IT
(MAWF '22/23 1.VIII, 1.IX & 1.X [RRS])

Spis treści

Uzbrojeni w pojęcia i konstrukcje przedstawione na dotychczasowych wykładach, możemy wreszcie przejść do wprowadzenia obiektu podstawowego dla niniejszego kursu, czyli algebry Clifforda, i dyskusji jego własności.

1. Algebra Clifforda przestrzeni kwadratowej – funktor Cliff

Zaczynamy od

Definicja 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\big(\big((V,+_V,\mathsf{P}_V,\bullet\longmapsto 0_V),\ell_V\big),Q\big)$ będzie przestrzenią kwadratową[1] nad ciałem $\mathbb{K}$, $\mathfrak{A}$ zaś – $\mathbb{K}$-algebrą unitalną. Odwzorowanie $\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\mathfrak{A})$ określimy mianem **odwzorowania Clifforda**, jeśli spełnia warunek

$$\forall_{v\in V}\ :\ \varphi(v)\cdot_{\mathfrak{A}}\varphi(v)=Q(v)\triangleright\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}\,.$$

[1] Zakładamy znajomość tego pojęcia z kursu algebry liniowej, ale na wszelki przypadek przypominamy: Przestrzeń kwadratowa to para złożona z przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{K}$ (o $\mathrm{char}\,\mathbb{K}\neq 2$) oraz formy kwadratowej $Q\ :\ V\longrightarrow\mathbb{K}$, tj. odwzorowania jednorodnego stopnia 2 o tej własności, że odwzorowanie zdefiniowane przez **formułę polaryzacyjną** $\Phi_Q\ :\ V^{\times 2}\longrightarrow\mathbb{K}\ :\ (v,w)\longmapsto 2_{\mathbb{K}}^{-1}\cdot\big(Q(u+_V v)-Q(u)-Q(v)\big)$ jest (symetryczną) formą *dwuliniową* na V. Przestrzenie kwadratowe wraz z izometriami, czyli odwzorowaniami liniowymi $\chi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1,V_2)$ między nośnikami struktury kwadratowej (V_i,Q_i), $i\in\{1,2\}$ o własności $Q_2\circ\chi=Q_1$, tworzą **kategorię przestrzeni kwadratowych**, którą będziemy oznaczać symbolem $\square\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$

Odwzorowania Clifforda określone na ustalonej przestrzeni kwadratowej tworzą kategorię $C_{(V,Q)}$, której obiektami są pary $(\mathfrak{A},\varphi)$ złożone z $\mathfrak{A}\in\mathrm{Ob}\,\mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}}$ i odwzorowania Clifforda $\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\mathfrak{A})$, morfizmami zaś – dla ustalonych obiektów $(\mathfrak{A}_\alpha,\varphi_\alpha)$, $\alpha\in\{1,2\}$, utworzonych przez $\mathfrak{A}_\alpha\in\mathrm{Ob}\,\mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}}$ i odwzorowania Clifforda $\varphi_\alpha\ :\ V\longrightarrow\mathfrak{A}_\alpha$ – odwzorowania

$$\mathrm{Hom}_{C_{(V,Q)}}\big((\mathfrak{A}_1,\varphi_1),(\mathfrak{A}_2,\varphi_2)\big)=\big\{\ \chi\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}}}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2)\quad|\quad\varphi_2=\chi\circ\varphi_1\ \big\}\,.$$

Ta pozwala nam sformułować fundamentalną

Definicja 2. Przyjmijmy zapis Def. 1. **Algebra Clifforda przestrzeni kwadratowej** $\big(\big((V,+_V,\mathsf{P}_V,\bullet\longmapsto 0_V),\ell_V\big),Q\big)$ to struktura inicjalna

$$\big(\mathrm{Cliff}(V,Q),\jmath_V^{\mathrm{C}}\big)$$

dla warunku

$$P_{(V,Q);F_1,F_2}\big((\mathfrak{A},\varphi)\big)=\text{„}\varphi\ :\ V\longrightarrow\mathfrak{A}\ \text{jest odwzorowaniem Clifforda”}$$

na $\mathrm{Ob}\,\mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}}\times\mathrm{Mor}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, w którego zapisie $F_1\ :\ \square\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}\longrightarrow\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ oraz $F_2\ :\ \mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}}\longrightarrow\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ to funktory zapominania. Składowe tej struktury to $\mathbb{K}$-algebra $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ z jednością $e^{\mathrm{C}}\equiv\mathbf{1}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}$ oraz odwzorowanie Clifforda

$$\jmath_V^{\mathrm{C}}\ :\ V\longrightarrow\mathrm{Cliff}(V,Q)$$

które będziemy określać mianem **kanonicznego odwzorowania Clifforda**.

Uwaga 1. W dalszej części wykładu będziemy używać pojęcia „algebra Clifforda” w odniesieniu do unitalnej $\mathbb{K}$-algebry $\mathrm{Cliff}(V,Q)$, o której mówi powyższa definicja. Ponadto, o ile nie będzie to prowadzić do nieporozumień, mnożenie i dodawanie w algebrze Clifforda będziemy oznaczać symbolami pozbawionymi indeksów: $\cdot$ i $+$, odpowiednio.

W analogii do konstrukcji iloczynu tensorowego możemy sformułować wygodne

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 2. Poniższe zdania logiczne są równoważne.

(i) $\big((\mathrm{Cliff}(V,Q),\jmath_V^{\mathrm{C}}),\jmath_V^{\mathrm{C}}\big)$ jest algebrą Clifforda przestrzeni kwadratowej $\big(\big((V,+_V,\mathsf{P}_V,\bullet\longmapsto 0_V),\ell_V\big),Q\big)$.

(ii) $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ jest generowana (jako $\mathbb{K}$-algebra) przez elementy $\mathrm{Image}\,\jmath_V^{\mathrm{C}}$, tj.

$$\mathrm{Cliff}(V,Q)=\big\langle\mathrm{Image}\,\jmath_V^{\mathrm{C}}\big\rangle_{\mathbb{K}}\ ,$$

a ponadto dla każdej pary $(\mathfrak{A},\varphi)\in\mathrm{Ob}\,C_{(V,Q)}$ jest określone odwzorowanie $\widetilde{\varphi}\in\mathrm{Hom}_{C_{(V,Q)}}\big((C,\jmath_V^{\mathrm{C}}),(\mathfrak{A},\varphi)\big)$, tj. takie, które czyni przemiennym diagram

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{A} \\ V \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\jmath_V^{\mathrm{C}}"'] & \mathrm{Cliff}(V,Q) \arrow[u, "\widetilde{\varphi}"'] \end{tikzcd}\ .$$

Dowód: W pełni analogiczny do dowodu Stw. 3.1. □

Prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 2. Algebra Clifforda dowolnej przestrzeni kwadratowej nad dowolnym ciałem $\mathbb{K}$ istnieje i jest określona jednoznacznie z dokładnością do jedynego unitalnego izomorfizmu $\mathbb{K}$-algebr.

Dowód: W algebrze tensorowej $\otimes_{\mathbb{K}}V$ przestrzeni kwadratowej (V,Q) nad ciałem $\mathbb{K}$ definiujemy ideał obustronny

$$\mathfrak{I}_Q:=\langle v\otimes_{\mathbb{K}}v-Q(v)\triangleright 1_{\mathbb{K}}\,|\,v\in V\rangle_{\otimes_{\mathbb{K}}V}\ ,$$

co pozwala nam określić – na gruncie Stw. 6-7.4 – algebrę ilorazową

$$\mathrm{Cliff}(V,Q) := \bigotimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{I}_Q \tag{1}$$

wraz z odwzorowaniem $\mathbb{K}$-liniowym (opuszczamy indeks $\otimes_{\mathbb{K}}$ gwoli przejrzystości)

$$\jmath_V^{\mathrm{C}} \equiv \pi_{\otimes_{\mathbb{K}} V/\mathfrak{I}_Q} \circ \jmath_1 \; : \; V \longrightarrow \mathrm{Cliff}(V,Q) \; : \; v \longmapsto \jmath_1(v) + \mathfrak{I}_Q \equiv v + \mathfrak{I}_Q \,.$$

Zauważmy, że dla dowolnego wektora $v \in V$ spełniona jest – wobec obustronności $\mathfrak{I}_Q$ – tożsamość

$$\begin{aligned}
\jmath_V^{\mathrm{C}}(v)^2 \quad &\equiv \quad (v + \mathfrak{I}_Q) \otimes_{\mathbb{K}} (v + \mathfrak{I}_Q) = v \otimes_{\mathbb{K}} v + v \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{I}_Q + \mathfrak{I}_Q \otimes_{\mathbb{K}} v + \mathfrak{I}_Q \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{I}_Q \\
&= \quad v \otimes_{\mathbb{K}} v + \mathfrak{I}_Q = Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}} + \big(v \otimes_{\mathbb{K}} v - Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}}\big) + \mathfrak{I}_Q = Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}} + \mathfrak{I}_Q \\
&\equiv \quad Q(v) \triangleright \mathbf{1}_{\otimes_{\mathbb{K}} V/\mathfrak{I}_Q} \,,
\end{aligned}$$

czyli $\jmath_V^{\mathrm{C}}$ jest odwzorowaniem Clifforda, a ponieważ algebra $\otimes_{\mathbb{K}} V$ jest generowana (jako $\mathbb{K}$-algebra) przez $\jmath_1(V) \subset \otimes_{\mathbb{K}} V$ i rzut kanoniczny $\pi_{\otimes_{\mathbb{K}} V/\mathfrak{I}_Q}$ jest epimorfizmem, przeto $\jmath_V^{\mathrm{C}}(V)$ generuje $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ (jako $\mathbb{K}$-algebrę). Dla zakończenia dowodu musimy jeszcze stowarzyszyć unitalny homomorfizm $\mathbb{K}$-algebr $\widetilde{\varphi} \,:\, \mathrm{Cliff}(V,Q) \longrightarrow \mathfrak{A}$ z dowolnym odwzorowaniem Clifforda $\varphi \,:\, V \longrightarrow \mathfrak{A}$. W tym celu stwierdzamy najpierw, że to ostatnie definiuje – w świetle Tw. 6-7.1 – (jedyny) unitalny homomorfizm $\mathbb{K}$-algebr

$$\widehat{\varphi} \; : \; \bigotimes_{\mathbb{K}} V \longrightarrow \mathfrak{A}$$

o własności

$$\forall_{v_i \in V\,,\ i \in \overline{1,N}\,,\ N \in \mathbb{N}} \; : \; \widehat{\varphi}(v_1 \otimes_{\mathbb{K}} v_2 \otimes_{\mathbb{K}} \cdots \otimes_{\mathbb{K}} v_N) = \varphi(v_1) \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(v_2) \cdot_{\mathfrak{A}} \cdots \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(v_N) \,,$$

a ten spełnia – dla dowolnego $v \in V$ – tożsamość

$$\widehat{\varphi}(v \otimes_{\mathbb{K}} v - Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}}) = \varphi(v)^2 - Q(v) \triangleright \widehat{\varphi}(1_{\mathbb{K}}) = Q(v) \triangleright \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} - Q(v) \triangleright \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{0}_{\mathfrak{A}} \,,$$

skąd wniosek, że

$$\mathfrak{I}_Q \subset \ker \widehat{\varphi} \,,$$

zatem $\widehat{\varphi}$ kanonicznie indukuje unitalny homomorfizm $\mathbb{K}$-algebr

$$\underline{\widehat{\varphi}} \; : \; \bigotimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{I}_Q \longrightarrow \mathfrak{A} \; : \; \tau + \mathfrak{I}_Q \longmapsto \widehat{\varphi}(\tau) \,.$$

Przy tym – dla dowolnego $v \in V$ –

$$\underline{\widehat{\varphi}} \circ \jmath_V^{\mathrm{C}}(v) = \underline{\widehat{\varphi}}\big(\jmath_1(v) + \mathfrak{I}_Q\big) = \widehat{\varphi} \circ \jmath_1(v) = \varphi(v) \,,$$

możemy przeto położyć

$$\widetilde{\varphi} := \underline{\widehat{\varphi}} \,.$$

□

Na marginesie dotychczasowej dyskusji poczynimy następującą przydatną obserwację.

