O TYM, ŻE CZASEM WARTO MIEĆ IDEAŁY
(MAWF '22/23 1.VI & 1.VII [RRS])

Spis treści

Ostatnim brakującym elementem wiedzy ogólnej, którego potrzebujemy do wprowadzenia pojęcia centralnego niniejszego kursu, są rudymenty teorii algebr, do których omówienia przejdziemy obecnie.

1. Algebry

Pojęcie podstawowe wprowadzamy w

Definicja 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niech $R \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{AbRing}$. **Algebra nad pierścieniem** R (albo inaczej R**-algebra**) to kolekcja $\big(\big((\mathfrak{A}, +_{\mathfrak{A}}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \longmapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}}), \ell_{\mathfrak{A}}\big), m_{\mathfrak{A}}\big)$ złożona z R-modułu $\big((\mathfrak{A}, +_{\mathfrak{A}}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \longmapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}}), \ell_{\mathfrak{A}}\big)$ oraz odwzorowania dwu-R-liniowego

$$m_{\mathfrak{A}} \;:\; \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A} \;:\; (a,b) \longmapsto a \cdot_{\mathfrak{A}} b \equiv m_{\mathfrak{A}}(a,b)\,,$$

zwanego **mnożeniem**. Równoważnie możemy traktować mnożenie jako odwzorowanie R-liniowe

$$m_{\mathfrak{A}} \;:\; \mathfrak{A} \otimes_R \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}\,,$$

przeto w dalszej części wykładu będziemy obu wersji definicji używać zamiennie, o ile nie będzie to prowadzić do nieporozumień. Podobnie, jeśli tylko struktura rozważanej algebry nie będzie budzić wątpliwości, będziemy czasami gwoli odciążenia zapisu używać skrótu

$$m_{\mathfrak{A}}(a,b) \equiv a.b\,.$$

Algebra przeciwna do $\big(\big((\mathfrak{A},+_{\mathfrak{A}},P_{\mathfrak{A}},\bullet\longmapsto\mathbf{0}_{\mathfrak{A}}),\ell_{\mathfrak{A}}\big),m_{\mathfrak{A}}\big)$ to R-algebra $\big(\big((\mathfrak{A},+_{\mathfrak{A}},P_{\mathfrak{A}},\bullet\longmapsto\mathbf{0}_{\mathfrak{A}}),\ell_{\mathfrak{A}}\big),m_{\mathfrak{A}}^{\mathrm{opp}}\big)$ z mnożeniem danym wzorem

$$m_{\mathfrak{A}}^{\mathrm{opp}}:=m_{\mathfrak{A}}\circ\tau_{\mathfrak{A}}\,.$$

Będziemy ją oznaczać symbolem $\mathfrak{A}^{\mathrm{opp}}$.

Algebra przemienna to taka, w której

$$m_{\mathfrak{A}}\equiv m_{\mathfrak{A}}\circ\tau_{\mathfrak{A}}\,.$$

Algebra łączna to taka, w której mnożenie jest operacją łączną.

Algebra unitalna (zwana także **algebrą z jednością**) to kolekcja $\big(\big((\mathfrak{A},+_{\mathfrak{A}},P_{\mathfrak{A}},\bullet\longmapsto\mathbf{0}_{\mathfrak{A}}),\ell_{\mathfrak{A}}\big),m_{\mathfrak{A}},\bullet\longmapsto\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}\big)$ złożona z R-algebry $\big(\big((\mathfrak{A},+_{\mathfrak{A}},P_{\mathfrak{A}},\bullet\longmapsto\mathbf{0}_{\mathfrak{A}}),\ell_{\mathfrak{A}}\big),m_{\mathfrak{A}}\big)$ oraz stałej $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}\in\mathfrak{A}$ będącej elementem neutralnym mnożenia, zwanej **jednością** lub **jedynką**.

Podalgebra $\mathfrak{B}$ algebry $\mathfrak{A}$ to taki jej podmoduł, który spełnia warunek domkniętości względem mnożenia,

$$m_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B}\times\mathfrak{B})\subset\mathfrak{B}\,.$$

Homomorfizm R-algebry $\big(\big((\mathfrak{A}_1,+_{\mathfrak{A}_1},P_{\mathfrak{A}_1},\bullet\longmapsto\mathbf{0}_{\mathfrak{A}_1}),\ell_{\mathfrak{A}_1}\big),m_{\mathfrak{A}_1}\big)$ **w R-algebrę** $\big(\big((\mathfrak{A}_2,+_{\mathfrak{A}_2},P_{\mathfrak{A}_2},\bullet\longmapsto\mathbf{0}_{\mathfrak{A}_2}),\ell_{\mathfrak{A}_2}\big),m_{\mathfrak{A}_2}\big)$ to odwzorowanie $\chi\in\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2)$ o dodatkowej własności wyrażonej przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_1 \arrow[r, "m_{\mathfrak{A}_1}"] \arrow[d, "\chi\times\chi"'] & \mathfrak{A}_1 \arrow[d, "\chi"] \\
\mathfrak{A}_2\times\mathfrak{A}_2 \arrow[r, "m_{\mathfrak{A}_2}"'] & \mathfrak{A}_1
\end{tikzcd}\,.$$

Homomorfizm R-algebr z jednością nazwiemy **unitalnym**, jeśli obrazem jedności w jego dziedzinie względem tego homomorfizmu jest jedność w jego przeciwdziedzinie.

Algebry nad pierścieniem R wraz z odnośnymi homomorfizmami tworzą **kategorię algebr nad pierścieniem** R, którą będziemy oznaczać symbolem

$$\mathbf{Alg}_R\,.$$

Kategorię R-algebr łącznych oznaczymy symbolem

$$\mathbf{AssAlg}_R\,,$$

natomiast **kategorię R-algebr unitalnych** (z unitalnymi homomorfizmami R-algebr jako morfizmami) – symbolem

$$\mathbf{uAlg}_R\,.$$

Wreszcie **kategorię unitalnych R-algebr łącznych** oznaczymy symbolem

$$\mathbf{uAssAlg}_R\,.$$

Przykłady 1.

(1) Macierze kwadratowe $\mathrm{Mat}(n;R)\equiv R(n)$ (rozmiaru $n\times n$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$) o współczynnikach z pierścienia przemiennego R z dodawaniem po współrzędnych i takimż braniem przeciwności, a także macierzą zerową w charakterze elementu neutralnego tworzą grupę przemienną, na której jest określone naturalne działanie (po współrzędnych) pierścienia R, czyniące z rzeczonej grupy moduł nad R, a nadto – mnożenie (macierzowe), nadające temu R-modułowi strukturę R-algebry (nieprzemiennej dla $n>1$), zwanej **algebrą macierzową**. Naturalną (standardową) bazę tej algebry tworzą macierze $\{E_{ij}\}_{i,j\in\overline{1,n}}$ o wyrazach

$$\big(E_{i,j}^{(n)}\big)^k{}_l=\delta_{k,i}^R\cdot\delta_{l,j}^R\,,\tag{1}$$

spełniające prostą algebrę

(2) $$E^{(n)}_{i,j} \odot E^{(n)}_{k,l} = \delta^{\mathbb{K}}_{k,j} \triangleright E^{(n)}_{i,l}\,.$$

(2) Endomorfizmy $\mathrm{End}_R(G)$ modułu G nad pierścieniem przemiennym R z określonym punktowo dodawaniem i braniem przeciwności, a także endomorfizmem zerowym w charakterze elementu neutralnego tworzą grupę przemienną, na której jest określone punktowe działanie pierścienia R, czyniące z rzeczonej grupy moduł nad R, a nadto – mnożenie zadawane przez superpozycję endomorfizmów, nadające temu R-modułowi strukturę R-algebry (w ogólności nieprzemiennej), zwanej **algebrą endomorfizmów**.

(3) Dowolny pierścień jest algebrą łączną nad swym centrum.

