MAKING „WYJĄTKOWOŚĆ" RIGOROUS AGAIN
(MAWF '22/23 1.III, 1.IV & 1.V [RRS])

Spis treści

1. Pierwszy i Ostatni, Początek i Koniec

Dotychczasowa nasza zabawa z podstawowymi pojęciami teorii kategorii uwypukliła rolę porządkującą idiolektu „abstrakcyjnego nonsensu" w odniesieniu do wiedzy wcześniej przez nas oswojonej. To, rzecz jasna, rola niebłaha, lecz trudno byłoby usprawiedliwić wprowadzenie do gry tak ciężkiej artylerii, gdyby nie gwarantowała innych znaczących przewag na polu walki o ścisły sens, zwłaszcza – w kontekście fizykalnie interesującym. Pierwszą zapowiedzią takiej gwarancji (i zarazem znacznikiem głębszej zawartości „filozoficznej" teorii kategorii) jest Lemat Yonedy, wieńczący poprzedni cykl wykładów, na jego konkretne zastosowanie przyjdzie nam wszakże poczekać do końca następnego semestru, na którym czekają na nas supergeometryczne „smaczki", pozwalające nadać sens teoriopolowym modelom pól fermionowych. Tymczasem chciałoby się móc użyć metod teoriokategorialnych już na obecnym etapie, w konstrukcji interesujących nas struktur algebraicznych. Możliwość taką otwiera ścisła konceptualizacja (i formalizacja) „wyjątkowości" w formie definicji „własności uniwersalnej", której poświęcimy najbliższe wykłady. Jak się wkrótce okaże, własność ta, gdy zastosować ją roztropnie, wyposaża nas w niebagatelną moc wnioskowania (i dowodzenia) w odniesieniu do struktur zadeklarowanych jako „uniwersalne" właśnie. Poniżej przekonamy się o tym na kilku prostych przykładach zakotwiczonych jeszcze w sylabusie elementarnego kursu algebry liniowej i wieloliniowej z 1. roku studiów, co pozwoli nam uwolnić nasze rozważania od trudności pojęciowej i tym sposobem – wyeksponować rolę nowo wprowadzonego narzędzia logicznego, którego pełnoformatową implementację przyniesie dyskusja algebr Clifforda.

Do precyzyjnego sformułowania pojęcia uniwersalności będziemy jeszcze potrzebować

Definicja 1. Przyjmijmy zapis Def. 1.1. Obiekt T kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy **końcowym** (albo **terminalnym**), jeżeli dla każdego $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $\varphi \in \mathcal{C}(X,T)$. Analogicznie, obiekt I kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy **początkowym** (albo **inicjalnym**), jeżeli dla każdego $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $\varphi \in \mathcal{C}(I,X)$. Obiekt kategorii będący zarazem końcowym i początkowym nosi miano **zerowego**.

Przykłady 1. (Obiekty końcowe i początkowe)

(1) W kategorii **Set** z Przykł. 1 (1) obiektem końcowym jest (dowolny) singleton, początkowym zaś (jedynym) – zbiór pusty. Nie ma w niej obiektów zerowych.

(2) W kategoriach **Grp**, **AbGrp** i pochodnych $\mathbf{Mod}_R, \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ z Przykł. 1 (2) obiektem zerowym jest (dowolna) struktura trywialna.

(3) W kategorii **AbRing** z Przykł. 1 (2) obiektem końcowym jest pierścień trywialny, początkowym zaś – pierścień $\mathbb{Z}$.

(4) Kategoria **Field** nie zawiera obiektów końcowych ani początkowych.

O wyjątkowości obiektów terminalnych i inicjalnych przesądza

Twierdzenie 1 (O jednoznaczności obiektów terminalnych i inicjalnych)**.** Przyjmijmy notację Def. 1. Niechaj $T_\alpha,\ \alpha \in \{1,2\}$ będą dwoma obiektami terminalnymi w kategorii $\mathcal{C}$ i niech $I_\beta,\ \beta \in \{1,2\}$ będą dwoma obiektami inicjalnymi w tejże kategorii. Istnieją jednoznacznie określone izomorfizmy (w kategorii $\mathcal{C}$)

$$\tau_{1,2}\ :\ T_1 \xrightarrow{\cong} T_2\,, \qquad\qquad \iota_{1,2}\ :\ I_1 \xrightarrow{\cong} I_2\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Rozważmy parę $T_\alpha,\ \alpha \in \{1,2\}$ obiektów terminalnych w $\mathcal{C}$. Terminalność T_1 implikuje istnienie dokładnie jednego morfizmu $\tau_{2,1}\ :\ T_2 \longrightarrow T_1$, a terminalność T_2 – dokładnie jednego morfizmu $\tau_{1,2}\ :\ T_1 \longrightarrow T_2$. Ich złożenie $\tau_{2,1} \circ \tau_{1,2}$ jest endomorfizmem T_1, ale endomorfizmem takim jest też id_{T_1}, co wobec terminalności T_1 oznacza, że koniecznie

$$\tau_{2,1} \circ \tau_{1,2} = \mathrm{id}_{T_1}\,.$$

Podobnie dowodzimy równości

$$\tau_{1,2} \circ \tau_{2,1} = \mathrm{id}_{T_2}\,,$$

która w połączeniu z poprzednią przesądza o izomorficznym charakterze $\tau_{1,2}$. W przypadku obiektów inicjalnych $I_\beta,\ \beta \in \{1,2\}$ rozumowanie przebiega w pełni analogicznie. □

2. Uniwersalność jako ścisła miara wyjątkowości

Pojęcia wprowdzone w poprzednim rozdziale pozwalają poddać stosownej formalizacji koncepcję „wyjątkowości”, co czynimy w poniższej

Definicja 2. Przyjmijmy zapis Def. 1. Niechaj $\mathcal{C}_\alpha,\ \alpha \in \{1,2,3\}$ będą kategoriami i niech $F_\beta\ :\ \mathcal{C}_\beta \longrightarrow \mathcal{C}_3,\ \beta \in \{1,2\}$ będą funktorami kowariantnymi, X zaś – (dowolnym) obiektem kategorii $\mathcal{C}_1$. Wreszcie też niech $P_{X;F_1,F_2}(Y,\varphi)$ będzie pewnym zdaniem logicznym określającym własność $\varphi \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}_3$ w odwołaniu do struktury $(X;F_1,F_2)$ oraz $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_2$, dla którego jest dobrze określona kategoria $\mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}]$ o klasie obiektów

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}] \coloneqq \left\{\ (Y,\varphi) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_2 \times \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}_3 \quad \middle|\quad \varphi \in \mathcal{C}_3\big(F_2(Y),F_1(X)\big) \quad \wedge \quad P_{X;F_1,F_2}(Y,\varphi)\ \right\}$$

i zbiorach morfizmów[1]

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}]}\big((Y_1,\varphi_1),(Y_2,\varphi_2)\big) \coloneqq \{\ \chi \in \mathcal{C}_2(Y_1,Y_2) \quad | \quad \varphi_2 \circ F_2(\chi) = \varphi_1\ \}\,,$$

[1]Obecność identyczności (na dowolnym obiekcie $\mathcal{C}_2$) w klasie morfizmów, jak również możliwość składania morfizmów są zagwarantowane przez funktorialność F_2.

ze złożeniem dziedziczonym z $\mathcal{C}_2$, lub kategoria $\mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}]$ o klasie obiektów

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}] \coloneqq \{\ (Y,\varphi) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_2 \times \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}_3 \ \mid\ \varphi \in \mathcal{C}_3\big(F_1(X), F_2(Y)\big) \ \wedge\ P_{X;F_1,F_2}(Y,\varphi)\ \}$$

i zbiorach morfizmów

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}]}\big((Y_1,\varphi_1),(Y_2,\varphi_2)\big) \coloneqq \{\ \chi \in \mathcal{C}_2(Y_1,Y_2) \ \mid\ F_2(\chi)\circ\varphi_1 = \varphi_2\ \}\,,$$

ze złożeniem dziedziczonym z $\mathcal{C}_2$.

Struktura końcowa (lub **terminalna**) **dla** $P_{X;F_1,F_2}$ to obiekt końcowy (T,τ) w kategorii $\mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}]$. Definiującą własność tego obiektu, zwaną **własnością końcową** (lub **terminalną**), opisuje diagram przemienny

(1)
$$\begin{tikzcd}
 & & F_2(Y) \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "F_2(\Psi)"] & (Y,\varphi) \arrow[l, mapsto, "F_2\circ\mathrm{pr}_1"'] \arrow[d, dashed, "\Psi"] \\
X \arrow[r, mapsto, "F_1"'] & F_1(X) & F_2(T) \arrow[l, "\tau"] & (T,\tau) \arrow[l, mapsto, "F_2\circ\mathrm{pr}_1"] \\
\mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_3 & & \mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}]
\end{tikzcd}\ ,$$

w którym (Y,φ) jest dowolnym obiektem w kategorii $\mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}]$, a przerywana cięciwa strzałki symbolizuje „istnienie i jedyność” odnośnego morfizmu.

Struktura początkowa (lub **inicjalna**) **dla** $P_{X;F_1,F_2}$ to obiekt początkowy (I,ι) w kategorii $\mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}]$. Definiującą własność tego obiektu, zwaną **własnością początkową** (lub **inicjalną**), opisuje diagram przemienny

(2)
$$\begin{tikzcd}
 & & F_2(Y) & (Y,\varphi) \arrow[l, mapsto, "F_2\circ\mathrm{pr}_1"'] \\
X \arrow[r, mapsto, "F_1"'] & F_1(X) \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\iota"] & F_2(I) \arrow[u, "F_2(\Phi)"'] & (I,\iota) \arrow[l, mapsto, "F_2\circ\mathrm{pr}_1"] \arrow[u, dashed, "\Phi"'] \\
\mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_3 & & \mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}]
\end{tikzcd}\ ,$$

w którym (Y,φ) jest dowolnym obiektem w kategorii $\mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}]$.

Struktury terminalne i inicjalne noszą wspólne miano **struktur uniwersalnych**.

Sens uniwersalności łatwo wysłowić w języku potocznym: oto dowolne odwzorowanie transportujące strukturę rodzaju $\mathcal{C}_3$ z $F_1(X)$ (wzgl. do $F_1(X)$), a przy tym spełniające warunek $P_{X;F_1,F_2}(Y,\varphi)$, jest przeprowadzane, za pośrednictwem F_2-obrazu jedynego homomorfizmu indukowanego, przez F_2-obraz (obiektowej składowej) struktury inicjalnej (wzgl. terminalnej). Na pytanie o istnienie struktur uniwersalnych nie ma uniwersalnej odpowiedzi – tej trzeba każdorazowo poszukiwać w interesującym nas kontekście (np. algebraicznym). Można natomiast bardzo konkretnie skwantyfikować swobodę ich wyboru (będącą miarą ich jednoznaczności, więc wyjątkowości właśnie), co czyni poniższe

Twierdzenie 2 (O jednoznaczności struktur uniwersalnych)**.** Przyjmijmy notację Def. 2. Niechaj (T_α,τ_α), $\alpha \in \{1,2\}$ będą dwiema strukturami terminalnymi dla $P_{X;F_1,F_2}$ i niech (I_β,ι_β), $\beta \in \{1,2\}$ będą dwiema strukturami inicjalnymi dla $P_{X;F_1,F_2}$. Istnieją jednoznacznie określone izomorfizmy (w kategorii $\mathcal{C}_2$)

$$\tau_{1,2}\ :\ T_1 \xrightarrow{\cong} T_2\,, \qquad\qquad \iota_{1,2}\ :\ I_1 \xrightarrow{\cong} I_2\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Natychmiastowa konsekwencja Def. 2 i Tw. 1. $\square$

Praktyczny sens udowodnionego twierdzenia jest oczywisty: każde dwie struktury uniwersalne możemy utożsamić, i to w jednoznaczny sposób, za pośrednictwem stosownego izomorfizmu $\tau_{1,2}$ (wzgl. $\iota_{1,2}$).

3. Elementarne przykłady struktur uniwersalnych

Ażeby oswoić Czytelnika z pozornie dość ezoteryczną konstrukcją z Def. 2, rozważymy obecnie kilka konkretnych jej instancjacji, z którymi miał On najpewniej okazję zetknąć się w dotychczasowych swoich matematycznych i fizykalnych peregrynacjach.

3.1. **Produkt i koprodukt w kategorii Set.** Zaczniemy od

Definicja 3. Przyjmijmy zapis Def. 1.1 i 2 oraz Przykł. 1 (5) i ustalmy zbiór Λ oraz kategorię $\mathcal{C}$, z którymi stowarzyszamy kategorię $\mathcal{C}^{\widetilde{\Lambda}}$ ciągów uogólnionych w $\mathcal{C}$ indeksowanych przez Λ, zawierającą funktorialny obraz $\mathcal{C}$ w postaci ciągów stałych.

Produkt rodziny $X_\cdot \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{\widetilde{\Lambda}}$ to struktura terminalna

$$\Big(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \{\pi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\Big)$$

dla warunku tautologicznego $P_{X_\cdot;\mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\widetilde{\Lambda}}},\Delta_{\mathcal{C};\Lambda}} \equiv 1$ na $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \times \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}^{\widetilde{\Lambda}}$. Morfizm π_λ określamy przy tym mianem **rzutu kanonicznego na** (**składową**) X_λ. Kategorię, w której istnieją produkty, określamy mianem **kategorii z produktami**. Przy tym ilekroć $|\Lambda| < \infty$, będziemy wymiennie używać symboli $\prod$ i $\times$.

Koprodukt rodziny $X_\cdot \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{\widetilde{\Lambda}}$ to struktura inicjalna

$$\Big(\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \{\jmath_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\Big)$$

dla tautologicznego warunku $P_{X_\cdot;\mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\widetilde{\Lambda}}},\Delta_{\mathcal{C};\Lambda}} \equiv 1$ na $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \times \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}^{\widetilde{\Lambda}}$. Morfizm $\jmath_\lambda$ określamy przy tym mianem **włożenia kanonicznego** (**składowej**) X_λ. Kategorię, w której istnieją koprodukty, określamy mianem **kategorii z koproduktami**.

Koprodukt w kategoriach $\mathcal{C} \in \{\mathbf{AbGrp}, \mathbf{AbRing}, \mathbf{Mod}_R, \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}\}$ i $\mathbf{Alg}_R$ (dla pierścienia R i ciała $\mathbb{K}$) jest najczęściej określany mianem **sumy prostej** i oznaczany symbolem $\coprod \equiv \bigoplus$.

Wprost z definicji wynika naturalne rozszerzenie konstrukcji produktu i koproduktu na klasy morfizmów kategorii $\mathcal{C}$ – obserwację tę precyzujemy poniżej.

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 3 i niechaj

$$\Big(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda^\alpha, \{\pi_\lambda^\alpha\}_{\lambda\in\Lambda}\Big), \quad \alpha \in \{1,2\}$$

będą dwoma produktami odnośnych rodzin $X_\cdot^\alpha$. Dla dowolnej rodziny morfizmów $\chi_\cdot \in \mathcal{C}^{\widetilde{\Lambda}}(X_\cdot^1, X_\cdot^2)$ istnieje dokładnie jeden morfizm

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} \chi_\lambda \in \mathcal{C}\big(\prod_{\mu\in\Lambda} X_\mu^1, \prod_{\nu\in\Lambda} X_\nu^2\big),$$

który czyni poniższy diagram przemiennym

$$\begin{tikzcd}
\prod_{\mu\in\Lambda} X_\mu^1 \arrow[r, "\pi_\rho^1"] \arrow[d, "\prod_{\lambda\in\Lambda}\chi_\lambda"'] & X_\rho^1 \arrow[d, "\chi_\rho"] \\
\prod_{\nu\in\Lambda} X_\nu^2 \arrow[r, "\pi_\rho^2"'] & X_\rho^2
\end{tikzcd}$$

Morfizm ten określamy mianem **produktu rodziny morfizmów** $\chi_\cdot \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}^{\widetilde{\Lambda}}$.

Jeśli ponadto dany jest trzeci produkt

$$\Big(\prod_{\lambda\in\Lambda} X^3_\lambda, \{\pi^3_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\Big)$$

oraz rodzina morfizmów $\widetilde{\chi}_\cdot \in \mathcal{C}^{\widetilde{\Lambda}}(X^2_\cdot, X^3_\cdot)$, to dla zdefiniowanego przez nią produktu morfizmów $\prod_{\lambda\in\Lambda} \widetilde{\chi}_\lambda$ oraz dla $\prod_{\lambda\in\Lambda} \chi_\lambda$ zachodzi tożsamość

$$\big(\prod_{\lambda\in\Lambda} \widetilde{\chi}_\lambda\big) \circ \big(\prod_{\mu\in\Lambda} \chi_\mu\big) = \prod_{\lambda\in\Lambda} \big(\widetilde{\chi}_\lambda \circ \chi_\lambda\big)\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Teza jest prostą konsekwencją terminalnej natury produktu $\big(\prod_{\lambda\in\Lambda} X^2_\lambda,\ \{\pi^2_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\big)$ i jako taka jest pozostawiona Czytelnikowi jako proste zadanie do samodzielnego wykonania. □

Ostatnie stwierdzenie naturalnie uzupełnia

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 3 i niechaj

$$\Big(\coprod_{\lambda\in\Lambda} X^\alpha_\lambda, \{\jmath^\alpha_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\Big)\,, \qquad \alpha \in \{1,2\}$$

będą dwoma koproduktami odnośnych rodzin $X^\alpha_\cdot$. Dla dowolnej rodziny morfizmów $\chi_\cdot \in \mathcal{C}^{\widetilde{\Lambda}}(X^1_\cdot, X^2_\cdot)$ istnieje dokładnie jeden morfizm

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} \chi_\lambda \in \mathcal{C}\big(\coprod_{\mu\in\Lambda} X^1_\mu, \coprod_{\nu\in\Lambda} X^2_\nu\big)\,,$$

który czyni poniższy diagram przemiennym

$$\begin{tikzcd}
\prod_{\mu\in\Lambda} X^1_\mu \arrow[d, "\prod_{\lambda\in\Lambda} \chi_\lambda"'] & X^1_\rho \arrow[l, "\jmath^1_\rho"'] \arrow[d, "\chi_\rho"] \\
\prod_{\nu\in\Lambda} X^2_\nu & X^2_\rho \arrow[l, "\jmath^2_\rho"]
\end{tikzcd}$$

Morfizm ten określamy mianem **koproduktu rodziny morfizmów** $\chi_\cdot \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}^{\widetilde{\Lambda}}$.