Lemat 1. Przyjmijmy zapis użyty w dowodzie Tw. 1 (zakładając przy tym, w szczególności, że $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$), i zdefiniujmy

$$\mathfrak{I}_{\Phi_Q} := \langle v \otimes_{\mathbb{K}} w + w \otimes_{\mathbb{K}} v - 2\Phi_Q(v,w) \triangleright 1_{\mathbb{K}} \,|\, v, w \in V \rangle_{\otimes_{\mathbb{K}} V} \,,$$

a wówczas zachodzi tożsamość

$$\mathfrak{I}_{\Phi_Q} = \mathfrak{I}_Q \,.$$

__Dowód:__ Z jednej strony – dla dowolnych $v, w \in V$, a wobec definicji formy kwadratowej – zachodzi równość

$$\begin{aligned}
v \otimes_{\mathbb{K}} w + w \otimes_{\mathbb{K}} v - 2\Phi_Q(v,w) \triangleright 1_{\mathbb{K}} &= (v +_V w) \otimes_{\mathbb{K}} (v +_V w) - Q(v +_V w) \triangleright 1_{\mathbb{K}} \\
&\quad - \big(v \otimes_{\mathbb{K}} v - Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}}\big) - \big(w \otimes_{\mathbb{K}} w - Q(w) \triangleright 1_{\mathbb{K}}\big) \in \mathfrak{I}_Q \,,
\end{aligned}$$

więc

$$\mathfrak{I}_{\Phi_Q} \subset \mathfrak{I}_Q \,,$$

z drugiej zaś trywialnie

$$v \otimes_{\mathbb{K}} v - Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}} \equiv 2_{\mathbb{K}}^{-1} \triangleright \big(v \otimes_{\mathbb{K}} v + v \otimes_{\mathbb{K}} v - 2\Phi_Q(v,v) \triangleright 1_{\mathbb{K}} \big) \in \mathfrak{I}_{\Phi_Q} \,,$$

więc

$$\mathfrak{I}_Q \subset \mathfrak{I}_{\Phi_Q} \,.$$

□

Konstrukcja algebr Clifforda jest osadzona w kategorii przestrzeni wektorowych z dodatkową strukturą, jaką jest forma kwadratowa. Naturalnym więc jest oczekiwać, że homomorfizmy przestrzeni kwadratowych podnoszą się do (unitalnych) homomorfizmów algebr Clifforda (choć nie ma powodów uważać, że są to jedyne (unitalne) homomorfizmy $\mathbb{K}$-algebr pomiędzy algebrami Clifforda). O tym, że tak jest w istocie, mówi

Twierdzenie 2. Przyporządkowanie algebr Clifforda przestrzeniom kwadratowym nad danym ciałem ma charakter funktorialny, tj. istnieje funktor kowariantny

$$\mathrm{Cliff} \ : \ \square\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbf{uAssAlg}_{\mathbb{K}} \,.$$

Dowód: Wobec wcześniejszych naszych ustaleń pozostaje wykazać, że dla dowolnych $\big(\big((V_\alpha, +_\alpha, \mathsf{P}_\alpha, \bullet \longmapsto 0_\alpha), \ell_\alpha\big), Q_\alpha\big) \in \mathrm{Ob}\,\square\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}},\ \alpha \in \{1,2,3\}$ każda izometria $\chi \ : \ V_1 \longrightarrow V_2$ indukuje unitalny homomorfizm $\mathbb{K}$-algebr $\mathrm{Cliff}(\chi)$ o własności wyrażonej przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cliff}(V_1,Q_1) \arrow[r, "\mathrm{Cliff}(\chi)"] & \mathrm{Cliff}(V_2,Q_2) \\ V_1 \arrow[u, "\mathrm{Cliff}"] \arrow[r, "\chi"'] & V_2 \arrow[u, "\mathrm{Cliff}"'] \end{tikzcd} \,, \tag{2}$$

w szczególności zaś

$$\mathrm{Cliff}(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)} \,, \tag{3}$$

a nadto że dla dowolnych dwóch izometrii $\chi_\alpha \ : \ V_\alpha \longrightarrow V_{\alpha+1},\ \alpha \in \{1,2\}$ zachodzi tożsamość

$$\mathrm{Cliff}(\chi_2 \circ \chi_1) = \mathrm{Cliff}(\chi_2) \circ \mathrm{Cliff}(\chi_1) \,.$$

W tym celu rozważmy odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe

$$\widehat{\chi} \coloneqq \jmath_{V_2}^{\mathrm{C}} \circ \chi \ : \ V_1 \longrightarrow \mathrm{Cliff}(V_2,Q_2) \,.$$

Łatwo widać, że spełnia ono warunek Clifforda, a to z racji cliffordowskości odwzorowania kanonicznego $\jmath_{V_2}^{\mathrm{C}}$ oraz izometrycznego charakteru χ,

$$\forall_{v_1 \in V_1} \ : \ \widehat{\chi}(v_1)^2 \equiv \jmath_{V_2}^{\mathrm{C}}\big(\chi(v)\big)^2 = Q_2\big(\chi(v)\big) \triangleright e_2^{\mathrm{C}} = Q_1(v) \triangleright e_2^{\mathrm{C}} \,.$$

Uniwersalność algebry Clifforda przesądza zatem o istnieniu jedynego unitalnego homomorfizmu $\mathbb{K}$-algebr

$$\mathrm{Cliff}(\chi) \ : \ \mathrm{Cliff}(V_1,Q_1) \longrightarrow \mathrm{Cliff}(V_2,Q_2)$$

o własności

$$\mathrm{Cliff}(\chi) \circ \jmath_{V_1}^{\mathrm{C}} = \widehat{\chi} \equiv \jmath_{V_2}^{\mathrm{C}} \circ \chi \,,$$

ta ostatnia jednak wyraża właśnie przemienność Diag. (2). Zauważmy przy tym, że odwzorowanie $\mathrm{Cliff}(\chi)$ jest określone jednoznacznie, oto bowiem dowolne dwa podniesienia $\mathrm{Cliff}(\chi)_1$ i $\mathrm{Cliff}(\chi)_2$ pokrywają się wprost na mocy założenia na zbiorze $\mathrm{Image}\,\jmath_{V_1}^{\mathrm{C}}$ generującym ich dziedzinę,

$$\mathrm{Cliff}(\chi)_2 \circ \jmath_{V_1}^{\mathrm{C}} = \jmath_{V_2}^{\mathrm{C}} \circ \chi = \mathrm{Cliff}(\chi)_1 \circ \jmath_{V_1}^{\mathrm{C}} \,.$$

Dokonując konkatenacji diagramów przemiennych odpowiadających podniesieniom $\mathrm{Cliff}(\chi_\alpha)$ izometrii $\chi_\alpha,\ \alpha\in\{1,2\}$,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cliff}(V_1,Q_1) \arrow[r, "\mathrm{Cliff}(\chi_1)"] & \mathrm{Cliff}(V_2,Q_2) \arrow[r, "\mathrm{Cliff}(\chi_2)"] & \mathrm{Cliff}(V_3,Q_3) \\ V_1 \arrow[u, "\mathrm{Cliff}"] \arrow[r, "\chi_1"'] & V_2 \arrow[u, "\mathrm{Cliff}"'] \arrow[r, "\chi_2"'] & V_3 \arrow[u, "\mathrm{Cliff}"'] \end{tikzcd},$$

otrzymujemy diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cliff}(V_1,Q_1) \arrow[r, "\mathrm{Cliff}(\chi_2)\circ\mathrm{Cliff}(\chi_1)"] & \mathrm{Cliff}(V_3,Q_3) \\ V_1 \arrow[u, "\mathrm{Cliff}"] \arrow[r, "\chi_2\circ\chi_1"'] & V_3 \arrow[u, "\mathrm{Cliff}"'] \end{tikzcd}.$$

Zważywszy jednoznaczność podniesienia, stwierdzamy zatem, że superpozycja podniesień $\mathrm{Cliff}(\chi_2)\circ\mathrm{Cliff}(\chi_1)$ jest jedynym podniesieniem superpozycji izometrii $\chi_2\circ\chi_1$, co jest wnioskiem pożądanym. Ten sam argument pozwala zidentyfikować funktorialny obraz izometrii identycznościowej id_V zgodnie z Równ. (3). □

Konstruktywny dowód istnienia algebry Clifforda daje nam do ręki prosty algorytm budowania jej modelu w bezpiecznym środowisku algebry tensorowej. Ażeby przekonać się o jego praktyczności i zarazem wyprowadzić modele algebr Clifforda o fundamentalnym znaczeniu w klasyfikacji wszystkich rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda, z którą zmierzymy się już wkrótce, prześledzimy ów algorytm skrupulatnie w odniesieniu do kilku wybranych przestrzeni kwadratowych o szczególnie prostej postaci formy kwadratowej.

Przykłady 1. (Struktury)

(1) Algebra Clifforda przestrzeni $\mathbb{R}^{1,0}$. Zacznijmy od wypisania algebry tensorowej przestrzeni $\mathbb{R}$, korzystając przy tym ze Stw. 3.6,

$$\bigotimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\oplus\bigoplus_{n=2}^{\infty}\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}}n}\cong\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\oplus\bigoplus_{n=2}^{\infty}\mathbb{R}\,.$$

Wyodrębnione z powyższej sumy prostej pierwsze dwa jej składniki $\mathbb{R}$ to – odpowiednio – ciało bazowe $\mathbb{R}$ oraz sama przestrzeń $\mathbb{R}$-liniowa $\mathbb{R}$, pozostałe natomiast to kolejne potęgi tensorowe tej ostatniej, które po redukcji z użyciem kanonicznych izomorfizmów także sprowadzają się do $\mathbb{R}$. Ażeby odróżnić od siebie dwa pierwsze kanonicznie składniki, wprowadzimy indeksy:

$$\bigotimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}=\mathbb{R}^{(0)}\oplus\mathbb{R}^{(1)}\oplus\bigoplus_{n=2}^{\infty}\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}}n}\,. \tag{4}$$

Przy zejściu do algebry ilorazowej dokonujemy następujących utożsamień (na bazie):

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}}2}\ni 1_{(1)}\otimes_{\mathbb{R}}1_{(1)} \quad &\sim\quad \delta_{\mathrm{E}}^{(1,0)}(1_{(1)})\triangleright_{(0)}1_{(0)}=1\cdot 1_{(0)}\equiv 1_{(0)}\in\mathbb{R}^{(0)}\,,\\
\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}}3}\ni 1_{(1)}\otimes_{\mathbb{R}}1_{(1)}\otimes_{\mathbb{R}}1_{(1)} \quad &\sim\quad \delta_{\mathrm{E}}^{(1,0)}(1_{(1)})\triangleright_{(0)}1_{(0)}\otimes_{\mathbb{R}}1_{(1)}=1_{(0)}\otimes_{\mathbb{R}}1_{(1)}\\
&=\kappa_{(1)}^{-1}(1\triangleright_{(1)}1_{(1)})\equiv\kappa_{(1)}^{-1}(1_{(1)})\in\mathbb{R}^{(0)}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{(1)}\\
&\xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong}\mathbb{R}^{(1)}\,,\\
\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}}4}\ni 1_{(1)}\otimes_{\mathbb{R}}1_{(1)}\otimes_{\mathbb{R}}1_{(1)}\otimes_{\mathbb{R}}1_{(1)} \quad &\sim\quad \delta_{\mathrm{E}}^{(1,0)}(1_{(1)})\triangleright_{(0)}1_{(0)}\otimes_{\mathbb{R}}\delta_{\mathrm{E}}^{(1,0)}(1_{(1)})\triangleright_{(0)}1_{(0)}=1_{(0)}\otimes_{\mathbb{R}}1_{(0)}\\
&=\kappa_{(0)}^{-1}(1\triangleright_{(0)}1_{(0)})\equiv\kappa_{(0)}^{-1}(1_{(0)})\in\mathbb{R}^{(0)}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{(0)}
\end{aligned}$$

$$\xrightarrow[\kappa_{(0)}]{\cong} \mathbb{R}^{(0)} \qquad \text{itd.}\,,$$

tak że koniec końców dostajemy, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 2k} \sim \mathbb{R}^{(0)}\,, \qquad\qquad \mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 2k+1} \sim \mathbb{R}^{(1)}\,,$$

skąd też

$$\bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}/\mathfrak{I}_{\delta_{\mathrm{E}}^{(1,0)}} \cong \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{(1)}\,.$$

