} \subset \mathrm{Ob}\,\mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}}$ będzie rodziną unitalnych algebr prostych nad ciałem $\mathbb{K}$ o odnośnych nietrywialnych reprezentacjach nieprzywiedlnych $\{\rho_i\}_{i\in\overline{1,N}}$, o których mowa w Cor. 1. Dowolna nietrywialna reprezentacja nieprzywiedlna algebry $\bigoplus_{i=1}^N \mathfrak{A}_i$ jest równoważna jednej z reprezentacji

$$\rho_{n.} := \bigoplus\nolimits_{i=1}^N n_i\,\rho_i\,,$$

$$n. \equiv (n_1, n_2, \ldots, n_N) \in \{(1,0,0,\ldots,0), (0,1,0,0,\ldots,0), \ldots, (0,0,\ldots,0,1)\}\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Niechaj $\rho \;:\; \bigoplus_{i=1}^N \mathfrak{A}_i \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ będzie nietrywialną reprezentacją nieprzywiedlną. Rozważmy kanoniczne włożenia $\jmath_{\mathfrak{A}_i} \;:\; \mathfrak{A}_i \rightarrowtail \bigoplus_{i=1}^N \mathfrak{A}_i$. Bez trudu przekonujemy się, że endomorfizmy

$$\pi_i := \rho \circ \jmath_{\mathfrak{A}_i}(1_{\mathfrak{A}_i})\,, \quad i \in \overline{1,N}$$

tworzą zupełną rodzinę rzutów komplementarnych na V, zatem zadają rozkład

$$V = \bigoplus_{i=1}^{N} V_i\,, \qquad V_i := \pi_i(V)\,,$$

którego składnik prosty V_i jest nośnikiem reprezentacji

$$\rho_i := \rho \circ \jmath_{\mathfrak{A}_i} \;:\; \mathfrak{A}_i \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_i)$$

o własności

$$\begin{aligned}\forall_{j\in\overline{1,N}\setminus\{i\}} \;:\; \rho_j(\mathfrak{A}_j)(V_i) &\equiv \rho_j(\mathfrak{A}_j)\circ\rho\circ\jmath_{\mathfrak{A}_i}(1_{\mathfrak{A}_i})(V) = \rho\big(\jmath_{\mathfrak{A}_j}(\mathfrak{A}_j)\cdot_{\mathfrak{A}}\jmath_{\mathfrak{A}_i}(1_{\mathfrak{A}_i})\big)(V) \\ &= \rho(\{0_{\mathfrak{A}}\})(V) = \{0_V\}\,,\end{aligned}$$

która pozwala zapisać

$$\begin{aligned}\rho(\mathfrak{A})(V_i) &\equiv \rho\big(\bigoplus_{j=1}^{N}\jmath_{\mathfrak{A}_j}(\mathfrak{A}_j)\big)\circ(\rho\circ\jmath_{\mathfrak{A}_i})(1_{\mathfrak{A}_i})(V) = \rho\big(\jmath_{\mathfrak{A}_i}(\mathfrak{A}_i)\cdot_{\mathfrak{A}}\jmath_{\mathfrak{A}_i}(1_{\mathfrak{A}_i})\big)(V) \\ &= \rho\circ\jmath_{\mathfrak{A}_i}(\mathfrak{A}_i)(V_i) \equiv \rho_i(\mathfrak{A}_i)(V_i)\,.\end{aligned}$$

czyli – innymi słowy –

$$\rho \equiv \bigoplus_{i=1}^{N} \rho_i \circ \mathrm{pr}_i\,,$$

gdzie $\mathrm{pr}_i \;:\; \mathfrak{A} \twoheadrightarrow \mathfrak{A}_i$ jest rzutem kanonicznym na składową. I odwrotnie, rodzina reprezentacji $\rho_i \;:\; \mathfrak{A}_i \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_i),\ i \in \overline{1,N}$ zadaje reprezentację

$$\rho := \bigoplus_{i=1}^{N} \jmath_{\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_i)} \circ \rho_i \circ \mathrm{pr}_i \;:\; \bigoplus_{i=1}^{N} \mathfrak{A}_i \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\bigoplus_{i=1}^{N} V_i\big)$$

sumy prostej algebr $\mathfrak{A}_i$ na (zewnętrznej) sumie prostej przestrzeni V_i. Wobec prostego charakteru rozkładu ρ na składowe jest jasnym, że nietrywialność i nieprzywiedlność ρ wymaga, iżby wszystkie poza jedną z podreprezentacji $\widetilde{\rho}_i := (\jmath_{\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_i)}\circ)\rho_i \circ \mathrm{pr}_i$ były trywialne, a do tego – iżby sama nietrywialna $\widetilde{\rho}_i$ była nieprzywiedlna, co w świetle Cor. 1 jest równoznaczne z dowodzoną tezą. $\square$

Możemy już teraz przystąpić do konstruktywnego opisu (nietrywialnych) reprezentacji nieprzywiedlnych wyróżnionych algebr macierzowych wspomnianych w tezie Stw.6-7.3, które napotkaliśmy we wcześniejszej części wykładu.

Twierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 1. Wszystkie nietrywialne reprezentacje nieprzywiedlne dowolnej z $\mathbb{K}$-algebr $R(n),\ n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, o których mowa w Stw.6-7.3 ($\mathbb{K}$ dowolne, gdy $R = \mathbb{K}$ jest ciałem, wzgl. $\mathbb{K} = \mathbb{R} \subset R$, gdy $R \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}\}$), są równoważne odnośnej **reprezentacji definiującej**

$$\rho_{\mathrm{def}} := \mathrm{id}_{\mathrm{End}_{R^{\mathrm{opp}}}(R^{\times n})}\,.$$

Ponadto dowolna skończenie wymiarowa nietrywialna reprezentacja algebry $\mathbb{K}(n)$ nad ciałem $\mathbb{K}$ jest równoważna skończonej sumie prostej kopii tejże reprezentacji definiującej.

<u>*Dowód:*</u> Zauważmy przede wszystkim, że reprezentacja ρ_{def} jest nietrywialna i nieprzywiedlna, gdyż $\rho_{\mathrm{def}}(\mathbf{1}_n) = \mathbf{1}_n \neq \mathbf{0}_n$ oraz

$$\forall_{\substack{v\in R^{\times n}\setminus\{0\}\\ w\in R^{\times n}}} \exists_{a\in R(n)} \;:\; w = a \odot v\,.$$

Istotnie, dowolny wektor $v \neq 0_{R^{\times n}}$ ma różną od zera jedną ze składowych $v^i \neq 0$ w bazie standardowej $\mathcal{E} \equiv \{e_i\}_{i\in\overline{1,n}}$, można zatem dla ustalonego $w = w^i \triangleright e_i$ wybrać a w postaci

$$a := \tfrac{w^j}{v^{\bar{\imath}}} \triangleright E^{(n)}_{j,\bar{\imath}}$$

gdzie $\{E^{(n)}_{i,j}\}_{i,j\in\overline{1,n}}$ jest bazą standardową pierścienia $R(n)$ wskazaną w Przykł. 6-7.1 (1) i gdzie kreska nad indeksem i oznacza, że nie jest on wysumowany. Pierwsza część dowodzonej tezy jest zatem bezpośrednią konsekwencją Cor. 1.