(4) Unitalna $\mathbb{R}$-algebra **kwaternionów** $\mathbb{H}$, czyli przestrzeń $\mathbb{R}$-liniowa $\mathbb{R}^{\times 4}$ z **iloczynem Hamiltona** (zapisanym dla dowolnych $r_i, s_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1,2,3,4\}$)

$$\begin{aligned} & m_{\mathbb{H}}\big((r_1,r_2,r_3,r_4),(s_1,s_2,s_3,s_4)\big) \equiv (r_1,r_2,r_3,r_4)\cdot_{\mathbb{H}}(s_1,s_2,s_3,s_4) \\ = \quad & (r_1\cdot s_1 - r_2\cdot s_2 - r_3\cdot s_3 - r_4\cdot s_4, r_1\cdot s_2 + r_2\cdot s_1 + r_3\cdot s_4 - r_4\cdot s_3, \\ & r_1\cdot s_3 - r_2\cdot s_4 + r_3\cdot s_1 + r_4\cdot s_2, r_1\cdot s_4 + r_2\cdot s_3 - r_3\cdot s_2 + r_4\cdot s_1\big) \end{aligned}$$

o elemencie neutralnym

$$1_{\mathbb{H}} := (1,0,0,0)\,.$$

Tak jak w przypadku liczb zespolonych istnieje monomorfizm pierścieni

$$\jmath^{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}} \;:\; \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{H} \;:\; r \longmapsto (r,0,0,0)\,,$$

który pozwala zdefiniować działanie $\mathbb{R} \cong \jmath^{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ na $\mathbb{H}$,

$$\ell_{\cdot} \;:\; \mathbb{R}\times\mathbb{H} \rightarrowtail \mathbb{H} \;:\; (r,q) \longmapsto \jmath^{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}(r)\cdot_{\mathbb{H}} q\,,$$

i uzasadnia zapis

$$\mathbb{H} \ni (a,b,c,d) \equiv a + b\mathsf{i} + c\mathsf{j} + d\mathsf{k}\,.$$

Wyróżnione wektory

$$\mathsf{i} \equiv (0,1,0,0)\,, \qquad \mathsf{j} \equiv (0,0,1,0)\,, \qquad \mathsf{k} \equiv (0,0,0,1)$$

spełniają relacje

(3) $$\begin{gathered} \mathsf{i}\cdot_{\mathbb{H}}\mathsf{i} = -1 = \mathsf{j}\cdot_{\mathbb{H}}\mathsf{j} = \mathsf{k}\cdot_{\mathbb{H}}\mathsf{k}\,, \\ \mathsf{i}\cdot_{\mathbb{H}}\mathsf{j} = \mathsf{k} = -\mathsf{j}\cdot_{\mathbb{H}}\mathsf{i}\,, \qquad \mathsf{k}\cdot_{\mathbb{H}}\mathsf{i} = \mathsf{j} = -\mathsf{i}\cdot_{\mathbb{H}}\mathsf{k}\,, \qquad \mathsf{j}\cdot_{\mathbb{H}}\mathsf{k} = \mathsf{i} = -\mathsf{k}\cdot_{\mathbb{H}}\mathsf{j}\,. \end{gathered}$$

W analogii do liczb zespolonych definiujemy $\mathbb{R}$-liniowe, antymultyplikatywne i inwolutywne **sprzężenie kwaternionowe**

$$\cdot^* \;:\; \mathbb{H} \circlearrowleft\;:\; a + b\mathsf{i} + c\mathsf{j} + d\mathsf{k} \longmapsto a - b\mathsf{i} - c\mathsf{j} - d\mathsf{k}$$

i przy jego użyciu **normę kwaternionową**

$$\|\cdot\|_{\mathbb{H}} \;:\; \mathbb{H} \circlearrowleft \mathbb{R}_{\geq 0} \;:\; q \longmapsto \sqrt{q\cdot q^*}\,,$$

która dystrybuuje względem mnożenia,

$$\forall_{q_1,q_2\in\mathbb{H}} \;:\; \|q_1\cdot_{\mathbb{H}} q_2\|_{\mathbb{H}} = \|q_1\|_{\mathbb{H}}\cdot\|q_2\|_{\mathbb{H}}\,.$$

Mamy zatem oczywistą tożsamość

$$\forall_{q\in\mathbb{H}\setminus\{(0,0,0,0)\}} \;:\; q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2_{\mathbb{H}}}\,,$$

która pokazuje, że kwaterniony tworzą pierścień z dzieleniem. Można je otrzymać z uniwersalnej konstrukcji Cayleya–Dicksona zastosowanej do liczb zespolonych. Są to więc pary liczb zespolonych (czyli przestrzeń $\mathbb{C}$-liniowa $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\equiv\langle 1\rangle_{\mathbb{C}}\oplus\langle \mathsf{j}\rangle_{\mathbb{C}}$) z mnożeniem określonym przez sugestywny zapis

$$\mathbb{H}\ni a+b\mathsf{i}+c\mathsf{j}+d\mathsf{k}\leftrightarrow (a+b\,\mathsf{i})\triangleright 1+(c+d\,\mathsf{i})\triangleright \mathsf{j}\in\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\,.$$

W tym ujęciu pojawia się naturalnie monomorfizm $\mathbb{R}$-algebr

(4) $$\jmath_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}\ :\ \mathbb{C}\rightarrowtail\mathbb{H}\ :\ a+b\mathsf{i}\longmapsto (a+b\,\mathsf{i})\triangleright 1+(0+0\,\mathsf{i})\triangleright\mathsf{j}\,.$$

Warto też zauważyć, że algebra kwaternionów ma naturalną interpretację geometryczną – oto w obrazie izomorfizmu przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowych

(5) $$\iota_{\mathbb{H}}\ :\ \mathbb{H}\xrightarrow{\cong}\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^{\times 3}\ :\ a+b\mathsf{i}+c\mathsf{j}+d\mathsf{k}\longmapsto\big(a,(b,c,d)\big)$$

iloczyn Hamiltona tłumaczy się, jak łatwo sprawdzić, na mnożenie

(6) $$\begin{aligned} m_{\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^{\times 3}}:=\iota_{\mathbb{H}}\circ m_{\mathbb{H}}\circ\big(\iota_{\mathbb{H}}^{-1}\times\iota_{\mathbb{H}}^{-1}\big)\quad &:\quad \big(\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^{\times 3}\big)^{\times 2}\longrightarrow\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^{\times 3} \\ &:\quad \big((r,v),(s,w)\big)\longmapsto\big(r\cdot s-\Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}}(v,w), \\ &\qquad\qquad v\times w+r\triangleright w+s\triangleright v\big)\,, \end{aligned}$$

gdzie $\Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}}\ :\ \mathbb{R}^{\times 3}\times\mathbb{R}^{\times 3}\longrightarrow\mathbb{R}$ jest standardową (euklidesową) niezwyrodniałą 2-liniową formą symetryczną (czyli iloczynem skalarnym) na $\mathbb{R}^{\times 3}$, symbol $v\times w$ oznacza iloczyn wektorowy v i w, natomiast $\triangleright$ jest kanonicznym działaniem ciała bazowego $\mathbb{R}$ na grupie przemiennej $\mathbb{R}^{\times 3}$. Tym samym kwaterniony w zgrabnej postaci kodują pełną informację o elementarnej strukturze metrycznej i orientacji przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowej $\mathbb{R}^{\times 3}$.

(5) Mnożenie punktowe funkcji wraz z określonym punktowo działaniem $\mathbb{R}$ nadaje pierścieniowi funkcji ciągłych na danym zbiorze o wartościach rzeczywistych strukturę przemiennej i łącznej $\mathbb{R}$-algebry unitalnej.

(6) Z każdą grupą skończoną G można stowarzyszyć $\mathbb{C}$-algebrę, w której nośnikiem struktury jest zbiór $\mathbb{C}^G$ funkcji na G o wartościach zespolonych z punktową strukturą $\mathbb{C}$-liniową (j/w) oraz mnożeniem określonym wzorem

$$\star\ :\ \mathbb{C}^G\times\mathbb{C}^G\longrightarrow\mathbb{C}^G\ :\ (f_1,f_2)\longmapsto\sum_{g\in G}f_1(g)\triangleright\ell_{g^{-1}}^*f_2$$

i noszącym miano **splotu funkcji**. Algebrę tę określamy mianem **algebry grupowej nad** G. Dyskusję funktorialności tego przyporządkowania, jak również szczegółowy opis dodatkowych własności tak określonego obiektu algebraicznego, można znaleźć w notatkach do wykładu z Teorii Grup I Autora pt. „Algebra grupowa, kategorycznie".

(7) Zbiór $\mathbb{R}^3$ ze standardową strukturą przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowej oraz iloczynem wektorowym jest algebrą niełączną bez jedności.

(8) Z dowolnym zbiorem S można stowarzyszyć ***R*-algebrę wolną na** S, daną jako R-moduł wolny na słowniku na S, czyli na zbiorze skończonych ciągów elementów S, zwanych słowami, z mnożeniem określonym jako konkatenacja słów.

(9) Dowolna R-algebra $\mathfrak{A}$ z mnożeniem $m_{\mathfrak{A}}$ określa algebrę przemienną o nośniku $\mathfrak{A}$ z mnożeniem

$$\{\cdot,\cdot\}_{m_{\mathfrak{A}}}:=m_{\mathfrak{A}}+m_{\mathfrak{A}}\circ\tau_{\mathfrak{A}}\,,$$

określanym mianem **antykomutatora**, jak również algebrę antyprzemienną o nośniku $\mathfrak{A}$ z mnożeniem

$$[\cdot,\cdot]_{m_{\mathfrak{A}}}:=m_{\mathfrak{A}}-m_{\mathfrak{A}}\circ\tau_{\mathfrak{A}}\,,$$

określanym mianem **komutatora**.

(10) Jądro homomorfizmu algebr jest podalgebrą jego dziedziny, obraz zaś – podalgebrą jego przeciwdziedziny.

(11) Przecięcie wszystkich podalgebr algebry $\mathfrak{A}$ zawierających podzbiór $S\subset\mathfrak{A}$ zwany jest **podalgebrą generowaną przez** S. Podzbiór S nazywamy w tym kontekście **zbiorem generującym**.