Pozostaje w tym momencie ustalić postać iloczynu elementów przestrzeni ilorazowej – tu wystarczy uwzględniający dwuliniowość tegoż iloczynu rachunek na reprezentantach klas (*modulo* $\mathfrak{I}_{\delta_{\mathrm{E}}^{(1,0)}}$) w algebrze tensorowej, w której mnożenie sprowadza się do tensorowania, a następnie narzucenie wskazanych wyżej utożsamień. Oto więc dla dowolnych par (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{(1)} \equiv \mathbb{R}^{\times 2}$ obliczamy

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1) \cdot_{\otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}} (x_2, y_2) &\equiv (x_1, y_1) \otimes_{\mathbb{R}} (x_2, y_2) \\
&\equiv \big(x_1 \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}} + y_1 \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(1)}}\big) \otimes_{\mathbb{R}} \big(x_2 \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}} + y_2 \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(1)}}\big) \\
&= x_1 \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} x_2 \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}} + x_1 \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} y_2 \triangleright_{(1)} 1_{\mathbb{R}^{(1)}} \\
&\quad + y_1 \triangleright_{(1)} 1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} x_2 \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}} + y_1 \triangleright_{(1)} 1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} y_2 \triangleright_{(1)} 1_{\mathbb{R}^{(1)}} \\
&= (x_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (x_1 \cdot y_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \\
&\quad + (y_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (y_1 \cdot y_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \\
&\sim (x_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (x_1 \cdot y_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \\
&\quad + (y_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (y_1 \cdot y_2) \cdot \delta_{\mathrm{E}}^{(1,0)}(1) \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}} \\
&= (x_1 \cdot x_2) \triangleright \kappa_{(0)}^{-1}(1 \cdot 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (x_1 \cdot y_2) \triangleright \kappa_{(1)}^{-1}(1 \cdot 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \\
&\quad + (y_1 \cdot x_2) \triangleright {}_{(1)}\kappa^{-1}(1_{\mathbb{R}^{(1)}} \cdot 1) + (y_1 \cdot y_2) \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}
\end{aligned}$$

i na tej podstawie wyprowadzamy

$$m_{\mathbb{R}^{\times 2}}\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)\,.$$

Określmy izomorfizm przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowych

$$C_1 \;:\; \mathbb{R}^{\times 2}\big(\equiv \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{(1)}\big) \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \;:\; (x, y) \longmapsto (x + y, x - y)\,.$$

Łatwo sprawdzamy, że obrazem powyższego „egzotycznego” mnożenia względem tego izomorfizmu,

$$m_{\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}} := C_1 \circ m_{\mathbb{R}^{\times 2}} \circ (C_1^{-1} \times C_1^{-1}) \;:\; (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\,,$$

jest standardowe mnożenie w sumie prostej algebr $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
m_{\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}}\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) &= C_1\big(\tfrac{1}{2} \triangleright (x_1 + y_1, x_1 - y_1) \cdot_{\mathbb{R}^{\times 2}} \tfrac{1}{2} \triangleright (x_2 + y_2, x_2 - y_2)\big) \\
&\equiv \tfrac{1}{4} \triangleright C_1\big((x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2) + (x_1 - y_1) \cdot (x_2 - y_2), \\
&\quad (x_1 + y_1) \cdot (x_2 - y_2) + (x_1 - y_1) \cdot (x_2 + y_2)\big) \\
&= \tfrac{1}{2} \triangleright C_1(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2)\,.
\end{aligned}$$

Ostatecznie więc możemy zapisać

$$\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{1,0}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\,,$$

domyślnie mając na uwadzę standardową strukturę sumy prostej $\mathbb{R}$-algebr na $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

(2) Algebra Clifforda przestrzeni $\mathbb{R}^{0,1}$. Tym razem przejście od rozkładu (4) do struktury ilorazowej wymaga utożsamień

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 2} \ni 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \quad &\sim \quad \delta_{\mathrm{E}}^{(0,1)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = -1 \cdot 1_{(0)} \equiv -1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)}\,, \\
\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \quad &\sim \quad \delta_{\mathrm{E}}^{(0,1)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} = -1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \\
&= \kappa_{(1)}^{-1}(-1 \triangleright_{(1)} 1_{(1)}) \equiv \kappa_{(1)}^{-1}(-1_{(1)}) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(1)} \\
&\xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{(1)}\,, \\
\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 4} \ni 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \quad &\sim \quad \delta_{\mathrm{E}}^{(0,1)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \delta_{\mathrm{E}}^{(0,1)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(0)} \\
&= \kappa_{(0)}^{-1}(1 \triangleright_{(0)} 1_{(0)}) \equiv \kappa_{(0)}^{-1}(1_{(0)}) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \\
&\xrightarrow[\kappa_{(0)}]{\cong} \mathbb{R}^{(0)} \qquad \text{itd.}\,,
\end{aligned}$$

tak samo więc jak w poprzednim przypadku dostajemy, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 2k} \sim \mathbb{R}^{(0)}\,, \qquad \mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 2k+1} \sim \mathbb{R}^{(1)}\,,$$

a dalej

$$\bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} / \mathfrak{I}_{\delta_{\mathrm{E}}^{(0,1)}} \cong \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{(1)}\,.$$

Postać iloczynu w otrzymanej tu algebrze odczytujemy z rachunku (którego początek jest identyczny jak poprzednio)

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1) \cdot_{\otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}} (x_2, y_2) \quad &= \quad (x_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (x_1 \cdot y_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \\
&\quad + (y_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (y_1 \cdot y_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \\
&\sim \quad (x_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (x_1 \cdot y_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \\
&\quad + (y_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (y_1 \cdot y_2) \cdot \delta_{\mathrm{E}}^{(0,1)}(1) \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}} \\
&= \quad (x_1 \cdot x_2) \triangleright \kappa_{(0)}^{-1}(1 \cdot 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (x_1 \cdot y_2) \triangleright \kappa_{(1)}^{-1}(1 \cdot 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \\
&\quad + (y_1 \cdot x_2) \triangleright {}_{(1)}\kappa^{-1}(1_{\mathbb{R}^{(1)}} \cdot 1) - (y_1 \cdot y_2) \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}\,,
\end{aligned}$$

który prowadzi do łatwo rozpoznawalnej struktury

$$(x_1, y_1) \cdot_{\mathbb{R}^{\times 2}} (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)\,.$$

Tym sposobem identyfikujemy

$$\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{0,1}) \cong \mathbb{C}\,.$$

(3) Algebra Clifforda przestrzeni $\mathbb{R}^{2,0}$. W algebrze tensorowej tej przestrzeni

$$\bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{2,0} = \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{\times 2} \oplus \bigoplus_{n=2}^{\infty} (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} n} \tag{5}$$

utożsamiamy (na bazie):

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 2} \ni (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) \quad &\sim \quad \delta_{\mathrm{E}}^{(2,0)}(1,0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = 1 \cdot 1_{(0)} \equiv 1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)}\,, \\
(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 2} \ni (0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) \quad &\sim \quad \delta_{\mathrm{E}}^{(2,0)}(0,1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = 1 \cdot 1_{(0)} \equiv 1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{R}^{\times 2}\right)^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) \quad &\sim \quad \delta^{(2,0)}_{\mathrm{E}}(1,0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) \\
&= \quad \kappa^{-1}_{(1)}\big(1 \triangleright_{(1)} (1,0)\big) \equiv \kappa^{-1}_{(1)}(1,0) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \\
&\qquad \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}\,, \\
\left(\mathbb{R}^{\times 2}\right)^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) \quad &\sim \quad \delta^{(2,0)}_{\mathrm{E}}(1,0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) \\
&= \quad \kappa^{-1}_{(1)}\big(1 \triangleright_{(1)} (0,1)\big) \equiv \kappa^{-1}_{(1)}(0,1) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \\
&\qquad \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}\,, \\
\left(\mathbb{R}^{\times 2}\right)^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) \quad &\sim \quad (0,1) \otimes_{\mathbb{R}} \delta^{(2,0)}_{\mathrm{E}}(1,0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = (0,1) \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(0)} \\
&= \quad {}_{(1)}\kappa^{-1}\big((0,1) \triangleleft_{(1)} 1\big) \equiv {}_{(1)}\kappa^{-1}(0,1) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \\
&\qquad \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}\,, \\
\left(\mathbb{R}^{\times 2}\right)^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) \quad &\sim \quad \delta^{(2,0)}_{\mathrm{E}}(0,1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) \\
&= \quad \kappa^{-1}_{(1)}\big(1 \triangleright_{(1)} (0,1)\big) \equiv \kappa^{-1}_{(1)}(0,1) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \\
&\qquad \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}\,, \\
\left(\mathbb{R}^{\times 2}\right)^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) \quad &\sim \quad \delta^{(2,0)}_{\mathrm{E}}(0,1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) \\
&= \quad \kappa^{-1}_{(1)}\big(1 \triangleright_{(1)} (1,0)\big) \equiv \kappa^{-1}_{(1)}(1,0) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \\
&\qquad \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}\,, \\
\left(\mathbb{R}^{\times 2}\right)^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) \quad &\sim \quad (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} \delta^{(2,0)}_{\mathrm{E}}(0,1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = (1,2) \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(0)} \\
&= \quad {}_{(1)}\kappa^{-1}\big((1,0) \triangleleft_{(1)} 1\big) \equiv {}_{(1)}\kappa^{-1}(1,0) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \\
&\qquad \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2} \qquad \text{itd.}\,,
\end{aligned}$$

a ponieważ także

$$(1,1) \otimes_{\mathbb{R}} (1,1) = (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) + (0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) + (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) + (0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)\,,$$

więc dalej utożsamiamy

$$\begin{aligned}
(1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) &= (1,1) \otimes_{\mathbb{R}} (1,1) - (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) - (0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) - (0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) \\
&\sim \delta^{(2,0)}_{\mathrm{E}}(1,1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - \delta^{(2,0)}_{\mathrm{E}}(1,0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - \delta^{(2,0)}_{\mathrm{E}}(0,1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - (0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) \\
&= (2-1-1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - (0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) = -(0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{R}^{\times 2}\right)^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) \quad &\sim \quad -(0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) \\
&\quad \sim -(0,1) \otimes_{\mathbb{R}} \delta^{(2,0)}_{\mathrm{E}}(1,0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \\
&= \quad -(0,1) \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(0)} = -{}_{(1)}\kappa^{-1}\big((0,1) \triangleleft_{(1)} 1\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&& \equiv & \quad -{}_{(1)}\kappa^{-1}(0,1) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}\,, \\
\left(\mathbb{R}^{\times 2}\right)^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) && \sim & \quad -(1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) \\
&& & \quad \sim -(1,0) \otimes_{\mathbb{R}} \delta_{\mathrm{E}}^{(2,0)}(0,1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \\
&& = & \quad -(1,0) \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(0)} = -{}_{(1)}\kappa^{-1}\big((1,0) \triangleleft_{(1)} 1\big) \\
&& \equiv & \quad -{}_{(1)}\kappa^{-1}(1,0) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2} \qquad \text{itd.}
\end{aligned}$$

Biorąc to wszystko pod uwagę, stwierdzamy, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 2k} \sim \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{(1)}\,, \qquad \mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 2k+1} \sim \mathbb{R}^{\times 2}\,,$$

gdzie

$$\mathbb{R}^{(1)} = \langle (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) \rangle_{\mathbb{R}}\,,$$

a zatem ostatecznie

$$\bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} / \mathfrak{I}_{\delta_{\mathrm{E}}^{(2,0)}} \cong \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{\times 2} \oplus \mathbb{R}^{(1)}\,.$$