Jeśli ponadto dany jest trzeci koprodukt

$$\Big(\coprod_{\lambda\in\Lambda} X^3_\lambda, \{\jmath^3_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\Big)$$

oraz rodzina morfizmów $\widetilde{\chi}_\cdot \in \mathcal{C}^{\widetilde{\Lambda}}(X^2_\cdot, X^3_\cdot)$, to dla zdefiniowanego przez nią koproduktu morfizmów $\coprod_{\lambda\in\Lambda} \widetilde{\chi}_\lambda$ oraz dla $\coprod_{\lambda\in\Lambda} \chi_\lambda$ zachodzi tożsamość

$$\big(\coprod_{\lambda\in\Lambda} \widetilde{\chi}_\lambda\big) \circ \big(\coprod_{\mu\in\Lambda} \chi_\mu\big) = \coprod_{\lambda\in\Lambda} \big(\widetilde{\chi}_\lambda \circ \chi_\lambda\big)\,.$$

<u>*Dowód:*</u> W pełni analogiczny do poprzedniego. □

Ilustracji wprowadzonych dotychczas pojęć i konstrukcji abstrakcyjnych dostarcza poniższy przykład, którego dokładne zrozumienie w części początkowej dotyczącej produktu stanowi podstawę szczegółowych rozważań poświęconych obiektom uniwersalnym w kategorii modułów nad pierścieniem.

Przykłady 2. Rozważmy strukturę algebraiczną rodzaju trywialnego (tj. „pustego"), której nośnikiem są zbiory bez jakichkolwiek wyróżnionych operacji wieloargumentowych i dla której homomorfizmami są dowolne odwzorowania między zbiorami. W tym szczególnym przypadku produktem zbiorów z rodziny indeksowanej $S_\cdot \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Set}^{\widetilde{\Lambda}}$ jest **produkt kartezjański** [KM76, Rozdz. IV § 6]

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda := \{\ f\ :\ \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \quad | \quad \forall_{\lambda\in\Lambda}\ :\ f(\lambda) \in S_\lambda\ \}$$

wraz z rodziną $\{\varpi_\lambda \coloneqq \mathrm{pr}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ rzutów kanonicznych na składowe S_λ,

$$\mathrm{pr}_\mu \; : \; \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \longrightarrow S_\mu \; : \; f \longmapsto f(\mu)\,.$$

Należy zwrócić uwagę, że w przypadku skończonego zbioru indeksów $\Lambda \equiv \overline{1,n}$ produkt kartezjański sprowadza się do standardowego iloczynu kartezjańskiego[2] i zapisuje w postaci

$$\times_{k=1}^n S_k = \{\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad | \quad \forall_{k\in\overline{1,n}} \; : \; x_k \in S_k\ \}\,,$$

przy czym

$$\mathrm{pr}_l \; : \; \times_{k=1}^n S_k \longrightarrow S_l \; : \; (x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto x_l\,.$$

Dla dowolnej rodziny odwzorowań

$$\{f_\lambda \; : \; X \longrightarrow S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$$

znajdujemy jedyne odwzorowanie

$$\Phi \; : \; X \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \tag{3}$$

o własności (1), a mianowicie

$$x \longmapsto \Phi(x)\,, \qquad \Phi(x)(\lambda) \coloneqq f_\lambda(x)\,.$$

Koproduktem jest tutaj natomiast **suma rozłączna**[3]

$$\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \coloneqq \{\ (x,\lambda) \quad | \quad x \in S_\lambda \ \wedge \ \lambda \in \Lambda\ \}$$

wraz z injekcjami (włączeniami) kanonicznymi

$$\jmath_\mu \; : \; S_\mu \longrightarrow \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \; : \; x \longmapsto (x,\mu)\,.$$

Z dowolną rodziną odwzorowań

$$\{g_\lambda \; : \; S_\lambda \longrightarrow Y\}_{\lambda\in\Lambda}$$

stowarzyszamy jedyne odwzorowanie

$$\Psi \; : \; \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \longrightarrow Y$$

o własności (2), a mianowicie

$$(x,\lambda) \longmapsto \Psi(x,\lambda) \coloneqq g_\lambda(x)\,.$$

3.2. **Produkt i suma prosta w kategorii liniowej.** Zwieńczeniem obecnej dyskusji jest szczegółowe *wyprowadzenie* postaci produktu i koproduktu w kategorii modułów nad pierścieniem przemiennym R.

Definicja 4. Przyjmijmy zapis Def. 3 oraz Przykł. 2. Niechaj $G. \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_R^{\widetilde{\Lambda}}$ będzie rodziną modułów nad pierścieniem R. **Produkt modułów z rodziny** $G.$ to para

$$(\mathscr{M}^\sqcap, \{\mathrm{pr}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})\,, \qquad \mathscr{M}^\sqcap \coloneqq \left(\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda, \phi_2^\sqcap, \phi_1^\sqcap, \phi_0^\sqcap\right), \ell^\sqcap\right)\,,$$

w której $\phi_n^\sqcap,\ n \in \{0,1,2\}$ to *kanonicznie indukowane* operacje grupowe, $\ell^\sqcap$ zaś to *kanonicznie indukowane* działanie R na produkcie kartezjańskim $\prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$, które czynią z $(\mathscr{M}^\sqcap, \{\mathrm{pr}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ produkt rodziny $G.$ w rozumieniu Def. 3.

[2]Por. uwagi pod definicją w traktacie Kuratowskiego i Mostowskiego, jak również Konw. **??**.

[3]*N.B.* Ilekroć $x \in S_\lambda \cap S_\mu,\ \lambda \neq \mu$, wówczas $(x,\lambda) \neq (x,\mu)$.

Poświęcimy obecnie trochę czasu na bezpośrednie uzasadnienie i wyjaśnienie powyższej definicji w odwołaniu do wcześniejszej definicji produktu jako morfizmu terminalnego. Oto więc rozważamy zbiór $G^\sqcap := \prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ z rzutami kanonicznymi $\mathrm{pr}_\lambda : G^\sqcap \longrightarrow G_\lambda$. Dodawania grupowe[4]

$$+_\lambda := \phi_2^{(\lambda)} \;:\; G_\lambda \times G_\lambda \longrightarrow G_\lambda$$

zadają – dla dowolnego indeksu $\lambda \in \Lambda$ – odwzorowania

$$\phi_2^{(\lambda)} \circ (\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda) \;:\; G^\sqcap \times G^\sqcap \longrightarrow G_\lambda\,,$$

co wobec terminalności pary $(G^\sqcap, \{\mathrm{pr}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, w której $G^\sqcap$ traktowane jest jako struktura trywialna (czyli obiekt **Set**), oznacza istnienie jedynego odwzorowania (*a priori* bez dodatkowych własności względem operacji grupowych i działań określonych dla poszczególnych składowych rodziny)

$$\phi_2^\sqcap \;:\; G^\sqcap \times G^\sqcap \longrightarrow G^\sqcap$$

o własności

$$\mathrm{pr}_\lambda \circ \phi_2^\sqcap = \phi_2^{(\lambda)} \circ (\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda)\,. \tag{4}$$

Zauważmy, że jeśli tylko $\phi_2^\sqcap$ jest poprawnie określonym dodawaniem na $G^\sqcap$ a rzuty pr_λ są homomorfizmami grup transportującymi owo dodawanie w dodawanie w poszczególnych składowych G_λ, czego nie gwarantuje ich wyjściowy status (morfizmów w kategorii **Set**) i czego zatem mozolnie dowodzimy poniżej, to tożsamość (4) identyfikuje operację $\phi_2^\sqcap$ jako „dodawanie po współrzędnych”. Łatwo przy tym stwierdzamy, że homomorficzność rzutów, czyli ich promocja do rangi morfizmów w kategorii **AbGrp**, wynika bezpośrednio z założenia, że $\phi_2^\sqcap =: +_\sqcap$ jest pożądaną operacją grupową, oto bowiem (4) implikuje równość

$$\mathrm{pr}_\lambda(g +_\sqcap h) = \mathrm{pr}_\lambda(g) +_\lambda \mathrm{pr}_\lambda(h)\,,$$

słuszną dla dowolnych dwóch elementów $g, h \in G^\sqcap$ a oznaczającą właśnie, że pr_λ są homomorfizmami grup. Wystarcza zatem sprawdzić definiujące własności dodawania grupowego w odniesieniu do odwzorowania $\phi_2^\sqcap$. W pierwszej kolejności zbadamy jego łączność. Biorąc dowolne $g, h, k \in G^\sqcap$, obliczamy – wykorzystując po drodze (przy przejściu z linii 2. do linii 3.) łączność operacji $\phi_2^{(\lambda)}$ –

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}_\lambda \circ \phi_2^\sqcap\,(\phi_2^\sqcap(g,h),k) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda)\,(\phi_2^\sqcap(g,h),k) \equiv \phi_2^{(\lambda)}\,(\mathrm{pr}_\lambda \circ \phi_2^\sqcap(g,h), \mathrm{pr}_\lambda(k)) \\
&= \phi_2^{(\lambda)}\left(\phi_2^{(\lambda)} \circ (\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda)(g,h), \mathrm{pr}_\lambda(k)\right) \equiv \phi_2^{(\lambda)}\left(\phi_2^{(\lambda)}\,(\mathrm{pr}_\lambda(g), \mathrm{pr}_\lambda(h))\,, \mathrm{pr}_\lambda(k)\right) \\
&= \phi_2^{(\lambda)}\left(\mathrm{pr}_\lambda(g), \phi_2^{(\lambda)}\,(\mathrm{pr}_\lambda(h), \mathrm{pr}_\lambda(k))\right) \equiv \phi_2^{(\lambda)}\left(\mathrm{pr}_\lambda(g), \phi_2^{(\lambda)} \circ (\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda)(h,k)\right) \\
&= \phi_2^{(\lambda)}\,(\mathrm{pr}_\lambda(g), \mathrm{pr}_\lambda \circ \phi_2^\sqcap(h,k)) \equiv \phi_2^{(\lambda)} \circ (\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda)\,(g, \phi_2^\sqcap(h,k)) \\
&= \mathrm{pr}_\lambda \circ \phi_2^\sqcap\,(g, \phi_2^\sqcap(h,k))\,.
\end{aligned}$$

Tym sposobem otrzymujemy dwa odwzorowania

$$G^\sqcap \times G^\sqcap \times G^\sqcap \underset{\phi_2^\sqcap \circ (\mathrm{id}_{G^\sqcap} \times \phi_2^\sqcap)}{\overset{\phi_2^\sqcap \circ (\phi_2^\sqcap \times \mathrm{id}_{G^\sqcap})}{\rightrightarrows}} G^\sqcap \xrightarrow{\quad \mathrm{pr}_\lambda \quad} G_\lambda\,,$$

których obrazy pokrywają się, dając odwzorowanie $\phi_2^{(\lambda)} \circ (\mathrm{id}_{G_\lambda} \times \phi_2^{(\lambda)}) \circ (\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda)$. Raz jeszcze przywołując terminalność pary $(G^\sqcap, \{\mathrm{pr}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, wnioskujemy, że istnieje dokładnie jedno odwzorowanie

$$\alpha^\sqcap \;:\; G^\sqcap \times G^\sqcap \times G^\sqcap \longrightarrow G^\sqcap$$

przez nie indukowane, które spełnia tożsamość

$$\mathrm{pr}_\lambda \circ \alpha^\sqcap = \phi_2^{(\lambda)} \circ (\mathrm{id}_{G_\lambda} \times \phi_2^{(\lambda)}) \circ (\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda)\,,$$

[4]Opisywana konstrukcja produktu po opuszczeniu działań składowych $\ell^{(\lambda)}$ stosuje się także do grup nieprzemiennych.

a ponieważ zarówno $\phi_2^\sqcap \circ (\phi_2^\sqcap \times \mathrm{id}_{G^\sqcap})$, jak i $\phi_2^\sqcap \circ (\mathrm{id}_{G^\sqcap} \times \phi_2^\sqcap)$ spełniają ten warunek, przeto koniecznie

$$\phi_2^\sqcap \circ (\phi_2^\sqcap \times \mathrm{id}_{G^\sqcap}) = \alpha^\sqcap = \phi_2^\sqcap \circ (\mathrm{id}_{G^\sqcap} \times \phi_2^\sqcap) ,$$

co dowodzi łączności $\phi_2^\sqcap$.

Analogicznie wykazujemy przemienność $\phi_2^\sqcap$, korzystając z przemienności $\phi_2^{(\lambda)}$. Oto bowiem, dla dowolnych $g, h \in G^\sqcap$,

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_\lambda \circ (\phi_2^\sqcap \circ \tau_{G^\sqcap}(g,h)) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda)(h,g) \equiv \phi_2^{(\lambda)} (\mathrm{pr}_\lambda(h), \mathrm{pr}_\lambda(g)) \\ &= \phi_2^{(\lambda)} (\mathrm{pr}_\lambda(g), \mathrm{pr}_\lambda(h)) \equiv \phi_2^{(\lambda)} \circ (\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda)(g,h) \\ &= \mathrm{pr}_\lambda \circ \phi_2^\sqcap(g,h) , \end{aligned}$$

skąd równość odwzorowań

$$G^\sqcap \times G^\sqcap \overset{\phi_2^\sqcap \circ \tau_{G^\sqcap}}{\underset{\phi_2^\sqcap}{\rightrightarrows}} G^\sqcap \xrightarrow{\mathrm{pr}_\lambda} G_\lambda ,$$

tożsamych z $\phi_2^{(\lambda)} \circ (\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda)$, czyli wobec jednoznaczności określenia indukowanego przezeń odwzorowania

$$\beta^\sqcap : G^\sqcap \times G^\sqcap \longrightarrow G^\sqcap$$

o własności

$$\mathrm{pr}_\lambda \circ \beta^\sqcap = \phi_2^{(\lambda)} \circ (\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda)$$

mamy pożądaną identyczność

$$\phi_2^\sqcap \circ \tau_{G^\sqcap} = \beta^\sqcap = \phi_2^\sqcap .$$

Następnie rozważamy elementy neutralne w każdej z grup składowych,

$$\phi_0^{(\lambda)} : \{\bullet\} \longrightarrow G_\lambda : \bullet \longmapsto e_\lambda ,$$

i zapominając jak uprzednio o strukturze algebraicznej na rozważanych zbiorach, stowarzyszamy z nimi jedyne odwzorowanie

$$\phi_0^\sqcap : \{\bullet\} \longrightarrow G^\sqcap : \bullet \longmapsto e^\sqcap$$

o własności

$$\mathrm{pr}_\lambda \circ \phi_0^\sqcap = \phi_0^{(\lambda)} .$$

W ten sposób wyróżniamy element $e^\sqcap$ zbioru $G^\sqcap$, o sugestywnej postaci uogólnionego ciągu (o indeksach z Λ) elementów neutralnych z grup składowych. Jego własności względem dodawania $\phi_2^\sqcap$ sprawdzamy w bezpośrednim rachunku. Biorąc dowolny element $g \in G^\sqcap$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_\lambda \circ \phi_2^\sqcap(e^\sqcap, g) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda)(e^\sqcap, g) \equiv \phi_2^{(\lambda)} (\mathrm{pr}_\lambda \circ \phi_0^\sqcap(\bullet), \mathrm{pr}_\lambda(g)) \\ &= \phi_2^{(\lambda)} \left(\phi_0^{(\lambda)}(\bullet), \mathrm{pr}_\lambda(g)\right) \equiv \phi_2^{(\lambda)} (e_\lambda, \mathrm{pr}_\lambda(g)) = \mathrm{pr}_\lambda(g) \\ &\equiv \mathrm{pr}_\lambda \circ \mathrm{pr}_2(e^\sqcap, g) , \end{aligned}$$

stąd zaś równość odwzorowań

$$\{\bullet\} \times G^\sqcap \overset{\phi_2^\sqcap \circ (\phi_0^\sqcap \times \mathrm{id}_{G^\sqcap})}{\underset{\mathrm{pr}_2}{\rightrightarrows}} G^\sqcap \xrightarrow{\mathrm{pr}_\lambda} G_\lambda ,$$

pokrywających się z $\phi_2^{(\lambda)} \circ (\phi_0^{(\lambda)} \times \mathrm{pr}_\lambda)$. Znowu więc znajdujemy jedyne odwzorowanie

$$\varepsilon^\sqcap : \{\bullet\} \times G^\sqcap \longrightarrow G^\sqcap$$

spełniające warunek

$$\mathrm{pr}_\lambda \circ \varepsilon^\sqcap = \phi_2^{(\lambda)} \circ (\phi_0^{(\lambda)} \times \mathrm{pr}_\lambda) ,$$

a zatem

$$\phi_2^\sqcap \circ (\phi_0^\sqcap \times \mathrm{id}_{G^\sqcap}) = \varepsilon^\sqcap = \mathrm{pr}_2 \,.$$

Podobnie dowodzimy tożsamości

$$\phi_2^\sqcap \circ (\mathrm{id}_{G^\sqcap} \times \phi_0^\sqcap) = \mathrm{pr}_1 \,,$$

co w sumie pokazuje dowodnie, że $e^\sqcap$ jest elementem neutralnym dodawania $\phi_2^\sqcap$.