(12) Podalgebra $S' \equiv C_{\mathfrak{A}}(S)$ algebry łącznej $\mathfrak{A}$ złożona z elementów $\mathfrak{A}$ komutujących (czyli przemiennych) ze wszystkimi elementami podzbioru $S \subset \mathfrak{A}$,

$$C_{\mathfrak{A}}(S) := \left\{ \ a \in \mathfrak{A} \quad | \quad \forall_{s \in S} \ : \ [a, s]_{m_{\mathfrak{A}}} = \mathbf{0}_{\mathfrak{A}} \ \right\},$$

jest nazywana **centralizatorem** S **(w** $\mathfrak{A}$**)**. Ilekroć S jest podalgebrą, to $S \cap C_{\mathfrak{A}}(S)$ określamy mianem **centrum** S. W szczególności gdy $S = \mathfrak{A}$, mówimy o **centrum algebry** $\mathfrak{A}$ i piszemy $Z(\mathfrak{A}) \equiv C_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$.

Obecność jedności w algebrze pozwala ustalić

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 1 i Przykł. 1 (3), zakładając przy tym, że R-algebra $\mathfrak{A}$ ma jedność $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}$. Odwzorowanie

$$\jmath_R \ : \ R \longrightarrow \mathfrak{A} \ : \ r \longmapsto r \triangleright \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$$

jest homomorfizmem R-algebr.

Dowód: Oczywisty. □

Uwaga 1. Monomorfizm, o którym mowa w Stw. 1, pozwala utożsamić pierścień bazowy R z podalgebrą przemienną $\jmath_R(R) \subset Z(\mathfrak{A})$ (w notacji Przykł. 1 (11)), co też będziemy czynić w dalszej części wykładu.

Elementarne przejście od algebry nieunitalnej do algebry unitalnej opisuje

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\mathfrak{A}$ będzie R-algebrą bez jedności. Na sumie prostej R-modułów $\mathfrak{A} \oplus R$ istnieje kanoniczna struktura R-algebry unitalnej z mnożeniem

$$\begin{aligned} m_{\mathfrak{A} \oplus R} \quad &: \quad (\mathfrak{A} \oplus R)^{\times 2} \longrightarrow \mathfrak{A} \oplus R \\ &: \quad \big((a, r), (b, s)\big) \longmapsto \big(m_{\mathfrak{A}}(a, b) +_{\mathfrak{A}} r \triangleright_{\mathfrak{A}} b +_{\mathfrak{A}} s \triangleright_{\mathfrak{A}} a, r \cdot_R s\big) \end{aligned}$$

i jednością

$$\mathbf{1}_{\mathfrak{A} \oplus R} = (0, 1_R).$$

Dowód: Oczywisty. □

Nakreśliwszy kontekst naszych dalszych rozważań, możemy obecnie przystąpić do omówienia w tymże kontekście podstawowych konstrukcji algebraicznych napotkanych w dyskusji modułów nad pierścieniem (lub ogólniej: w kategorii przemiennej) takich jak iloraz algebraiczny, produkt i suma prosta oraz iloczyn tensorowy. Zaczniemy od koniecznej rafinacji pojęcia podalgebry.

Definicja 2. Przyjmijmy zapis Def. 1 i niechaj $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$ będzie podalgebrą R-algebry $\mathfrak{A}$. Powiemy, że $\mathfrak{I}$ jest **ideałem lewostronnym**, jeśli spełnia warunek

$$\mathfrak{A}.\mathfrak{I} \subset \mathfrak{I},$$

jeżeli zaś spełniony jest warunek

$$\mathfrak{I}.\mathfrak{A} \subset \mathfrak{I},$$

to mówimy o **ideale prawostronnym**. Ideał, który jest zarazem lewo- i prawostronny, nazywamy **ideałem obustronnym**. **Ideał minimalny** (**lewostronny**, **prawostronny** lub **obustronny**) to taki, który nie zawiera niezerowych podideałów właściwych (tego samego typu).

Algebra prosta to taka, która nie zawiera ideałów innych niż $\{0_{\mathfrak{A}}\}$ oraz $\mathfrak{A}$ i w której mnożenie jest nietrywialne, $\mathfrak{A}.\mathfrak{A} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$.

Przykłady 2.

(1) Podzbiór $R(n)$ złożony z macierzy, których ostatni rząd tworzą same 0_R, jest (nieobustronnym w ogólności) ideałem prawostronnym w algebrze z Przykł. 1 (1). Podobnie podzbiór złożony z macierzy, których ostatnią kolumnę tworzą same 0_R, jest (nieobustronnym w ogólności) ideałem lewostronnym w tejże algebrze.

(2) Zbiór funkcji przyjmujących wartość 0 w ustalonym (dowolnie) punkcie dziedziny jest ideałem (z konieczności obustronnym) w algebrze z Przykł. 1 (4). Ideałem takim jest także

$$C_{\searrow}(\mathbb{R};\mathbb{R}) := \{\ f \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}) \quad | \quad \exists_{L>0}\ \forall_{|x|>L}\ :\ f(x) = 0\ \}\,.$$

(3) Jądro homomorfizmu R-algebr jest ideałem obustronnym dziedziny.

(4) Przecięcie wszystkich ideałów lewostronnych (wzgl. prawostronnych, wzgl. obustronnych) zawierających podzbiór $S \subset \mathfrak{A}$ algebry $\mathfrak{A}$ nad pierścieniem R jest ideałem lewostronnym (wzgl. prawostronnym, wzgl. obustronnym), zwanym **ideałem generowanym przez** S,

$$\mathfrak{I}_S \equiv \langle S \rangle_{\mathfrak{A}} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{I}\supset S \\ \mathfrak{I}\subset\mathfrak{A}\ \text{ideał}}} \mathfrak{I}\,.$$

Ważnej egzemplifikacji pojęcia algebry prostej dostarcza

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Algebra endomorfizmów $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ dowolnej skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{K}$ jest $\mathbb{K}$-algebrą prostą. W szczególności jest nią algebra macierzowa

$$\mathbb{K}(n) \equiv \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\,.$$

Algebrami prostymi nad ciałem $\mathbb{R}$ są także pierścienie $R(n)$ macierzy kwadratowych wymiaru n o współczynnikach z pierścienia $R \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.

<u>*Dowód:*</u> Załóżmy, że $\mathfrak{I} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ jest nietrywialnym ideałem obustronnym i wybierzmy zeń dowolny element $\chi_0 \in \mathfrak{I} \setminus \{0\}$, a wtedy istnieje $v_0 \in V$ o własności $\chi_0(v_0) \neq 0_V$, który ustalamy. Wziąwszy dowolną bazę $\mathcal{E} := \{e_i\}_{i\in\overline{1,N}}$, $N \equiv \dim_{\mathbb{K}} V$ w przestrzeni V, definiujemy endomorfizmy $\{\chi_i\}_{i\in\overline{1,N}} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ będące (jedynymi) $\mathbb{K}$-liniowymi rozszerzeniami przyporządkowań

$$\chi_i(e_j) := \delta^{\mathbb{K}}_{ij} \triangleright v_0\,,$$

a następnie – dowolne endomorfizmy $\{\psi_i\}_{i\in\overline{1,N}} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ spełniające warunki

$$\psi_i \circ \chi_0(v_0) := e_i\,,$$

co wobec niezerowości $\chi_0(v_0)$ zawsze jest możliwe (wystarczy uzupełnić układ liniowo niezależny $\{\chi_0(v_0)\}$ do bazy V, po czym jej elementom różnym od $\chi_0(v_0)$ przyporządkować wektory bazy e_j, $j \neq i$ i ostatecznie dokonać $\mathbb{K}$-liniowego rozszerzenia tak określonego przyporządkowania). Rozważmy następnie dowolne odwzorowanie $\chi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ o macierzy $(\chi_{ij})_{i,j\in\overline{1,N}}$ względem bazy $\mathcal{E}$, w której obliczamy

$$\begin{aligned} \chi(e_i) &= \chi_{ij} \triangleright e_j = \chi_{ij} \triangleright \psi_j \circ \chi_0(v_0) \equiv \chi_{kj} \triangleright \psi_j \circ \chi_0\big(\delta^{\mathbb{K}}_{ki} \triangleright v_0\big) \\ &= \chi_{kj} \triangleright \psi_j \circ \chi_0 \circ \chi_k(e_i)\,, \end{aligned}$$

co pozwala zapisać

$$\chi = \chi_{kj} \triangleright \psi_j \circ \chi_0 \circ \chi_k\,. \tag{7}$$

Jednakowoż zachodzi

$$\psi_j \circ \chi_0 \circ \chi_k \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \circ \mathfrak{I} \circ \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \subset \mathfrak{I}\,,$$

przeto $\chi \in \mathfrak{I}$, czyli $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \subset \mathfrak{I}$, a ponieważ także $\mathfrak{I} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$, zatem ostatecznie $\mathfrak{I} = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