Przy tym z tożsamości

$$\begin{aligned}
&\big(a_1 \triangleright 1 + a_2 \triangleright (1,0) + a_3 \triangleright (0,1) + a_4 \triangleright (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)\big) \\
&\cdot_{\otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2}} \big(b_1 \triangleright 1 + b_2 \triangleright (1,0) + b_3 \triangleright (0,1) + b_4 \triangleright (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)\big) \\
\sim\ & (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 - a_4 \cdot b_4) \triangleright 1 + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 - a_3 \cdot b_4 + a_4 \cdot b_3) \triangleright (1,0) \\
&+ (a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_4 + a_3 \cdot b_1 - a_4 \cdot b_2) \triangleright (0,1) \\
&+ (a_1 \cdot b_4 + a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 + a_4 \cdot b_1) \triangleright (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)\,,
\end{aligned}$$

wyznaczonych w odwołaniu do powyższych relacji, wyprowadzamy izomorfizm

$$C_3 \ :\ \mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{2,0}) \cong \mathbb{R}(2)\,,$$

który na bazie przybiera postać

$$\big(1, (1,0), (0,1), (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)\big) \longmapsto \Big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\Big)\,.$$

Istotnie, mamy

$$\left(\begin{smallmatrix} a_1+a_2 & a_3+a_4 \\ a_3-a_4 & a_1-a_2 \end{smallmatrix}\right) \odot \left(\begin{smallmatrix} b_1+b_2 & b_3+b_4 \\ b_3-b_4 & b_1-b_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} (a_1+a_2)\cdot(b_1+b_2)+(a_3+a_4)\cdot(b_3-b_4) & (a_1+a_2)\cdot(b_3+b_4)+(a_3+a_4)\cdot(b_1-b_2) \\ (a_3-a_4)\cdot(b_1+b_2)+(a_1-a_2)\cdot(b_3-b_4) & (a_3-a_4)\cdot(b_3+b_4)+(a_1-a_2)\cdot(b_1-b_2) \end{smallmatrix}\right)$$

$$\equiv \left(\begin{smallmatrix} (a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3-a_4\cdot b_4)+(a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_1-a_3\cdot b_4+a_4\cdot b_3) & (a_1\cdot b_3+a_2\cdot b_4+a_3\cdot b_1-a_4\cdot b_2)+(a_1\cdot b_4+a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2+a_4\cdot b_1) \\ (a_1\cdot b_3+a_2\cdot b_4+a_3\cdot b_1-a_4\cdot b_2)-(a_1\cdot b_4+a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2+a_4\cdot b_1) & (a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3-a_4\cdot b_4)+(a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_1-a_3\cdot b_4+a_4\cdot b_3) \end{smallmatrix}\right)\,.$$

(4) Algebra Clifforda przestrzeni $\mathbb{R}^{0,2}$. W tym przypadku przejście od algebry tensorowej (5) do stosownej algebry ilorazowej realizują utożsamienia (na bazie):

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{R}^{\times 2}\right)^{\otimes_{\mathbb{R}} 2} \ni (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) &\quad \sim \quad -1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)}\,, \\
\left(\mathbb{R}^{\times 2}\right)^{\otimes_{\mathbb{R}} 2} \ni (0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) &\quad \sim \quad -1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)}\,, \\
\left(\mathbb{R}^{\times 2}\right)^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) &\quad \sim \quad -\kappa_{(1)}^{-1}(1,0) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}\,, \\
\left(\mathbb{R}^{\times 2}\right)^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) &\quad \sim \quad -\kappa_{(1)}^{-1}(0,1) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}\,, \\
\left(\mathbb{R}^{\times 2}\right)^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) &\quad \sim \quad -{}_{(1)}\kappa^{-1}(0,1) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}\,, \\
\left(\mathbb{R}^{\times 2}\right)^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) &\quad \sim \quad -\kappa_{(1)}^{-1}(0,1) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}\,,
\end{aligned}$$

$$\big(\mathbb{R}^{\times 2}\big)^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0,1)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1)\otimes_{\mathbb{R}}(1,0) \quad\sim\quad -\kappa_{(1)}^{-1}(1,0) \in \mathbb{R}^{(0)}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}\,,$$
$$\big(\mathbb{R}^{\times 2}\big)^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (1,0)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1) \quad\sim\quad -{}_{(1)}\kappa^{-1}(1,0) \in \mathbb{R}^{\times 2}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2} \qquad \text{itd.}\,,$$

a nadto

$$(1,0)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1) \sim \delta_{\mathrm{E}}^{(0,2)}(1,1)\triangleright_{(0)} 1_{(0)} - \delta_{\mathrm{E}}^{(0,2)}(1,0)\triangleright_{(0)} 1_{(0)} - \delta_{\mathrm{E}}^{(0,2)}(0,1)\triangleright_{(0)} 1_{(0)} - (0,1)\otimes_{\mathbb{R}}(1,0)$$
$$= (-2+1+1)\triangleright_{(0)} 1_{(0)} - (0,1)\otimes_{\mathbb{R}}(1,0) = -(0,1)\otimes_{\mathbb{R}}(1,0)$$

oraz

$$\big(\mathbb{R}^{\times 2}\big)^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (1,0)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1)\otimes_{\mathbb{R}}(1,0) \quad\sim\quad {}_{(1)}\kappa^{-1}(0,1) \in \mathbb{R}^{\times 2}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}\,,$$
$$\big(\mathbb{R}^{\times 2}\big)^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0,1)\otimes_{\mathbb{R}}(1,0)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1) \quad\sim\quad {}_{(1)}\kappa^{-1}(1,0) \in \mathbb{R}^{\times 2}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2} \qquad \text{itd.}$$

Jak poprzednio, wyłania się rozkład

$$\bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}/\mathfrak{I}_{\delta_{\mathrm{E}}^{(0,2)}} \cong \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{\times 2} \oplus \mathbb{R}^{(1)}$$

ze strukturą iloczynu wyznaczoną z rachunku

$$\big(a_1 \triangleright 1 + a_2 \triangleright (1,0) + a_3 \triangleright (0,1) + a_4 \triangleright (1,0)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1)\big)$$
$$\cdot_{\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{\times 2}} \big(b_1 \triangleright 1 + b_2 \triangleright (1,0) + b_3 \triangleright (0,1) + b_4 \triangleright (1,0)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1)\big)$$
$$\sim (a_1\cdot b_1 - a_2\cdot b_2 - a_3\cdot b_3 - a_4\cdot b_4)\triangleright 1 + (a_1\cdot b_2 + a_2\cdot b_1 + a_3\cdot b_4 - a_4\cdot b_3)\triangleright(1,0)$$
$$+(a_1\cdot b_3 - a_2\cdot b_4 + a_3\cdot b_1 + a_4\cdot b_2)\triangleright(0,1)$$
$$+(a_1\cdot b_4 + a_2\cdot b_3 - a_3\cdot b_2 + a_4\cdot b_1)\triangleright(1,0)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1)\,,$$

w której rozpoznajemy bez trudu obraz iloczynu Hamiltona z Przykł. 6-7.1(4) względem izomorfizmu

$$C_4 \;:\; \mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{0,2}) \cong \mathbb{H}\,,$$

przybierającego na bazie postać

$$\big(1,(1,0),(0,1),(1,0)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1)\big) \longmapsto (1,\mathsf{i},\mathsf{j},\mathsf{k})\,.$$

(5) Algebra Clifforda przestrzeni $\mathbb{R}^{1,1}$. Konstrukcja algebry ilorazowej prowadzi poprzez utożsamienia (na bazie):

$$\big(\mathbb{R}^{\times 2}\big)^{\otimes_{\mathbb{R}} 2} \ni (1,0)\otimes_{\mathbb{R}}(1,0) \quad\sim\quad 1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)}\,,$$
$$\big(\mathbb{R}^{\times 2}\big)^{\otimes_{\mathbb{R}} 2} \ni (0,1)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1) \quad\sim\quad -1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)}\,,$$
$$\big(\mathbb{R}^{\times 2}\big)^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (1,0)\otimes_{\mathbb{R}}(1,0)\otimes_{\mathbb{R}}(1,0) \quad\sim\quad \kappa_{(1)}^{-1}(1,0) \in \mathbb{R}^{(0)}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}\,,$$
$$\big(\mathbb{R}^{\times 2}\big)^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (1,0)\otimes_{\mathbb{R}}(1,0)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1) \quad\sim\quad \kappa_{(1)}^{-1}(0,1) \in \mathbb{R}^{(0)}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}\,,$$
$$\big(\mathbb{R}^{\times 2}\big)^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0,1)\otimes_{\mathbb{R}}(1,0)\otimes_{\mathbb{R}}(1,0) \quad\sim\quad {}_{(1)}\kappa^{-1}(0,1) \in \mathbb{R}^{\times 2}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}\,,$$
$$\big(\mathbb{R}^{\times 2}\big)^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0,1)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1) \quad\sim\quad -\kappa_{(1)}^{-1}(0,1) \in \mathbb{R}^{(0)}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}\,,$$
$$\big(\mathbb{R}^{\times 2}\big)^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0,1)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1)\otimes_{\mathbb{R}}(1,0) \quad\sim\quad -\kappa_{(1)}^{-1}(1,0) \in \mathbb{R}^{(0)}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}\,,$$
$$\big(\mathbb{R}^{\times 2}\big)^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (1,0)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1) \quad\sim\quad -{}_{(1)}\kappa^{-1}(1,0) \in \mathbb{R}^{\times 2}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2} \qquad \text{itd.}\,,$$

a nadto

$$(1,0)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1)\sim-\delta_{\mathrm{E}}^{(1,1)}(1,1)\triangleright_{(0)}1_{(0)}+\delta_{\mathrm{E}}^{(1,1)}(1,0)\triangleright_{(0)}1_{(0)}+\delta_{\mathrm{E}}^{(1,1)}(0,1)\triangleright_{(0)}1_{(0)}-(0,1)\otimes_{\mathbb{R}}(1,0)$$

$$=(-0+1-1)\triangleright_{(0)}1_{(0)}-(0,1)\otimes_{\mathbb{R}}(1,0)=-(0,1)\otimes_{\mathbb{R}}(1,0)$$

oraz

$$\left(\mathbb{R}^{\times 2}\right)^{\otimes_{\mathbb{R}}3}\ni(1,0)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1)\otimes_{\mathbb{R}}(1,0)\quad\sim\quad-{}_{(1)}\kappa^{-1}(0,1)\in\mathbb{R}^{\times 2}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{(0)}\xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong}\mathbb{R}^{\times 2}\,,$$

$$\left(\mathbb{R}^{\times 2}\right)^{\otimes_{\mathbb{R}}3}\ni(0,1)\otimes_{\mathbb{R}}(1,0)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1)\quad\sim\quad{}_{(1)}\kappa^{-1}(1,0)\in\mathbb{R}^{\times 2}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{(0)}\xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong}\mathbb{R}^{\times 2}\qquad\text{itd.}$$

I tym razem uzyskujemy rozkład

$$\bigotimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}/\mathfrak{I}_{\delta_{\mathrm{E}}^{(1,1)}}\cong\mathbb{R}^{(0)}\oplus\mathbb{R}^{\times 2}\oplus\mathbb{R}^{(1)}$$

ze strukturą iloczynu określaną przez utożsamienie

$$\begin{aligned}&\big(a_1\triangleright 1+a_2\triangleright(1,0)+a_3\triangleright(0,1)+a_4\triangleright(1,0)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1)\big)\\&\cdot_{\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{\times 2}}\big(b_1\triangleright 1+b_2\triangleright(1,0)+b_3\triangleright(0,1)+b_4\triangleright(1,0)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1)\big)\\&\sim(a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2-a_3\cdot b_3+a_4\cdot b_4)\triangleright 1+(a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_1+a_3\cdot b_4-a_4\cdot b_3)\triangleright(1,0)\\&+(a_1\cdot b_3+a_2\cdot b_4+a_3\cdot b_1-a_4\cdot b_2)\triangleright(0,1)\\&+(a_1\cdot b_4+a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2+a_4\cdot b_1)\triangleright(1,0)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1)\,,\end{aligned}$$

z której odczytujemy izomorfizm

$$C_5\ :\ \mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{1,1})\cong\mathbb{R}(2)\,,$$

przybierający na bazie postać

$$\big(1,(1,0),(0,1),(1,0)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1)\big)\longmapsto\big(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\big)\,,$$

którą bez trudu potwierdzamy w rachunku analogicznym do tego z punktu (3).