Niech dalej $\rho : \mathbb{K}(n) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ będzie reprezentacją $\mathbb{K}$-algebry $\mathbb{K}(n)$ na pewnej przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej V. Łatwo sprawdzamy, że endomorfizmy tej ostatniej dane wzorami

$$\pi_i := \rho\big(E_{i,i}^{(n)}\big)$$

tworzą zupełną rodzinę rzutów komplementarnych na V, oto bowiem na mocy Równ. (6-7.1) i (6-7.2) zachodzi

$$\pi_i \circ \pi_j \equiv \rho\big(E_{i,i}^{(n)} \odot E_{j,j}^{(n)}\big) = \delta_{i,j}^{\mathbb{K}} \triangleright \rho\big(E_{i,j}^{(n)}\big) = \delta_{i,j}^{\mathbb{K}} \triangleright \rho\big(E_{i,i}^{(n)}\big) \equiv \delta_{i,j}^{\mathbb{K}} \triangleright \pi_i$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i \equiv \rho\Big(\sum_{i=1}^{n} E_{i,i}^{(n)}\Big) = \rho(\mathbf{1}_n) = \mathrm{id}_V \,.$$

To jednak jest równoznaczne z istnieniem rozkładu

$$V = \bigoplus_{i=1}^{n} \pi_i(V) \,.$$

Rozważmy odwzorowania $\mathbb{K}$-liniowe

$$\tau_{1\to k} := \rho\big(E_{k,1}^{(n)}\big)\restriction_{\pi_1(V)} \; : \; \pi_1(V) \longrightarrow V$$

o własności

$$\tau_{1\to k} \circ \pi_1 \equiv \rho\big(E_{k,1}^{(n)} \odot E_{1,1}^{(n)}\big) = \rho\big(E_{k,k}^{(n)} \odot E_{k,1}^{(n)}\big) \equiv \pi_k \circ \tau_{1\to k} \,,$$

która implikuje relacje

$$\mathrm{Image}\, \tau_{1\to k} \subset \pi_k(V) \,.$$

Zdefiniowawszy odwzorowania $\mathbb{K}$-liniowe

$$\tau_{k\to 1} := \rho\big(E_{1,k}^{(n)}\big)\restriction_{\pi_k(V)} \; : \; \pi_k(V) \longrightarrow V$$

o własności

$$\tau_{k\to 1} \circ \pi_k \equiv \rho\big(E_{1,k}^{(n)} \odot E_{k,k}^{(n)}\big) = \rho\big(E_{1,1}^{(n)} \odot E_{1,k}^{(n)}\big) \equiv \pi_1 \circ \tau_{k\to 1} \,,$$

z której wynikają relacje

$$\mathrm{Image}\, \tau_{k\to 1} \subset \pi_1(V) \,,$$

stwierdzamy bez trudu, że odwzorowania $\tau_{k\to 1}$ są obustronnymi odwrotnościami odwzorowań $\tau_{1\to k}$,

$$\begin{aligned}
\tau_{1\to k} \circ \tau_{k\to 1} &\equiv \rho\big(E_{k,1}^{(n)} \odot E_{1,k}^{(n)}\big)\restriction_{\pi_k(V)} = \rho\big(E_{k,k}^{(n)}\big)\restriction_{\pi_k(V)} \equiv \pi_k\restriction_{\pi_k(V)} = \mathrm{id}_{\pi_k(V)} \,, \\
\tau_{k\to 1} \circ \tau_{1\to k} &\equiv \rho\big(E_{1,k}^{(n)} \odot E_{k,1}^{(n)}\big)\restriction_{\pi_1(V)} = \rho\big(E_{1,1}^{(n)}\big)\restriction_{\pi_1(V)} \equiv \pi_1\restriction_{\pi_1(V)} = \mathrm{id}_{\pi_1(V)} \,,
\end{aligned}$$

co daje nam do ręki rodzinę izomorfizmów podprzestrzeni

$$\tau_{k\to 1} \; : \; \pi_k(V) \xrightarrow{\cong} \pi_1(V) \,, \quad k \in \overline{1,n} \,.$$

Określmy następnie odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe

$$T \equiv (\pi_1, \tau_{1\to 2}, \tau_{1\to 3}, \ldots, \tau_{1\to n}) \; : \; \pi_1(V) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} V$$

i oznaczmy – dla dowolnego wektora $v \in \pi_1(V)$ –

$$\big(\tau_1^v, \tau_2^v, \ldots, \tau_n^v\big) := T(v) \,.$$

Łatwo sprawdzamy, że przestrzeń $\langle T(v)\rangle_{\mathbb{K}} \subset V$ jest dla dowolnego $v \neq 0_V$ podprzestrzenią ρ-niezmienniczą – istotnie, układ $\mathcal{T} := \{\tau_k^v\}_{k\in\overline{1,n}}$ jest jawnie $\mathbb{K}$-liniowo niezależny (wszak jego elementy, będące izomorficznymi obrazami wektora niezerowego, należą do parami różnych składników prostych V), a przy tym wprost na mocy definicji rozpina przestrzeń $\langle T(v)\rangle_{\mathbb{K}}$, jest zatem jej bazą, w niej zaś stwierdzamy – dla dowolnej macierzy $M = M_{ij} \triangleright E_{i,j}^{(n)} \in \mathbb{K}(n)$ –

$$\rho(M)\big(\tau_k^v\big) \;=\; M_{ij} \triangleright \rho\big(E_{i,j}^{(n)} \odot E_{k,1}^{(n)}\big)(v) = M_{ij} \cdot \delta_{j,k}^{\mathbb{K}} \triangleright \rho\big(E_{i,1}^{(n)}\big)(v)$$

$$\equiv \quad M_{i,k} \triangleright \tau_i^v \in \langle T(v) \rangle_{\mathbb{K}} \,.$$

Przy tym zauważamy, że także w przypadku reprezentacji definiującej $\rho_{\rm def}$ są – w bazie standardowej $\mathcal{E}$ przestrzeni $\mathbb{K}^{\times n}$ – spełnione równości

$$\rho_{\rm def}(M)(e_k) \quad = \quad M_{ij} \triangleright E_{i,j}^{(n)} \odot e_k = M_{ij} \cdot \delta_{j,k}^{\mathbb{K}} \triangleright e_i \equiv M_{i,k} \triangleright e_i \,,$$

więc odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe

$$\iota_v \;:\; \langle T(v) \rangle_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times n}$$

będące rozszerzeniem przyporządkowania baz

$$\langle T(v) \rangle_{\mathbb{K}} \ni \tau_i^v \longmapsto e_i \in \mathbb{K}^{\times n} \,, \quad i \in \overline{1,n}$$

jest równoważnością reprezentacji

$$\rho\restriction_{\langle T(v) \rangle_{\mathbb{K}}} \sim \rho_{\rm def} \,.$$

Uwzględniając powyższe, wybierzmy w $\pi_1(V)$ dowolną bazę $\{v_i \equiv \tau_1^{v_i}\}_{i\in\overline{1,D}}$, $D \equiv \dim_{\mathbb{K}} \pi_1(V)$, a wówczas układy wektorów $\{\tau_k^{v_i}\}_{i\in\overline{1,D}} \subset \pi_k(V)$, $k \in \overline{1,n}$ są – jako izomorficzne obrazy układu bazowego – bazami w odnośnych składnikach $\pi_k(V) \subset V$, co w sumie daje nam rozkład

$$V = \bigoplus_{k=1}^n \pi_k(V) = \bigoplus_{k=1}^n \bigoplus_{i=1}^D \left\langle \tau_k^{v_i} \right\rangle_{\mathbb{K}} = \bigoplus_{i=1}^D \bigoplus_{k=1}^n \left\langle \tau_k^{v_i} \right\rangle_{\mathbb{K}} \equiv \bigoplus_{i=1}^D \langle T(v_i) \rangle_{\mathbb{K}} \xrightarrow{\oplus_{i=1}^D \iota_{v_i}} \bigoplus_{i=1}^D \mathbb{K}^{\times n} \,,$$

a wraz z nim – postulowaną równoważność

$$\rho \sim \bigoplus_{i=1}^D \rho_{\rm def} \,.$$

□

Powyższe twierdzenie stanowi zwieńczenie naszej wyczerpującej analizy teorii reprezentacji algebr prostych. Jednocześnie tworzy ono naturalny kontekst, w którym możliwe jest lepsze zrozumienie sensu Stw. 1. Oto więc mamy

Stwierdzenie 7. Przyjmijmy zapis Tw. 2 i ustalmy (dowolnie) $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Prawdziwe są następujące zdania:

(i) Reprezentacja definiująca $\mathbb{R}$-algebry $\mathbb{R}(n)$ jest rzeczywista i nie jest zespolona, więc tym bardziej nie jest też kwaternionowa.
(ii) Reprezentacja definiująca $\mathbb{R}$-algebry $\mathbb{C}(n)$ jest zespolona i nie jest kwaternionowa.
(iii) Reprezentacja definiująca $\mathbb{R}$-algebry $\mathbb{H}(n)$ jest kwaternionowa.