Bez trudu rekonstruujemy też operację brania przeciwności w $G^\sqcap$, biorąc za punkt wyjścia odnośne operacje w składowych

$$\phi_1^{(\lambda)} \ : \ G_\lambda \circlearrowleft \,.$$

Rozumując jak wcześniej, tworzymy rodzinę odwzorowań

$$\phi_1^{(\lambda)} \circ \mathrm{pr}_\lambda \ : \ G^\sqcap \longrightarrow G_\lambda \,,$$

z którymi możemy związać jedyne odwzorowanie

$$\phi_1^\sqcap \ : \ G^\sqcap \circlearrowleft$$

o własności

$$\mathrm{pr}_\lambda \circ \phi_1^\sqcap = \phi_1^{(\lambda)} \circ \mathrm{pr}_\lambda \,,$$

która identyfikuje $\phi_1^\sqcap$ jako „branie przeciwności po współrzędnych”. Trzeba jeszcze tylko upewnić się, że odwzorowanie to nadaje monoidowi przemiennemu $(G^\sqcap, \phi_2^\sqcap, \phi_0^\sqcap)$ strukturę grupy przemiennej. Z rachunku

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}_\lambda \circ \phi_2^\sqcap \left(\phi_1^\sqcap(g), g\right) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda) \left(\phi_1^\sqcap(g), g\right) \equiv \phi_2^{(\lambda)} \left(\mathrm{pr}_\lambda \circ \phi_1^\sqcap(g), \mathrm{pr}_\lambda(g)\right) \\
&= \phi_2^{(\lambda)} \Big(\phi_1^{(\lambda)} \circ \mathrm{pr}_\lambda(g), \mathrm{pr}_\lambda(g)\Big) = e^{(\lambda)} = \phi_0^{(\lambda)}(\bullet) = \mathrm{pr}_\lambda \circ \phi_0^\sqcap(\bullet) \,,
\end{aligned}$$

wykonanego dla dowolnego $g \in G^\sqcap$ a wskazującego na równość odwzorowań

$$\{\bullet\} \times G^\sqcap \underset{\phi_0^\sqcap \circ \mathrm{pr}_1}{\overset{\phi_2^\sqcap \circ (\phi_1^\sqcap, \mathrm{id}_{G^\sqcap}) \circ \mathrm{pr}_2}{\rightrightarrows}} G^\sqcap \xrightarrow{\quad \mathrm{pr}_\lambda \quad} G_\lambda \,,$$

identycznych z $\phi_0^{(\lambda)} \circ \mathrm{pr}_1$, wywodzimy wniosek o istnieniu jedynego odwzorowania

$$\mu^\sqcap \ : \ \{\bullet\} \times G^\sqcap \longrightarrow G^\sqcap$$

o własności

$$\mathrm{pr}_\lambda \circ \mu^\sqcap = \phi_0^{(\lambda)} \circ \mathrm{pr}_1 \,.$$

Ostatecznie więc stwierdzamy słuszność tożsamości

$$\phi_2^\sqcap \circ (\phi_1^\sqcap, \mathrm{id}_{G^\sqcap}) \circ \mathrm{pr}_2 = \mu^\sqcap = \phi_0^\sqcap \circ \mathrm{pr}_1 \,.$$

Analogiczne wnioskowanie prowadzi do jej symetrycznego odpowiednika

$$\phi_2^\sqcap \circ (\mathrm{id}_{G^\sqcap}, \phi_1^\sqcap) \circ \mathrm{pr}_2 = \mu^\sqcap = \phi_0^\sqcap \circ \mathrm{pr}_1 \,,$$

co potwierdza identyfikację $\phi_1^\sqcap$ jako operacji brania przeciwności.

Na koniec wreszcie indukujemy na zrekonstruowanej powyżej grupie przemiennej strukturę modułu nad pierścieniem R ze struktur składowych. W tym celu z każdego z działań

$$\ell^{(\lambda)} \ : \ R \times G_\lambda \longrightarrow G_\lambda$$

budujemy odwzorowanie

$$\ell^{(\lambda)} \circ (\mathrm{id}_R \times \mathrm{pr}_\lambda) \ : \ R \times G^\sqcap \longrightarrow G_\lambda \,,$$

co daje nam jedyne odwzorowanie

$$\ell^\sqcap \ : \ R \times G^\sqcap \longrightarrow G^\sqcap$$

o własności

$$\mathrm{pr}_\lambda \circ \ell^\sqcap = \ell^{(\lambda)} \circ (\mathrm{id}_R \times \mathrm{pr}_\lambda) \,.$$

Z tej ostatniej odczytujemy definicję $\ell^{\sqcap}$ jako „działania po współrzędnych". W żmudnym, lecz poza tym absolutnie trywialnym rachunku przekonujemy się, że tak zdefiniowane odwzorowanie spełnia aksjomaty działania, i tym samym zamykamy kanoniczną konstrukcję modułu na produkcie kartezjańskim $G^{\sqcap}$.

Na zakończenie dyskusji struktury produktu modułów należy podkreślić, że odwzorowanie Φ wskazane w Równ. (3), którego istnienie zapewnia, dla zadanej rodziny $f. \in \mathrm{Hom}\,\mathbf{Mod}_R^{\widetilde{\Lambda}}$, terminalny charakter produktu nośników $G_\lambda \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Set}$ struktury (lewego) R-modułu *w kategorii* $\mathbf{Set}^{(\widetilde{\Lambda})}$, jest automatycznie R-liniowe, czyli podnosi się do kategorii $\mathbf{Mod}_R^{(\widetilde{\Lambda})}$. Istotnie, wprost na mocy jego definicji i z racji R-liniowości składowych f_λ otrzymujemy tożsamość

$$\begin{aligned}\Phi(r_1 \triangleright_X x_1 +_X r_2 \triangleright_X x_2)(\lambda) &\equiv \mathrm{pr}_\lambda \circ \Phi(r_1 \triangleright_X x_1 +_X r_2 \triangleright_X x_2) = f_\lambda(r_1 \triangleright_X x_1 +_X r_2 \triangleright_X x_2) \\ &= r_1 \triangleright_\lambda f_\lambda(x_1) +_\lambda r_2 \triangleright_\lambda f_\lambda(x_2) \\ &= r_1 \triangleright_\lambda \mathrm{pr}_\lambda \circ \Phi(x_1) +_\lambda r_2 \triangleright_\lambda \mathrm{pr}_\lambda \circ \Phi(x_2) \\ &= \big(r_1 \triangleright_\lambda \Phi(x_1) +_\lambda r_2 \triangleright_\lambda \Phi(x_2)\big)(\lambda),\end{aligned}$$

prawdziwą dla dowolnych $x_1, x_2 \in X (\in \mathrm{Ob}\mathbf{Mod}_R)$ i $r_1, r_2 \in R$ oraz $\lambda \in \Lambda$, zatem także zapowiedzianą konstatację R-liniowości

$$\Phi(r_1 \triangleright_X x_1 +_X r_2 \triangleright_X x_2) = r_1 \triangleright_\lambda \Phi(x_1) +_\lambda r_2 \triangleright_\lambda \Phi(x_2).$$

O ile konstrukcja produktu modułów postępuje automatycznie po dokonaniu narzucającego się wyboru nośnika $G^{\sqcap}$, o tyle konstrukcja koproduktu, który będziemy w dalszej części kursu nazywać sumą prostą modułów, wymaga pewnej dozy inwencji oraz rozlicznych sprawdzeń (jednoznaczności konstrukcji). Zaznaczamy zawczasu, że poniższa konstrukcja stosuje się wyłącznie do grup przemiennych, co będziemy podkreślać pisząc e_λ w notacji addytywnej jako 0_λ.

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Def. 3 i 4. **Suma prosta modułów z rodziny** $G.$ to para

$$(\mathscr{M}^{\sqcup}, \{\jmath_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}), \qquad \mathscr{M}^{\oplus} := \left(\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda, \phi_2^{\sqcap}, \phi_1^{\sqcap}, \phi_0^{\sqcap}\right), \ell^{\sqcap}\right),$$

w której $\mathscr{M}^{\oplus}$ jest podmodułem produktu modułów $\mathscr{M}^{\sqcap}$ z rodziny $G.$ o nośniku

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda := \{\, g \in G^{\sqcap} \quad | \quad |\{\, \lambda \in \Lambda \quad | \quad \mathrm{pr}_\lambda(g) \neq 0_\lambda \,\}| < \infty \,\} \tag{5}$$

(czyli $\mathrm{pr}_\lambda(g)$ jest elementem neutralnym dla prawie wszystkich indeksów) i w której $\jmath_\lambda : G_\lambda \longrightarrow G^{\sqcap}$ są injekcjami kanonicznymi spełniającymi warunki

$$\forall_{\lambda,\mu\in\Lambda}\ \forall_{g_\mu\in G_\mu} \ :\ \mathrm{pr}_\lambda \circ \jmath_\mu(g_\mu) := \begin{cases} g_\mu & \text{dla } \lambda = \mu \\ \mathbf{0}_\lambda & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{cases}. \tag{6}$$

Pokażemy najpierw, że odwzorowania $\jmath_\lambda$ są homomorfizmami oraz że mają cechę uniwersalności. Na początku ustalmy (dowolnie) indeks $\mu \in \Lambda$ i obliczmy – dla dowolnych $g_\mu, h_\mu \in G_\mu$ –

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}_\lambda \circ \phi_2^{\sqcap} \circ (\jmath_\mu \times \jmath_\mu)(g_\mu, h_\mu) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda) \circ (\jmath_\mu \times \jmath_\mu)(g_\mu, h_\mu) \\ &= \phi_2^{(\lambda)} \circ \big((\mathrm{pr}_\lambda \circ \jmath_\mu) \times (\mathrm{pr}_\lambda \circ \jmath_\mu)\big)(g_\mu, h_\mu) \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} \phi_2^{(\mu)}(g_\mu, h_\mu) & \text{dla } \lambda = \mu \\ \phi_2^{(\lambda)}(\mathbf{0}_\lambda, \mathbf{0}_\lambda) = \mathbf{0}_\lambda & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{array} \right\} \\ &= \mathrm{pr}_\lambda \circ \jmath_\mu \circ \phi_2^{(\mu)}(g_\mu, h_\mu),\end{aligned}$$

dowodząc tym samym równości dwóch rodzin odwzorowań

$$\begin{tikzcd} G_\mu \times G_\mu \arrow[r, shift left, "\phi_2^{\sqcap}\circ(\jmath_\mu\times\jmath_\mu)"] \arrow[r, shift right, "\jmath_\mu\circ\phi_2^{(\mu)}"'] & G^{\sqcap} \arrow[r, "\mathrm{pr}_\lambda"] & G_\lambda \end{tikzcd}$$

identycznych z $\psi_\lambda \,:\, (g_\mu, h_\mu) \longmapsto \begin{cases} \phi_2^{(\mu)}(g_\mu, h_\mu) & \text{dla } \lambda = \mu \\ \mathbf{0}_\lambda & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{cases}$. W konsekwencji terminalności pary $(G^\sqcap, \{\mathrm{pr}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ równość ta implikuje istnienie jedynej rodziny odwzorowań

$$\alpha_\mu \,:\, G_\mu \times G_\mu \longrightarrow G^\sqcap\,, \qquad \mu \in \Lambda$$

o własności

$$\forall_{\lambda\in\Lambda} \,:\, \mathrm{pr}_\lambda \circ \alpha_\mu = \psi_\lambda\,.$$

Na tej podstawie wnioskujemy o równości

$$\phi_2^\sqcap \circ (\jmath_\mu \times \jmath_\mu) = \jmath_\mu \circ \phi_2^{(\mu)}\,,$$

która wyraża homomorficzny charakter $\jmath_\mu$. Dowód uniwersalności $\jmath_\lambda$ wymaga, iżbyśmy z dowolną rodziną homomorfizmów grup (przemiennych)

$$\chi_\lambda \,:\, G_\lambda \longrightarrow Y\,, \qquad \lambda \in \Lambda$$

określoną dla dowolnej grupy przemiennej Y potrafili stowarzyszyć odwzorowanie

$$H \,:\, \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \longrightarrow Y$$

spełniające relacje

$$\forall_{\lambda\in\Lambda} \,:\, H \circ \jmath_\lambda = \chi_\lambda\,, \tag{7}$$

dowodząc przy tym, że odwzorowanie o tej własności jest dane jednoznacznie. Postulujemy, dla dowolnego $g \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$,

$$H(g) := \sum_{\lambda\in\Lambda} \chi_\lambda \circ \mathrm{pr}_\lambda(g)\,.$$

Zauważmy, że suma w powyższej definicji jest skończona, por. (5), zatem definicja ma sens i możemy ją zapisać w postaci

$$H = \sum_{\lambda\in\Lambda} \chi_\lambda \circ \mathrm{pr}_\lambda \restriction_{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda}\,,$$

a nadto – że tak zdefiniowane odwzrorowanie jest homomorfizmem grup przemiennych, bo status ten mają wszystkie odwzorowania pr_λ i χ_λ. Sprawdzamy też bez trudu relację (7), wybrawszy dowolnie $g_\lambda \in G_\lambda$,

$$\begin{aligned} H \circ \jmath_\lambda(g_\lambda) &= \sum_{\mu\in\Lambda} \chi_\mu \circ \mathrm{pr}_\mu \circ \jmath_\lambda(g_\lambda) \equiv \chi_\lambda \circ \mathrm{pr}_\lambda \circ \jmath_\lambda(g_\lambda) +_Y \sum_{\mu\in\Lambda\setminus\{\lambda\}} \chi_\mu \circ \mathrm{pr}_\mu \circ \jmath_\lambda(g_\lambda) \\ &= \chi_\lambda(g_\lambda) +_Y \sum_{\mu\in\Lambda\setminus\{\lambda\}} \chi_\mu(\mathbf{0}_\mu) = \chi_\lambda(g_\lambda)\,. \end{aligned}$$

Dowodzimy następnie jedyności H. Niechaj $\widetilde{H} \,:\, \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \longrightarrow Y$ będzie dowolnym innym takim odwzorowaniem, a wtedy różnica odwzorowań

$$H - \widetilde{H} \,:\, \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \longrightarrow Y \,:\, g \longmapsto H(g) +_Y \mathsf{P}_Y \circ \widetilde{H}(g)\,,$$

będąca homomorfizmem grup przemiennych (przypomnijmy, że rzuty kanoniczne są homomorfizmami grup przemiennych), spełnia tożsamości

$$(H - \widetilde{H}) \circ \jmath_\lambda(g_\lambda) = H \circ \jmath_\lambda(g_\lambda) +_Y \mathsf{P}_Y \left(\widetilde{H} \circ \jmath_\lambda(g_\lambda)\right) = \chi_\lambda(g_\lambda) +_Y \mathsf{P}_Y\,(\chi_\lambda(g_\lambda)) = \mathbf{0}_Y\,.$$

Możemy stąd wyciągnąć prosty wniosek:

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \jmath_\lambda(G_\lambda) \subset \mathrm{Ker}\,(H - \widetilde{H})\,.$$

Jednakowoż $\mathrm{Ker}\,(H - \widetilde{H})$ jest podgrupą $\oplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$, tj. podzbiorem domkniętym ze względu na operację brania skończonych sum jego elementów, każdy zaś element $g \in \oplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ jest taką właśnie sumą skończoną elementów z różnych $\jmath_\lambda(G_\lambda)$. Ażeby się o tym przekonać, rozważmy odwzorowanie

$$\iota^\oplus \,:\, \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \circlearrowleft \,:\, g \longmapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} \jmath_\lambda \circ \mathrm{pr}_\lambda(g)\,,$$

które jest dobrze określone z tych samych powodów co H i które wobec homomorficzności rzutów kanonicznych spełnia tożsamości

$$\mathrm{pr}_\lambda \circ \iota^\oplus(g) \equiv \mathrm{pr}_\lambda \circ \sum_{\mu\in\Lambda} \jmath_\mu \circ \mathrm{pr}_\mu(g) = \sum_{\mu\in\Lambda} (\mathrm{pr}_\lambda \circ \jmath_\mu)\big(\mathrm{pr}_\mu(g)\big) = \mathrm{pr}_\lambda(g) \equiv \mathrm{pr}_\lambda \circ \mathrm{id}_{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda}(g)\,.$$