(6) Algebra Clifforda przestrzeni $(\mathbb{C},\delta_{\mathrm{E}})$, gdzie $\delta_{\mathrm{E}}\ :\ \mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}\ :\ z\longmapsto z^2$ jest euklidesową formą kwadratową. Postępując identycznie jak w punkcie (1), odkrywamy izomorfizm

$$\mathrm{Cliff}(\mathbb{C},\delta_{\mathrm{E}})\cong\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\,.$$

Jakkolwiek argumenty przedstawione w szczegółowej dyskusji poszczególnych przypadków są całkowicie przekonywające, to jednak nie stanowią formalnego dowodu istnienia wskazanych izomorfizmów. Traktując je jako strukturalną wskazówkę, bez trudu dowodzimy poniższego

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Istnieją kanoniczne unitalne izomorfizmy $\mathbb{K}$-algebr

(i) $\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{1,0})\cong\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$ $(\mathbb{K}=\mathbb{R})$;
(ii) $\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{0,1})\cong\mathbb{C}$ $(\mathbb{K}=\mathbb{R})$;
(iii) $\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{2,0})\cong\mathbb{R}(2)$ $(\mathbb{K}=\mathbb{R})$;
(iv) $\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{0,2})\cong\mathbb{H}$ $(\mathbb{K}=\mathbb{R})$;
(v) $\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{1,1})\cong\mathbb{R}(2)$ $(\mathbb{K}=\mathbb{R})$;
(vi) $\mathrm{Cliff}(\mathbb{C},\delta_{\mathrm{E}})\cong\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ $(\mathbb{K}=\mathbb{C})$.

Dowód: Weryfikację słuszności tezy stwierdzenia opieramy na Stw. 1.

Ad (i) Przywołując postać zanurzenia wyjściowej przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}\equiv\mathbb{R}^{(1)}$ w module ilorazowym z Przykł. 1 (1), rozważamy odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe

$$\jmath_{\mathbb{R}}\ :\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\ :\ r\longmapsto(r,-r)\,,$$

tj. kładziemy

$$\jmath_{\mathbb{R}}:=C_1\circ\jmath_{\mathbb{R}^{(1)}}\,,$$

gdzie

$$\jmath_{\mathbb{R}^{(1)}} \ : \ \mathbb{R}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{(1)} \equiv \mathbb{R}^{\times 2} \ : \ r \longmapsto (0, r)\,.$$

Odwzorowanie to jest jawnie cliffordowskie,

$$\jmath_{\mathbb{R}}(r)^2 = (r, -r) \cdot (r, -r) = \big(r^2, r^2\big) \equiv r^2 \triangleright (1,1) \equiv \delta_{\mathrm{E}}^{(1,0)}(r) \triangleright \mathbf{1}_{\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}}\,.$$

Jego obraz generuje przeciwdziedzinę jako $\mathbb{R}$-algebrę,

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \langle \mathrm{Image}\, \jmath_{\mathbb{R}} \rangle_{\mathbb{R}}\ .$$

Istotnie,

$$\forall_{r,s\in\mathbb{R}} \ : \ (r,s) = \tfrac{1}{2}(r+s) \triangleright \jmath_{\mathbb{R}}(1)^2 + \tfrac{1}{2}(r-s) \triangleright \jmath_{\mathbb{R}}(1)\,.$$

Niechaj teraz $\varphi \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{A}$ będzie odwzorowaniem Clifforda przestrzeni $\mathbb{R}$ w dowolną unitalną $\mathbb{R}$-algebrę $\mathfrak{A}$. Jako odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe jest ono jednoznacznie określone przez wartość przyjmowaną na wektorze $1 \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(r) \equiv \varphi(r \triangleright 1) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} \varphi(1)\,,$$

przy czym element

$$a \coloneqq \varphi(1) \in \mathfrak{A}$$

spełnia warunek

$$a^2 \equiv \varphi(1) \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(1) = \delta_{\mathrm{E}}^{(1,0)}(1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}\,.$$

Możemy zatem zdefiniować odwzorowanie jawnie $\mathbb{R}$-liniowe

$$\widetilde{\varphi} \ : \ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{A} \ : \ (r,s) \longmapsto \tfrac{1}{2}(r+s) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \tfrac{1}{2}(r-s) \triangleright_{\mathfrak{A}} a\,,$$

o pożądanych własnościach

$$\widetilde{\varphi}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}}) \equiv \widetilde{\varphi}(1,1) = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}\,,$$

$$\forall_{r\in\mathbb{R}} \ : \ \widetilde{\varphi} \circ \jmath_{\mathbb{R}}(r) = \widetilde{\varphi}(r, -r) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} a \equiv r \triangleright_{\mathfrak{A}} \varphi(1) = \varphi(r)\,.$$

Na podstawie rachunków z Przykł. 1 (1) stwierdzamy, że jest to w istocie homomorfizm $\mathbb{R}$-algebr

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}\big((x_1,y_1) \cdot_{\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}} (x_2,y_2)\big) &= \tfrac{1}{2}(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \tfrac{1}{2}(x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) \triangleright_{\mathfrak{A}} a \\
&= \tfrac{1}{2} \triangleright \big((x_1 + y_1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (x_1 - y_1) \triangleright_{\mathfrak{A}} a\big) \\
&\quad \cdot_{\mathfrak{A}} \tfrac{1}{2} \triangleright \big((x_2 + y_2) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (x_2 - y_2) \triangleright_{\mathfrak{A}} a\big) \\
&\equiv \widetilde{\varphi}(x_1,y_1) \cdot_{\mathfrak{A}} \widetilde{\varphi}(x_2,y_2)\,.
\end{aligned}$$

Ad (ii) Rozumując analogicznie jak w punkcie poprzednim, określamy odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe

$$\jmath_{\mathbb{R}}\big(\equiv \jmath_{\mathbb{R}^{(1)}}\big) \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\big(\equiv \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{(1)}\big) \ : \ r \longmapsto (0, r)\,.$$

To jest cliffordowskie,

$$\jmath_{\mathbb{R}}(r)^2 = (0,r) \cdot_{\mathbb{C}} (0,r) = \big(-r^2, 0\big) = -r^2 \triangleright (1,0) \equiv \delta_{\mathrm{E}}^{(0,1)}(r) \triangleright \mathbf{1}_{\mathbb{C}}\,,$$

i ma własność

$$\mathbb{C} = \langle \mathrm{Image}\, \jmath_{\mathbb{R}} \rangle_{\mathbb{R}}\ ,$$

co wynika z prostej obserwacji:

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \ : \ (x,y) = (-x) \triangleright \jmath_{\mathbb{R}}(1) \cdot_{\mathbb{C}} \jmath_{\mathbb{R}}(1) + y \triangleright \jmath_{\mathbb{R}}(1)\,.$$

Dla dowolnego $\varphi \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{A}$ jak poprzednio definiujemy element

$$a \coloneqq \varphi(1) \in \mathfrak{A}\,,$$

spełniający warunek

$$a^2 \equiv \varphi(1) \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(1) = \delta_{\mathrm{E}}^{(0,1)}(1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = -\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \,,$$

a następnie definiujemy odwzorowanie jawnie $\mathbb{R}$-liniowe

$$\widetilde{\varphi} \;:\; \mathbb{C} \longrightarrow \mathfrak{A} \;:\; (x,y) \longmapsto x \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} y \triangleright_{\mathfrak{A}} a \,,$$

o pożądanych własnościach

$$\widetilde{\varphi}(1,0) = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \,,$$

$$\forall_{r \in \mathbb{R}} \;:\; \widetilde{\varphi} \circ \jmath_{\mathbb{R}}(r) = \widetilde{\varphi}(0,r) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} a = \varphi(r) \,.$$

Na podstawie rachunków z Przykł. 1 (1) stwierdzamy, że jest to w istocie homomorfizm $\mathbb{R}$-algebr

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}\big((x_1,y_1) \cdot_{\mathbb{C}} (x_2,y_2)\big) &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2) \triangleright_{\mathfrak{A}} a \\ &= (x_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} y_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} a) \cdot_{\mathfrak{A}} (x_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} y_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} a) \\ &\equiv \widetilde{\varphi}(x_1,y_1) \cdot_{\mathfrak{A}} \widetilde{\varphi}(x_2,y_2) \,. \end{aligned}$$

Ad (iii) Tym razem bierzemy pod uwagę odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe

$$\jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}} \;:\; \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}(2) \;:\; (r,s) \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} r & s \\ s & -r \end{smallmatrix}\right),$$

złożone według znanego schematu

$$\jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}} := C_3 \circ \jmath_2 \,,$$

gdzie

$$\jmath_2 \;:\; \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{\times 2} \oplus \mathbb{R}^{(1)} \;:\; (r,s) \longmapsto \big(0,(r,s),0\big) \,.$$

To jest cliffordowskie,

$$\jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}}(r,s)^2 = \left(\begin{smallmatrix} r & s \\ s & -r \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} r & s \\ s & -r \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r^2+s^2 & 0 \\ 0 & r^2+s^2 \end{smallmatrix}\right) = \left(r^2+s^2\right) \triangleright \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \equiv \delta_{\mathrm{E}}^{(2,0)}(r,s) \triangleright \mathbf{1}_{\mathbb{R}(2)} \,,$$

i ma własność

$$\mathbb{R}(2) = \langle \mathrm{Image}\, \jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}} \rangle_{\mathbb{R}} \,,$$

udokumentowaną, jak następuje:

$$\begin{aligned} \forall_{a,b,c,d \in \mathbb{R}} \;:\; \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) &= \tfrac{a+d}{2} \triangleright \jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}}(1,0)^2 + \tfrac{a-d}{2} \triangleright \jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}}(1,0) + \tfrac{b+c}{2} \triangleright \jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}}(0,1) \\ &\quad + \tfrac{b-c}{2} \triangleright \jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}}(1,0) \odot \jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}}(0,1) \,. \end{aligned}$$

Dla dowolnego odwzorowania Clifforda $\varphi \;:\; \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathfrak{A}$ definiujemy elementy

$$(A,B) := \big(\varphi(1,0), \varphi(0,1)\big) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \,,$$

poddane więzom

$$A^2 \equiv \varphi(1,0)^2 = \delta_{\mathrm{E}}^{(2,0)}(1,0) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \,, \qquad B^2 \equiv \varphi(0,1)^2 = \delta_{\mathrm{E}}^{(2,0)}(0,1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \,,$$

$$\begin{aligned} B \cdot_{\mathfrak{A}} A &= (A +_{\mathfrak{A}} B) \cdot_{\mathfrak{A}} (A +_{\mathfrak{A}} B) +_{\mathfrak{A}} (-A^2) +_{\mathfrak{A}} (-B^2) +_{\mathfrak{A}} (-A \cdot_{\mathfrak{A}} B) \\ &= \delta_{\mathrm{E}}^{(2,0)}(1,1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (-\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) +_{\mathfrak{A}} (-\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) +_{\mathfrak{A}} (-A \cdot_{\mathfrak{A}} B) = -A \cdot_{\mathfrak{A}} B \,. \end{aligned}$$

a następnie definiujemy odwzorowanie jawnie $\mathbb{R}$-liniowe

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} \;&:\; \mathbb{R}(2) \longrightarrow \mathfrak{A} \\ &:\; \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \longmapsto \tfrac{a+d}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \tfrac{a-d}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} A +_{\mathfrak{A}} \tfrac{b+c}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} B +_{\mathfrak{A}} \tfrac{b-c}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} A \cdot_{\mathfrak{A}} B \,, \end{aligned}$$

o oczekiwanych własnościach

$$\widetilde{\varphi}(\mathbf{1}_2) = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \,,$$

$$\widetilde{\varphi} \circ \jmath_{\mathbb{R}}(r,s) = \widetilde{\varphi}\left(\begin{smallmatrix} r & s \\ s & -r \end{smallmatrix}\right) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} A +_{\mathfrak{A}} s \triangleright_{\mathfrak{A}} B \equiv \varphi(r,s)\,.$$

W mozolnym, lecz poza tym całkowicie trywialnym rachunku bezpośrednim przekonujemy się, że jest to w istocie homomorfizm $\mathbb{R}$-algebr.