Dowód: Punktem wyjścia do udowodnienia tezy stwierdzenia jest zrozumienie strukturalnej różnicy między odwzorowaniem $\mathbb{R}$-liniowym i odwzorowaniem $R^{\rm opp}$-liniowym na $R^{\times n}$ dla pierścienia z dzieleniem $R \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, w którym pierścień $\mathbb{R}$ jest zanurzony poprzez monomorfizm

$$\jmath_R \;:\; \mathbb{R} \rightarrowtail R \equiv \mathbb{R}^{\times N} \;:\; r \longmapsto (r, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{N-1 \text{ razy}}) \,,$$

gdzie $N = 1$ dla $R = \mathbb{R}$, $N = 2$ dla $R = \mathbb{C}$ i $N = 4$ dla $R = \mathbb{H}$. Biorąc pod uwagę to zanurzenie, zapiszemy

$$R^{\times n} \equiv \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}^{\times N} \cong \mathbb{R}^{\times n} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times N} \,,$$

a wtedy

$$\mathrm{End}_{\mathbb{R}}\big(R^{\times n}\big) \cong \mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(N) \,.$$

Dalej zauważmy, że należące do R współczynniki rozkładu dowolnej macierzy $M = E^{(n)}_{i,j} \otimes_{\mathbb{R}} M_{ij} \in R(n)$ w bazie standardowej należy przy powyższym rozkładzie rozumieć jako macierze

$$M_{ij} = \sum_{a=1}^{N} M^a_{ij} \triangleright I^R_a \in \mathbb{R}(N)$$

o współczynnikach rzeczywistych $M^k_{i,j}$, rozpięte na generatorach $I^R_a \in \mathbb{R}(N)$ realizujących działanie (poprzez mnożenie) elementów bazy standardowej 1 (w przypadku $R = \mathbb{R}$) wzgl. $(1,0),(0,1)$ (w przypadku $R = \mathbb{C}$) wzgl. $(1,0,0,0),(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0),(0,0,0,1)$ (w przypadku $R = \mathbb{H}$) na $\mathbb{R}^{\times N} \equiv R$. Widzimy zatem, że

$$R(n) \cong \mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \bigoplus_{a=1}^{n} \langle I^R_a \rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(N) \cong \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\big(R^{\times n}\big) .$$

Bez trudu znajdujemy jawną postać wyróżnionych macierzy I^R_a (z której wynika ich liniowa niezależność) w bezpośrednim rachunku,

$$1 \cdot_{\mathbb{R}} a = a \qquad \Longrightarrow \qquad I^{\mathbb{R}}_1 = 1 ,$$

$$(1,0) \cdot_{\mathbb{C}} (a,b) = (a,b) \qquad \Longrightarrow \qquad I^{\mathbb{C}}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \equiv \widetilde{\sigma}_0 ,$$

$$(0,1) \cdot_{\mathbb{C}} (a,b) = (-b,a) \qquad \Longrightarrow \qquad I^{\mathbb{C}}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \equiv \widetilde{\sigma}_2 ,$$

$$(1,0,0,0) \cdot_{\mathbb{H}} (a,b,c,d) = (a,b,c,d) \qquad \Longrightarrow \qquad I^{\mathbb{H}}_1 = \widetilde{\sigma}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \widetilde{\sigma}_0 ,$$

$$(0,1,0,0) \cdot_{\mathbb{H}} (a,b,c,d) = (-b,a,-d,c) \qquad \Longrightarrow \qquad I^{\mathbb{H}}_2 = \widetilde{\sigma}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \widetilde{\sigma}_2 ,$$

$$(0,0,1,0) \cdot_{\mathbb{H}} (a,b,c,d) = (-c,d,a,-b) \qquad \Longrightarrow \qquad I^{\mathbb{H}}_3 = \widetilde{\sigma}_2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{i} \triangleright \widetilde{\sigma}_3 ,$$

$$(0,0,0,1) \cdot_{\mathbb{H}} (a,b,c,d) = (-c,d,a,-b) \qquad \Longrightarrow \qquad I^{\mathbb{H}}_4 = \widetilde{\sigma}_2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{i} \triangleright \widetilde{\sigma}_1 ,$$

przy czym $\widetilde{\sigma}_\mu,\ \mu \in \{0,1,2,3\}$ są osławionymi **macierzami Pauliego** (w matematycznie raczej niż fizycznie umotywowanej konwencji[1]) o prostych regułach (anty-)komutacji

$$[\widetilde{\sigma}_i, \widetilde{\sigma}_j] = 2\varepsilon_{ijk} \triangleright \widetilde{\sigma}_k , \qquad \{\widetilde{\sigma}_i, \widetilde{\sigma}_j\} = -2\delta_{i,j} \triangleright \widetilde{\sigma}_0 ,$$

zapisanych przy użyciu **symbolu Levi-Civitty**

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} \mathrm{sign}(\sigma) , & \text{gdy } (i,j,k) = \big(\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3)\big) \text{ dla } \sigma \in \mathfrak{S}_{\{1,2,3\}} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} .$$

Na tym etapie możemy już wygodnie przeformułować pytanie o postać centralizatora $C_{\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(R^{\times n})}(R(n))$ – w wybranej przez nas wygodnej prezentacji $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(R^{\times n})$ tworzą go macierze

$$C = C_{ij,ab} \triangleright E^{(n)}_{i,j} \otimes_{\mathbb{R}} E^{(N)}_{a,b} \in \mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(N)$$

przemienne ze wszystkimi generatorami wiernego obrazu $R(n)$ w $\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(N)$, tj. spełniające układ warunków

$$\forall_{(i,j,a) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n} \times \overline{1,N}} \ : \ [C, E^{(n)}_{i,j} \otimes_{\mathbb{R}} I^R_a] = \mathbf{0}_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_N . \tag{1}$$

Wykorzystując algebrę (6-7.2), możemy przepisać powyższe warunki w postaci

$$\forall_{(i,j,a) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n} \times \overline{1,N}} \ : \ C_{ki,bc} \triangleright E^{(n)}_{k,j} \otimes_{\mathbb{R}} E^{(N)}_{b,c} \odot I^R_a = C_{jk,bc} \triangleright E^{(n)}_{i,k} \otimes_{\mathbb{R}} I^R_a \odot E^{(N)}_{b,c} .$$

Dla $a = 1$, a wobec liniowej niezależności wektorów $E^{(N)}_{b,c}$ wnioskujemy na tej podstawie, że

$$\forall_{(i,j,b,c) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n} \times \overline{1,N} \times \overline{1,N}} \ : \ C_{ki,bc} \triangleright E^{(n)}_{k,j} = C_{jk,bc} \triangleright E^{(n)}_{i,k} .$$

[1] Macierze $\widetilde{\sigma}_i,\ i \in \{1,2,3\}$ stanowią bazę algebry Liego $\mathfrak{su}_2$, którą w zgodzie z tradycją matematyczną wybieramy w postaci skośnie hermitowskiej.