W przypadku $\mathbb{R}$-algebr $R(n)$, $R \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ dowód opiera się na rozumowaniu identycznym z powyższym, które prowadzimy w odniesieniu do lewego $\mathbb{C}$-modułu $\mathbb{C}^{\times n}$ wzgl. *prawego* $\mathbb{H}$-modułu $\mathbb{H}^{\times n}$ ze standardowym działaniem (współrzędna po współrzędnej). W szczególności odwzorowania

$$\mathbb{H}(n) \ni (\chi_{ij})_{i,j\in\overline{1,n}}\ :\ \mathbb{H}^{\times n} \circlearrowleft\ :\ (q_i)_{i\in\overline{1,n}} \longmapsto (\chi_{ij} \cdot_{\mathbb{H}} q_j)_{i\in\overline{1,n}}$$

są jawnie $\mathbb{H}$-liniowe względem tak określonego (prawego) działania i jest $\mathbb{H}(n) \equiv \mathrm{End}_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{\times n})$. Omówione rozumowanie doprowadza nas ostatecznie do równości (7), która wyraża χ jako kombinację $\mathbb{K}$-liniową elementów ideału $\mathfrak{I}$. Każdy z jej współczynników χ_{ij} jest *rzeczywistą* kombinacją liniową liczb $(1,0),(0,1) \in \mathbb{C}$ wzgl. liczb $(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1) \in \mathbb{H}$, które działają (punktowo) na endomorfizmy ψ_j przekształcając je w inne elementy tej samej ($\mathbb{R}$-)algebry $\mathbb{K}(n)$ (można o nich myśleć jako o endomorfizmach skalarnych $\lambda \triangleright \mathbf{1}_n$, gdzie $\lambda \in R$ jest jedną z wyróżnionych liczb o normie jednostkowej). Koniec końców mamy zatem do czynienia z *rzeczywistą* kombinacją liniową elementów ideału, czyli z elementem ideału $\mathbb{R}$-algebry. □

O praktycznym znaczeniu pojęcia ideału przekonuje

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$ będzie ideałem obustronnym R-algebry $\mathfrak{A}$. Istnieje kanoniczna struktura R-algebry na module ilorazowym $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ indukowana z $\mathfrak{A}$, z mnożeniem

$$m_{\mathfrak{A}/\mathfrak{I}} \;:\; \mathfrak{A}/\mathfrak{I} \times \mathfrak{A}/\mathfrak{I} \longrightarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{I} \;:\; (a +_{\mathfrak{A}} \mathfrak{I}, b +_{\mathfrak{A}} \mathfrak{I}) \longmapsto m_{\mathfrak{A}}(a,b) +_{\mathfrak{A}} \mathfrak{I}\,.$$

Struktura ta nosi miano **algebry ilorazowej**. Rzut kanoniczny

$$\pi_{\mathfrak{A}/\mathfrak{I}} \;:\; \mathfrak{A} \twoheadrightarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{I}$$

jest epimorfizmem R-algebr, o jądrze $\mathfrak{I}$. Istnieje zatem wzajem jednoznaczna odpowiedniość między jądrami homomorfizmów R-algebr i ideałami obustronnymi.

Dowód: Oczywisty. □

Scharakteryzujemy następnie podstawowe operacje na rodzinach algebr, poczynając od

Stwierdzenie 5. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\mathfrak{A}_\cdot \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alg}_R^\Lambda$ dla $R \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{AbRing}$. Istnieje kanoniczna struktura R-algebry na R-module $\mathfrak{A}^\sqcap := \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}_\lambda$ zadawana przez odwzorowanie

$$m_{\mathfrak{A}^\sqcap} \;:\; \mathfrak{A}^\sqcap \times \mathfrak{A}^\sqcap \longrightarrow \mathfrak{A}^\sqcap \;:\; (a_\cdot, b_\cdot) \longmapsto a_\cdot.b_\cdot\,,$$

gdzie

$$a_\cdot.b_\cdot \;:\; \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}_\lambda \;:\; \lambda \longmapsto m_{\mathfrak{A}_\lambda}(a_\lambda, b_\lambda) \in \mathfrak{A}_\lambda$$

oraz kanoniczna struktura R-algebry na R-module $\mathfrak{A}^\oplus := \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}_\lambda$ zadawana przez odwzorowanie

$$m_{\mathfrak{A}^\oplus} \equiv m_{\mathfrak{A}^\sqcap}\restriction_{\mathfrak{A}^\oplus\times\mathfrak{A}^\oplus} \;:\; \mathfrak{A}^\oplus \times \mathfrak{A}^\oplus \longrightarrow \mathfrak{A}^\oplus\,.$$

Pierwszą z tych struktur określamy mianem **produktu algebr z rodziny** $\mathfrak{A}_\cdot$, a drugą – mianem **sumy prostej algebr z rodziny** $\mathfrak{A}_\cdot$. Ilekroć elementy $\mathfrak{A}_\cdot$ są łączne (wzgl. przemienne, wzgl. unitalne), także $\mathfrak{A}^\sqcap \supset \mathfrak{A}^\oplus$ mają tę własność.

Dowód: Trywialny. □

Obecność mnożenia w algebrze pozwala na podniesienie wniosków ze stwierdzenia dotyczącego odpowiedniości pomiędzy rozkładami modułów nad pierścieniem na sumy proste ich podmodułów a zupełnymi rodzinami rzutów komplementarnych na tychże modułach do kategorii algebr poprzez naturalną specjalizację definicji operatora rzutu, którą precyzuje

Definicja 3. Przyjmijmy zapis Def. 1, zakładając przy tym, że $\mathfrak{A}$ jest R-algebrą łączną, oraz Przykł. 1 (11). **Idempotent** to taki jej element $P \in \mathfrak{A}$, który spełnia relację

$$P^2 = P\,.$$

Wyznacza on podalgebrę

$$\mathfrak{A}_P := P.\mathfrak{A}.P\,,$$

zwaną **algebrą P-zredukowaną**. Ilekroć $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{A}_P = 1$, idempotent P określamy mianem **minimalnego**. **Idempotent centralny** to taki, który należy do centrum algebry $Z(\mathfrak{A})$.

Unipotent to taki element $\Omega \in \mathfrak{A}$ łącznej algebry unitalnej $\mathfrak{A}$, który spełnia relację

$$\Omega^2 = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} .$$

Nazywamy go **centralnym**, jeśli należy do centrum algebry $Z(\mathfrak{A})$.

Ta pozwala wysłowić pożądane

Stwierdzenie 6. Przyjmijmy zapis Def. 3 oraz Przykł. 1 (11). Dowolny idempotent centralny $P \in Z(\mathfrak{A})$ wyznacza rozkład R-algebry $\mathfrak{A}$ na sumę prostą podalgebr

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_P \oplus \widetilde{\mathfrak{A}}_P ,$$

w której dopełnienie proste

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_P := \{ \ a - P.a.P \quad | \quad a \in \mathfrak{A} \ \} \equiv \{ \ a - P.a \quad | \quad a \in \mathfrak{A} \ \}$$

algebry P-zredukowanej $\mathfrak{A}_P$ jest algebrą $(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} - P)$-zredukowaną. W szczególności każdy unipotent centralny $\Omega \in Z(\mathfrak{A})$ w algebrze unitalnej $\mathfrak{A}$ nad pierścieniem R, w którym $2_R := 1_R + 1_R$ jest elementem odwracalnym, wyznacza rozkład $\mathfrak{A}$ na sumę prostą podalgebr

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_+ \oplus \mathfrak{A}_- ,$$

której składniki

$$\mathfrak{A}_\pm := P_\Omega^\pm.\mathfrak{A} ,$$

zapisane w terminach idempotentów centralnych

$$P_\Omega^+ := 2_R^{-1} \triangleright (\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} + \Omega) , \qquad\qquad P_\Omega^- := 2_R^{-1} \triangleright (\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} - \Omega) \equiv \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} - P_\Omega^+ ,$$

są tożsame – odpowiednio – z algebrami zredukowanymi

$$\mathfrak{A}_\pm := \mathfrak{A}_{P_\Omega^\pm} \equiv \widetilde{\mathfrak{A}}_{P_\Omega^\mp} .$$

Dowód: Idempotent centralny P wyznacza endomorfizm R-algebry

$$\pi_P \ : \ \mathfrak{A}_P \circlearrowleft \ : \ a \longmapsto P.a.P \equiv P.a \equiv a.P ,$$

który jest rzutem definiującym zupełną rodzinę rzutów komplementarnych $\{\pi_P, \mathrm{id}_{\mathfrak{A}} - \pi_P\}$ (będących także endomorfizmami R-algebry), stosuje się tu zatem bezpośrednio wspomniane wyżej stwierdzenie. □

Możemy także prosto opisać szczególną naturę ideałów minimalnych w algebrach prostych, z której przyjdzie nam korzystać niebawem.

Stwierdzenie 7. Przyjmijmy zapis Def. 2 i niechaj $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$ będzie minimalnym ideałem lewostronnym (wzgl. prawostronnym) w łącznej algebrze $\mathfrak{A}$. Jeśli $\mathfrak{I}.\mathfrak{I} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$, to istnieje idempotent $P \in \mathfrak{I}$ o własności $\mathfrak{I} = \mathfrak{A}.P$ (wzgl. $\mathfrak{I} = P.\mathfrak{A}$).