Ad (iv) Określamy odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe

$$\jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}} \;:\; \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{H} \;:\; (r,s) \longmapsto r\mathsf{i} + s\mathsf{j}$$

o strukturze

$$\jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}} = C_4 \circ \jmath_2\,,$$

gdzie $\jmath_2 \;:\; \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{\times 2} \oplus \mathbb{R}^{(1)}$ jest poprzednio wprowadzonym monomorfizmem. Powyższe odwzorowanie jest cliffordowskie,

$$\jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}}(r,s)^2 = (r\mathsf{i} + s\mathsf{j}) \cdot_{\mathbb{H}} (r\mathsf{i} + s\mathsf{j}) = -\left(r^2 + s^2\right) \triangleright 1 \equiv \delta_{\mathrm{E}}^{(0,2)}(r,s) \triangleright \mathbf{1}_{\mathbb{H}}\,,$$

i ma własność

$$\mathbb{H} = \langle \mathrm{Image}\, \jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}} \rangle_{\mathbb{R}}\,,$$

widoczną w stwierdzeniu

$$\forall_{a,b,c,d \in \mathbb{R}} \;:\; a + b\mathsf{i} + c\mathsf{j} + d\mathsf{k} = -a \triangleright \jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}}(1,0)^2 + \jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}}(b,c) + d \triangleright \jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}}(1,0) \odot \jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}}(0,1)\,.$$

Dla dowolnego odwzorowania Clifforda $\varphi \;:\; \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathfrak{A}$ definiujemy elementy

$$(A,B) := \big(\varphi(1,0), \varphi(0,1)\big) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}\,,$$

poddane więzom

$$A^2 \equiv \varphi(1,0)^2 = \delta_{\mathrm{E}}^{(0,2)}(1,0) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = -\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}\,, \qquad B^2 \equiv \varphi(0,1)^2 = \delta_{\mathrm{E}}^{(0,2)}(0,1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = -\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}\,,$$

$$\begin{aligned} B \cdot_{\mathfrak{A}} A &= (A +_{\mathfrak{A}} B) \cdot_{\mathfrak{A}} (A +_{\mathfrak{A}} B) +_{\mathfrak{A}} (-A^2) +_{\mathfrak{A}} (-B^2) +_{\mathfrak{A}} (-A \cdot_{\mathfrak{A}} B) \\ &= \delta_{\mathrm{E}}^{(0,2)}(1,1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (-A \cdot_{\mathfrak{A}} B) = -A \cdot_{\mathfrak{A}} B\,. \end{aligned}$$

a następnie definiujemy odwzorowanie jawnie $\mathbb{R}$-liniowe

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} \;&:\; \mathbb{H} \longrightarrow \mathfrak{A} \\ &:\; a + b\mathsf{i} + c\mathsf{j} + d\mathsf{k} \longmapsto a \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} b \triangleright_{\mathfrak{A}} A +_{\mathfrak{A}} c \triangleright_{\mathfrak{A}} B +_{\mathfrak{A}} d \triangleright_{\mathfrak{A}} A \cdot_{\mathfrak{A}} B\,, \end{aligned}$$

o oczekiwanych własnościach

$$\widetilde{\varphi}(1) = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}\,,$$

$$\widetilde{\varphi} \circ \jmath_{\mathbb{R}}(r,s) = \widetilde{\varphi}(r\mathsf{i} + s\mathsf{j}) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} A +_{\mathfrak{A}} s \triangleright_{\mathfrak{A}} B \equiv \varphi(r,s)\,.$$

Łatwo widać, że jest to w istocie homomorfizm $\mathbb{R}$-algebr.

Ad (v) Punktem wyjścia jest odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe

$$\jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}} \;:\; \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}(2) \;:\; (r,s) \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} r & s \\ -s & -r \end{smallmatrix}\right)$$

o strukturze

$$\jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}} = C_5 \circ \jmath_2\,,$$

gdzie $\jmath_2 \;:\; \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{\times 2} \oplus \mathbb{R}^{(1)}$ jest poprzednio wprowadzonym monomorfizmem. Powyższe odwzorowanie jest cliffordowskie,

$$\jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}}(r,s)^2 = \left(\begin{smallmatrix} r & s \\ -s & -r \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} r & s \\ -s & -r \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r^2 - s^2 & 0 \\ 0 & r^2 - s^2 \end{smallmatrix}\right) \equiv \left(r^2 - s^2\right) \triangleright \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \equiv \delta_{\mathrm{E}}^{(1,1)}(r,s) \triangleright \mathbf{1}_{\mathbb{R}(2)}\,,$$

i ma własność

$$\mathbb{R}(2) = \langle \mathrm{Image}\, \jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}} \rangle_{\mathbb{R}}\,,$$

udokumentowaną, jak następuje:

$$\forall_{a,b,c,d \in \mathbb{R}} \;:\; \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \tfrac{a+d}{2} \triangleright \jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}}(1,0)^2 + \tfrac{a-d}{2} \triangleright \jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}}(1,0) + \tfrac{b-c}{2} \triangleright \jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}}(0,1)$$

$$+\tfrac{b+c}{2} \triangleright \jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}}(1,0) \odot \jmath_{\mathbb{R}^{\times 2}}(0,1)\,.$$

Dla dowolnego odwzorowania Clifforda $\varphi \,:\, \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathfrak{A}$ definiujemy elementy

$$(A,B) := \bigl(\varphi(1,0), \varphi(0,1)\bigr) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}\,,$$

poddane więzom

$$\begin{aligned} A^2 &\equiv \varphi(1,0)^2 = \delta_{\mathrm{E}}^{(1,1)}(1,0) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}\,, \qquad B^2 \equiv \varphi(0,1)^2 = \delta_{\mathrm{E}}^{(1,1)}(0,1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = -\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}\,, \\ B \cdot_{\mathfrak{A}} A &= (A +_{\mathfrak{A}} B) \cdot_{\mathfrak{A}} (A +_{\mathfrak{A}} B) +_{\mathfrak{A}} (-A^2) +_{\mathfrak{A}} (-B^2) +_{\mathfrak{A}} (-A \cdot_{\mathfrak{A}} B) \\ &= \delta_{\mathrm{E}}^{(1,1)}(1,1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (-\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) +_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (-A \cdot_{\mathfrak{A}} B) = -A \cdot_{\mathfrak{A}} B\,. \end{aligned}$$

a następnie definiujemy odwzorowanie jawnie $\mathbb{R}$-liniowe

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} \;&:\; \mathbb{R}(2) \longrightarrow \mathfrak{A} \\ &:\; \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \longmapsto \tfrac{a+d}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \tfrac{a-d}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} A +_{\mathfrak{A}} \tfrac{b-c}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} B +_{\mathfrak{A}} \tfrac{b+c}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} A \cdot_{\mathfrak{A}} B\,, \end{aligned}$$

o oczekiwanych własnościach

$$\widetilde{\varphi}(\mathbf{1}_2) = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}\,,$$

$$\widetilde{\varphi} \circ \jmath_{\mathbb{R}}(r,s) = \widetilde{\varphi}\left(\begin{smallmatrix} r & s \\ -s & -r \end{smallmatrix}\right) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} A +_{\mathfrak{A}} s \triangleright_{\mathfrak{A}} B \equiv \varphi(r,s)\,.$$

Także i to odwzorowanie okazuje się być homomorfizmem $\mathbb{R}$-algebr.

Ad (vi) Dowód przebiega identycznie jak w punkcie (i).

□

2. Algebra zewnętrzna jako algebra Clifforda

Model algebry Clifforda stowarzyszonej z daną przestrzenią kwadratową (V,Q) wypracowany w dowodzie Tw. 1 pozwala nam postrzegać ową algebrę jako wysoce nietrywialne uogólnienie, parametryzowane przez nierównoważne struktury kwadratowe Q na V, pewnej kanonicznej konstrukcji ilorazowej związanej z samą przestrzenią $\mathbb{K}$-liniową V, którą obecnie opiszemy, a która odgrywa istotną rolę osobną w modelowaniu zjawisk fizykalnych. Rzeczona konstrukcja stanowi specjalizację konstrukcji ilorazowej (1) do przypadku zwyrodniałej przestrzeni kwadratowej $(V, Q = 0)$ i daje nam

Definicja 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy, w szczególności – dowodu Tw. 1. **Algebra zewnętrzna przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej** V to przestrzeń ilorazowa

$$\bigwedge\nolimits^\bullet V := \bigotimes\nolimits_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{I}_0\,, \qquad \mathfrak{I}_0 = \langle v \otimes_{\mathbb{K}} v \,|\, v \in V \rangle_{\otimes_{\mathbb{K}} V}\,,$$

z mnożeniem

$$\begin{aligned} \wedge \equiv m_{\otimes_{\mathbb{K}} V/\mathfrak{I}_0} \;&:\; \bigwedge\nolimits^\bullet V \times \bigwedge\nolimits^\bullet V \longrightarrow \bigwedge\nolimits^\bullet V \\ &:\; (\alpha + \mathfrak{I}_0, \beta + \mathfrak{I}_0) \longmapsto \alpha \otimes_{\mathbb{K}} \beta + \mathfrak{I}_0 \equiv \bigl(\alpha + \mathfrak{I}_0\bigr) \wedge \bigl(\beta + \mathfrak{I}_0\bigr)\,, \end{aligned}$$

zwanym **iloczynem zewnętrznym**. Powszechnie stosowany jest zapis uproszczony:

$$\bigl(\alpha + \mathfrak{I}_0\bigr) \wedge \bigl(\beta + \mathfrak{I}_0\bigr) \equiv \alpha \wedge \beta\,,$$

który i my będziemy stosować w dalszej części wykładu.

Zapiszemy zatem

$$\mathrm{Cliff}(V,0) \equiv \bigwedge\nolimits^\bullet V\,.$$

Zachodzi oczywiste

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj $\{v_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ będzie dowolną bazą przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej V. Algebra zewnętrzna tej ostatniej jest algebrą z $\mathbb{Z}$-gradacją

$$\bigwedge^\bullet V = \mathbb{K} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigwedge^n V$$

o składowych jednorodnych

$$\bigwedge^n V := \bigoplus_{1\leq k_1<k_2<\ldots<k_n\leq N} \langle v_{k_1} \wedge v_{k_2} \wedge \cdots \wedge v_{k_n} \rangle_{\mathbb{K}}$$

rozpiętych na klasach tensorów

$$v_{k_1} \wedge v_{k_2} \wedge \cdots \wedge v_{k_n} := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\overline{1,n}}} \operatorname{sign}(\sigma)\, v_{k_{\sigma(1)}} \otimes_{\mathbb{K}} v_{k_{\sigma(2)}} \otimes_{\mathbb{K}} \cdots \otimes_{\mathbb{K}} v_{k_{\sigma(n)}} + \mathfrak{I}_0\,.$$

W szczególności więc

$$\forall_{n>N} \ : \ \bigwedge^n V = \mathfrak{I}_0\,,$$

czyli w istocie

$$\bigwedge^\bullet V = \mathbb{K} \oplus \bigoplus_{n=1}^{N} \bigwedge^n V\,,$$

przy czym

$$\dim_{\mathbb{K}} \bigwedge^n V = \binom{N}{n}.$$

Dowód: Prosty wniosek z procedury rzutowania na moduł ilorazowy. □

W następnej kolejności zajmiemy się szczegółowym opisem struktury algebry endomorfizmów algebry zewnętrznej, z którego przyjdzie nam skorzystać niebawem.