Łatwo widać, że obecność dowolnego niezerowego wyrazu $C_{ki,bc}$ o indeksach $k \neq i$ prowadziłaby do sprzeczności, gdyż oznaczałaby, że wektor $E^{(n)}_{k,j}$ należy do powłoki $\mathbb{R}$-liniowej wektorów $E^{(n)}_{l,m}$, $l \neq k$, stwierdzamy więc, że niechybnie

$$\forall_{(i,j,a,b)\in\overline{1,n}\times\overline{1,n}\times\overline{1,N}\times\overline{1,N}} \ : \ C_{ij,ab} = \delta_{i,j}\, c_{ab}$$

dla pewnych liczb $c_{ab} \in \mathbb{R}$, czyli – innymi słowy – że

$$C = \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} c$$

dla pewnej macierzy $c \in \mathbb{R}(N)$, która w świetle (1) spełnia układ warunków przemienności

$$(2) \qquad \forall_{a\in\overline{2,N}} \ : \ [c, I^R_a] = \mathbf{0}_N \,.$$

To pozwala zapisać równość

$$C_{\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times n})}\big(\mathbb{R}(n)\big) = \langle \mathbf{1}_n \rangle_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}\,,$$

co kończy dowód punktu (i).

W przypadku $R = \mathbb{C}$ mamy do czynienia z macierzą

$$c := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(2)$$

o własności

$$\begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & -\delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\,,$$

a zatem

$$c = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

i ostatecznie

$$C_{\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^{\times n})}\big(\mathbb{C}(n)\big) = \langle \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} \widetilde{\sigma}_0, \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} \widetilde{\sigma}_2 \rangle_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C}\,,$$

co pokazuje słuszność punktu (ii). Odnotujmy na marginesie, że $\mathbb{R}$-liniowy endomorfizm $\mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} \widetilde{\sigma}_2$ przestrzeni $\mathbb{C}^{\times n}$ realizuje działanie skalara $(0,1)$, tj. – w zapisie Stw. 7.6 – jest strukturą zespoloną na $\mathbb{C}^{\times n}$, co pozwala nadać nowy (i równoważny poprzedniemu) sens pojęciu endomorfizmu $\mathbb{C}$-liniowego tejże przestrzeni: oto macierze $\mathbb{C}(n)$ są przemienne z tymi i tylko tymi odwzorowaniami $\mathbb{R}$-*liniowymi* na $\mathbb{C}^{\times n}$, które realizują działanie ciała $\mathbb{C}$.

Przechodząc do ostatniego przypadku, $R = \mathbb{H}$, zapisujemy macierz c w postaci

$$c := \begin{pmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ \Gamma & \Delta \end{pmatrix}\,, \qquad \mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \Delta \in \mathbb{R}(2)\,,$$

$$\mathsf{A} := \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}\,, \qquad \mathsf{B} := \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}\,, \qquad \Gamma := \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{pmatrix}\,, \qquad \Delta := \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \delta_3 & \delta_4 \end{pmatrix}\,,$$

po czym nakładamy po kolei warunki z (2). Z warunku dla $a = 2$ wyprowadzamy zależności

$$\forall_{x\in\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}} \ : \ (x_3, x_4) = (-x_2, x_1)\,,$$

a z warunku dla $a = 3$ – relacje

$$\Gamma = -\mathsf{B}^{\mathrm{T}}\,, \qquad \Delta = \mathsf{A}^{\mathrm{T}}\,.$$

Warunek dla $a = 4$ jest teraz spełniony tożsamościowo i koniec końców otrzymujemy oczekiwaną równość

$$C_{\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^{\times n})}\big(\mathbb{H}(n)\big)$$

$$= \langle \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (\widetilde{\sigma}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \widetilde{\sigma}_0), \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (\mathsf{i} \triangleright \widetilde{\sigma}_3 \otimes_{\mathbb{R}} \widetilde{\sigma}_2), \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (\widetilde{\sigma}_2 \otimes_{\mathbb{R}} \widetilde{\sigma}_0), \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (\mathsf{i} \triangleright \widetilde{\sigma}_1 \otimes_{\mathbb{R}} \widetilde{\sigma}_2) \rangle_{\mathbb{R}}\,,$$

przy czym raz jeszcze przekonujemy się, że wyróżnione $\mathbb{R}$-liniowy endomorfizmy $\mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (\mathsf{i} \triangleright \widetilde{\sigma}_3 \otimes_{\mathbb{R}} \widetilde{\sigma}_2), \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (\widetilde{\sigma}_2 \otimes_{\mathbb{R}} \widetilde{\sigma}_0)$ i $\mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (\mathsf{i} \triangleright \widetilde{\sigma}_1 \otimes_{\mathbb{R}} \widetilde{\sigma}_2)$ realizują na $\mathbb{H}^{\times n}$ naturalne działanie *prawostronne* (czyli z prawej strony – patrz: Def. 7.3) elementów – odpowiednio – $(0,1,0,0), (0,0,1,0)$ i $(0,0,0,1)$ pierścienia bazowego $\mathbb{H}$, więc definiują nań strukturę kwaternionową w rozumieniu Stw. 7.6. Macierze $\mathbb{H}(n)$ (po raz wtóry) zyskują interpretację endomorfizmów utworzonej w ten sposób kwaternionowej przestrzeni wektorowej jako wyróżnione odwzorowania $\mathbb{R}$-liniowe na $\mathbb{H}^{\times n}$, które są przemienne wyłącznie z odwzorowaniami $\mathbb{R}$-*liniowymi* na $\mathbb{H}^{\times n}$ realizującymi (prawostronne) działanie pierścienia $\mathbb{H}$. $\square$

2. Ogólne własności modułów Clifforda

W dalszej części wykładu skrupulatnie wykorzystamy wszystkie dotychczasowe nasze obserwacje dotyczące struktury rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda w celu przeprowadzenia wyczerpującej klasyfikacji ich reprezentacji, co będzie stanowiło fundamentalny przyczynek do zrozumienia fizykalnie istotnych tzw. reprezentacji spinorowych pewnych wyróżnionych podalgebr tychże algebr Clifforda. Punktem wyjścia do dalszej dyskusji jest

Definicja 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\big(((V,+_V,\mathsf{P}_V,\bullet\longmapsto 0_V),\ell_V),Q_V\big)$ będzie przestrzenią kwadratową nad ciałem $\mathbb{K}$. **Moduł Clifforda** algebry $\mathrm{Cliff}(V,Q_V)$ to para $\big(((W,+_W,\mathsf{P}_W,\bullet\longmapsto 0_W),\ell_W),\rho\big)$ złożona z przestrzeni wektorowej $\big((W,+_W,\mathsf{P}_W,\bullet\longmapsto 0_W),\ell_W\big)$ nad ciałem $\mathbb{K}$ oraz reprezentacji

$$\rho\;:\;\mathrm{Cliff}(V,Q_V)\longrightarrow\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(W)\,.$$

Najbardziej elementarnej (re)interpretacji (algebraicznej) powyższej definicji na gruncie leżącej u jej podstaw definicji algebry Clifforda dostarcza

Stwierdzenie 8. Przyjmijmy zapis Def. 4. Ilekroć forma kwadratowa Q_V jest niezwyrodniała, ograniczenie (dziedziny) reprezentacji algebry Clifforda do przestrzeni wektorowej $V\subset\mathrm{Cliff}(V,Q_V)$ jest wierne (tj. injektywne).

<u>*Dowód:*</u> Dla dowolnego $v\in\mathrm{Ker}\,\rho$ obliczamy – wobec homomorficzności ρ –

$$Q_V(v)\triangleright\mathrm{id}_W\equiv Q_V(v)\triangleright\rho\big(e^{\mathrm{C}}\big)=\rho(v.v)=\rho(v)^2=0\,,$$

co z racji niezwyrodnienia Q_V implikuje równość $v=0_V$. $\square$

Uwaga 2. W świetle powyższego stwierdzenia możemy postrzegać moduł Clifforda jako wierną realizację przestrzeni wektorowej V w przestrzeni wektorowej W, transportującą strukturę algebry (Clifforda) na V indukowaną w obecności formy kwadratowej Q_V.