Te ostatnie – jak w poprzednio dyskutowanych przypadkach (tj. w konsekwencji terminalności produktu kartezjańskiego) – prowadzą do równości

$$\iota^\oplus = \mathrm{id}_{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda}\,, \tag{8}$$

zadającej rzeczony rozkład g na skończoną sumę

$$g = \sum_{\lambda\in\Lambda} \jmath_\lambda \circ \mathrm{pr}_\lambda(g)\,. \tag{9}$$

Wracając do zasadniczego wywodu, stwierdzamy, że jedynym podzbiorem $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ zawierającym $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \jmath_\lambda(G_\lambda)$ i domkniętym względem operacji brania sum skończonych jest cały zbiór $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$,

$$\mathrm{Ker}\,(H - \widetilde{H}) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda\,,$$

czyli też ostatecznie

$$H = \widetilde{H}\,.$$

Należy podkreślić, że nigdzie w dotychczasowej dyskusji koproduktu nie braliśmy pod uwagę dodatkowej struktury R-modułu na nośniku grupy przemiennej, możemy przeto podsumować tę jej część stwierdzeniem, że oto czwórka

$$\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda, \phi_2^\sqcap, \phi_1^\sqcap, \phi_0^\sqcap\right)$$

stanowi spójną definicję sumy prostej grup przemiennych. Jako że działanie pierścienia R w jawny sposób zachowuje podgrupę $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \subset G^\sqcap$, dla naszych celów wystarczy jeszcze tylko upewnić się, że zarówno injekcje kanoniczne $\jmath_\lambda$, jak też jedyny homomorfizm grup H są odwzorowaniami R-liniowymi. W tym drugim przypadku własność ta jest bezpośrednim następstwem R-liniowości rzutów kanonicznych pr_λ oraz odwzorowań χ_λ. W przypadku pierwszym R-liniowości stwierdzamy na gruncie terminalności produktu kartezjańskiego oraz dowiedzionych własności odwzorowań $\ell^\sqcap$ i $\ell^{(\lambda)}$, stosując sprawdzoną strategię rozważań wcześniejszych. Punktem wyjścia jest obserwacja (wysłowiona dla dowolnych $\lambda, \mu \in \Lambda$ oraz $(r, g_\mu) \in R \times G_\mu$)

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_\lambda \circ \ell^\sqcap \circ (\mathrm{id}_R \times \jmath_\mu)(r, g_\mu) &= \ell^{(\lambda)} \circ (\mathrm{id}_R \times \mathrm{pr}_\lambda) \circ (\mathrm{id}_R \times \jmath_\mu)(r, g_\mu) \\ &\equiv \ell^{(\lambda)} \circ (\mathrm{id}_R \times \mathrm{pr}_\lambda \circ \jmath_\mu)(r, g_\mu) = (\mathrm{pr}_\lambda \circ \jmath_\mu) \circ \ell^{(\mu)}(r, g_\mu)\,, \end{aligned}$$

wskazująca na równość dwóch rodzin odwzorowań

$$R \times G_\mu \overset{\ell^\sqcap \circ (\mathrm{id}_R \times \jmath_\mu)}{\underset{\jmath_\mu \circ \ell^{(\mu)}}{\rightrightarrows}} \bigoplus_{\nu\in\Lambda} G_\nu \xrightarrow{\ \mathrm{pr}_\lambda\ } G_\lambda\,,$$

identycznych z $r_\lambda \;:\; (r, g_\mu) \longmapsto \begin{cases} \ell^{(\mu)}(r, g_\mu) & \text{dla } \lambda = \mu \\ 0_\lambda & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{cases}$. Terminalność pary $(G^\sqcap, \{\mathrm{pr}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ przesądza w tej sytuacji o istnieniu jedynej rodziny odwzorowań

$$\rho_\mu \;:\; R \times G_\mu \longrightarrow \bigoplus_{\nu\in\Lambda} G_\nu \subset G^\sqcap$$

o własności

$$\forall_{\lambda\in\Lambda} \;:\; \mathrm{pr}_\lambda \circ \rho_\mu = r_\lambda\,.$$

Stąd ostatecznie wyprowadzamy pożądaną równość

$$\jmath_\lambda \circ \ell^{(\lambda)} = \ell^\sqcap \circ (\mathrm{id}_R \times \jmath_\lambda)$$

wyrażającą R-liniowość injekcji kanonicznych.

3.3. **Iloczyn tensorowy.** Narzędzia formalne pozyskane dotychczas pozwalają nam wprowadzić nową, *wielo*liniową strukturę algebraiczną, o fundamentalnym znaczeniu dla konstrukcji algebr Clifforda i ich modułów, więc obiektów, których dyskusji jest poświęcony niniejszy cykl wykładów. Strukturę tę definiujemy i badamy poniżej.

Zaczynamy od wprowadzającej

Definicja 6. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i ustalmy $R \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Ring}$. Niechaj $G_1 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R^{\mathrm{op}}}$, $G_2 \in \mathbf{Mod}_R$ oraz $H \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{AbGrp}$ i niech $\varphi : G_1 \times G_2 \longrightarrow H$ będzie **dwu-$\mathbb{Z}$-liniowe** (czyli dwuaddytywne), tj.

$$\forall_{g_1,g_2 \in G_1}\ \forall_{g_3 \in G_2}\ :\ \varphi(g_1 +_1 g_2, g_3) = \varphi(g_1, g_3) +_H \varphi(g_2, g_3)\,,$$

$$\forall_{h_1 \in G_1}\ \forall_{h_2,h_3 \in G_2}\ :\ \varphi(h_1, h_2 +_2 h_3) = \varphi(h_1, h_2) +_H \varphi(h_1, h_3)\,.$$

Odwzorowanie φ nazywamy **śród-R-liniowym**, jeśli spełnia dodatkowy warunek **śród-R-jednorodności**

$$\forall_{(r,g_1,g_2) \in R \times G_1 \times G_2}\ :\ \varphi(g_1 \triangleleft r, g_2) = \varphi(g_1, r \triangleright g_2)\,.$$

Odwzorowania śród-R-liniowe dla ustalonej pary (G_1, G_2) tworzą kategorię ${}^{G_1}L^{G_2}$, której obiektami są pary (H, φ) złożone z $H \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{AbGrp}$ i odwzorowania śród-R-liniowego $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(G_1 \times G_2, H)$, morfizmami zaś – dla ustalonych obiektów $(H_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$, utworzonych przez $H_\alpha \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{AbGrp}$ i odwzorowania śród-R-liniowe $\varphi_\alpha : G_1 \times G_2 \longrightarrow H_\alpha$ – odwzorowania

$$\mathrm{Hom}_{{}^{G_1}L^{G_2}}\big((H_1, \varphi_1), (H_2, \varphi_2)\big) = \big\{\ \chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{AbGrp}}(H_1, H_2)\quad|\quad \varphi_2 = \chi \circ \varphi_1\ \big\}\,.$$

Przykłady 3. Fundamentalnym przykładem odwzorowania śród-R-liniowego jest mnożenie w pierścieniu R, przy czym R traktujemy tutaj jako kanoniczny lewy $({}_R R)$ i prawy (R_R) R-moduł.

Możemy już teraz wprowadzić obiekt podstawowy naszych rozważań:

Definicja 7. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. **Iloczyn tensorowy nad R** prawego R-modułu G_1 i lewego R-modułu G_2 to struktura inicjalna

$$(G_1 \otimes_R G_2, \otimes_R)$$

dla warunku

$$P_{(G_1,G_2);F_1,F_2}(H, \varphi) \equiv \text{„}\varphi\ :\ G_1 \times G_2 \longrightarrow H \text{ jest odwzorowaniem śród-}R\text{-liniowym”}\,,$$

w którego zapisie $F_1 : \mathbf{Mod}_{R^{\mathrm{op}}} \times \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Set}$ jest funktorem przyporządkowującym parze modułów (wzgl. odwzorowań R-liniowych) iloczyn kartezjański ich nośników (wzgl. tychże odwzorowań), a $F_2 : \mathbf{AbGrp} \longrightarrow \mathbf{Set}$ jest funktorem zapominania przyporządkowującym grupie przemiennej (wzgl. homomorfizmowi między takimi grupami) jej nośnik (wzgl. to samo odwzorowanie traktowane jako odwzorowanie między zbiorami).

Uwaga 1. Dokonajmy elementarnej egzegezy powyższej definicji, aby uniknąć onieśmielającego uczucia wysokościowego *vertigo*. Oto więc iloczyn tensorowy R-modułów G_1 i G_2 to – w istocie – para $(G_1 \otimes_R G_2, \otimes_R)$ złożona z grupy przemiennej $G_1 \otimes_R G_2$ oraz odwzorowania śród-R-liniowego $\otimes_R : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_1 \otimes_R G_2$, zwanego **kanonicznym odwzorowaniem śród-R-liniowym**, o tej własności, że dla każdej grupy przemiennej H i każdego odwzorowania śród-R-liniowego $\varphi : G_1 \times G_2 \longrightarrow H$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup przemiennych $\widetilde{\varphi} : G_1 \otimes_R G_2 \longrightarrow H$, który czyni przemiennym diagram

(10)
$$\begin{tikzcd}
 & & H & (H,\varphi) \arrow[l, mapsto, "F_2"'] \\
(G_1,G_2) \arrow[r, mapsto, "F_1"'] & G_1 \times G_2 \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\otimes_R"'] & G_1 \otimes_R G_2 \arrow[u, "\widetilde{\varphi}"'] & (G_1 \otimes_R G_2, \otimes_R) \arrow[l, mapsto, "F_2"] \arrow[u, dashed, "\widetilde{\varphi}"']
\end{tikzcd}\,,$$

czyli – mówiąc po ludzku – spełnia tożsamość

$$\forall_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \;:\; \widetilde{\varphi}(g_1\otimes_R g_2)=\varphi(g_1,g_2)\,, \tag{11}$$

gdzie wprowadziliśmy standardowe oznaczenie

$$\otimes_R(g_1,g_2)\equiv g_1\otimes_R g_2\,. \tag{12}$$

Mamy wielce uspokajające

Twierdzenie 3. Przyjmijmy zapis Def. 7. Dla dowolnego pierścienia R i dowolnych $G_1\in\mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R^{\rm op}}$, $G_2\in\mathbf{Mod}_R$ iloczyn tensorowy $(G_1\otimes_R G_2,\otimes_R)$ istnieje i jest określony jednoznacznie z dokładnością do jedynego izomorfizmu grup przemiennych.

<u>*Dowód:*</u> Wprost z definicji iloczynu tensorowego jako morfizmu uniwersalnego wynika – w świetle Tw. 2.2 – druga część dowodzonego twierdzenia. Pozostaje zatem wykazać jego istnienie, co czynimy w sposób bezpośredni (konstruktywny). Utwórzmy wolny $\mathbb{Z}$-moduł (czyli grupę przemienną)

$$\langle G_1\times G_2\rangle_{\mathbb{Z}}=\left\{\, n_{\cdot,\cdot} \;:\; G_1\times G_2\longrightarrow\mathbb{Z} \;\;\middle|\;\; \left|\left\{\, n_{(g_1,g_2)}\in\mathbb{Z}^\times \;\middle|\; (g_1,g_2)\in G_1\times G_2 \,\right\}\right|<\infty \,\right\}$$

nad *zbiorem*[5] $G_1\times G_2$. Moduł ten zawiera $\mathbb{Z}$-podmoduł

$$\begin{aligned} T \;\;:=\;\; \Big\langle &\big\{(g_1+_1 g_2,g_3)-(g_1,g_3)-(g_2,g_3)\big\}_{g_1,g_2\in G_1,\,g_3\in G_2} \\ &\cup\big\{(h_1,h_2+_2 h_3)-(h_1,h_2)-(h_1,h_3)\big\}_{h_1\in G_1,\,h_2,h_3\in G_2} \\ &\cup\big\{(k_1\triangleleft_1 r,k_2)-(k_1,r\triangleright_2 k_2)\big\}_{k_1\in G_1,\,k_2\in G_2,\,r\in R}\Big\rangle_{\mathbb{Z}}\,, \end{aligned}$$

który wobec przemienności grupy $\langle G_1\times G_2\rangle_{\mathbb{Z}}$ definiuje $\mathbb{Z}$-moduł ilorazowy (czyli grupę ilorazową). Postulujemy

$$G_1\otimes_R G_2:=\langle G_1\times G_2\rangle_{\mathbb{Z}}/T\,, \tag{13}$$

a ponieważ zbiór $G_1\times G_2$ zanurza się kanonicznie w $\langle G_1\times G_2\rangle_{\mathbb{Z}}$ (jako *zbiór*) wedle schematu

$$\widetilde{\jmath}_{G_1\times G_2} \;:\; G_1\times G_2\rightarrowtail\langle G_1\times G_2\rangle_{\mathbb{Z}} \;:\; (g_1,g_2)\longmapsto\delta_{(g_1,g_2)}\,, \tag{14}$$

wykorzystującego bazę $\{\delta_{(g_1,g_2)}\}_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2}$ złożoną z odwzorowań

$$\delta_{(g_1,g_2)} \;:\; G_1\times G_2\longrightarrow\mathbb{Z} \;:\; (h_1,h_2)\longmapsto\begin{cases} 1 & \text{dla } (h_1,h_2)=(g_1,g_2) \\ 0 & \text{dla } (h_1,h_2)\neq(g_1,g_2)\end{cases}\,,$$

przeto możemy też zdefiniować

$$\begin{aligned} \otimes_R:=\pi_{\langle G_1\times G_2\rangle_{\mathbb{Z}}/T}\circ\widetilde{\jmath}_{G_1\times G_2} \quad &: \quad G_1\times G_2\longrightarrow G_1\otimes_R G_2 \\ &: \quad (g_1,g_2)\longmapsto\delta_{(g_1,g_2)}+T\equiv g_1\otimes_R g_2\,, \end{aligned} \tag{15}$$

używając rzutu kanonicznego *modulo* T.

Zaczniemy od sprawdzenia śród-R-liniowości zdefiniowanego powyżej odwzorowania $\otimes_R$, licząc dla dowolnych $g_1,g_2\in G_1$, $g_3,g_4\in G_2$ i $r\in R$, co następuje:

$$\begin{aligned} (g_1+_1 g_2)\otimes_R g_3 \;&\equiv\; \delta_{(g_1+_1 g_2,g_3)}+T=\delta_{(g_1,g_3)}+\delta_{(g_2,g_3)}+\big(\delta_{(g_1+_1 g_2,g_3)}-\delta_{(g_1,g_3)}-\delta_{(g_2,g_3)}\big)+T \\ &\equiv\; \delta_{(g_1,g_3)}+\delta_{(g_2,g_3)}+T=\big(\delta_{(g_1,g_3)}+T\big)+\big(\delta_{(g_2,g_3)}+T\big) \\ &\equiv\; g_1\otimes_R g_3+g_2\otimes_R g_3\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1\otimes_R(g_3+_2 g_4) \;&\equiv\; \delta_{(g_1,g_3+_2 g_4)}+T=\delta_{(g_1,g_3)}+\delta_{(g_1,g_4)}+\big(\delta_{(g_1,g_3+_2 g_4)}-\delta_{(g_1,g_3)}-\delta_{(g_1,g_4)}\big)+T \\ &\equiv\; \delta_{(g_1,g_3)}+\delta_{(g_1,g_4)}+T=\big(\delta_{(g_1,g_3)}+T\big)+\big(\delta_{(g_1,g_4)}+T\big) \end{aligned}$$

[5] Podkreślmy: *nie* chodzi tutaj o grupę przemienną $G_1\times G_2$, lecz o „goły” zbiór.

$$\equiv \quad g_1 \otimes_R g_3 + g_1 \otimes_R g_4\,,$$

$$\begin{aligned} g_1 \triangleleft_1 r \otimes_R g_2 &\equiv \delta_{(g_1 \triangleleft_1 r, g_2)} + T = \delta_{(g_1, r \triangleright_2 g_2)} + \big(\delta_{(g_1 \triangleleft_1 r, g_2)} - \delta_{(g_1, r\triangleright_2 g_2)}\big) + T \\ &= \delta_{(g_1, r\triangleright_2 g_2)} + T \equiv g_1 \otimes_R r \triangleright_2 g_2\,. \end{aligned}$$