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Algebra endomorfizmów $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^\bullet V)$ jest generowana przez endomorfizmy

$$\mu_v \ : \ \bigwedge^\bullet V \circlearrowleft \ : \ \omega \longmapsto v \wedge \omega\,, \qquad v \in V$$

oraz (jedyne) $\mathbb{K}$-liniowe rozszerzenia

$$\imath_\varphi \equiv \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \imath_\varphi^{(n)} \ : \ \bigwedge^\bullet V \circlearrowleft\,, \qquad \varphi \in V^*\,,$$

$$\imath_\varphi^{(0)} \equiv 0 \ : \ \bigwedge^0 V \longrightarrow \{0_{\mathbb{K}}\}\,, \qquad\qquad \imath_\varphi^{(n)} \ : \ \bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^{n-1} V$$

przyporządkowań określonych na elementach prostych wzorami

$$\imath_\varphi^{(n)}(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n) := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\, \varphi(v_k) \triangleright v_1 \wedge v_2 \wedge \underset{\widehat{k}}{\cdots} \wedge v_n\,.$$

Dowód: Wobec skończoności wymiaru V istnieje kanoniczny izomorfizm przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowych

$$\big(\bigwedge^\bullet V\big)^* \cong \bigwedge^\bullet V^*\,,$$

stanowiący stosownie rozszerzoną zantysymetryzowaną wersję udowodnionego wcześniej izomorfizmu (14). W świetle Równ. (11) istnieje zatem kanoniczny izomorfizm

$$T_V \ : \ \bigwedge^\bullet V^* \otimes_{\mathbb{K}} \bigwedge^\bullet V \xrightarrow{\cong} \big(\bigwedge^\bullet V\big)^* \otimes_{\mathbb{K}} \bigwedge^\bullet V \xrightarrow{\cong} \operatorname{End}_{\mathbb{K}}\big(\bigwedge^\bullet V\big)\,,$$

który przybiera konkretną postać (na tensorach prostych, tj. dla dowolnych $\omega \in \bigwedge^\bullet V^*$ oraz $v \in \bigwedge^\bullet V$)

$$T_V(\omega \otimes_{\mathbb{K}} v) \ : \ \bigwedge^\bullet V \circlearrowleft \ : \ w \longmapsto \langle \omega, w \rangle \triangleright v\,,$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle \ : \ \bigwedge^\bullet V^* \times \bigwedge^\bullet V \longrightarrow \mathbb{K}$ jest dwoistością stanowiącą dwuliniowe rozszerzenie przyporządkowania określonego na elementach jednorodnych w postaci

$$\langle k, l \rangle := k \cdot_{\mathbb{K}} l\,, \qquad k, l \in \mathbb{K}\,,$$

$$\langle k, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \rangle := 0_{\mathbb{K}} \,,$$

$$\langle \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m, l \rangle := 0_{\mathbb{K}} \,,$$

$$\langle \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \rangle := \delta^{\mathbb{K}}_{m,n} \det{}_{(n)} \big(\varphi_i(v_j) \big)_{i,j \in \overline{1,n}} \,,$$

zapisanej dla dowolnych $k, l \in \mathbb{K}$, $v_j \in V$, $j \in \overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $\varphi_i \in V^*$, $i \in \overline{1,m}$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zauważmy, że izomorfizmy te ograniczają się do składowych jednorodnych według schematu

$$T_V \restriction_{\bigwedge^p V^* \otimes_{\mathbb{K}} \bigwedge^\bullet V} \; : \; \bigwedge^p V^* \otimes_{\mathbb{K}} \bigwedge^\bullet V \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\bigwedge^p V, \bigwedge^\bullet V \big) \,,$$

przy czym wyrażają się formułami

$$T_V(\omega \otimes_{\mathbb{K}} v) \equiv \widetilde{\mu}_v \circ \widetilde{\imath}_\omega \,, \qquad (\omega, v) \in \bigwedge^p V^* \times \bigwedge^\bullet V \,,$$

w których $\widetilde{\imath}_.$ jest (jedynym) homomorficznym rozszerzeniem do $\mathrm{Cliff}(V^*, 0) \equiv \bigwedge^\bullet V^*$ odwzorowania Clifforda

$$\imath_. \; : \; V^* \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\bigwedge^\bullet V \big) \; : \; \varphi \longmapsto \imath_\varphi$$

opisanego w treści dowodzonego twierdzenia, $\widetilde{\mu}_.$ zaś jest (jedynym) homomorficznym rozszerzeniem do $\mathrm{Cliff}(V, 0) \equiv \bigwedge^\bullet V$ odwzorowania Clifforda

$$\mu_. \; : \; V \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\bigwedge^\bullet V \big) \; : \; v \longmapsto \mu_v$$

zdefiniowanego tamże. O cliffordowskości obu odwzorowań przekonujemy się w bezpośrednim rachunku – oto więc

$$\begin{aligned} \imath^2_\varphi(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n) &= \imath_\varphi \Big(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \varphi(v_k) \triangleright v_1 \wedge v_2 \wedge \underset{\widehat{k}}{\cdots} \wedge v_n \Big) \\ = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \Big(&\sum_{\substack{l=1 \\ l<k}}^n (-1)^{l-1} + \sum_{\substack{l=1 \\ l>k}}^n (-1)^{l-2} \Big) \varphi(v_k) \cdot_{\mathbb{K}} \varphi(v_l) \triangleright v_1 \wedge v_2 \wedge \underset{\widehat{k,l}}{\cdots} \wedge v_n \\ \equiv \Big(\sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l<k}}^n - \sum_{l=1}^n &\sum_{\substack{k=1 \\ l>k}}^n \Big) (-1)^{k+l} \varphi(v_k) \cdot_{\mathbb{K}} \varphi(v_l) \triangleright v_1 \wedge v_2 \wedge \underset{\widehat{k,l}}{\cdots} \wedge v_n = \mathbf{0}_{\bigwedge^\bullet V} \,, \end{aligned}$$

a nadto

$$\mu^2_v(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n) = v \wedge v \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \equiv \mathbf{0}_{\bigwedge^\bullet V} \,.$$

Przy tym w konsekwencji homomorficzności obu rozszerzeń spełnione są – dla dowolnych φ_i i v_j jak wyżej – tożsamości

$$\begin{aligned} \widetilde{\imath}_{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m} &= \imath_{\varphi_1} \circ \imath_{\varphi_2} \circ \cdots \circ \imath_{\varphi_m} \,, \\ \widetilde{\mu}_{v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n} &= \mu_{v_1} \circ \mu_{v_2} \circ \cdots \circ \mu_{v_n} \,. \end{aligned}$$

Skoro jednak – na mocy Cor. 1 oraz Równ. (10), a w konwencji $\bigwedge^0 V \equiv \mathbb{K}$ – istnieje kanoniczny izomorfizm przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowych

$$\begin{aligned} \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\bigwedge^\bullet V \big) &\equiv \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\bigwedge^\bullet V, \bigwedge^\bullet V \big) \equiv \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\Big(\bigoplus_{n=0}^N \bigwedge^n V, \bigwedge^\bullet V \Big) \\ &\cong \bigoplus_{n=0}^N \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\bigwedge^n V, \bigwedge^\bullet V \big) \,, \end{aligned}$$

a każdy ze składników prostych ostatniej sumy jest – jak pokazaliśmy wcześniej – generowany (jako $\mathbb{K}$-algebra) przez endomorfizmy wymienione w tezie dowodzonego stwierdzenia, to także każdy element $\mathbb{K}$-algebry $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\bigwedge^\bullet V \big)$ jest skończoną kombinacją $\mathbb{K}$-liniową skończonych kombinacji $\mathbb{K}$-liniowych skończonych iloczynów takowych generatorów, co dowodzi słuszności tezy. $\square$

3. Podstawowe własności strukturalne algebry Clifforda

Oswoiwszy się nieco z konstrukcją modelu algebry Clifforda, możemy obecnie przystąpić do omówienia elementarnych jej własności będących konsekwencją definicji. Zaczniemy od

Stwierdzenie 5. Przyjmijmy zapis Def. 2. Kanoniczne odwzorowanie Clifforda

$$\jmath_V^{\mathrm{C}} \,:\, V \longrightarrow \mathrm{Cliff}(V,Q)$$

jest monomorfizmem przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowych.

<u>*Dowód:*</u> Zacznijmy od prostej obserwacji ogólnej: jeśli $\jmath_V^{\mathrm{C}}$ ma pożądaną własność w *konkretnym* modelu $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ (o kanonicznym odwzorowaniu Clifforda $\jmath_V^{\mathrm{C}}$) algebry Clifforda przestrzeni kwadratowej (V,Q), to ma ją w dowolnym innym modelu $\widetilde{\mathrm{Cliff}}(V,Q)$ (o kanonicznym odwzorowaniu Clifforda $\widetilde{\jmath}_V^{\mathrm{C}}$), a to wobec przemienności diagramu

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{\mathrm{Cliff}}(V,Q) \\ V \arrow[ur, "\widetilde{\jmath}_V^{\mathrm{C}}"] \arrow[r, "\jmath_V^{\mathrm{C}}"'] & \mathrm{Cliff}(V,Q) \arrow[u, dashed, "\iota"'] \end{tikzcd} ,$$

na którym ι jest jedynym izomorfizmem modeli opisanym w Def. 2. Istotnie, diagram ten pozwala stwierdzić, że $\widetilde{\jmath}_V^{\mathrm{C}}$ jest monomorfizmem wtedy i tyko wtedy, gdy jest nim $\jmath_V^{\mathrm{C}}$. Ta konstatacja pozwoli nam sprowadzić nasze rozważania do prostego modelu wyprowadzonego w konstruktywnym dowodzie Tw. 1.

Zacznijmy od rozważenia sytuacji zwyrodniałej, w której $\mathrm{rk}\, Q = 0$, czyli jest $Q = 0$. W tym przypadku mamy model omówiony w Def. 3, tj.

$$\mathrm{Cliff}(V,0) = \bigotimes_{\mathbb{K}} V / \langle v \otimes_{\mathbb{K}} v \,|\, v \in V \rangle_{\otimes_{\mathbb{K}} V}$$

wraz z odwzorowaniem kanonicznym

$$\jmath_V^{\mathrm{C}} \,:\, V \overset{\jmath_V^{\otimes_{\mathbb{K}} 1}}{\rightarrowtail} \bigotimes_{\mathbb{K}} V \overset{\pi_{\otimes_{\mathbb{K}} V/\mathcal{J}_0}}{\twoheadrightarrow} \bigotimes_{\mathbb{K}} V / \langle v \otimes_{\mathbb{K}} v \,|\, v \in V \rangle_{\otimes_{\mathbb{K}} V} \,.$$

Niech teraz – dla pewnych $v_1, v_2 \in V$ –

$$\jmath_V^{\mathrm{C}}(v_2) = \jmath_V^{\mathrm{C}}(v_1)\,,$$

a wówczas

$$v_2 - v_1 \in \langle v \otimes_{\mathbb{K}} v \,|\, v \in V \rangle_{\otimes_{\mathbb{K}} V} \,,$$

to jednak oznacza, że tensor stopnia $\deg(v_2 - v_1) = 1$ jest kombinacją $\mathbb{K}$-liniową tensorów stopnia co najmniej 2, co wobec jednoznaczności rozkładu na składowe jednorodne w $\otimes_{\mathbb{K}} V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes_{\mathbb{K}} n}$ oznacza[2], że

$$v_2 - v_1 = 0_V\,,$$

skąd wniosek:

$$\ker \jmath_V^{\mathrm{C}} = \{0_V\}\,. \tag{6}$$

Niechaj teraz $\mathrm{rk}\, Q = \dim_{\mathbb{K}} V$, a wtedy $v \in \ker \jmath_V^{\mathrm{C}}$ implikuje

$$Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}} = \jmath_V^{\mathrm{C}}(v)^2 = 0\,,$$

czyli $v = 0_V$, zatem i tym razem zachodzi równość (6).