Jako że prowadzimy nasze rozważania w środowisku przestrzeni kwadratowych, zasadnym wydaje się wyróżnienie tych reprezentacji algebr Clifforda, które – w przypadku istnienia struktury przestrzeni kwadratowej na nośniku reprezentacji – wykazują proste własności względem obu struktur przestrzeni kwadratowej: na przestrzeni V określającej reprezentowaną algebrę oraz na nośniku reprezentacji W. Ten sposób myślenia formalizuje

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Def. 4, zakładając przy tym, że także nośnik reprezentacji W jest przestrzenią kwadratową z formą kwadratową Q_W. Ustaliwszy skalar $\varepsilon\in\{-1_{\mathbb{K}},1_{\mathbb{K}}\}$, reprezentację algebry Clifforda $\rho\;:\;\mathrm{Cliff}(V,Q_V)\longrightarrow\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(W)$ określimy mianem **ε-ortogonalnej**, jeśli dla dowolnych $(v,w_1,w_2)\in V\times W^{\times 2}$ jest spełniony warunek

$$\Phi_{Q_W}\big(\rho\circ\jmath_V^{\mathrm{C}}(v)(w_1),\rho\circ\jmath_V^{\mathrm{C}}(v)(w_2)\big)=\varepsilon\cdot_{\mathbb{K}}Q_V(v)\cdot_{\mathbb{K}}\Phi_{Q_W}(w_1,w_2)\,,\tag{3}$$

w którego zapisie $\jmath_V^{\mathrm{C}}\;:\;V\longrightarrow\mathrm{Cliff}(V,Q)$ jest kanonicznym odwzorowaniem Clifforda.

Mamy proste

Stwierdzenie 9. Przyjmijmy zapis dotychczasowy, zakładając dodatkowo, że Q_W jest niezwyrodniała. Wówczas reprezentacja $\rho\;:\;\mathrm{Cliff}(V,Q_V)\longrightarrow\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(W)$ jest ε-ortogonalna wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe $\rho\circ\jmath_V^{\mathrm{C}}(v)\in\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(W)$ jest dla dowolnego $v\in V$ **ε-hermitowskie**, tj. spełnia warunek

$$\big(\rho\circ\jmath_V^{\mathrm{C}}\big)(v)^\dagger=\varepsilon\,\big(\rho\circ\jmath_V^{\mathrm{C}}\big)(v)\,,$$

gdzie $(\cdot)^\dagger$ jest sprzężeniem hermitowskim określonym względem Φ_{Q_W}.

<u>*Dowód:*</u> Założenie o niezwyrodnieniu Q_W, implikujące niezwyrodnienie indukowanej przez nią formy dwuliniowej Φ_{Q_W}, pozwala przepisać warunek (3) definiujący reprezentację ε-ortogonalną w równoważnej postaci

$$\forall_{v\in V}\ :\ \big(\rho\circ\jmath_V^{\rm C}\big)(v)^\dagger\circ\big(\rho\circ\jmath_V^{\rm C}\big)(v)=\varepsilon\,Q_V(v)\triangleright{\rm id}_W\,.$$

Ponieważ zachodzi także równość

$$\big(\rho\circ\jmath_V^{\rm C}\big)(v)\circ\big(\rho\circ\jmath_V^{\rm C}\big)(v)=\rho\big(\jmath_V^{\rm C}(v).\jmath_V^{\rm C}(v)\big)=\rho\big(Q_V(v)\triangleright e^{\rm C}\big)=Q_V(v)\triangleright{\rm id}_W\,,$$

przeto otrzymujemy tożsamość

$$Q_V(v)\triangleright\big(\rho\circ\jmath_V^{\rm C}\big)(v)^\dagger\equiv\big(\rho\circ\jmath_V^{\rm C}\big)(v)^\dagger\circ\big(\rho\circ\jmath_V^{\rm C}\big)(v)\circ\big(\rho\circ\jmath_V^{\rm C}\big)(v)=\varepsilon\,Q_V(v)\triangleright\big(\rho\circ\jmath_V^{\rm C}\big)(v)\,,$$

z którego – wobec niezwyrodnienia Q_V – wynika już wprost pożądana teza. □

Naturalności dokonanego przez nas wyróżnienia dowodzi

Stwierdzenie 10. Przyjmijmy zapis Def. 5. Dowolna reprezentacja algebry Clifforda rzeczywistej przestrzeni kwadratowej (wymiaru $d_V=\dim_{\mathbb{R}}V$) o (pseudo)euklidesowej formie kwadratowej $Q_V=\varepsilon_V\triangleright\delta_{\rm E}^{(d_V)}$, $\varepsilon_V\in\{-1,+1\}$ na rzeczywistej przestrzeni kwadratowej (wymiaru $d_W=\dim_{\mathbb{R}}W$) o (pseudo)euklidesowej formie kwadratowej $Q_W=\varepsilon_W\triangleright\delta_{\rm E}^{(d_W)}$, $\varepsilon_W\in\{-1,+1\}$ jest równoważna pewnej reprezentacji ε_V-ortogonalnej.

<u>*Dowód:*</u> Wybierzmy bazę ε_V-ortonormalną $\mathcal{E}:=\{e_i\}_{i\in\overline{1,d_V}}$ w przestrzeni V, a wówczas w ${\rm Cliff}(V,Q_V)$ są spełnione relacje

$$\{e_i,e_j\}=2\varepsilon_V\,\delta_{i,j}\triangleright e^{\rm C}\,,\quad i,j\in\overline{1,d_V}\,.$$

Zdefiniujmy grupę

$$\Gamma:=\big\langle e_i\,|\,i\in\overline{1,d_V}\big\rangle\,,$$

generowaną multyplikatywnie przez obrazy elementów bazy $\mathcal{E}$ w ${\rm Cliff}(V,Q_V)$. Grupa ta jest w oczywisty sposób skończona, ma zatem sens poniższa definicja odwzorowania dwuliniowego:

$$(\cdot|\cdot)^\Gamma\ :\ W\times W\longrightarrow\mathbb{R}\ :\ (w_1,w_2)\longmapsto\sum_{\gamma\in\Gamma}\Phi_{Q_W}\big(\rho(\gamma)(w_1),\rho(\gamma)(w_2)\big)\,.$$

Przy tym (ε_W-)określoność formy Φ_{Q_W} implikuje (takąż) określoność odwzorowania $(\cdot|\cdot)^\Gamma$, a nadto – dla dowolnych $\gamma\in\Gamma$ i $w_1,w_2\in W^{\times 2}$ – stwierdzamy Γ-niezmienniczość tego ostatniego,

$$\begin{aligned}\big(\rho(\gamma)(w_1)\,|\,\rho(\gamma)(w_2)\big)^\Gamma&\equiv\sum_{\widetilde\gamma\in\Gamma}\Phi_{Q_W}\big(\rho(\widetilde\gamma.\gamma)(w_1),\rho(\widetilde\gamma.\gamma)(w_2)\big)\\&=\sum_{\widetilde\gamma.\gamma\in\Gamma}\Phi_{Q_W}\big(\rho(\widetilde\gamma.\gamma)(w_1),\rho(\widetilde\gamma.\gamma)(w_2)\big)\equiv(w_1\,|\,w_2)^\Gamma\,.\end{aligned}$$

Pierwsza z tych cech pozwala stwierdzić istnienie odwzorowania $\chi\in{\rm Aut}_{\mathbb{R}}(W)$ o własności

$$\forall_{w_1,w_2\in W}\ :\ (w_1\,|\,w_2)^\Gamma=\Phi_{Q_W}\big(\chi(w_1),\chi(w_2)\big)\,.$$