W następnej kolejności wykażemy istnienie i jednoznaczność odwzorowania $\widetilde{\varphi}$, o którym mowa w Uwadze 1. W tym celu wykorzystamy bazowość układu $\{\delta_{(g_1,g_2)}\}_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2}$ w $\langle G_1 \times G_2\rangle_{\mathbb{Z}}$, jak też i to, że odwzorowanie $\pi_{\langle G_1\times G_2\rangle_{\mathbb{Z}}/T}$ jest epimorfizmem, zatem definiująca tożsamość (11) ustala obraz względem odwzorowania $\widetilde{\varphi}$ układu generującego dziedziny tego odwzorowania. Jest zatem jasne, że istnieje co najwyżej jedno $\mathbb{Z}$-liniowe rozszerzenie tak zadanego (na układzie generującym) odwzorowania. Rozszerzenie to przyjmuje następującą postać: wobec surjektywności rzutu kanonicznego *modulo* T każdy element $\tau \in G_1 \otimes_R G_2$ możemy przedstawić w formie $\tau = \nu + T$ dla pewnej funkcji $\nu \in \mathbb{Z}^{G_1\times G_2}$ o ograniczonym nośniku (więc przyjmującej wartości różne od $0_{\mathbb{Z}}$ dla skończonej liczby argumentów – zbiór takich funkcji będziemy oznaczać symbolem $\mathscr{R}_0(\mathbb{Z}; G_1 \times G_2)$), skoro zaś układ $\{\delta_{(g_1,g_2)}\}_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2}$ jest bazą $\langle G_1 \times G_2\rangle_{\mathbb{Z}}$, to możemy rozłożyć $\nu = \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} n_{(g_1,g_2)} \triangleright \delta_{(g_1,g_2)}$, przy czym – jak łatwo widać – $n_{(g_1,g_2)} \equiv \nu(g_1, g_2)$, ostatecznie więc najbardziej ogólna postać elementu modułu $G_1 \otimes_R G_2$ to

$$\tau = \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright \delta_{(g_1,g_2)} + T \equiv \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2)\,, \tag{16}$$

gdzie w ostatnim kroku wykorzystaliśmy oczywistą tożsamość ($[\triangleright]$ to działanie pierścienia $\mathbb{Z}$ na zbiorze T-warstw)

$$0[\triangleright]T \equiv 0[\triangleright][0]_{\mathrm{mod}\,T} \equiv [0 \triangleright 0]_{\mathrm{mod}\,T} = [0]_{\mathrm{mod}\,T} \equiv T\,,$$

a ponieważ $\widetilde{\varphi}$ z założenia ma być homomorfizmem grup przemiennych, przeto

$$\widetilde{\varphi}(\tau) = \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \widetilde{\nu}(g_1,g_2) \triangleright_H \widetilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2)\,,$$

co daje antycypowany jednoznaczny wynik ostateczny

$$\widetilde{\varphi}(\tau) = \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \widetilde{\nu}(g_1,g_2) \triangleright_H \varphi(g_1,g_2)\,.$$

Innymi słowy, określenie postaci przyjmowanej przez $\widetilde{\varphi}$ na układzie generującym $G_1 \otimes_R G_2$ złożonym z tensorów prostych, w sposób zdeterminowany przez samą definicję obiektu inicjalnego, jednoznacznie podpowiada postać (jedynego) rozszerzenia $\mathbb{Z}$-liniowego tego odwzorowania do całego modułu tensorowego. □

Mając na względzie przyszłą wygodę dowodzenia, podamy obecnie równoważną definicję iloczynu tensorowego modułów uwzględniającą powyższe rozumowanie, a to w formie

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy zapis Def. 7. Niechaj $(T,\tau) \in \mathrm{Ob}\,{}^{G_1}L_2^{G}$. Poniższe zdania logiczne są równoważne.

(i) (T,τ) jest iloczynem tensorowym modułów G_1 i G_2 nad R.

(ii) Grupa T jest generowana (nad $\mathbb{Z}$) przez elementy postaci $\tau(g_1,g_2)$, $(g_1,g_2) \in G_1 \times G_2$, tj.

$$T = \langle \tau(G_1 \times G_2)\rangle_{\mathbb{Z}}\,, \tag{17}$$

a ponadto dla każdej pary $(H,\varphi) \in \mathrm{Ob}\,{}^{G_1}L^{G_2}$ jest określone odwzorowanie $\widetilde{\varphi} \in {}^{G_1}L^{G_2}\big((T,\tau),(H,\varphi)\big)$, tj. takie, które czyni przemiennym diagram

$$\begin{tikzcd} & H \\ G_1 \times G_2 \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\tau"'] & T \arrow[u, "\widetilde{\varphi}"'] \end{tikzcd}\,. \tag{18}$$

Dowód:

(i)⇒(ii) Prawdziwość zdania (i) implikuje istnienie (jedynego) odwzorowania $\widetilde{\varphi}$ wprost na mocy uniwersalności iloczynu tensorowego. Niechaj

$$T_\tau := \langle \tau(G_1 \times G_2) \rangle_{\mathbb{Z}}$$

będzie podgrupą generowaną przez elementy $\tau(g_1, g_2)$, $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$. Wobec zawierania $\tau(G_1 \times G_2) \subset T$ (w **Set**) i domkniętości T względem brania kombinacji $\mathbb{Z}$-liniowych elementów mamy kanoniczny monomorfizm grup przemiennych (zanurzenie) $\jmath_{T_\tau} : T_\tau \rightarrowtail T$, a wobec tego τ kanonicznie określa obiekt $(T_\tau, \underline{\tau}) \in \mathrm{Ob}\,{}^{G_1}L^{G_2}$ o własności

$$\jmath_{T_\tau} \circ \underline{\tau} = \tau\,.$$

Istotnie, powyższe zachodzi w **Set**, a przy tym zanurzenie $\jmath_{T_\tau}$ tworzy ledwie wierny obraz swej dziedziny w przeciwdziedzinie, więc śród-R-liniowość τ jest dziedziczona przez $\underline{\tau}$. W tych okolicznościach inicjalność τ gwarantuje istnienie homomorfizmu grup przemiennych $\widetilde{\underline{\tau}} : T \longrightarrow T_\tau$ o własności

$$\widetilde{\underline{\tau}} \circ \tau = \underline{\tau}\,,$$

a zatem zachodzi tożsamość

$$\jmath_{T_\tau} \circ \widetilde{\underline{\tau}} \circ \tau = \jmath_{T_\tau} \circ \underline{\tau} = \tau \equiv \mathrm{id}_T \circ \tau\,,$$

która wobec tejże inicjalności τ daje nam równość

$$\jmath_{T_\tau} \circ \widetilde{\underline{\tau}} = \mathrm{id}_T\,,$$

implikującą postulowaną surjektywność zanurzenia kanonicznego,

$$\mathrm{Im}\,\jmath_{T_\tau} = T\,.$$

(ii)⇒(i) Niechaj $\widetilde{\varphi}_1 : T \longrightarrow H$ i $\widetilde{\varphi}_2 : T \longrightarrow H$ będą dwoma homomorfizmami grup przemiennych domykającymi Diag. (18),

$$\widetilde{\varphi}_1 \circ \tau = \varphi = \widetilde{\varphi}_2 \circ \tau\,,$$

skąd wniosek:

$$\widetilde{\varphi}_1 \restriction_{\tau(G_1 \times G_2)} = \widetilde{\varphi}_2 \restriction_{\tau(G_1 \times G_2)}\,.$$

Równość (17) przesądza o pożądanej równości obu homomorfizmów (wobec ich $\mathbb{Z}$-liniowości),

$$\widetilde{\varphi}_1 = \widetilde{\varphi}_2\,.$$

□

W następnej kolejności zajmiemy się omówieniem operacji tensorowania odwzorowań liniowych. Nasza dyskusja będzie zarazem stanowić pierwszą demonstrację siły pojęcia morfizmu uniwersalnego. Zacznijmy, jak (niemal) zawsze od

Definicja 8. Przyjmijmy zapis Def. 7 i niechaj $G_1, H_1 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R^{\mathrm{op}}}$ i $G_2, H_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_R$. **Iloczyn tensorowy nad R odwzorowań R-liniowych** $\chi_1 \in \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(G_1, H_1)$ i $\chi_2 \in \mathrm{Hom}_R(G_2, H_2)$ to (jedyny) homomorfizm grup przemiennych

$$\chi_1 \otimes \chi_2 \;:\; G_1 \otimes_R G_2 \longrightarrow H_1 \otimes_R H_2$$

o własności

$$\forall_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \;:\; (\chi_1 \otimes \chi_2)(g_1 \otimes_R g_2) = \chi_1(g_1) \otimes_R \chi_2(g_2)\,.$$

Stwierdzenie 4. Dla dowolnego pierścienia R i dowolnych $G_1, H_1 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R^{\mathrm{op}}}$, $G_2, H_2 \in \mathbf{Mod}_R$ oraz $(\chi_1, \chi_2) \in \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(G_1, H_1) \times \mathrm{Hom}_R(G_2, H_2)$ homomorfizm grup przemiennych $\chi_1 \otimes \chi_2$ jest dobrze określony.

<u>*Dowód:*</u> Rozważmy odwzorowanie

$$\varphi \;:\; G_1 \times G_2 \longrightarrow H_1 \otimes_R H_2 \;:\; (g_1, g_2) \longmapsto \chi_1(g_1) \otimes_R \chi_2(g_2)\,.$$

Jest ono jawnie śród-R-liniowe, zatem w świetle uniwersalności iloczynu tensorowego nad R określa ono jednoznacznie odwzorowanie $\chi_1 \otimes \chi_2 := \widetilde{\varphi}$, o którym mowa w dowodzonym stwierdzeniu. □

Uwaga 2. Przyjęty zapis iloczynu odwzorowań liniowych może być mylący, sugeruje bowiem, jakoby $\chi_1 \otimes \chi_2$ było iloczynem tensorowym odwzorowań χ_1 i χ_2 traktowanych jako elementy $\mathbb{Z}$-modułów (tj. grup przemiennych) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1, H_1)$ i $\mathrm{Hom}_R(G_2, H_2)$, odpowiednio, tymczasem skonstruowane poniżej odwzorowanie $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1, H_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(G_2, H_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1 \otimes_R G_2, H_1) \otimes_R H_2)$ nie jest w ogólności ani surjektywne, ani injektywne.

Stwierdzenie 5. Przyjmijmy zapis Def. 8. Istnieje kanoniczny homomorfizm $\mathbb{Z}$-modułów

$$\imath \;:\; \mathrm{Hom}_R(G_1, H_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(G_2, H_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2)$$

o własności

$$\imath(\chi_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \chi_2) = \chi_1 \otimes \chi_2\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Odwzorowanie

$$\begin{aligned} \varphi \quad &: \quad \mathrm{Hom}_R(G_1, H_1) \times \mathrm{Hom}_R(G_2, H_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2) \\ &: \quad (\chi_1, \chi_2) \longmapsto \chi_1 \otimes \chi_2 \end{aligned}$$

jest jawnie $\mathbb{Z}$-dwuliniowe, więc też automatycznie śród-$\mathbb{Z}$-liniowe, a zatem określa jednoznacznie odwzorowanie $\imath := \widetilde{\varphi}$, o którym mowa w dowodzonym stwierdzeniu. □

Mamy przydatne

Stwierdzenie 6. Przyjmijmy zapis Def. 8. Dla dowolnych $G_1, H_1, K_1 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R^{\rm op}}$ i $G_2, H_2, K_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_R$ oraz $\chi_1 \in \mathrm{Hom}_{R^{\rm op}}(G_1, H_1)$, $\chi_2 \in \mathrm{Hom}_R(G_2, H_2)$ i $\psi_1 \in \mathrm{Hom}_R(H_1, K_1), \psi_2 \in \mathrm{Hom}_R(H_2, K_2)$ zachodzi tożsamość

$$(\psi_1 \otimes \psi_2) \circ (\chi_1 \otimes \chi_2) = (\psi_1 \circ \chi_1) \otimes (\psi_2 \circ \chi_2)\,. \tag{19}$$

W szczególności ilekroć χ_1 i χ_2 są odwracalne, otrzymujemy

$$(\chi_1 \otimes \chi_2)^{-1} = \chi_1^{-1} \otimes \chi_2^{-1}\,.$$

Podobnie, surjektywność χ_1 i χ_2 implikuje surjektywność $\chi_1 \otimes \chi_2$ wobec tożsamości

$$\mathrm{Im}\,(\chi_1 \otimes \chi_2) = \mathrm{Im}\,\chi_1 \otimes_R \mathrm{Im}\,\chi_2\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Wobec Równ. (16) oraz $\mathbb{Z}$-liniowości $\otimes_R$ (a także po uwzględnieniu $\mathbb{Z}$-liniowości superpozycji odwzorowań $\mathbb{Z}$-liniowych, jakimi są – na mocy Stw. 4 – odwzorowania $\psi_1 \otimes \psi_2$ i $\chi_1 \otimes \chi_2$) wystarczy sprawdzić dowodzoną tożsamość (19) na generatorach $g_1 \otimes_R g_2$, $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ grupy przemiennej $G_1 \otimes_R G_2$, co jest rzeczą prostą. □

W podsumowaniu dotychczasowej dyskusji możemy wypowiedzieć zwięzłe

Twierdzenie 4. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Iloczyn tensorowy określa funktor kowariantny $\otimes_R \;:\; \mathbf{Mod}_{R^{\rm op}} \times \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{AbGrp}$ o składowej obiektowej $(G_1, G_2) \longmapsto G_1 \otimes_R G_2$ i składowej morfizmowej $(\chi_1, \chi_2) \longmapsto \chi_1 \otimes \chi_2$.

Dowód: Wynika wprost z Def. 8 oraz Stw. 6. □

Uniwersalna natura iloczynu tensorowego dostarcza nam potężnego narzędzia analizy jego własności strukturalnych, z których kilka opiszemy w dalszej części. Nim to uczynimy, potrzebujemy przypomnieć prostą obserwację z dziedziny algebry liniowej: Każdy *prawy* (wzgl. *lewy*) moduł G nad pierścieniem R z działaniem $G\times R\longrightarrow G\ :\ (g,r)\longmapsto g\triangleleft r$ (wzgl. $R\times G\longrightarrow G\ :\ (r,g)\longmapsto r\triangleright g$) niesie kanoniczną strukturę *lewego* (wzgl. *prawego*) modułu nad pierścieniem przeciwnym $R^{\rm op}$ (o nośniku R, wyposażonego w mnożenie $R^{\times 2}\ni(r_1,r_2)\longmapsto r_2\cdot_R r_1\equiv r_1\cdot_{R^{\rm op}} r_2\in R$) określoną[6] przez działanie $R^{\rm op}\times G\longrightarrow G\ :\ (r,g)\longmapsto g\triangleleft r\equiv r\triangleright_{\rm op} g$ (wzgl. $G\times R^{\rm op}\longrightarrow G\ :\ (g,r)\longmapsto r\triangleright g\equiv g\triangleleft_{\rm op} r$) i oznaczaną w dalszej części wykładu symbolem $G^{({\rm op})}$.

Studium podstawowych własności iloczynu tensorowego zaczynamy od

Twierdzenie 5 (O przemienności iloczynu tensorowego)**.** Przyjmijmy zapis Def. 7 i niechaj $G_1^{({\rm op})}$ (wzgl. $G_2^{({\rm op})}$) oznacza lewy (wzgl. prawy) $R^{\rm op}$-moduł o nośniku G_1 (wzgl. G_2) i strukturze indukowanej w naturalny sposób ze struktury prawego (wzgl. lewego) R-modułu na G_1 (wzgl. G_2). Istnieje kanoniczny izomorfizm grup przemiennych

$$\sigma_{G_1,G_2}\ :\ G_1\otimes_R G_2\xrightarrow{\cong}G_2^{({\rm op})}\otimes_{R^{\rm op}}G_1^{({\rm op})}$$

o własności

$$\forall_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2}\ :\ \sigma_{G_1,G_2}(g_1\otimes_R g_2)=g_2\otimes_{R^{\rm op}}g_1\,.$$

Dowód: Wprost na mocy definicji $G_\alpha^{({\rm op})},\ \alpha\in\{1,2\}$ odwzorowanie

$$\varphi\ :\ G_1\times G_2\longrightarrow G_2^{({\rm op})}\otimes_{R^{\rm op}}G_1^{({\rm op})}\ :\ (g_1,g_2)\longmapsto g_2\otimes_{R^{\rm op}}g_1$$

jest śród-R-liniowe, istnieje zatem jedyne odwzorowanie $\mathbb{Z}$-liniowe

$$\sigma_{G_1,G_2}\ :\ G_1\otimes_R G_2\longrightarrow G_2^{({\rm op})}\otimes_{R^{\rm op}}G_1^{({\rm op})}$$

o własności wskazanej w tezie dowodzonego twierdzenia. Analogicznie dowodzimy istnienia jedynego odwzorowania $\mathbb{Z}$-liniowego

$$\tau_{G_1,G_2}\ :\ G_2^{({\rm op})}\otimes_{R^{\rm op}}G_1^{({\rm op})}\longrightarrow G_1\otimes_R G_2$$

o własności

$$\forall_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2}\ :\ \tau_{G_1,G_2}(g_2\otimes_{R^{\rm op}}g_1)=g_1\otimes_R g_2\,.$$

Otrzymujemy więc równości, trywialnie spełnione na generatorach, a więc i ogólnie,

$$\begin{aligned}\sigma_{G_1,G_2}\circ\tau_{G_1,G_2}&=&{\rm id}_{G_2^{({\rm op})}\otimes_{R^{\rm op}}G_1^{({\rm op})}}\,,\\ \tau_{G_1,G_2}\circ\sigma_{G_1,G_2}&=&{\rm id}_{G_1\otimes_R G_2}\,.\end{aligned}$$

□

Celem zbadania zagadnienia łączności operacji tensorowania modułów uogólnimy najpierw nasze dotychczasowe rozważania w sposób opisany w

Stwierdzenie 7. Przyjmijmy zapis Def. 7 oraz 8 i niechaj $G_1,H_1\in{\rm Ob}\,\mathbf{Mod}_{(R_2,R_1^{\rm op})}$, $G_2,H_2\in{\rm Ob}\,\mathbf{Mod}_{R_1}$, $G_3,H_3\in{\rm Ob}\,\mathbf{Mod}_{R_1^{\rm op}}$, $G_4,H_4\in{\rm Ob}\,\mathbf{Mod}_{(R_1,R_2^{\rm op})}$. Wówczas

(i) $G_1\otimes_{R_1}G_2$ jest lewym R_2-modułem z działaniem określonym na generatorach:

$$\forall_{(r,g_1,g_2)\in R_2\times G_1\otimes_{R_1}G_2}\ :\ r\triangleright_\otimes(g_1\otimes_{R_1}g_2):=(r\triangleright_{(1)}g_1)\otimes_{R_1}g_2\,.$$

(ii) $\forall_{(\chi_1,\chi_2)\in{\rm Hom}_{(R_2,R_1)}(G_1,H_1)\times{\rm Hom}_{R_1}(G_2,H_2)}\ :\ \chi_1\otimes\chi_2\in{\rm Hom}_{R_2}(G_1\otimes_{R_1}G_2,\ H_1\otimes_{R_1}H_2)$.