Dowód: Rozważymy przypadek ideału lewostronnego. Przypadek ideału prawostronnego rozpatruje się w pełni analogicznie. Skoro $\mathfrak{I}.\mathfrak{I} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$, to istnieje $a \in \mathfrak{I}$ o własności $\mathfrak{I}.a \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$, a ponieważ $\mathfrak{I}.a \subset \mathfrak{I}$ jako ideał lewostronny algebry $\mathfrak{A}$, przeto koniecznie $\mathfrak{I}.a = \mathfrak{I}$ wobec minimalności $\mathfrak{I}$. To jednak pociąga za sobą istnienie wyróżnionego wektora $P \in \mathfrak{I}$ o własności $P.a = a$, przy czym $P \neq 0_{\mathfrak{A}}$, gdyż $a \neq 0_{\mathfrak{A}}$. Ponadto $(P^2 - P).a = 0_{\mathfrak{A}}$, zatem $P^2 - P \in \{ \ b \in \mathfrak{I} \quad | \quad b.a = 0_{\mathfrak{A}} \ \} \equiv \mathfrak{L}_a$, ale $\mathfrak{L}_a$ jest ideałem lewostronnym zawartym w $\mathfrak{I}$ i spełniającym warunek $\mathfrak{L}_a \neq \mathfrak{I}$ (wszak $P \in \mathfrak{I}$, gdy tymczasem $P.a = a \neq 0_{\mathfrak{A}}$), czyli $\mathfrak{L}_a = \{0_{\mathfrak{A}}\}$, to jednak oznacza, że $P^2 = P$. Wreszcie też ponieważ $\mathfrak{A}.P \subset \mathfrak{I}$ jako ideał lewostronny, a przy tym $\mathfrak{A}.P \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$ (wszak $\mathfrak{A}.P \ni P.P = P \neq 0_{\mathfrak{A}}$), zatem koniecznie $\mathfrak{A}.P = \mathfrak{I}$ □

W następnej kolejności indukujemy strukturę algebry na iloczynie tensorowym algebr.

Stwierdzenie 8. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\mathfrak{A}_\alpha \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alg}_R,\ \alpha \in \{1,2\}$ dla $R \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{AbRing}$. Istnieje kanoniczna struktura R-algebry na R-module $\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2$ zadawana przez odwzorowanie

$$m_\otimes = (m_{\mathfrak{A}_1} \otimes m_{\mathfrak{A}_2}) \circ \iota_{\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2} \ :\ (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2) \otimes_R (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2) \longrightarrow \mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2\,,$$

w którym ι jest superpozycją kanonicznych izomorfizmów R-modułów opisanych w Tw. 3.3 i 3.4,

$$\begin{aligned}\iota_{\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2}\ :\ (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2) \otimes_R (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2) &\xrightarrow{\alpha_{\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2,\otimes_R(\mathfrak{A}_1\otimes_R\mathfrak{A}_2)}} \mathfrak{A}_1 \otimes_R \big(\mathfrak{A}_2 \otimes_R (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2)\big)\\ &\xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathfrak{A}_1}\otimes\sigma_{\mathfrak{A}_2,\otimes_R(\mathfrak{A}_1\otimes_R\mathfrak{A}_2)}} \mathfrak{A}_1 \otimes_R \big((\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2) \otimes_R \mathfrak{A}_2\big)\\ &\xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathfrak{A}_1}\otimes\alpha_{\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2,\mathfrak{A}_2}} \mathfrak{A}_1 \otimes_R \big(\mathfrak{A}_1 \otimes_R (\mathfrak{A}_2 \otimes_R \mathfrak{A}_2)\big)\\ &\xrightarrow{\alpha^{-1}_{\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2,\mathfrak{A}_2\otimes_R\mathfrak{A}_2}} (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_1) \otimes_R (\mathfrak{A}_2 \otimes_R \mathfrak{A}_2)\,.\end{aligned}$$

Struktura ta nosi miano **standardowego iloczynu tensorowego R-algebr**. Ilekroć obie tensorowane R-algebry są łączne wzgl. przemienne, wzgl. unitalne, ich standardowy iloczyn tensorowy także ma tę cechę.

Dowód: Wystarczy zauważyć, że obrazem pary $a_1 \otimes_R a_2, b_1 \otimes_R b_2 \in \mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2$ względem $m_\otimes$ jest

$$m_\otimes\big((a_1 \otimes_R a_2) \otimes_R (b_1 \otimes_R b_2)\big) = m_{\mathfrak{A}_1}(a_1 \otimes_R a_2) \otimes_R m_{\mathfrak{A}_2}(b_1 \otimes_R b_2)\,. \tag{8}$$

Wszelkie pożądane własności tak zdefiniowanego mnożenia są natychmiastowymi konsekwencjami odnośnych własności $m_{\mathfrak{A}_\alpha},\ \alpha \in \{1,2\}$. □

Jako corollarium powyższego stwierdzenia otrzymujemy

Stwierdzenie 9. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alg}_R$, a nadto niech $\chi_\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_R}(\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{B}_\alpha),\ \alpha \in \{1,2\}$. Odwzorowanie $\chi_1 \otimes \chi_2$ jest homomorfizmem R-algebr.

Dowód: Wprost z konstrukcji $\chi_1 \otimes \chi_2$ jest homomorfizmem R-modułów. Jego dystrybutywność względem mnożenia $m_\otimes$ jest prostą konsekwencją Równ. (8). □

2. Algebra tensorowa modułu

Abstrakcyjne pojęcie algebr zilustrujemy na przykładzie podstawowej konstrukcji algebraicznej przerzucającej naturalny pomost logiczny między kategorią modułów nad pierścieniem (przemiennym) i algebr nad tym samym pierścieniem. Konstrukcja ta leży u podstaw konstrukcji (pochodzącej od V.A. Focka) przestrzeni stanów kwantowych układu o dowolnej liczbie identycznych obiektów elementarnych (np. cząstek) z przestrzeni stanów kwantowych pojedynczego obiektu, stanowi punkt wyjścia do modelowania tak istotnych fizykalnie struktur jak algebry tensorów symetrycznych i skośnie symetrycznych (istotne w geometrii różniczkowej, więc także w teorii względności), uniwersalne algebry obwiednie (odgrywające ważną rolę w zaawansowanej teorii grup i algebr Liego oraz grup kwantowych, zatem także w opisie symetrii układów fizykalnych), czy wreszcie... algebry Clifforda.

Definicja 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $R \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{AbRing}$ oraz $G \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_R$. **Algebra tensorowa R-modułu G** to R-algebra utworzona przez R-moduł

$$\bigotimes_R G := R \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} G^{\otimes_R n} \equiv \bigoplus_{N\in\mathbb{N}} G^{\otimes_R N}\,, \qquad G^{\otimes_R n} := \underbrace{G \otimes_R G \otimes_R \cdots \otimes_R G}_{n\ \text{razy}}\,,$$

będący sumą prostą **potęg tensorowych modułu** $G^{\otimes_R N}$, wyposażony w mnożenie

$$m\ :\ \bigotimes_R G \otimes_R \bigotimes_R G \longrightarrow \bigotimes_R G\,,$$

które w ograniczeniu do (przeciwobrazu) iloczynów tensorowych poszczególnych potęg tensorowych G (względem kanonicznych izomorfizmów z Tw. 3-4-5.7),

$$\forall_{N_1,N_2\in\mathbb{N}}\ :\ m_{N_1,N_2} \equiv m\restriction_{G^{\otimes_R N_1}\otimes_R G^{\otimes_R N_2}}\ :\ G^{\otimes_R N_1} \otimes_R G^{\otimes_R N_2} \longrightarrow G^{\otimes_R (N_1+N_2)} \subset \bigotimes_R G\,,$$

jest określone przez kanoniczne izomorfizmy stanowiące naturalne uogólnienie tych z Tw. 3-4-5.6 i Stw. 3-4-5.8, przyjmujące na tensorach prostych postać

$$m_{0,N_2}\big(r \otimes_R (g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{N_2})\big) = (r \triangleright g_1) \otimes_R g_2 \otimes_R g_3 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{N_2}\,,$$

$$m_{N_1,0}\big((g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{N_1}) \otimes_R r\big) = (r \triangleright g_1) \otimes_R g_2 \otimes_R g_3 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{N_2}\,,$$

oraz

$$m_{n_1,n_2}\big((g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{N_1}) \otimes_R (h_1 \otimes_R h_2 \otimes_R \cdots \otimes_R h_{n_2})\big)$$
$$= g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{N_1} \otimes_R h_1 \otimes_R h_2 \otimes_R \cdots \otimes_R h_{n_2}\,.$$

Jak łatwo widać

Stwierdzenie 10. Przyjmijmy zapis Def. 4. Algebra tensorowa $\bigotimes_R G$ jest łączną R-algebrą unitalną, przy czym jednością jest w niej element

$$1_{\otimes_R G} = 1_R \in G^{\otimes_R 0} \subset \bigotimes_R G\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Wynika wprost z definicji. □

W świetle dyskusji otwierającej Rozdz. 3-4-5.2 kojąco na świadomość działa poniższe

Twierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 4. Para $(\bigotimes_R G, \jmath_G)$, w której $\jmath_G : G \rightarrowtail \bigotimes_R G$ jest kanonicznym włożeniem składnika prostego $G \equiv G^{\otimes_R 1}$, jest strukturą inicjalną dla warunku tautologicznego $P_{G;\mathrm{id}_{\mathbf{Mod}_R},F_2} \equiv 1$ na $\mathrm{Ob}\,\mathbf{uAlg}_R \times \mathrm{Mor}\,\mathbf{Mod}_R$, w którego zapisie $F_2\ :\ \mathbf{uAlg}_R \longrightarrow \mathbf{Mod}_R$ jest funktorem zapominania.