Istotnie, wystarczy wybrać w W – w zgodzie z Twierdzeniem Lagrange'a o diagonalizacji formy kwadratowej – bazę $\{f_i\}_{i\in\overline{1,d_W}}$ ε_W-ortonormalną względem formy kwadratowej Q_W oraz bazę $\{g_i\}_{i\in\overline{1,d_W}}$ ε_W-ortonormalną względem formy kwadratowej

$$Q_W^\Gamma\ :\ W\longrightarrow\mathbb{R}\ :\ w\longmapsto(w\,|\,w)^\Gamma\,,$$

a następnie dokonać (jedynego) $\mathbb{R}$-liniowego rozszerzenia przyporządkowania

$$\chi(g_i):=f_i\,,\quad i\in\overline{1,d_W}\,,$$

gdyż wtedy

$$\begin{aligned}(w_1\,|\,w_2)^\Gamma&=w_1^i\cdot_{\mathbb{R}}w_2^j\cdot_{\mathbb{R}}(g_i\,|\,g_j)^\Gamma=\varepsilon_W\,w_1^i\cdot_{\mathbb{R}}w_2^j\cdot_{\mathbb{R}}\delta^{\mathbb{R}}_{i,j}\equiv w_1^i\cdot_{\mathbb{R}}w_2^j\cdot_{\mathbb{R}}\Phi_{Q_W}(f_i,f_j)\\&=w_1^i\cdot_{\mathbb{R}}w_2^j\cdot_{\mathbb{R}}\Phi_{Q_W}\big(\chi(g_i),\chi(g_j)\big)=\Phi_{Q_W}\big(\chi(w_1),\chi(w_2)\big)\,.\end{aligned}$$

Na tym etapie możemy już zadać reprezentację

$$\rho_\chi := \chi \circ \rho(\cdot) \circ \chi^{-1} \ : \ \mathrm{Cliff}\big(V, \varepsilon_V \triangleright \delta_{\mathrm{E}}^{(d_V)}\big) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W) \ : \ x \longmapsto \chi \circ \rho(x) \circ \chi^{-1} \,,$$

wprost na mocy definicji równoważną ρ. Obrazy elementów grupy Γ względem tej reprezentacji są izometriami Q_W, oto bowiem dla dowolnych $(\gamma, w_1, w_2) \in \Gamma \times W^{\times 2}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Phi_{Q_W}\big(\rho_\chi(\gamma)(w_1), \rho_\chi(\gamma)(w_2)\big) &\equiv \Phi_{Q_W}\big(\chi\big(\rho(\gamma) \circ \chi^{-1}(w_1)\big), \chi\big(\rho(\gamma) \circ \chi(w_2)\big)\big) \\ &= \big(\rho(\gamma)\big(\chi^{-1}(w_1)\big) \,|\, \rho(\gamma)\big(\chi^{-1}(w_2)\big)\big)^\Gamma \\ &= \big(\chi^{-1}(w_1) \,|\, \chi^{-1}(w_2)\big)^\Gamma = \Phi_{Q_W}(w_1, w_2)\,. \end{aligned}$$

Zdefiniujmy rodzinę endomorfizmów

$$\sigma_i := \rho_\chi(e_i)\,, \quad i \in \overline{1, d_V}\,.$$

Te spełniają – dla dowolnych $w_1, w_2 \in W$ oraz $i \in \overline{1, d_V}$ – tożsamość

$$\Phi_{Q_W}\big(\sigma_i^\dagger \circ \sigma_i(w_1), w_2\big) = \Phi_{Q_W}\big(\sigma_i(w_1), \sigma_i(w_2)\big) = \Phi_{Q_W}(w_1, w_2)\,,$$

przeto – wobec dowolności w_1 i w_2 – jest

$$\sigma_i^\dagger \circ \sigma_i = \mathrm{id}_W\,,$$

ale też

$$\sigma_i \circ \sigma_i = \rho_\chi\big(e_i^2\big) = \varepsilon_V \triangleright \rho_\chi\big(e^{\mathrm{C}}\big) = \varepsilon_V \triangleright \mathrm{id}_W\,,$$

więc ostatecznie

$$\sigma_i^\dagger = \varepsilon_V \triangleright \sigma_i\,,$$

co pozwala zapisać – dla dowolnego wektora $v = v^i \triangleright e_i \in V$ – tożsamość

$$\rho_\chi(v)^\dagger = v^i \triangleright \sigma_i^\dagger = \varepsilon_V\, v^i \triangleright \sigma_i \equiv \varepsilon_V \triangleright \rho_\chi(v)\,,$$

która w świetle Stw. 9 przesądza o ε_V-ortogonalności reprezentacji ρ_χ, jawnie równoważnej ρ. □

Powyższe wprowadzenie przygotowało nas należycie do zmierzenia się z wyzwaniem, jakim jest kompletna klasyfikacja (nieprzywiedlnych i nietrywialnych) reprezentacji rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda – wyzwanie to podejmujemy w następnym rozdziale.

3. Reprezentacje rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda

Wyczerpująca klasyfikacja rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda, przeprowadzona w ramach Wykładu 7., w połączeniu z wiedzą dotyczącą reprezentacji algebr prostych zgromadzoną pierwszej części wykładu niniejszego, stanowi solidną podstawę do sformułowania kompletnego opisu reprezentacji (nieprzywiedlnych) wszystkich algebr Clifforda nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$. Tytułem jej uzupełnienia w sposób pozwalający na wysłowienie twierdzeń klasyfikacyjnych sformułujemy istotne

Stwierdzenie 11. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Dla dowolnych liczb $p, q \in \mathbb{N}$ spełniających warunek $q - p = 3 \mod 4$ i dowolnej liczby $n \in 2\mathbb{N} + 1$ zachodzi, co następuje:

(i) w dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho \ : \ \mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ na przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowej V zachodzi

$$\rho(\omega_{\mathbb{R}}) = \varepsilon \triangleright \mathrm{id}_V\,, \quad \varepsilon \in \{-1, +1\}\,,$$

przy czym reprezentacje odpowiadające obu wartościom ε istnieją i są wzajem nierównoważne – w dalszej części dyskusji będziemy je oznaczać symbolem $\rho_\varepsilon^{p,q}$;

(ii) w dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho \ : \ \mathrm{Cl}_n^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\widetilde{V})$ na przestrzeni $\mathbb{C}$-liniowej $\widetilde{V}$ zachodzi

$$\rho(\omega_{\mathbb{C}}) = \widetilde{\varepsilon} \triangleright \mathrm{id}_{\widetilde{V}}\,, \quad \widetilde{\varepsilon} \in \{-1, +1\}\,,$$

przy czym reprezentacje odpowiadające obu ewentualnościom istnieją i są wzajem nierównoważne – w dalszej części dyskusji będziemy je oznaczać symbolem ρ_ε^n.

Dowód: Niechaj $\rho : \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ będzie dowolną (nietrywialną) reprezentacją nieprzywiedlną. Wobec tożsamości

$$\rho(\omega_{\mathbb{R}})^2 = \rho(\omega_{\mathbb{R}}^2) = \rho(e^{\mathrm{C}}) = \mathrm{id}_V\,,$$

wynikającej ze Stw. 7.2, endomorfizm $\rho(\omega_{\mathbb{R}})$ definiuje zupełną parę rzutów komplementarnych:

$$P_\pm := \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{id}_V \pm \rho(\omega_{\mathbb{R}})\right),$$

która wyznacza rozkład nośnika reprezentacji na sumę prostą

$$V = V_+ \oplus V_-\,, \quad V_\pm := P_\pm(V)\,,$$

przy czym zachodzi

$$\rho(\omega_{\mathbb{R}})\restriction_{V_\pm} = \pm\mathrm{id}_{V_\pm}\,.$$

Jako że element objętości należy do centrum $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}$, przeto podprzestrzenie własne $V_\pm$ są ρ-niezmiennicze, co wobec założonej nieprzywiedlności ρ ogranicza możliwą rozkłady jak niżej:

$$(V_+, V_-) = (V, \{0_V\}) \qquad \vee \qquad (V_+, V_-) = (\{0_V\}, V)\,.$$

Załóżmy, że otrzymane tą drogą reprezentacje $\rho_\pm : \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_\pm)$ o własności $\rho_\pm(\omega_{\mathbb{R}}) = \pm\mathrm{id}_{V_\pm}$ są równoważne, czyli istnieje izomorfizm $\chi : V_+ \longrightarrow V_-$ spełniający warunek

$$\forall_{\gamma \in \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}} : \chi \circ \rho_+(\gamma) = \rho_-(\gamma) \circ \chi\,.$$

Zachodzi wówczas – w szczególności – tożsamość

$$\chi \equiv \chi \circ \rho_+(\omega_{\mathbb{R}}) = \rho_-(\omega_{\mathbb{R}}) \circ \chi = -\chi\,,$$

która prowadzi do sprzeczności, skąd ostateczny wniosek o nierównoważności wzajemnej obu reprezentacji.