[6]Istotnie, mamy np. $(r_1\cdot_{\rm op}r_2)\triangleright_{\rm op}g\equiv g\triangleleft(r_1\cdot_{\rm op}r_2)\equiv g\triangleleft(r_2\cdot r_1)=(g\triangleleft r_2)\triangleleft r_1\equiv r_1\triangleright_{\rm op}(r_2\triangleright_{\rm op}g)$.

(iii) $G_3 \otimes_{R_1} G_4$ jest prawym R_2-modułem z działaniem określonym na generatorach:

$$\forall_{(g_3,g_4,r)\in G_3\otimes_{R_1} G_4\times R_2} \ : \ (g_3 \otimes_{R_1} g_4) \triangleleft_{\otimes} r := g_3 \otimes_{R_1} (g_4 \triangleleft_{(4)} r) \,.$$

(iv) $\forall_{(\psi_1,\psi_2)\in \mathrm{Hom}_{R_1}(G_3,H_3)\times \mathrm{Hom}_{(R_1,R_2)}(G_4,H_4)} \ : \ \psi_1 \otimes \psi_2 \in \mathrm{Hom}_{R_2}(G_3 \otimes_{R_1} G_4,\ H_3 \otimes_{R_1} H_4)$.

<u>*Dowód:*</u> Przedstawimy jedynie dowód punktów (i) i (ii) tezy, dowód pozostałych punktów przebiega w pełni analogicznie.

Ad (i) Określmy dla dowolnego $r \in R_2$ odwzorowanie

$$\varphi_r \ : \ G_1 \times G_2 \longrightarrow G_1 \otimes_{R_1} G_2 \ : \ (g_1, g_2) \longmapsto (r \triangleright_{(1)} g_1) \otimes_{R_1} g_2 \,.$$

Jest ono jawnie śród-R_1-liniowe (wobec przemienności działań: lewego (pierścienia R_2) i prawego (pierścienia R_1)), więc też indukuje jedyne odwzorowanie $\mathbb{Z}$-liniowe

$$\ell_r^{\otimes} := \widetilde{\varphi_r} \ : \ G_1 \otimes_{R_1} G_2 \longrightarrow G_1 \otimes_{R_1} G_2$$

o pożądanej własności

$$\ell_r^{\otimes}(g_1 \otimes_{R_1} g_2) = (r \triangleright_{(1)} g_1) \otimes_{R_1} g_2 \,.$$

Bez trudu sprawdzamy, że to ostatnie zadaje strukturę lewego R_2-modułu na swej dziedzinie, według schematu

$$\begin{aligned} \ell_{\cdot}^{\otimes} \quad &: \quad R_2 \times G_1 \otimes_{R_1} G_2 \longrightarrow G_1 \otimes_{R_1} G_2 \\ &: \quad \Big(r, \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright (g_1 \otimes_{R_1} g_2)\Big) \\ &\quad \longmapsto \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright \ell_r^{\otimes}(g_1 \otimes_{R_1} g_2) \,. \end{aligned}$$

Ad (ii) Trywialne sprawdzenie na generatorach.

□

Możemy już teraz wysłowić

Twierdzenie 6 (O łączności iloczynu tensorowego)**.** Przyjmijmy dotychczasowy zapis i niechaj $G_1 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R_1^{\rm op}}$, $G_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{(R_1,R_2^{\rm op})}$, $G_3 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R_2}$. Istnieje kanoniczny izomorfizm naturalny

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathbf{Mod}_{R_1^{\rm op}} \times \mathbf{Mod}_{(R_1,R_2^{\rm op})} \times \mathbf{Mod}_{R_2} \arrow[r, bend left, "\otimes_{R_2}\circ\left(\otimes_{R_1}\times \mathrm{Id}_{\mathbf{Mod}_{R_2}}\right)"] \arrow[r, bend right, "\otimes_{R_2}\circ\left(\otimes_{R_1}\times \mathrm{Id}_{\mathbf{Mod}_{R_2}}\right)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha_{\cdot,\cdot,\cdot}"] & \mathbf{AbGrp} \end{tikzcd}$$

między funktorami kowariantnymi

$$\begin{aligned} \otimes_{R_2} \circ \big(\otimes_{R_1} \times \mathrm{Id}_{\mathbf{Mod}_{R_2}}\big) \quad &: \quad \mathbf{Mod}_{R_1^{\rm op}} \times \mathbf{Mod}_{(R_1,R_2^{\rm op})} \times \mathbf{Mod}_{R_2} \longrightarrow \mathbf{AbGrp} \\ &: \quad (G_1, G_2, G_3) \longmapsto \big(G_1 \otimes_{R_1} G_2\big) \otimes_{R_2} G_3 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \otimes_{R_1} \circ \big(\mathrm{Id}_{\mathbf{Mod}_{R_1}} \times \otimes_{R_2}\big) \quad &: \quad \mathbf{Mod}_{R_1^{\rm op}} \times \mathbf{Mod}_{(R_1,R_2^{\rm op})} \times \mathbf{Mod}_{R_2} \longrightarrow \mathbf{AbGrp} \\ &: \quad (G_1, G_2, G_3) \longmapsto G_1 \otimes_{R_1} \big(G_2 \otimes_{R_2} G_3\big) \,, \end{aligned}$$

o własności

$$\forall_{(g_1,g_2,g_3)\in G_1\times G_2\times G_3} \ : \ \alpha_{G_1,G_2,G_3}\big((g_1 \otimes_{R_1} g_2) \otimes_{R_2} g_3\big) = g_1 \otimes_{R_1} (g_2 \otimes_{R_2} g_3) \,.$$

Dowód: Ustalenie postaci postulowanego izomorfizmu na generatorach gwarantuje – jak uprzednio – jego jednoznaczność. Pozostaje dowieść jego istnienia, co uczynimy w sposób konstruktywny. Zdefiniujmy, dla dowolnego $g_3 \in G_3$, odwzorowanie

$$h_{g_3} \;:\; G_2 \longrightarrow G_2 \otimes_{R_2} G_3 \;:\; g_2 \longmapsto g_2 \otimes_{R_2} g_3\,,$$

jawnie R_1-liniowe,

$$r_1 \triangleright h_{g_3}(g_2) \equiv r_1 \triangleright \big(g_2 \otimes_{R_2} g_3\big) \equiv (r_1 \triangleright g_2) \otimes_{R_2} g_3 \equiv h_{g_3}(r_1 \triangleright g_2)\,,$$

po czym rozważmy indukowane przezeń odwzorowanie $\mathbb{Z}$-liniowe

$$\widehat{h}_{g_3} := \mathrm{id}_{G_1} \otimes h_{g_3} \;:\; G_1 \otimes_{R_1} G_2 \longrightarrow G_1 \otimes_{R_1} \big(G_2 \otimes_{R_2} G_3\big)\,.$$

To ostatnie zadaje odwzorowanie

$$\widehat{h}_{\cdot} \;:\; G_1 \otimes_{R_1} G_2 \times G_3 \longrightarrow G_1 \otimes_{R_1} \big(G_2 \otimes_{R_2} G_3\big)\,,$$

które na generatorach określamy jako

$$\widehat{h}_{\cdot}(g_1 \otimes_{R_1} g_2, g_3) := \widehat{h}_{g_3}(g_1 \otimes_{R_1} g_2)\,.$$

Odwzorowanie to jest $\mathbb{Z}$-liniowe w pierwszym argumencie wprost na mocy $\mathbb{Z}$-liniowości $\widehat{h}_{g_3}$, a nadto – $\mathbb{Z}$-liniowe w drugim argumencie wobec tożsamości (zapisanej dla dowolnych $g_1 \otimes_{R_1} g_2 \in G_1 \otimes_{R_1} G_2$ i $g_3, h_3 \in G_3$)

$$\begin{aligned}
\widehat{h}_{g_3 +_{(3)} h_3}(g_1 \otimes_{R_1} g_2) \;&\equiv\; g_1 \otimes_{R_1} h_{g_3 +_{(3)} h_3}(g_2) = g_1 \otimes_{R_1} \big(g_2 \otimes_{R_2} (g_3 +_{(3)} h_3)\big)\\
&=\; g_1 \otimes_{R_1} (g_2 \otimes_{R_2} g_3 +_{\otimes} g_2 \otimes_{R_2} h_3)\\
&=\; g_1 \otimes_{R_1} (g_2 \otimes_{R_2} g_3) +_{\otimes} g_1 \otimes_{R_1} (g_2 \otimes_{R_2} h_3)\\
&\equiv\; \widehat{h}_{g_3}(g_1 \otimes_{R_1} g_2) +_{\otimes} \widehat{h}_{h_3}(g_1 \otimes_{R_1} g_2)\,.
\end{aligned}$$

Także na generatorach sprawdzamy jego śród-R_2-jednorodność, z której wynika istnienie jedynego odwzorowania $\mathbb{Z}$-liniowego α o pożądanej własności. Dowód istnienia odwrotności α przebiega w pełni analogicznie (sprawdzenie na generatorach). I wreszcie naturalność opisanej tu rodziny izomorfizmów jest oczywistą konsekwencją ich definicji. □

Uwaga 3. Zagadnienie uniwersalne dla odwzorowań śród-R-liniowych ma swoje naturalne uogólnienie na przypadek n-liniowy dla $n > 2$, które w przypadku $n = 3$ prowadzi do definicji grupy przemiennej $G_1 \otimes_{R_1} G_2 \otimes_{R_2} G_3$, zwanej potrójnym iloczynem tensorowym. Łatwo wykazać istnienie kanonicznego izomorfizmu grup przemiennych

$$\big(G_1 \otimes_{R_1} G_2\big) \otimes_{R_2} G_3 \cong G_1 \otimes_{R_1} G_2 \otimes_{R_2} G_3\,.$$

Uogólnienie tej obserwacji formalizujemy w poniższej definicji, pozostawiając Czytelnikowi dowód jej sensowności (tj. istnienia przedmiotu tejże) jako proste, a pożyteczne ćwiczenie.

Definicja 9. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i dla ustalonego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ niechaj $G_1 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R_1^{\mathrm{op}}}, G_n \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R_{n-1}}$ oraz $G_k \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{(R_{k-1},R_k)}, k \in \overline{2, n-1}$. Niech też ${}^{G_1}L^{G_2}L^{G_3 \ldots G_{n-1}}L^{G_n}$ będzie kategorią, której obiektami są pary (H, φ) złożone z $H \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{AbGrp}$ i odwzorowania $\varphi \;:\; G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n \longrightarrow H$ n-addytywnego i śród-R_l-jednorodnego dla każdej pary (G_l, G_{l+1}), $l \in \overline{1, n-1}$ i której morfizmami – dla ustalonych obiektów $(H_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\alpha \in \{1,2\}$, utworzonych przez $H_\alpha \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{AbGrp}$ i odwzorowania $\varphi_\alpha \;:\; G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n \longrightarrow H_\alpha$ – są odwzorowania

$$\mathrm{Hom}_{{}^{G_1}L^{G_2}L^{G_3 \ldots G_{n-1}}L^{G_n}}\big((H_1, \varphi_1), (H_2, \varphi_2)\big) = \big\{\; \chi \in \mathbf{AbGrp}(H_1, H_2) \quad|\quad \varphi_2 = \chi \circ \varphi_1 \;\big\}\,.$$

n-krotny iloczyn tensorowy nad $(R_1, R_2, \ldots, R_{n-1})$ rodziny modułów $\{G_i\}_{i \in \overline{1,n}}$ to struktura inicjalna

$$\big(G_1 \otimes_{R_1} G_2 \otimes_{R_2} G_3 \otimes_{R_3} \cdots \otimes_{R_{n-1}} G_n, \otimes_R^n\big)$$

dla warunku

$$P_{(G_1,G_2,\ldots,G_n);F_1,F_2}(H,\varphi) \quad\equiv\quad „\varphi \,:\, G_1\times G_2\times\cdots\times G_n \longrightarrow H \text{ jest}$$

$$\text{odwzorowaniem śród-}R_l\text{-liniowym dla } l\in\overline{1,n-1}\text{”},$$

w którego zapisie $F_1 \,:\, \mathbf{Mod}_{R_1^{\rm op}}\times\mathbf{Mod}_{(R_1,R_2)}\times\mathbf{Mod}_{(R_2,R_3)}\times\cdots\times\mathbf{Mod}_{(R_{n-1},R_n)}\times\mathbf{Mod}_{R_n}\longrightarrow\mathbf{Set}$ jest funktorem przyporządkowującym n-tce (bi)modułów (wzgl. stosownych odwzorowań liniowych) iloczyn kartezjański ich nośników (wzgl. tychże odwzorowań), a $F_2 \,:\, \mathbf{AbGrp}\longrightarrow\mathbf{Set}$ jest funktorem zapominania jak w Def. 7.

Istnienie kanonicznej struktury (R,R)-bimodułu na R, określonej przez lewo- i prawostronne mnożenie (łączne!) przez elementy R, pozwala nam w przypadku dowolnego $G_1\in\mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R^{\rm op}}$ traktować $G_1\otimes_R R$ jako R-moduł prawostronny, a w przypadku dowolnego $G_2\in\mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_R$ – $R\otimes_R G_2$ jako R-moduł lewostronny. Obserwacja ta nadaje sens

Stwierdzenie 8. Przyjmijmy zapis Def. 7 oraz Równ. (16). Odwzorowanie

$${}_{G_1}\xi \,:\, G_1\longrightarrow G_1\otimes_R R \,:\, g\longmapsto g\otimes_R \mathbf{1}_R$$

jest izomorfizmem R-modułów prawostronnych, o odwrotności zadanej przez odwzorowanie

$$\begin{aligned} {}_{G_1}\kappa \quad &: \quad G_1\otimes_R R\longrightarrow G_1 \\ &: \quad \sum_{(g,r)\in G_1\times R}\nu(g,r)\triangleright(g\otimes_R r)\longmapsto\sum_{(g,r)\in G_1\times R}\nu(g,r)\triangleright(g\triangleleft r)\,. \end{aligned}$$

Podobnie odwzorowanie

$$\xi_{G_2} \,:\, G_2\longrightarrow R\otimes_R G_2 \,:\, g\longmapsto \mathbf{1}_R\otimes_R g$$

jest izomorfizmem R-modułów lewostronnych, o odwrotności zadanej przez odwzorowanie

$$\begin{aligned} \kappa_{G_2} \quad &: \quad R\otimes_R G_2\longrightarrow G_2 \\ &: \quad \sum_{(r,g)\in R\times G_2}\nu(r,g)\triangleright(r\otimes_R g)\longmapsto\sum_{(r,g)\in R\times G_2}\nu(r,g)\triangleright(r\triangleright g)\,. \end{aligned}$$

Dowód: Dowodzimy pierwszej części tezy, dowód drugiej części jest w pełni analogiczny. Łatwo sparwdzamy, że jawnie $\mathbb{Z}$-dwuliniowe (wprost z definicji działania) odwzorowanie

$$\wp \,:\, G_1\times R\longrightarrow G_1 \,:\, (g,r)\longmapsto g\triangleleft r$$

jest śród-R-jednorodne,

$$\forall_{(g,r,s)\in G_1\times R\times R} \,:\, \wp\big((g\triangleleft r),s\big)\equiv(g\triangleleft r)\triangleleft s=g\triangleleft(r\cdot_R s)\equiv g\triangleleft(r\triangleright s)\equiv\wp(g,r\triangleright s)\,,$$

to zaś implikuje istnienie (jedynego) odwzorowania $\mathbb{Z}$-liniowego ${}_{G_1}\kappa\equiv\widetilde{\wp}$ jak w tezie dowodzonego stwierdzenia. Tożsamości ${}_{G_1}\kappa\circ{}_{G_1}\xi=\mathrm{id}_{G_1}$ oraz ${}_{G_1}\xi\circ{}_{G_1}\kappa=\mathrm{id}_{G_1\otimes_R R}$ sprawdzamy bezpośrednio na generatorach (tensorach prostych). □

Budowanie relacji iloczynu tensorowego z produktem i sumą prostą modułów zaczynamy od elementarnego