<u>*Dowód:*</u> Mamy pokazać, że dla dowolnej R-algebry unitalnej $\mathfrak{A}$ o niepustej klasie $\mathrm{Hom}_R(G,\mathfrak{A}) \ni \varphi$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\widetilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{uAlg}_R}(\bigotimes_R G, \mathfrak{A})$ o własności wyrażanej przez diagram przemienny (w $\mathbf{Mod}_R$)

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{A} \\ G \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\jmath_G"'] & \bigotimes_R G \arrow[u, dashed, "\widetilde{\varphi}"'] \end{tikzcd}\,.$$

Zauważmy najsampierw, że rzeczone odwzorowanie – o ile istnieje – jest jedyne. Istotnie, na mocy definicji mnożenia w $\bigotimes_R G$ dowolny tensor prosty można zapisać w postaci (zastępując symbol mnożenia w algebrze tensorowej symbolem $\cdot$ i korzystając z jego łączności)

$$G^{\otimes_R n} \ni g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_n = \jmath_G(g_1) \cdot \jmath_G(g_2) \cdots \jmath_G(g_n)\,,$$

więc $\widetilde{\varphi}$ jako homomorfizm R-algebr ewaluuje się na nim następująco:

$$\widetilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_n) = \widetilde{\varphi}\big(\jmath_G(g_1) \cdot \jmath_G(g_2) \cdot \cdots \cdot \jmath_G(g_n)\big)$$
$$= \widetilde{\varphi} \circ \jmath_G(g_1) \cdot_{\mathfrak{A}} \widetilde{\varphi} \circ \jmath_G(g_2) \cdot_{\mathfrak{A}} \cdots \cdot_{\mathfrak{A}} \widetilde{\varphi} \circ \jmath_G(g_n)$$

$$= \quad \varphi(g_1)\cdot_{\mathfrak{A}}\varphi(g_2)\cdot_{\mathfrak{A}}\cdots\cdot_{\mathfrak{A}}\varphi(g_n)\,,$$

tj. w sposób jednoznacznie określony przez φ, a nadto dla dowolnego $r \in R \equiv G^{\otimes_R 0}$ zachodzi – wobec R-liniowości i unitalności $\widetilde{\varphi}$ –

$$\widetilde{\varphi}(r) \equiv \widetilde{\varphi}(r \triangleright_R 1_R) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} \widetilde{\varphi}(1_R) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} 1_{\mathfrak{A}}\,,$$

tj. znowu w sposób jednoznacznie określony, ponieważ zaś $\bigotimes_R G$ jest rozpięty nad R na tensorach prostych i 1_R, przeto $\widetilde{\varphi}$ jest jednoznacznie zdeterminowany przez swe własności. Pozostaje go skonstruować.

W tym celu skorzystamy z uniwersalności $\otimes_R$ – oto więc każde z odwzorowań (indeksowanych przez liczby $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

$$\varphi_n \;:\; G^{\times n} \longrightarrow \mathfrak{A} \;:\; (g_1, g_2, \ldots, g_n) \longmapsto \varphi(g_1)\cdot_{\mathfrak{A}}\varphi(g_2)\cdot_{\mathfrak{A}}\cdots\cdot_{\mathfrak{A}}\varphi(g_n)$$

jest jawnie wielo-śród-R-liniowe, a zatem odpowiada mu (jedyne) odwzorowanie R-liniowe

$$\widetilde{\varphi}_n \;:\; G^{\otimes_R n} \longrightarrow \mathfrak{A}$$

o własności

$$\forall_{g_1,g_2,\cdots,g_n \in G} \;:\; \widetilde{\varphi}_n(g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_n) = \varphi_n(g_1, g_2, \ldots, g_n)\,.$$

Uzupełniwszy rodzinę odwzorowań $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$ o element

$$\widetilde{\varphi}_0 \;:\; G^{\otimes_R 0} \equiv R \longrightarrow \mathfrak{A} \;:\; r \longmapsto r \triangleright_{\mathfrak{A}} 1_{\mathfrak{A}}\,,$$

otrzymujemy pożądane odwzorowanie (R-liniowe wprost z definicji)

$$\widetilde{\varphi} := \bigoplus_{N \in \mathbb{N}} \widetilde{\varphi}_N \;:\; \bigotimes_R G \longrightarrow \mathfrak{A}\,,$$

o czym przekonują proste obserwacje:

$$\widetilde{\varphi} \circ \jmath_G = \widetilde{\varphi}_1 \equiv \varphi\,, \qquad\qquad \widetilde{\varphi}(1_{\otimes_R G}) \equiv \widetilde{\varphi}(1_R) = \widetilde{\varphi}_0(1_R) = 1_{\mathfrak{A}}$$

oraz – dla dowolnych $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $g_1, g_2, \ldots, g_{n_1}, h_1, h_2, \ldots, h_{n_2} \in G$ –

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\varphi}\big((g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{n_1}) \cdot (h_1 \otimes_R h_2 \otimes_R \cdots \otimes_R h_{n_2})\big) \\
\equiv\;& \widetilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{n_1} \otimes_R h_1 \otimes_R h_2 \otimes_R \cdots \otimes_R h_{n_2}) \\
=\;& \varphi_{n_1+n_2}(g_1, g_2, \ldots, g_{n_1}, h_1, h_2, \ldots, h_{n_2}) \\
\equiv\;& \varphi_{n_1}(g_1, g_2, \ldots, g_{n_1})\cdot_{\mathfrak{A}}\varphi_{n_2}(h_1, h_2, \ldots, h_{n_2}) \\
=\;& \widetilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{n_1})\cdot_{\mathfrak{A}}\widetilde{\varphi}(h_1 \otimes_R h_2 \otimes_R \cdots \otimes_R h_{n_2})\,.
\end{aligned}$$

□

Niniejszą elementarną dyskusję algebry tensorowej modułu najzgrabniej uzupełnia i podsumowuje

Twierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 4. Przyporządkowanie

$$\mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathbf{uAssAlg}_R \;:\; G \longmapsto \bigotimes_R G$$

rozszerza się kanonicznie do pełnego funktora kowariantnego

$$\bigotimes_R \;:\; \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathbf{uAssAlg}_R\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Wystarczy zauważyć, że dla $G_1, G_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_R$ dowolny $\chi \in \mathrm{Hom}_R(G_1, G_2)$ określa odwzorowanie R-liniowe

$$\jmath_{G_2} \circ \chi \;:\; G_1 \longrightarrow \bigotimes_R G_2\,,$$

które jednoznacznie rozszerza się do homomorfizmu algebr

$$\bigotimes_R \chi \ : \ \bigotimes_R G_1 \longrightarrow \bigotimes_R G_2$$

o własności

$$\bigotimes_R \chi \circ \jmath_{G_1} = \jmath_{G_2} \circ \chi\,,$$

którą możemy zapisać w postaci diagramu przemiennego

$$\begin{tikzcd} \otimes_R G_1 \arrow[r, "\otimes_R \chi"] & \otimes_R G_2 \\ G_1 \arrow[u, "\jmath_{G_1}"] \arrow[r, "\chi"'] & G_2 \arrow[u, "\jmath_{G_2}"'] \end{tikzcd}\,.$$

Przy tym na tensorach prostych

$$\bigotimes_R \chi(g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_n) = \chi(g_1) \otimes_R \chi(g_2) \otimes_R \cdots \otimes_R \chi(g_n)\,.$$

□

3. Algebry z gradacją

Przejdziemy następnie od omówienia algebr z wyróżnionym rozkładem na sumy proste podmodułów, uzgodnionym w naturalny sposób z operacjami określonymi na algebrze. Oto więc mamy

Definicja 5. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $R \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{AbRing}$ oraz $\mathfrak{A} \in \mathrm{Ob}\mathbf{Alg}_R$. Niech też $(\Delta, +_\Delta, \bullet \longrightarrow 0_\Delta)$ będzie monoidem przemiennym. **Δ-gradacja na** $\mathfrak{A}$ to rozkład $\mathfrak{A}$ na sumę prostą podmodułów (nad R)

$$\mathfrak{A} = \bigoplus_{\delta \in \Delta} \mathfrak{A}_\delta$$

o własności

$$\forall_{\delta_1, \delta_2 \in \Delta} \ : \ m_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_{\delta_1}, \mathfrak{A}_{\delta_2}) \subset \mathfrak{A}_{\delta_1 +_\Delta \delta_2}\,. \tag{9}$$

Algebra (nad R**) z Δ-gradacją** to taka, na której jest określona Δ-gradacja. Element $\delta \in \Delta$ określamy mianem **Δ-stopnia podmodułu** $\mathfrak{A}_\delta$, używając oznaczenia

$$\mathfrak{A}_\delta = \deg^{-1}\big(\{\delta\}\big)\,,$$

elementy zaś podmodułu $\mathfrak{A}_\delta$ nazywamy **elementami jednorodnymi stopnia** δ. W szczególności element $0_{\mathfrak{A}}$ jest jednorodny *dowolnego* stopnia.