Na koniec pokażemy, że obie reprezentacje istnieją. W tym celu odwołamy się do Stw. 6 oraz 7.2, aby stwierdzić istnienie dwóch (nietrywialnych) reprezentacji nieprzywiedlnych algebry $R(2^m) \oplus R(2^m) \cong \mathrm{Cl}^+_{p,q} \oplus \mathrm{Cl}^-_{p,q} \equiv \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}$, $R \in \{\mathbb{R}, \mathbb{H}\}$, $m \in \mathbb{N}$, o strukturze

$$\widetilde{\rho}_+ := \rho_{\mathrm{def}} \circ \mathrm{pr}_1 : R(2^m) \oplus R(2^m) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(R^{2^m})$$

i

$$\widetilde{\rho}_- := \rho_{\mathrm{def}} \circ \mathrm{pr}_2 : R(2^m) \oplus R(2^m) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(R^{2^m})$$

odpowiednio. Zważywszy (unitalny charakter $\mathrm{Cl}^+_{p,q} \cong R(2^m)$ oraz) słuszność tożsamości

$$\forall_{\gamma_\pm \in \mathrm{Cl}^\pm_{p,q}} : \omega_{\mathbb{R}}.\gamma_\pm = \pm\gamma_\pm\,,$$

wynikających wprost z definicji podalgebr $\mathrm{Cl}^\pm_{p,q}$, wyprowadzamy stąd wniosek, że w obrazie odwrotnym izomorfizmów ι_k, $k \in \{3, 7\}$ z dowodu Stw. 7.2 otrzymujemy

$$\iota_k^{-1}(\omega_{\mathbb{R}}) = \mathbf{1}_{2^m} \oplus (-\mathbf{1}_{2^m})\,,$$

a zatem także dla nieprzywiedlnych reprezentacji

$$\rho_\pm := \widetilde{\rho}_\pm \circ \iota_k^{-1} : \mathrm{Cl}^+_{p,q} \oplus \mathrm{Cl}^-_{p,q} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(R^{2^m})$$

oczekiwane tożsamości

$$\rho_\pm(\omega_{\mathbb{R}}) = \pm\mathrm{id}_{R^{2^m}}\,.$$

Dowód dla przypadku zespolonego przebiega analogicznie, przy czym odwołuje się do Stw. 7.5 zamiast Stw. 7.2. □

Tak przygotowani możemy już przejść do sklasyfikowania reprezentacji algebr Clifforda, co w przypadku algebr rzeczywistych podsumowuje

Twierdzenie 3 (Klasyfikacyjne dla reprezentacji nieprzywiedlnych $/\mathbb{R}$)**.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy, a następnie wprowadźmy oznaczenia

$$(q_{\mathbb{R}}, q_{\mathbb{C}}, q_{\mathbb{H}}) := (0, 1, 2)$$

oraz – dla dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ –

$$d^{\mathbb{R}}_{p,q} := \dim_{\mathbb{R}} V\,, \qquad \mathfrak{C}^{\mathbb{R}}_{p,q} := C_{\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)}\big(\rho(\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q})\big)\,.$$

Wreszcie też niechaj $\nu^{\mathbb{R}}_{p,q}$ będzie liczbą nierównoważnych (nietrywialnych) reprezentacji nieprzywiedlnych algebry $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}$. Wówczas prawdziwe są równości

$$\nu^{\mathbb{R}}_{p,q} = \begin{cases} 2\,, & \text{gdy } \ q - p = 3 \mod 4 \\ 1 & \text{w p.p.} \end{cases}\,,$$

a ponadto ilekroć izotyp $\mathbb{R}$-algebry $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}$ przedstawiony w Tablicy 7.1 jest postaci

$$\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \cong R(2^n) \qquad \text{lub} \qquad \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \cong R(2^n) \oplus R(2^n)\,,$$

to spełnione są relacje (te same dla obu reprezentacji nierównoważnych w przypadku $q - p = 3 \mod 4$)

$$d^{\mathbb{R}}_{p,q} = 2^{n+q_R}\,, \qquad \mathfrak{C}^{\mathbb{R}}_{p,q} \cong R\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Na podstawie Tw. 7.5 i Stw.6-7.3 wnioskujemy, że algebra $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}$ jest albo półprosta (w przypadku $q - p = 3 \mod 4$), albo prosta (w przeciwnym przypadku), co w świetle Stw. 6 i Tw. 2 prowadzi do postulowanego wzoru na $d^{\mathbb{R}}_{p,q}$ oraz – po uwzględnieniu punktu (i) Stw. 11 – wzoru na $\nu^{\mathbb{R}}_{p,q}$. Typ reprezentacji nieprzywiedlnych (każdorazowo jest to R) ustala Stw. 7. □

W przypadku algebr zespolonych mamy analogiczne

Twierdzenie 4 (Klasyfikacyjne dla reprezentacji nieprzywiedlnych $/\mathbb{C}$)**.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy i wprowadźmy – dla dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : \mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_n \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ – oznaczenia

$$d^{\mathbb{C}}_n(\rho) := \dim_{\mathbb{C}} V\,, \qquad \mathfrak{C}^{\mathbb{C}}_n(\rho) := C_{\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)}\big(\rho(\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_n)\big)\,.$$

Wreszcie też niechaj $\nu^{\mathbb{C}}_n$ będzie liczbą nierównoważnych (nietrywialnych) reprezentacji nieprzywiedlnych algebry $\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_n$. Wówczas prawdziwe są równości

$$\nu^{\mathbb{C}}_n = \begin{cases} 2\,, & \text{gdy } \ n \in 2\mathbb{N} + 1 \\ 1 & \text{w p.p.} \end{cases}\,,$$

a ponadto spełnione są relacje (te same dla obu reprezentacji nierównoważnych w przypadku $n \in 2\mathbb{N} + 1$)

$$d^{\mathbb{C}}_n = 2^{E(\frac{n}{2})}\,, \qquad \mathfrak{C}^{\mathbb{C}}_n \cong \mathbb{C}\,,$$

tj. – w szczególności – wszystkie rozważane reprezentacje są zespolone.