Stwierdzenie 9. Przyjmijmy dotychczasowy zapis, ustalmy zbiory (indeksów) Λ_1,Λ_2 i niechaj $G_{1\,\cdot}\in\mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R^{\rm op}}^{\Lambda_1}$ oraz $G_{2\,\cdot}\in\mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_R^{\Lambda_2}$. Odwzorowanie

$$\begin{aligned} \tau \quad &: \quad \prod_{\lambda_1\in\Lambda_1}G_{1\,\lambda_1}\times\prod_{\lambda_2\in\Lambda_2}G_{2\,\lambda_2}\longrightarrow\prod_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2}G_{1\,\lambda_1}\otimes_R G_{2\,\lambda_2} \\ &: \quad (g_\cdot^{(1)},g_\cdot^{2)})\longmapsto\big(g_\cdot^{(1)}\circ\mathrm{pr}_1\big)\otimes_R\big(g_\cdot^{(2)}\circ\mathrm{pr}_2\big)\,, \end{aligned}$$

w którego zapisie $\mathrm{pr}_\alpha \,:\, \Lambda_1\times\Lambda_2\longrightarrow\Lambda_\alpha,\ \alpha\in\{1,2\}$ są rzutami kanonicznymi, indukuje kanoniczny homomorfizm grup przemiennych

$$\widetilde{\tau} \,:\, \prod_{\lambda_1\in\Lambda_1}G_{1\,\lambda_1}\otimes_R\prod_{\lambda_2\in\Lambda_2}G_{2\,\lambda_2}\longrightarrow\prod_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2}G_{1\,\lambda_1}\otimes_R G_{2\,\lambda_2}$$

o własności

$$\forall_{(g^{(1)}_{\cdot},g^{2)}_{\cdot})\in G_{1\,\cdot}\times G_{2\,\cdot}}\ :\ \widetilde{\tau}\big(g^{(1)}_{\cdot}\otimes_R g^{(2)}_{\cdot}\big)=\big(g^{(1)}_{\cdot}\circ\mathrm{pr}_1\big)\otimes_R\big(g^{(2)}_{\cdot}\circ\mathrm{pr}_2\big)\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Odwzorowanie τ jest jawnie $\mathbb{Z}$-dwuliniowe i śród-R-jednorodne, zatem teza dowodzonego stwierdzenia wynika wprost z Tw. 3. □

W ogólności nie możemy orzekać o własnościach $\widetilde{\tau}$ bez poczynienia dodatkowych założeń odnośnie do struktury rodzin modułów pojawiających się w jego definicji (znane są przykłady odwzorowań nieinjektywnych i niesurjektywnych). Na większą precyzję wypowiedzi pozwala ograniczenie rozważań do podmodułów modułów produktowych danych przez sumy proste. Oto więc znajdujemy ważne

Twierdzenie 7. Przyjmijmy zapis Stw. 9. Kanoniczny homomorfizm grup przemiennych $\widetilde{\tau}$ ogranicza się do iloczynu podmodułów $\bigoplus_{\lambda_\alpha\in\Lambda_\alpha}G_{\alpha\,\lambda_\alpha}\subset\prod_{\lambda_\alpha\in\Lambda_\alpha}G_{\alpha\,\lambda_\alpha}$, $\alpha\in\{1,2\}$, tj. zadaje kanoniczny homomorfizm grup przemiennych

$$\widetilde{\tau}\ :\ \bigoplus_{\lambda_1\in\Lambda_1}G_{1\,\lambda_1}\otimes_R\bigoplus_{\lambda_2\in\Lambda_2}G_{2\,\lambda_2}\longrightarrow\bigoplus_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2}G_{1\,\lambda_1}\otimes_R G_{2\,\lambda_2}\,,$$

przy czym sumy proste tensorowane w dziedzinie $\widetilde{\tau}$ to sumy proste R-modułów, gdy tymczasem przeciwdziedzina jest sumą prostą $\mathbb{Z}$-modułów. Homomorfizm ten jest izomorfizmem grup przemiennych.

<u>*Dowód:*</u> Wobec zerowości iloczynu tensorowego dowolnego elementu jednego modułu z elementem zerowym drugiego modułu $\widetilde{\tau}$-obraz iloczynu tensorowego skończonych kombinacji R-liniowych elementów $\bigoplus_{\lambda_1\in\Lambda_1}G_{1\,\lambda_1}$ i – odpowiednio – $\bigoplus_{\lambda_2\in\Lambda_2}G_{2\,\lambda_2}$ jest skończoną kombinacją $\mathbb{Z}$-liniową tensorów prostych z $G_{1\,\lambda_1}\otimes_R G_{2\,\lambda_2}$, więc – w istocie –

$$\widetilde{\tau}\Big(\bigoplus_{\lambda_1\in\Lambda_1}G_{1\,\lambda_1}\otimes_R\bigoplus_{\lambda_2\in\Lambda_2}G_{2\,\lambda_2}\Big)\subset\bigoplus_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2}G_{1\,\lambda_1}\otimes_R G_{2\,\lambda_2}\,.$$

W świetle Stw. 9 pozostaje zatem znaleźć odwzorowanie $\mathbb{Z}$-liniowe

$$h\ :\ \bigoplus_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2}G_{1\,\lambda_1}\otimes_R G_{2\,\lambda_2}\longrightarrow\bigoplus_{\lambda_1\in\Lambda_1}G_{1\,\lambda_1}\otimes_R\bigoplus_{\lambda_2\in\Lambda_2}G_{2\,\lambda_2}$$

spełniające tożsamości

$$h\circ\widetilde{\tau}=\mathrm{id}_{\bigoplus_{\lambda_1\in\Lambda_1}G_{1\,\lambda_1}\otimes_R\bigoplus_{\lambda_2\in\Lambda_2}G_{2\,\lambda_2}}\,,\qquad\widetilde{\tau}\circ h=\mathrm{id}_{\bigoplus_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2}G_{1\,\lambda_1}\otimes_R G_{2\,\lambda_2}}\,.$$

Przywołując definicję sumy prostej jako struktury inicjalnej, stwierdzamy przy tym, że istnienie i jednoznaczność poszukiwanego odwzorowania będzie wynikać wprost z istnienia stosownej rodziny homomorfizmów grup przemiennych

$$\begin{aligned}\chi_{\cdot,\cdot}\quad &:\quad \Lambda_1\times\Lambda_2\longrightarrow\mathrm{Mor}\,\mathbf{AbGrp}\\ &:\quad (\lambda_1,\lambda_2)\longmapsto\chi_{\lambda_1,\lambda_2}\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(G_{1\,\lambda_1}\otimes_R G_{2\,\lambda_2},\bigoplus_{\mu_1\in\Lambda_1}G_{1\,\mu_1}\otimes_R\bigoplus_{\mu_2\in\Lambda_2}G_{2\,\mu_2}\Big)\,,\end{aligned}$$

której elementy wybieramy w postaci

$$\chi_{\lambda_1,\lambda_2}:=\jmath_{\lambda_1}\otimes\jmath_{\lambda_2}\,,\tag{20}$$

gdzie zastosowaliśmy notację Def. 2.9 oraz 8. Homomorfizmy te indukują odwzorowanie spełniające relację

$$h\circ\jmath_{\lambda_1,\lambda_2}=\chi_{\lambda_1,\lambda_2}\,,$$

wyrażoną w terminach włożeń kanonicznych

$$\jmath_{\lambda_1,\lambda_2}\ :\ G_{1\,\lambda_1}\otimes_R G_{2\,\lambda_2}\longrightarrow\bigoplus_{(\mu_1,\mu_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2}G_{1\,\mu_1}\otimes_R G_{2\,\mu_2}\,.$$

Oznaczmy symbolicznie

$$\jmath_{\lambda_\alpha}\ :\ G_{\alpha\,\lambda_\alpha}\longrightarrow\bigoplus_{\mu_\alpha\in\Lambda_\alpha}G_{\alpha\,\mu_\alpha}\ :\ g_{\lambda_\alpha}\longmapsto\delta^{\mathbb{Z}}_{\lambda_\alpha,\cdot}\triangleright g_{\lambda_\alpha}\,,\quad\alpha\in\{1,2\}$$

oraz

$$\begin{aligned} \jmath_{\lambda_1,\lambda_2} \quad &: \quad G_{1\,\lambda_1} \otimes_R G_{2\,\lambda_2} \longrightarrow \bigoplus_{(\mu_1,\mu_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2} G_{1\,\mu_1} \otimes_R G_{2\,\mu_2} \\ &: \quad \sum_{(g_1,g_2)\in G_{1\,\lambda_1}\times G_{2\,\lambda_2}} \nu(g_1,g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2) \\ &\quad \longmapsto \sum_{(g_1,g_2)\in G_{1\,\lambda_1}\times G_{2\,\lambda_2}} \delta^{\mathbb{Z}}_{(\lambda_1,\lambda_2),(\cdot,\cdot)} \cdot \nu(g_1,g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2) \end{aligned}$$

i przywołajmy Równ. (2.10). Możemy już teraz wprost sprawdzić – z wykorzystaniem definiującej własności (20), jak również $\mathbb{Z}$-liniowości iloczynu tensorowego – pożądane tożsamości (na tensorach prostych z $\bigoplus_{\mu_1\in\Lambda_1} G_{1\,\mu_1} \otimes_R \bigoplus_{\mu_2\in\Lambda_2} G_{2\,\mu_2}$, dla dowolnych $r. \in \mathscr{R}_0(R;\Lambda_1)$ i $s. \in \mathscr{R}_0(R;\Lambda_2)$)

$$\begin{aligned} & h \circ \widetilde{\tau}\big(g. \triangleleft_{(1)} r. \otimes_R s. \triangleright_{(2)} g.\big) = h\big(g. \triangleleft_{(1)} r. \circ \mathrm{pr}_1 \otimes_R s. \triangleright_{(2)} g. \circ \mathrm{pr}_2\big) \\ \equiv & \sum_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2} h \circ \jmath_{\lambda_1,\lambda_2} \circ \mathrm{pr}_{\lambda_1,\lambda_2}\big(g. \triangleleft_{(1)} r. \circ \mathrm{pr}_1 \otimes_R s. \triangleright_{(2)} g. \circ \mathrm{pr}_2\big) \\ = & \sum_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2} (\jmath_{\lambda_1} \otimes \jmath_{\lambda_2})\big(g_{\lambda_1} \triangleleft_{(1)} r_{\lambda_1} \otimes_R s_{\lambda_2} \triangleright_{(2)} g_{\lambda_2}\big) \\ = & \sum_{\lambda_1\in\Lambda_1} \sum_{\lambda_2\in\Lambda_2} \jmath_{\lambda_1}\big(g_{\lambda_1} \triangleleft_{(1)} r_{\lambda_1}\big) \otimes_R \jmath_{\lambda_2}\big(s_{\lambda_2} \triangleright_{(2)} g_{\lambda_2}\big) \\ = & \sum_{\lambda_1\in\Lambda_1} \jmath_{\lambda_1}\big(g_{\lambda_1} \triangleleft_{(1)} r_{\lambda_1}\big) \otimes_R \sum_{\lambda_2\in\Lambda_2} \jmath_{\lambda_2}\big(s_{\lambda_2} \triangleright_{(2)} g_{\lambda_2}\big) \\ = & \sum_{\lambda_1\in\Lambda_1} \jmath_{\lambda_1} \circ \mathrm{pr}_{\lambda_1}\big(g. \triangleleft_{(1)} r.\big) \otimes_R \sum_{\lambda_2\in\Lambda_2} \jmath_{\lambda_2} \circ \mathrm{pr}_{\lambda_2}\big(s. \triangleright_{(2)} g.\big) \\ = & \; g. \triangleleft_{(1)} r. \otimes_R s. \triangleright_{(2)} g. \,. \end{aligned}$$

Podobnie pokazujemy – dla dowolnej rodziny $N_{(\cdot,\cdot)} \in \mathscr{R}_0(\mathbb{Z};\Lambda_1\times\Lambda_2)$ –

$$\begin{aligned} & \widetilde{\tau} \circ h\big(N_{(\cdot,\cdot)} \cdot \nu(g^{(1)}_{\cdot} \circ \mathrm{pr}_1, g^{(2)}_{\cdot} \circ \mathrm{pr}_2) \triangleright \big(g^{(1)}_{\cdot} \circ \mathrm{pr}_1 \otimes_R g^{(2)}_{\cdot} \circ \mathrm{pr}_2\big)\big) \\ = & \sum_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2} \widetilde{\tau} \circ h \circ \jmath_{\lambda_1,\lambda_2} \circ \mathrm{pr}_{\lambda_1,\lambda_2}\big(N_{(\cdot,\cdot)} \cdot \nu(g^{(1)}_{\cdot} \circ \mathrm{pr}_1, g^{(2)}_{\cdot} \circ \mathrm{pr}_2) \\ & \qquad \triangleright \big(g^{(1)}_{\cdot} \circ \mathrm{pr}_1 \otimes_R g^{(2)}_{\cdot} \circ \mathrm{pr}_2\big)\big) \\ = & \sum_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2} \widetilde{\tau} \circ (\jmath_{\lambda_1} \otimes \jmath_{\lambda_2})\big(N_{(\lambda_1,\lambda_2)} \cdot \nu(g^{(1)}_{\lambda_1}, g^{(2)}_{\lambda_2}) \triangleright \big(g^{(1)}_{\lambda_1} \otimes_R g^{(2)}_{\lambda_2}\big)\big) \\ \equiv & \sum_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2} \widetilde{\tau}\big(N_{(\lambda_1,\lambda_2)} \cdot \nu(g^{(1)}_{\lambda_1}, g^{(2)}_{\lambda_2}) \triangleright \big(\jmath_{\lambda_1}\big(g^{(1)}_{\lambda_1}\big) \otimes_R \jmath_{\lambda_2}\big(g^{(2)}_{\lambda_2}\big)\big)\big) \\ = & \sum_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2} \widetilde{\tau}\big(N_{(\lambda_1,\lambda_2)} \cdot \nu(g^{(1)}_{\lambda_1}, g^{(2)}_{\lambda_2}) \triangleright \big(\delta^{\mathbb{Z}}_{\lambda_1,\cdot_1} \triangleright g^{(1)}_{\lambda_1} \otimes_R \delta^{\mathbb{Z}}_{\lambda_2,\cdot_2} \triangleright g^{(2)}_{\lambda_2}\big)\big) \\ = & \; \widetilde{\tau}\Big(\sum_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2} N_{(\lambda_1,\lambda_2)} \cdot \nu(g^{(1)}_{\lambda_1}, g^{(2)}_{\lambda_2}) \triangleright \big(\delta^{\mathbb{Z}}_{\lambda_1,\cdot_1} \triangleright g^{(1)}_{\lambda_1} \otimes_R \delta^{\mathbb{Z}}_{\lambda_2,\cdot_2} \triangleright g^{(2)}_{\lambda_2}\big)\Big) \\ = & \; \widetilde{\tau}\big(N_{(\cdot_1,\cdot_2)} \cdot \nu(g^{(1)}_{\cdot_1}, g^{(2)}_{\cdot_2}) \triangleright \big(g^{(1)}_{\cdot_1} \otimes_R g^{(2)}_{\cdot_2}\big)\big) \\ = & \; N_{(\mathrm{pr}_1,\mathrm{pr}_2)} \cdot \nu(g^{(1)}_{\cdot} \circ \mathrm{pr}_1, g^{(2)}_{\cdot} \circ \mathrm{pr}_2) \triangleright \big(g^{(1)}_{\cdot} \circ \mathrm{pr}_1 \otimes_R g^{(2)}_{\cdot} \circ \mathrm{pr}_2\big) \\ \equiv & \; N_{(\cdot,\cdot)} \cdot \nu(g^{(1)}_{\cdot} \circ \mathrm{pr}_1, g^{(2)}_{\cdot} \circ \mathrm{pr}_2) \triangleright \big(g^{(1)}_{\cdot} \circ \mathrm{pr}_1 \otimes_R g^{(2)}_{\cdot} \circ \mathrm{pr}_2\big) \,. \end{aligned}$$

□

Prostą konsekwencją powyższego twierdzenia jest

Stwierdzenie 10. Przyjmijmy zapis Def. 7 i niechaj $\big((V_\alpha, +_\alpha, \mathsf{P}_\alpha, \bullet \longmapsto 0_\alpha), \ell_\alpha\big)$, $\alpha \in \{1,2\}$ będą dwiema przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{K}$. Ich iloczyn tensorowy $V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2$ spełnia warunek

$$\dim_{\mathbb{K}}(V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2) = \dim_{\mathbb{K}} V_1 \cdot \dim_{\mathbb{K}} V_2 .$$

Dowód: Pochodna Tw. 7 i stwierdzenia o rozkładzie przestrzeni wektorowej na (wewnętrzną) sumę prostą powłok liniowych elementów bazy. □

Istotnie pogłębiony wgląd w relację między iloczynem tensorowym i sumą prostą, tudzież produktem modułów uzyskujemy w przypadku modułów wolnych, do których teraz przechodzimy. Tytułem wprowadzenia sformułujemy

Stwierdzenie 11. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Niechaj $G \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_R$ będzie R-modułem wolnym o bazie $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, indeksowanej przez pewien zbiór Λ, i niech $H \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R^{\rm op}}$. Wówczas

$$\forall_{\tau\in H\otimes_R G}\ \exists!_{h.\in\mathscr{R}_0(H;\Lambda)}\ :\ \tau = \sum_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda \otimes_R g_\lambda$$

i istnieje (niekanoniczny) izomorfizm grup przemiennych

$$H \otimes_R G \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H .$$

Dowód: Wybór bazy w R-module G jest równoznaczny ze wskazaniem izomorfizmu R-modułów

$$G \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \langle g_\lambda\rangle_R ,$$

co w świetle Tw. 7 (a przy domyślnym zastosowaniu Stw. 6) pozwala zapisać

$$H \otimes_R G \cong H \otimes_R \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \langle g_\lambda\rangle_R \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \big(H \otimes_R \langle g_\lambda\rangle_R\big) .$$