Podalgebra Δ-gradowana algebry z Δ-gradacją $\mathfrak{A}$ to taka jej podalgebra $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, która jest **podmodułem z Δ-gradacją**, tj. ma postać

$$\mathfrak{B} = \bigoplus_{\delta \in \Delta} \mathfrak{B}_\delta\,, \qquad \mathfrak{B}_\delta = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}_\delta\,.$$

W szczególności **ideał Δ-gradowany** to podalgebra Δ-gradowana $\mathfrak{I} = \bigoplus_{\delta \in \Delta} \mathfrak{I}_\delta \subset \mathfrak{A}$ o własności (zapisanej dla dowolnych $\lambda, \delta \in \Delta$)

- $m_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{I}_\delta) \subset \mathfrak{I}_{\lambda +_\Delta \delta}$ (**lewostronny**), wzgl.
- $m_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}_\delta, \mathfrak{A}_\lambda) \subset \mathfrak{I}_{\lambda +_\Delta \delta}$ (**prawostronny**), wzgl.
- obu powyższych (**obustronny**).

Homomorfizm stopnia D R-algebry z Δ-gradacją $\mathfrak{A}^{(1)}$ w R-algebrę z Δ-gradacją $\mathfrak{A}^{(2)}$ to odwzorowanie $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_R}(\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{A}^{(2)})$ o własności

$$\forall_{\delta \in \Delta} \;:\; \chi(\mathfrak{A}^{(1)}_\delta) \subset \mathfrak{A}^{(2)}_{\delta +_\Delta D} \,.$$

Homomorfizm algebr z Δ-gradacją (albo inaczej Δ-gradowany) to dowolny ich homomorfizm stopnia 0_Δ.

Algebry nad R z Δ-gradacją (wraz z odnośnymi homomorfizmami stopnia 0_Δ) tworzą kategorię, którą będziemy oznaczać symbolem $\mathbf{Alg}_R^{\Delta-\mathrm{grad}}$.

Uwaga 2. Powód, dla którego na homomorfizmy algebr z Δ-gradacją nakładamy dodatkowy warunek $D = 0_\Delta$, ilustruje prosty argument: oto z jednej strony

$$\chi \circ m_{\mathfrak{A}^{(1)}}(\mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_1}, \mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_2}) \subset \chi(\mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_1 +_\Delta \delta_2}) \subset \mathfrak{A}^{(2)}_{\delta_1 +_\Delta \delta_2 +_\Delta D} \,,$$

a z drugiej

$$\begin{aligned} \chi \circ m_{\mathfrak{A}^{(1)}}(\mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_1}, \mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_2}) &= m_{\mathfrak{A}^{(2)}}\big(\chi(\mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_1}), \chi(\mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_2})\big) \subset m_{\mathfrak{A}^{(2)}}\big(\mathfrak{A}^{(2)}_{\delta_1 +_\Delta D}, \mathfrak{A}^{(2)}_{\delta_2 +_\Delta D}\big) \\ &\subset \mathfrak{A}^{(2)}_{\delta_1 +_\Delta \delta_2 +_\Delta D +_\Delta D} \,. \end{aligned}$$

Przykłady 3.

(1) Pierścień wielomianów o współczynnikach z ciała $\mathbb{K}$ niesie naturalną strukturę algebry (przemiennej, unitalnej) nad $\mathbb{K}$ o $\mathbb{N}$-gradacji zadawanej przez stopień wielomianu (wielomian zerowy jest w tym ujęciu elementem każdego stopnia), przy czym składową jednorodną stopnia n tworzą jednomiany stopnia n (w tym wielomian zerowy). Operator całkowania $\int_{0_\mathbb{K}}^t$ (zdefiniowany w oczywisty sposób) jest endomorfizmem stopnia 1.

(2) Zastępując ciało $\mathbb{R}$ ciałem $\mathbb{C}$ (w roli dziedziny i przeciwdziedziny funkcji) i kładąc $S \equiv \mathbb{C}$ w Przykł. 1 otrzymujemy unitalną $\mathbb{C}$-algebrę przemienną $C(\mathbb{C};\mathbb{C})$. Wybór dowolnego elementu $\omega_n \in \sqrt[n]{1} \setminus \{1\}$ (dla dowolnego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$) określa na $C(\mathbb{C};\mathbb{C})$ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-gradację, względem której elementami jednorodnymi stopnia $[k]_n$ są funkcje f_k spełniające warunek

$$\forall_{z \in \mathbb{C}} \;:\; f_k(\omega_n \cdot z) = \omega_n^k \cdot f_k(z) \,.$$

Dowolna funkcja $f \in C(\mathbb{C};\mathbb{C})$ ma (jednoznaczny) rozkład

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} f_k \,, \qquad\qquad f_k \;:\; \mathbb{C} \circlearrowleft \;:\; z \longmapsto \tfrac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \omega_n^{-kl} \cdot f(\omega_n^l \cdot z) \,.$$

W szczególności dla $n = 2$ otrzymujemy w ten sposób rozkład $C(\mathbb{C};\mathbb{C})$ na sumę prostą podmodułów złożonych z funkcji parzystych i nieparzystych, odpowiednio.

Jeśli funkcje ciągłe zastąpić gładkimi, to operator różniczkowania zyskuje interpretację endomorfizmu stopnia $[n-1]_n$.

(3) Algebra tensorowa modułu G nad pierścieniem przemiennym R jest R-algebrą z $\mathbb{N}$-gradacją określoną wprost przez definicję tejże algebry,

$$\deg \restriction_{G^{\otimes_R n}} = n \,, \quad n \in \mathbb{N} \,.$$

Elementy składowej jednorodnej $G^{\otimes_R N}$ określamy mianem **tensorów stopnia** n.

Jako proste konsekwencje powyższej definicji otrzymujemy

Stwierdzenie 11. Przyjmijmy zapis Def. 5, przy czym założymy, że wszystkie elementy monoidu Δ są upraszczalne, tj.

$$\forall_{\delta \in \Delta} \; \forall_{\delta_1, \delta_2 \in \Delta} \;:\; \big(\; \delta +_\Delta \delta_1 = \delta +_\Delta \delta_2 \quad \Longrightarrow \quad \delta_1 = \delta_2 \;\big) \,.$$

W unitalnej R-algebrze z Δ-gradacją

(i) $\deg(\mathbf{1}_\mathfrak{A}) = 0_\Delta$;

(ii) odwrotność a^{-1} dowolnego elementu $a \in \mathfrak{A}_\delta$ (wzgl. $m_\mathfrak{A}$), o ile istnieje, ma stopień $\deg(a^{-1}) = -\delta$, gdzie $-\delta$ jest elementem monoidu spełniającym równość $-\delta +_\Delta \delta = 0_\Delta$, *Dowód:*

Ad (i) Niechaj $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \sum_{\delta\in\Delta} e_\delta$ będzie rozkładem jedności na elementy jednorodne. Wówczas dla dowolnego elementu jednorodnego $a \in \mathfrak{A}_\lambda$ otrzymujemy tożsamość

$$a = a \cdot_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \equiv \sum_{\delta\in\Delta} a \cdot_{\mathfrak{A}} e_\delta\,,$$

która wobec jednoznaczności rozkładu na elementy jednorodne i Równ. (9) implikuje równość

$$a = a \cdot_{\mathfrak{A}} e_{0_\Delta}\,.$$

Ta, będąc spełnioną dla dowolnego elementu jednorodnego, jest z racji R-liniowości mnożenia spełniana przez wszystkie elementy algebry, a zatem w szczególności przez jedność, co wobec neutralności tej ostatniej daje pożądaną równość

$$\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \cdot_{\mathfrak{A}} e_{0_\Delta} = e_{0_\Delta} \in \mathfrak{A}_{0_\Delta}\,.$$

Ad (ii) Niechaj $a^{-1} = \sum_{\lambda\in\Delta} \alpha_\lambda$ będzie rozkładem na elementy jednorodne, a wtedy na mocy poprzednio udowodnionego podpunktu i jednoznaczności rozkładu oraz Równ. (9)

$$\mathfrak{A}_{0_\Delta} \ni \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = a \cdot_{\mathfrak{A}} a^{-1} \equiv \sum_{\lambda\in\Delta} a \cdot_{\mathfrak{A}} \alpha_\lambda = a \cdot_{\mathfrak{A}} \alpha_{-\delta}\,,$$

a stąd już

$$a^{-1} = a^{-1} \cdot_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = a^{-1} \cdot_{\mathfrak{A}} (a \cdot_{\mathfrak{A}} \alpha_{-\delta}) \equiv (a^{-1} \cdot_{\mathfrak{A}} a) \cdot_{\mathfrak{A}} \alpha_{-\delta} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \cdot_{\mathfrak{A}} \alpha_{-\delta} = \alpha_{-\delta} \in \mathfrak{A}_{-\delta}\,.$$

□

Ilekroć monoid Δ zadający gradację algebry zawiera elementy, które nie są upraszczalne, teza Stw. 11 nie musi być spełniona. Naturalność wymienionych w niej warunków skłania do uzupełnienia Def. 5 o

Definicja 6. Przyjmijmy zapis Def. 5. **Algebra unitalna (nad** R**) z** Δ**-gradacją** to algebra unitalna $\mathfrak{A}$, na której jest określona Δ-gradacja o własności $\deg(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) = 0_\Delta$. Algebry unitalne nad R z Δ-gradacją (i odnośnymi homomorfizmami stopnia 0_Δ) tworzą kategorię, którą będziemy oznaczać symbolem $\mathbf{uAlg}_R^{\Delta-\mathrm{grad}}$.