<u>*Dowód:*</u> Tezy Tw. 7.9 i Stw.6-7.3 przesądzają o tym, że algebra $\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_n$ jest albo prosta (w przypadku $n \in 2\mathbb{N}$), albo półprosta (w przypadku $n \in 2\mathbb{N} + 1$), co pozwala uzyskać postulowany wzór na $d^{\mathbb{R}}_{p,q}$ oraz – po uwzględnieniu punktu (ii) Stw. 11 – wzór na $\nu^{\mathbb{R}}_{p,q}$ na gruncie Stw. 6 i Tw. 2. Zespolony typ reprezentacji nieprzywiedlnych wyznacza teza Stw. 7. □

Ostatnie dwa twierdzenia wyczerpują zagadnienie klasyfikacji nieprzywiedlnych reprezentacji algebr Clifforda $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}$ i $\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_n$. Zanim jednak zamkniemy ten rozdział naszych dociekań, zatrzymamy się nad pewną szczególną własnością strukturalną rozpatrywanych przez nas reprezentacji, która odegra istotną rolę w dyskusji reprezentacji spinorowych w dalszej części kursu. Oto więc mamy

Stwierdzenie 12. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Dla dowolnych liczb $(p,q) \in \mathbb{N}^{\times 2} \smallsetminus \{(0,0)\}$ spełniających warunek $q-p=0 \mod 4$ i dowolnej liczby $n \in 2\mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ zachodzi, co następuje:

(i) nośnik V dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ma rozkład

$$V = V_+ \oplus V_- \,, \quad V_\pm := \rho\big(P^\pm_{\omega_{\mathbb{R}}}\big)(V)$$

na podprzestrzenie własne endomorfizmu $\rho(\omega_{\mathbb{R}})$ stowarzyszone z wartościami własnymi ± 1, przy czym dowolny wektor $v \in \mathbb{R}^{\times p+q}$ o własności $\delta^{(p,q)}_{\mathrm{E}}(v) \neq 0$ zadaje izomorfizm

$$v_\pm := \rho \circ \jmath_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(v)\restriction_{V_\pm} \ :\ V^\pm \xrightarrow{\cong} V^\mp \,,$$

a nadto podprzestrzenie $V_\pm$ są zachowywane przez podalgebrę $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q}$, której reprezentacje indukowane tym sposobem na $V_\pm$ spełniają relację

$$\rho\big(\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q}\big)\restriction_{V_\pm} \sim \rho^{p,q-1}_{\pm 1}\big(\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q-1}\big) \,,$$

jeśli $q \geq 1$, lub

$$\rho\big(\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q}\big)\restriction_{V_\pm} \sim \rho^{p-1,q}_{\pm 1}\big(\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p-1,q}\big) \,,$$

jeśli $p \geq 1$;

(ii) nośnik V dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : \mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_{n} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ma rozkład

$$V = V_+ \oplus V_- \,, \quad V_\pm := \rho\big(P^\pm_{\omega_{\mathbb{C}}}\big)(V)$$

na podprzestrzenie własne endomorfizmu $\rho(\omega_{\mathbb{C}})$ stowarzyszone z wartościami własnymi ± 1, przy czym dowolny wektor $v \in \mathbb{C}^{\times n}$ o własności $\delta^{(n)}_{\mathrm{E}}(v) \neq 0$ zadaje izomorfizm

$$v_\pm := \rho \circ \jmath_{\mathbb{C}^{\times n}}(v)\restriction_{V_\pm} \ :\ V^\pm \xrightarrow{\cong} V^\mp \,,$$

a nadto podprzestrzenie $V_\pm$ są zachowywane przez podalgebrę $\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}\,0}_{n}$, której reprezentacje indukowane tym sposobem na $V_\pm$ spełniają relację

$$\rho\big(\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}\,0}_{n}\big)\restriction_{V_\pm} \sim \rho^{n-1}_{\pm 1}\big(\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_{n-1}\big) \,.$$

Dowód: Zajmiemy się punktem (i) tezy stwierdzenia – punkt (ii) jest dowodzony w pełni analogicznie. Załóżmy dla ustalenia uwagi, że $q \geq 1$, w przeciwnym wypadku zachodzi $p \geq 1$ i dowód przebiega podobnie. Przywoławszy (pierwszą część) Stw. 7.2, konstatujemy istnienie rozkładu prostego V, o którym mowa w stwierdzeniu, dla dowolnej pary (p,q) spełniającej warunek $(p+q+1)(p+q) - 2p \in 4\mathbb{N}$, zatem w szczególności dla par związanych warunkiem $q-p=0 \mod 4$. O tym, że odwzorowania $\mathbb{R}$-liniowe $v_\pm$ są poprawnie określone, przekonuje bezpośredni rachunek:

$$v_\pm \circ \rho\big(P^\pm_{\omega_{\mathbb{R}}}\big) \equiv \rho\big(\jmath_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(v).P^\pm_{\omega_{\mathbb{R}}}\big) = \rho\big(P^\mp_{\omega_{\mathbb{R}}}.\jmath_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(v)\big) = \rho\big(P^\mp_{\omega_{\mathbb{R}}}\big) \circ v_\pm \,,$$

przeprowadzony w odwołaniu do Równ. (6.4), które w naszym przypadku daje równość

$$\omega_{\mathbb{R}}.v = J^{p+q-1}_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(v).\omega_{\mathbb{R}} = (-1)^{p+q-1}\, v.\omega_{\mathbb{R}} \equiv (-1)^{q-p+2p-1}\, v.\omega_{\mathbb{R}} = -v.\omega_{\mathbb{R}} \,.$$

Bijektywność $v_\pm$ wynika wprost z tożsamości

$$v_\pm \circ v_\mp = \rho\big(\jmath_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(v)^2\big) = \rho\big(\delta^{(p,q)}_{\mathrm{E}}(v) \triangleright e^{\mathrm{C}}\big) = \delta^{(p,q)}_{\mathrm{E}}(v) \triangleright \mathrm{id}_{V_\mp} \,,$$

w połączeniu z założniem o nieizotropowości v. Wreszcie też niezmienniczość $V_\pm$ względem $\rho\big(\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q}\big)$ jest następstwem relacji przemienności

$$\forall_{\gamma \in \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q}} \ :\ \omega_{\mathbb{R}}.\gamma = \gamma.\omega_{\mathbb{R}} \,,$$

które w świetle Równ. (6.4) są implikowane przez tożsamość

$$J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}\restriction_{\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q}} = \mathrm{id}_{\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q}} \,.$$

Na tym etapie pozostaje wykazać istnienie równoważności reprezentacji

$$\rho\big(\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q}\big)\restriction_{V_\pm} \sim \rho_{\pm 1}\big(\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q-1}\big) \,.$$

W tym celu wykorzystamy treść i dowód Stw. 7.3, na podstawie których otrzymujemy – oznaczywszy na potrzeby poniższego rachunku element objętości algebry $\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ symbolem $\omega_{\mathbb{R}}^{p,q}$ –

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}\big(\omega_{\mathbb{R}}^{p,q-1}\big) &= e_1.e_{p+q}.e_2.e_{p+q}.\cdots.e_{p+q-1}.e_{p+q} = (-1)^{\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}}\,e_1.e_2.\cdots.e_{p+q-1}.e_{p+q}.e_{p+q}^{p+q-2} \\ &\equiv (-1)^{\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}}\,\omega_{\mathbb{R}}^{p,q}.\big(e_{p+q}^2\big)^{\frac{p+q}{2}-1} = (-1)^{\frac{(p+q-1)(p+q-2)+p+q}{2}-1}\,\omega_{\mathbb{R}}^{p,q} \\ &\equiv (-1)^{\frac{(p+q)(p+q-2)}{2}}\,\omega_{\mathbb{R}}^{p,q}\,, \end{aligned}$$

i ostatecznie – wobec założeń poczynionych w odniesieniu do (p,q) –

$$\widetilde{\varphi}\big(\omega_{\mathbb{R}}^{p,q-1}\big) = \omega_{\mathbb{R}}^{p,q}\,,$$

stąd zaś

$$\rho\circ\widetilde{\varphi}\big(\omega_{\mathbb{R}}^{p,q-1}\big)\restriction_{V_\pm} = \rho\big(\omega_{\mathbb{R}}^{p,q}\big)\restriction_{V_\pm} \equiv \pm\mathrm{id}_{V_\pm}\,.$$

Równość $(q-1)-p=3 \mod 4k$ pozwala nam następnie sięgnąć do Stw. 7.2, które w połączeniu z udowodnionym na początku tego rozdziału Stw. 11 doprowadza nas do pożądanej konkluzji. □