Liniowa niezależność (nad R) każdego z elementów bazy $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ oznacza dalej, że odwzorowanie

$$\iota_\lambda\ :\ R \longrightarrow \langle g_\lambda\rangle_R\ :\ r \longmapsto r \triangleright g_\lambda$$

jest izomorfizmem R-modułów, którego istnienie daje nam, po uwzględnieniu tezy Stw. 8, pożądany izomorfizm grup przemiennych

$$H \otimes_R G \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \big(H \otimes_R \langle g_\lambda\rangle_R\big) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \big(H \otimes_R R\big) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H .$$

Powyższe rozumowanie pozwala nam bez trudu przeprowadzić dowód pierwszej części stwierdzenia. Istotnie, rozważmy dowolny tensor

$$\sum_{(h,g)\in H\times G} \nu(h,g) \triangleright (h \otimes_R g) \in H \otimes_R G ,$$

określony przez rodzinę $\nu \in \mathscr{R}_0(\mathbb{Z}; H\times G)$. Uwzględniwszy skończoność tej ostatniej, jak również skończoność rodziny $r.(g) \in \mathscr{R}_0(R;\Lambda)$ wyznaczającej jednoznaczny rozkład elementu $g \in G$ w bazie $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, wreszcie też wykorzystawszy śród-R-liniowość $\otimes_R$, stwierdzamy

$$\begin{aligned}
\sum_{(h,g)\in H\times G} \nu(h,g) \triangleright (h \otimes_R g) &= \sum_{(h,g)\in H\times G} \nu(h,g) \triangleright \Big(h \otimes_R \sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda(g) \triangleright_G g_\lambda\Big) \\
&= \sum_{\lambda\in\Lambda} \sum_{(h,g)\in H\times G} \nu(h,g) \triangleright \big(h \otimes_R r_\lambda(g) \triangleright_G g_\lambda\big) \\
&= \sum_{\lambda\in\Lambda} \sum_{(h,g)\in H\times G} \nu(h,g) \triangleright \big(h \triangleleft_H r_\lambda(g) \otimes_R g_\lambda\big) \\
&= \sum_{\lambda\in\Lambda} \left(\sum_{(h,g)\in H\times G} \nu(h,g) \triangleright \big(h \triangleleft_H r_\lambda(g)\big)\right) \otimes_R g_\lambda ,
\end{aligned}$$

co jest poszukiwanym rozkładem,

$$h_\lambda := \sum_{(h,g)\in H\times G} \nu(h,g) \triangleright \big(h \triangleleft_H r_\lambda(g)\big) \in H .$$

Jego jednoznaczność wynika wprost z równoważności

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda \otimes_R g_\lambda = \mathbf{0}_{H\otimes_R G} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall_{\lambda\in\Lambda} \;:\; h_\lambda = \mathbf{0}_H \,,$$

której nietrywialną składową $\Longrightarrow$ otrzymujemy ewaluując odwzorowanie $\mathbb{Z}$-liniowe ${}_H\kappa \circ (\mathrm{id}_H \otimes \iota_\mu^{-1} \circ \mathrm{pr}_\mu)$ (patrz: Stw. 8) na obu stronach równości z lewej strony dla każdego indeksu $\mu \in \Lambda$ z osobna. □

Rozumowanie jak to przedstawione powyżej prowadzi nas wprost do

Stwierdzenie 12. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Jeśli oba moduły G_1 i G_2 są wolne, przy czym odnośne bazy to $\{g^{(1)}_{\lambda_1}\}_{\lambda_1\in\Lambda_1}$ i $\{g^{(2)}_{\lambda_2}\}_{\lambda_2\in\Lambda_2}$, to w zapisie dowolnego elementu

$$\sum_{\lambda_1\in\Lambda_1} g^{(1)}_{\lambda_1} \otimes_R h^{(2)}_{\lambda_1} \equiv \sum_{\lambda_2\in\Lambda_2} h^{(1)}_{\lambda_2} \otimes_R g^{(2)}_{\lambda_2}$$

w terminach elementów $h^{(2)}_{\lambda_1} \in G_2$ i $h^{(1)}_{\lambda_2} \in G_1$, o rozkładach

$$h^{(2)}_{\lambda_1} = \sum_{\lambda_2\in\Lambda_2} h^{(2)}_{\lambda_1,\lambda_2} \rhd_{(2)} g^{(2)}_{\lambda_2} \,, \qquad\qquad h^{(1)}_{\lambda_2} = \sum_{\lambda_1\in\Lambda_1} g^{(1)}_{\lambda_1} \lhd_{(1)} h^{(1)}_{\lambda_2,\lambda_1} \,,$$

o którym orzeka Stw. 11, są spełnione tożsamości

$$\forall_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_2\times\Lambda_2} \;:\; h^{(2)}_{\lambda_1,\lambda_2} = h^{(1)}_{\lambda_2,\lambda_1} \,.$$

Dowód: Wystarczy wykorzystać jednoznaczność rozkładu, o którym mówi Stw. 11 (w wersji stosownie zsymetryzowanej). □

Uwaga 4. Należy podkreślić, że mimo swe strukturalne powinowactwo do stwierdzeń orzekających o jednoznaczności rozkładu elementu modułu w bazie, powyższe stwierdzenie nie pozwala nam traktować układu $\{g^{(1)}_{\lambda_1} \otimes_R g^{(2)}_{\lambda_2}\}_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_2\times\Lambda_2}$ jako bazy, oto bowiem grupa przemienna $G_1 \otimes_R G_2$ nie jest w ogólności R-modułem.

Znaczenie założenia o istnieniu (skończonej) bazy eksponuje

Stwierdzenie 13. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i niechaj $H. \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}^{\widetilde{\Lambda}}_{R^{\mathrm{op}}}$. Jeśli $G \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_R$ jest R-modułem wolnym, to wówczas kanoniczny homomorfizm grup przemiennych

$$\widetilde{\tau} \;:\; \prod_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda \otimes_R G \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} \big(H_\lambda \otimes_R G\big) \,,$$

o którym mówi Stw. 9, jest monomorfizmem. Jeżeli ponadto moduł G jest skończenie generowany, to homomorfizm ten jest izomorfizmem.

Dowód: Niechaj $\{g_\mu\}_{\mu\in\Lambda}$ będzie bazą G, a wtedy dowolny element $t = \prod_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda \otimes_R G$ można – w świetle Stw. 11 – zapisać jednoznacznie jako

$$t = \sum_{\mu\in\Lambda} h^\mu_\cdot \otimes_R g_\mu \,, \qquad h^\mu_\cdot \in \prod_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda \,,$$

zatem jego obrazem względem odwzorowania kanonicznego $\widetilde{\tau}$ jest element grupy $\prod_{\lambda\in\Lambda} \big(H_\lambda \otimes_R G\big)$ postaci

$$\widetilde{\tau}(t) \;:\; \Lambda \longrightarrow \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} (H_\lambda \otimes_R G) \;:\; \lambda \longmapsto \sum_{\mu\in\Lambda} h^\mu_\lambda \otimes_R g_\mu \in H_\lambda \otimes_R G \,.$$

Ten ostatni jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\lambda\in\Lambda} \;:\; \sum_{\mu\in\Lambda} h^\mu_\lambda \otimes_R g_\mu = 0_{H_\lambda\otimes_R G} \,,$$

to zaś – wobec jednoznaczności rozkładu orzeczonej w Stw. 11 – jest równoważne stwierdzeniu

$$\forall_{\lambda\in\Lambda}\, \forall_{\mu\in\Lambda} \;:\; h^\mu_\lambda = 0_{H_\lambda} \,,$$

co pokazuje injektywność odwzorowania $\widetilde{\tau}$ w rozpatrywanym przypadku.

Jeśli ponadto $N := |\Lambda| < \infty$, to na podstawie Tw. 7 oraz Stw. 8 (i wcześniejszych naszych rozważań, w tym Stw. 6) otrzymujemy z jednej strony

$$\begin{aligned}\iota_1\ :\ \prod_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda\otimes_R G &\cong \prod_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda\otimes_R \bigoplus_{n=1}^N \langle g_n\rangle_R \cong \bigoplus_{n=1}^N\big(\prod_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda\otimes_R\langle g_n\rangle_R\big)\\ &\cong \bigoplus_{n=1}^N\big(\prod_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda\otimes_R R\big)\cong\bigoplus_{n=1}^N\prod_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda\cong\prod_{n=1}^N\prod_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda\\ &\equiv \prod_{(n,\lambda)\in\overline{1,N}\times\Lambda} H_\lambda\,,\end{aligned}$$

z drugiej zaś

$$\begin{aligned}\iota_2\ :\ \prod_{\lambda\in\Lambda}\big(H_\lambda\otimes_R G\big) &\cong \prod_{\lambda\in\Lambda}\big(H_\lambda\otimes_R\bigoplus_{n=1}^N\langle g_n\rangle_R\big)\cong\prod_{\lambda\in\Lambda}\bigoplus_{n=1}^N\big(H_\lambda\otimes_R\langle g_n\rangle_R\big)\\ &\cong\prod_{\lambda\in\Lambda}\bigoplus_{n=1}^N\big(H_\lambda\otimes_R R\big)\cong\prod_{\lambda\in\Lambda}\bigoplus_{n=1}^N H_\lambda\equiv\prod_{\lambda\in\Lambda}\prod_{n=1}^N H_\lambda\\ &\cong\prod_{(n,\lambda)\in\overline{1,N}\times\Lambda}H_\lambda\,.\end{aligned}$$

W powyższych rozważaniach wykorzystaliśmy oczywiste izomorfizmy

$$\prod_{\lambda_1\in\Lambda_1}\prod_{\lambda_2\in\Lambda_2}G_{\lambda_1,\lambda_2}\cong\prod_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2}G_{\lambda_1,\lambda_2}\,,$$

które dowolnemu odwzorowaniu

$$\gamma_\cdot\ :\ \Lambda_1\longrightarrow\bigcup_{\lambda_1\in\Lambda_1}\mathbf{Map}\big(\Lambda_2,\bigcup_{\lambda_2\in\Lambda_2}G_{\lambda_1,\lambda_2}\big)$$

o własności

$$\forall_{\lambda_1\in\Lambda_1}\ :\ \gamma_{\lambda_1}\ :\ \Lambda_2\longrightarrow\bigcup_{\lambda_2\in\Lambda_2}G_{\lambda_1,\lambda_2}\ :\ \lambda_2\longmapsto\gamma_{\lambda_1}(\lambda_2)\in G_{\lambda_1,\lambda_2}$$

przyporządkowują odwzorowanie

$$g^{\gamma_\cdot}_{\cdot,\cdot}\ :\ \Lambda_1\times\Lambda_2\longrightarrow\bigcup_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2}G_{\lambda_1,\lambda_2}\ :\ (\lambda_1,\lambda_2)\longmapsto\gamma_{\lambda_1}(\lambda_2)\,,$$

i odwrotnie – z każdym odwzorowaniem

$$g_{\cdot,\cdot}\ :\ \Lambda_1\times\Lambda_2\longrightarrow\bigcup_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2}G_{\lambda_1,\lambda_2}\ :\ (\lambda_1,\lambda_2)\longmapsto g_{\lambda_1,\lambda_2}\in G_{\lambda_1,\lambda_2}$$

stowarzyszają odwzorowanie

$$\gamma^{g_{\cdot,\cdot}}_\cdot\ :\ \Lambda_1\longrightarrow\bigcup_{\lambda_1\in\Lambda_1}\mathbf{Map}\big(\Lambda_2,\bigcup_{\lambda_2\in\Lambda_2}G_{\lambda_1,\lambda_2}\big)$$

o wartościach danych przez odwzorowania

$$\gamma^{g_{\cdot,\cdot}}_{\lambda_1}\ :\ \Lambda_2\longrightarrow\bigcup_{\lambda_2\in\Lambda_2}G_{\lambda_1,\lambda_2}\ :\ \lambda_2\longmapsto g_{\lambda_1,\lambda_2}\,.$$

Endomorfizm złożony $\iota_2\circ\widetilde{\tau}\circ\iota_1^{-1}$ grupy przemiennej $\prod_{(n,\lambda)\in\overline{1,N}\times\Lambda}H_\lambda$ jest injektywny wprost z konstrukcji, ale też bez trudu stwierdzamy, że jest to endomorfizm identycznościowy, co przesądza o bijektywnym charakterze $\widetilde{\tau}$. □

Ilekroć pierścień bazowy jest przemienny, w *naturalny* sposób pojawia się dodatkowa struktura algebraiczna na grupie przemiennej $G_1\otimes_R G_2$ z Def. 7. Ażeby uwypuklić znaczenie przemienności R, prześledźmy następujące rozumowanie, którego celem jest wyindukowanie na rzeczonej grupie struktury R-modułu przy użyciu istniejących działań R na czynnikach iloczynu tensorowego. Oczywisty kandydat do roli R-działania (lewostronnego) to odwzorowanie

$$\ell^\otimes_\cdot\quad:\quad R\times(G_1\otimes_R G_2)\longrightarrow G_1\otimes_R G_2$$

$$
\begin{aligned}
: \quad & \Big(r, \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2)\Big) \\
\longmapsto & \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R r \triangleright_{(2)} g_2)\,.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Na pierwszy rzut oka odwzorowanie to ma pożądaną własność (wypisaną dla dowolnych $r_1, r_2 \in R$)

$$
\begin{aligned}
& \ell^{\otimes}_{r_1} \circ \ell^{\otimes}_{r_2}\Big(\sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2)\Big) \\
&= \ell^{\otimes}_{r_1}\Big(\sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R r_2 \triangleright_{(2)} g_2)\Big) \\
&= \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright \big(g_1 \otimes_R r_1 \triangleright_{(2)} (r_2 \triangleright_{(2)} g_2)\big) \\
&= \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright \big(g_1 \otimes_R (r_1 \cdot_R r_2) \triangleright_{(2)} g_2\big) \\
&\equiv \ell^{\otimes}_{r_1 \cdot_R r_2}\Big(\sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2)\Big)\,.
\end{aligned}
$$

Jeśli jednak weźmiemy pod uwagę śród-R-jednorodność $\otimes_R$, to natrafimy na kłopot, oto bowiem otrzymujemy tożsamość

$$
\begin{aligned}
& \ell^{\otimes}_{r_1} \circ \ell^{\otimes}_{r_2}\Big(\sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2)\Big) \\
&= \ell^{\otimes}_{r_1}\Big(\sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R r_2 \triangleright_{(2)} g_2)\Big) \\
&= \ell^{\otimes}_{r_1}\Big(\sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright (g_1 \triangleleft_{(1)} r_2 \otimes_R g_2)\Big) \\
&= \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright \big(g_1 \triangleleft_{(1)} r_2 \otimes_R r_1 \triangleright_{(2)} g_2\big) \\
&= \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright \big((g_1 \triangleleft_{(1)} r_2) \triangleleft_{(1)} r_1 \otimes_R g_2\big) \\
&= \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright \big(g_1 \triangleleft_{(1)} (r_2 \cdot_R r_1) \otimes_R g_2\big) \\
&= \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright \big(g_1 \otimes_R (r_2 \cdot_R r_1) \triangleright_{(2)} g_2\big) \\
&\equiv \ell^{\otimes}_{r_2 \cdot_R r_1}\Big(\sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2)\Big)\,,
\end{aligned}
$$

która jest *naturalnie* (tj. w sposób jawnie pozwalający na uniknięcie sprzeczności w okolicznościach generycznych) spełniona w połączeniu z poprzednią, gdy

$$
\forall_{r_1,r_2\in R} \; : \; r_1 \cdot_R r_2 = r_2 \cdot_R r_1\,,
$$

tj., gdy R jest przemienny. Przyjmując to za punkt wyjścia do dalszych rozważań, wprowadzamy

Definicja 10. Przyjmijmy zapis Def. 7, przy czym niechaj R będzie pierścieniem przemiennym. Struktura R-modułu na $G_1 \otimes_R G_2$ jest zadawana przez odwzorowanie (działanie) (21). Analogicznie definiujemy strukturę R-modułu na n-krotnym iloczynie tensorowym rodziny modułów $\{G_A\}_{A\in\overline{1,n}}$ z Def. 9 przy $R_l := R,\ l \in \overline{1, n-1}$.

Jako natychmiastowe corollarium do Stw. 12 otrzymujemy

Stwierdzenie 14. Przyjmijmy zapis Def. 10 i Stw. 12. Jeśli oba moduły G_1 i G_2 są wolne, przy czym odnośne bazy to $\{g^{(1)}_{\lambda_1}\}_{\lambda_1\in\Lambda_1}$ i $\{g^{(2)}_{\lambda_2}\}_{\lambda_2\in\Lambda_2}$, to także R-moduł $G_1 \otimes_R G_2$ jest wolny, a rodzina $\{g^{(1)}_{\lambda_1} \otimes_R g^{(2)}_{\lambda_2}\}_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2}$ jest jego bazą.

Dowód: Oczywisty. □

Literatura

[KM76] K. Kuratowski and A. Mostowski, *Teoria mnogości*, Monografie Matematyczne, vol. XXVII, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1976.