Odnotujmy jeszcze, że konstrukcja ilorazowa przenosi się do kategorii z gradacją w naturalny sposób.

Stwierdzenie 12. Przyjmijmy zapis Stw. 4 oraz Def. 5 i niechaj $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{A}$ będzie obustronnym ideałem Δ-gradowanym R-algebry z Δ-gradacją $\mathfrak{A}$. Algebra ilorazowa $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ dziedziczy z $\mathfrak{A}$ kanoniczną Δ-gradację, względem której rzut kanoniczny

$$\pi_{\mathfrak{A}/\mathfrak{J}} \;:\; \mathfrak{A} \twoheadrightarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{J}$$

jest homomorfizmem algebr z Δ-gradacją.

Dowód: Trywialny. □

Mamy też, nie mniej oczywiste,

Twierdzenie 3 (Pierwsze twierdzenie o izomorfizmie (dla algebr z gradacją))**.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alg}_R^{\Delta-\mathrm{grad}}$ oraz $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_R^{\Delta-\mathrm{grad}}}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$. Wówczas $\mathrm{Ker}\,\chi \subset \mathfrak{A}_1$ jest obustronnym ideałem Δ-gradowanym, natomiast $\mathrm{Im}\,\chi \subset \mathfrak{A}_2$ jest podalgebrą Δ-gradowaną. Kanoniczny izomorfizm R-modułów

$$\mathfrak{A}/\mathrm{Ker}\,\chi \xrightarrow{\cong} \mathrm{Im}\,\chi$$

jest izomorfizmem algebr z Δ-gradacją.

Dowód: Oczywisty. □

Na zakończenie części poświęconej algebrom z gradacją uzgodnimy konstrukcję iloczynu tensorowego z gradacją (tensorowanych algebr). Przy tym, miast rozpatrywać ogólną teorię iloczynu na module tensorowym (uwzględniającą struktury odmienne od tej wskazanej w Stw. 8), wyłożoną w Ref. [Bou07], skupimy się na dwóch szczególnych przypadkach, które napotkamy w dalszej części kursu poświęconej algebrom Clifforda. W pierwszej kolejności wysłowimy oczekiwane

Stwierdzenie 13. Przyjmijmy zapis Stw. 8 oraz Def. 5 i niechaj $\mathfrak{A}^{(A)} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alg}_R^{\Delta-\mathrm{grad}},\ A \in \{1,2\}$. Standardowy iloczyn tensorowy R-algebr $\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}$ niesie naturalną strukturę R-algebry z Δ-gradacją określaną przez kanoniczny izomorfizm R-algebr

$$\imath\ :\ \mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)} \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\delta \in \Delta} \bigoplus_{\substack{\delta_1, \delta_2 \in \Delta \\ \delta_1 +_\Delta \delta_2 = \delta}} \big(\mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_1} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}_{\delta_2}\big)\,,$$

patrz: Tw. 3.5, tj. składowa jednorodna Δ-stopnia δ jest przeciwobrazem względem tegoż izomorfizmu składnika prostego o indeksie δ,

$$\big(\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}\big)_\delta = \imath^{-1}\Big(\bigoplus_{\substack{\delta_1, \delta_2 \in \Delta \\ \delta_1 +_\Delta \delta_2 = \delta}} \big(\mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_1} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}_{\delta_2}\big)\Big)\,.$$

Tak określona Δ-gradacja nosi miano **Δ-gradacji totalnej**.

Dowód: Oczywisty. □

W szczególnym przypadku $\Delta \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$ istnieje istotna alternatywa dla standardowej struktury algebry na iloczynie tensorowym algebr z Δ-gradacją. Opisuje ją

Definicja 7. Przyjmijmy zapis Stw. 8 oraz Def. 5 i niechaj $\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{A}^{(2)} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alg}_R^{\Delta-\mathrm{grad}}$ dla $\Delta \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$ (ze standardową strukturą pierścienia). **Skośny iloczyn tensorowy R-algebr z Δ-gradacją** (zwany także **super-iloczynem tensorowy R-algebr z Δ-gradacją**) to iloczyn tensorowy odnośnych R-modułów wyposażony w mnożenie

$$m_{\widehat{\otimes}} \equiv \widehat{\cdot}\ :\ \big(\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}\big) \otimes_R \big(\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}\big) \longrightarrow \mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}\,,$$

które na jednorodnych składowych w $\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}$ będących przeciwobrazami (sum) R-modułów $\mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_1} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}_{\delta_2}$ względem izomorfizmu $\imath$ ze Stw. 13 przyjmuje postać

$$m_{\widehat{\otimes}} \restriction_{\imath^{-1}(\mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_1} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}_{\delta_2}) \times \imath^{-1}(\mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_3} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}_{\delta_4})} \coloneqq (-1)^{\delta_2 \cdot_\Delta \delta_3}\, m_\otimes \restriction_{\imath^{-1}(\mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_1} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}_{\delta_2}) \times \imath^{-1}(\mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_3} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}_{\delta_4})}\,.$$

Tak określoną R-algebrę (z Δ-gradacją) o nośniku $\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}$ oznaczamy symbolem

$$\mathfrak{A}^{(1)} \widehat{\otimes}_R \mathfrak{A}^{(2)}\,.$$

Jak łatwo widać,

Stwierdzenie 14. Przyjmijmy zapis Def. 7. Ilekroć obie tensorowane R-algebry są łączne wzgl. unitalne (w rozumieniu Def. 6), ich skośny iloczyn tensorowy także ma tę cechę.

Dowód: O słuszności tezy przekonuje nas prosty rachunek, wykonany dla dowolnych $(a_\alpha, b_\alpha) \in \mathfrak{A}_{1\,\lambda_\alpha} \times \mathfrak{A}_{2\,\mu_\alpha},\ \alpha \in \{1,2,3\}$,

$$m_{\widehat{\otimes}}\Big(m_{\widehat{\otimes}}\big((a_1 \otimes_R b_1) \otimes_R (a_2 \otimes_R b_2)\big) \otimes_R (a_3 \otimes_R b_3)\Big) = (-1)^{\mu_1 \cdot_\Delta \lambda_2 +_\Delta (\mu_1 +_\Delta \mu_2) \cdot_\Delta \lambda_3}$$

$$\cdot m_{\mathfrak{A}_1}\big(m_{\mathfrak{A}_1}(a_1 \otimes_R a_2) \otimes_R a_3\big) \otimes_R m_{\mathfrak{A}_2}\big(m_{\mathfrak{A}_2}(b_1 \otimes_R b_2) \otimes_R b_3\big)\,,$$

$$m_{\widehat{\otimes}}\Big((a_1 \otimes_R b_1) \otimes_R m_{\widehat{\otimes}}\big((a_2 \otimes_R b_2) \otimes_R (a_3 \otimes_R b_3)\big)\Big) = (-1)^{\mu_2 \cdot_\Delta \lambda_3 +_\Delta \mu_1 \cdot_\Delta (\lambda_2 +_\Delta \lambda_3)}$$

$$\cdot m_{\mathfrak{A}^{(1)}}\big(a_1 \otimes_R m_{\mathfrak{A}_1}(a_2 \otimes_R a_3)\big) \otimes_R m_{\mathfrak{A}_2}\big(b_1 \otimes_R m_{\mathfrak{A}_2}(b_2 \otimes_R b_3)\big)\,,$$

w którym

$$(-1)^{\mu_1 \cdot_\Delta \lambda_2 +_\Delta (\mu_1 +_\Delta \mu_2) \cdot_\Delta \lambda_3} = (-1)^{\mu_2 \cdot_\Delta \lambda_3 +_\Delta \mu_1 \cdot_\Delta (\lambda_2 +_\Delta \lambda_3)}\,,$$

oraz teza (i) Stw. 11, która gwarantuje neutralność $1_{\mathfrak{A}_1} \otimes_R 1_{\mathfrak{A}_2} \in \big(\mathfrak{A}_1 \widehat{\otimes}_R \mathfrak{A}_2\big)_{0_\Delta}$ w przypadku algebr unitalnych. □

Literatura

[Bou07] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Algèbre, chapitre 9*, Springer, 2007.