Pozostaje rozpatrzeć przypadek pośredni: $0 < \mathrm{rk}\, Q < \dim_{\mathbb{K}} V$, w którym możemy dokonać rozkładu Q-ortogonalnego

$$V = V_0 \textcircled{\perp}_Q V_{\neq 0}$$

[2] W przypadku $Q \neq 0$ powyższe proste rozumowanie przestaje być w równie oczywisty sposób słuszne, gdyż obecnośc członu $Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}}$ prowadzi do mieszania stopni.

na podprzestrzenie: zerową V_0 o własności $Q\restriction_{V_0} = 0$ oraz niezwyrodniałą $V_{\neq 0}$, przy czym z rozkładem tym jest stowarzyszona zupełna para komplementarnych rzutów (Q-ortogonalnych) $\pi_0, \pi_{\neq 0}$ o własności $V_{(\neq)0} = \mathrm{Image}\,\pi_{(\neq)0}$. W świetle wcześniejszych naszych rozważań odwzorowanie kanoniczne

$$\jmath^{\mathrm{C}}_{V_{\neq 0}} \ :\ V_{\neq 0} \longrightarrow \mathrm{Cliff}(V_{\neq 0}, Q_{\neq 0})\,, \qquad Q_{\neq 0} \equiv Q\restriction_{V_{\neq 0}}$$

jest monomorfizmem przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowych. Możemy go użyć do skonstruowania odwzorowania $\mathbb{K}$-liniowego

$$\varphi_{\neq 0} \coloneqq \jmath^{\mathrm{C}}_{V_{\neq 0}} \circ \pi_{\neq 0} \ :\ V \longrightarrow \mathrm{Cliff}(V_{\neq 0}, Q_{\neq 0}) \equiv C_{\neq 0}\,,$$

które spełnia warunek Clifforda (zapisany poniżej dla dowolnego $v = v_0 + v_{\neq 0} \in V_0 \textcircled{\perp}_Q V_{\neq 0} \equiv V$ oraz $e^{\mathrm{C}}_{\neq 0} \equiv \mathbf{1}_{\mathrm{Cliff}(V_{\neq 0}, Q_{\neq 0})}$)

$$\begin{aligned} \varphi_{\neq 0}(v)^2 &= \jmath^{\mathrm{C}}_{V_{\neq 0}}(v_{\neq 0})^2 = Q(v_{\neq 0}) \triangleright e^{\mathrm{C}}_{\neq 0} \equiv \Phi_Q(v_{\neq 0}, v_{\neq 0}) \triangleright e^{\mathrm{C}}_{\neq 0} = \Phi_Q(v - v_0, v - v_0) \triangleright e^{\mathrm{C}}_{\neq 0} \\ &= \Phi_Q(v, v) \triangleright e^{\mathrm{C}}_{\neq 0} \equiv Q(v) \triangleright e^{\mathrm{C}}_{\neq 0} \end{aligned}$$

i z tej racji określa (jedyny) unitalny homomorfizm $\mathbb{K}$-algebr

$$\widetilde{\varphi}_{\neq 0} \ :\ \mathrm{Cliff}(V, Q) \longrightarrow C_{\neq 0}$$

o własności

$$\widetilde{\varphi}_{\neq 0} \circ \jmath^{\mathrm{C}}_{V_{\neq 0}} = \varphi_{\neq 0}\,.$$

Ten ostatni wykorzystujemy w definicji odwzorowania $\mathbb{K}$-liniowego

$$\varphi \ :\ V \longrightarrow \bigwedge\nolimits^{\bullet} V_0 \,\widehat{\otimes}_{\mathbb{K}}\, C_{\neq 0} \ :\ v \longmapsto \pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e^{\mathrm{C}}_{\neq 0} + 1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v)\,.$$

Bez trudu sprawdzamy, że także ono spełnia warunek Clifforda (uwzględniając w rachunku stopnie jednorodnych czynników tensorowych),

$$\begin{aligned} \varphi(v)^2 &\equiv \big(\pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e^{\mathrm{C}}_{\neq 0} + 1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v)\big)^2 \\ &= \big(\pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e^{\mathrm{C}}_{\neq 0}\big) \widehat{\cdot} \big(\pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e^{\mathrm{C}}_{\neq 0} + \big(\pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e^{\mathrm{C}}_{\neq 0}\big) \widehat{\cdot} \big(1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v)\big) \\ &\quad + \big(1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v)\big) \widehat{\cdot} \big(\pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e^{\mathrm{C}}_{\neq 0}\big) + \big(1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v)\big) \widehat{\cdot} \big(1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v)\big) \\ &= (-1)^{0\cdot 1}\, \pi_0(v) \wedge \pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e^{\mathrm{C}}_{\neq 0} \cdot_{C_{\neq 0}} e^{\mathrm{C}}_{\neq 0} + (-1)^{0\cdot 0}\, \pi_0(v) \wedge 1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} e^{\mathrm{C}}_{\neq 0} \cdot_{C_{\neq 0}} \varphi_{\neq 0}(v) \\ &\quad + (-1)^{1\cdot 1}\, 1_{\mathbb{K}} \wedge \pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v) \cdot_{C_{\neq 0}} e^{\mathrm{C}}_{\neq 0} + (-1)^{1\cdot 0}\, 1_{\mathbb{K}} \wedge 1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v) \cdot_{C_{\neq 0}} \varphi_{\neq 0}(v) \\ &= 0 \otimes_{\mathbb{K}} e^{\mathrm{C}}_{\neq 0} + \pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v) - \pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v) + 1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright e^{\mathrm{C}}_{\neq 0} \\ &= Q(v) \triangleright \big(1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} e^{\mathrm{C}}_{\neq 0}\big) \equiv Q(v) \triangleright \mathbf{1}_{\bigwedge^{\bullet} V_0 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_{\neq 0}}\,. \end{aligned}$$

Istnieje zatem unitalny homomorfizm $\mathbb{K}$-algebr

$$\widetilde{\varphi} \ :\ \mathrm{Cliff}(V, Q) \longrightarrow \bigwedge\nolimits^{\bullet} V_0 \,\widehat{\otimes}_{\mathbb{K}}\, C_{\neq 0}$$

o własności

$$\widetilde{\varphi} \circ \jmath^{\mathrm{C}}_V = \varphi\,, \tag{7}$$

a ponieważ φ jest injektywny, co dokumentuje poniższe wnioskowanie:

$$\begin{aligned} v \in \ker\varphi \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \pi_0(v) = 0_V \\ \varphi_{\neq 0}(v) = 0_{C_{\neq 0}} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} v = v_{\neq 0} \\ 0_{C_{\neq 0}} = \varphi_{\neq 0}(v) \equiv \varphi_{\neq 0}(v_{\neq 0}) = \jmath^{\mathrm{C}}_{V_{\neq 0}}(v_{\neq 0}) \end{array} \right\} \\ &\Longleftrightarrow \quad v = v_{\neq 0} = 0_V\,, \end{aligned}$$

przeto także $\jmath^{\mathrm{C}}_V$ jest injekcją, oto bowiem zachodzi – na mocy Równ. (7) –

$$\ker \jmath^{\mathrm{C}}_V \subset \ker\varphi = \{0_V\}\,.$$

□

Uwaga 2. Injektywność kanonicznego odwzorowania Clifforda pozwala dokonać utożsamienia

$$j_V^{\mathrm{C}}(V) \cong V\,,$$

co też będziemy czynić w dalszej części wykładu, pisząc – konsekwentnie – relacje definiujące algebrę Clifforda w powszechnie spotykanej postaci

$$\forall_{v,w\in V}\ :\ \{v,w\} = 2\Phi_Q(v,w) \triangleright e^{\mathrm{C}}\,.$$

W dalszej części dyskusji algebr Clifforda, w szczególności zaś w ich klasyfikacji oraz w konstrukcji ich reprezentacji centralną rolę odegrają pewne ich (anty-)automorfizmy, których omówienie wymaga od nas powrotu do analizy algebry tensorowej stanowiącej podstawę przedstawionego wcześniej modelu algebry Clifforda. Wprowadzamy zatem

Definicja 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj

$$\bigotimes_{\mathbb{K}} V = V_\otimes^0 \oplus V_\otimes^1\,, \qquad V_\otimes^l := \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} V^{\otimes_{\mathbb{K}}\, 2k+l}\,, \quad l \in \{0,1\}$$

będzie naturalną $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradacją $\mathbb{K}$-algebry $\otimes_{\mathbb{K}} V$, indukującą $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradację algebry Clifforda

$$\mathrm{Cliff}(V,Q) = \mathrm{Cliff}(V,Q)^0 \oplus \mathrm{Cliff}(V,Q)^1\,. \tag{8}$$

Ponadto niech – dla ustalonego (dowolnie) $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ –

$$\widetilde{\tau}_n\ :\ V^{\otimes_{\mathbb{K}}\, n} \circlearrowleft$$

będzie (jedynym) odwzorowaniem $\mathbb{K}$-liniowym indukowanym przez odwzorowanie (wielo-)śród-$\mathbb{K}$-liniowe (w rozumieniu Def. 3.4)

$$\tau_n\ :\ V^{\times n} \longrightarrow V^{\otimes_{\mathbb{K}}\, n}\ :\ (v_1, v_2, \ldots, v_n) \longmapsto v_n \otimes_{\mathbb{K}} v_{n-1} \otimes_{\mathbb{K}} \cdots \otimes_{\mathbb{K}} v_1\,.$$

Inwolucja główna (albo inaczej **kanoniczna**) algebry Clifforda $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ to automorfizm $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradowany

$$J_V := \mathrm{id}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)^0} \oplus \big(-\mathrm{id}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)^1}\big)\,,$$

o (oczywistej) własności

$$J_V^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}\,.$$

Antyinwolucja główna (albo inaczej **kanoniczna**) algebry Clifforda $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ to antymultyplikatywny automorfizm przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej $\mathrm{Cliff}(V,Q)$

$$T_V\ :\ \mathrm{Cliff}(V,Q) \circlearrowleft$$

indukowany przez takież odwzorowanie

$$\widetilde{\tau}_V := \mathrm{id}_{\mathbb{K}} \oplus \bigoplus_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \widetilde{\tau}_n\ :\ \mathbb{K} \oplus \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V^{\otimes_{\mathbb{K}}\, n} \equiv \bigotimes_{\mathbb{K}} V \circlearrowleft\,,$$

o (oczywistej) własności

$$\widetilde{\tau}_V^2 = \mathrm{id}_{\otimes_{\mathbb{K}} V}\,,$$

który możemy traktować jako (multyplikatywny) izomorfizm $\mathbb{K}$-algebr $\otimes_{\mathbb{K}} V \xrightarrow{\cong} \big(\otimes_{\mathbb{K}} V\big)^{\mathrm{opp}}$.

Uwaga 3. Podkreślmy, że składowe powyższej definicji mają sens, oto bowiem

- ideał $\mathfrak{I}_Q$, będąc generowanym przez elementy $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-jednorodne podalgebry $V_\otimes^0$ (tj. stopnia $[0]_2$), jest ideałem $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradowanym,

$$\mathfrak{I}_Q = \big(\mathfrak{I}_Q \cap V_\otimes^0\big) \oplus \big(\mathfrak{I}_Q \cap V_\otimes^1\big) \equiv \mathfrak{I}_Q^0 \oplus \mathfrak{I}_Q^1\,,$$

  skąd też rozkład

$$\bigotimes_{\mathbb{K}} V/\mathfrak{I}_Q = \big(V_\otimes^0 \oplus V_\otimes^1\big)/\big(\mathfrak{I}_Q^0 \oplus \mathfrak{I}_Q^1\big) = V_\otimes^0/\mathfrak{I}_Q^0 \oplus V_\otimes^1/\mathfrak{I}_Q^1$$

który jest właśnie indukowaną $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradacją $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ wykorzystaną w pierwszej części definicji;

- istnienie homomorfizmów $\widetilde{\tau}_n,\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, przyjmujących na tensorach prostych postać
$$\widetilde{\tau}_n(v_1\otimes_{\mathbb{K}} v_2\otimes_{\mathbb{K}}\cdots\otimes_{\mathbb{K}} v_n)=v_n\otimes_{\mathbb{K}} v_{n-1}\otimes_{\mathbb{K}}\cdots\otimes_{\mathbb{K}} v_1\,,$$
jest zagwarantowane przez uniwersalność (wielokrotnego) iloczynu tensorowego, bez trudu sprawdzamy też tożsamość
$$\begin{aligned}\forall_{\tau_1,\tau_2\in\bigotimes_{\mathbb{K}}V}\ :\ \widetilde{\tau}_V(\tau_1\cdot_{\otimes_{\mathbb{K}}V}\tau_2)\quad&\equiv\quad\widetilde{\tau}_V(\tau_1\otimes_{\mathbb{K}}\tau_2)=\widetilde{\tau}_V(\tau_2)\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{\tau}_V(\tau_1)\\&\equiv\quad\widetilde{\tau}_V(\tau_2)\cdot_{\otimes_{\mathbb{K}}V}\widetilde{\tau}_V(\tau_1)\,,\end{aligned}$$
która dowodzi antymultyplikatywnego charakteru jawnie $\mathbb{K}$-liniowego i bijektywnego odwzorowania $\widetilde{\tau}_V$, a ponieważ ponadto
$$\widetilde{\tau}_V(\mathfrak{I}_Q)=\mathfrak{I}_Q\,,$$
co jest następstwem zachowywania generatorów ideału przez $\widetilde{\tau}_V$, przeto ten ostatni kanonicznie indukuje antyautomorfizm algebry ilorazowej $\otimes_{\mathbb{K}}V/\mathfrak{I}_Q$ wedle schematu
$$[\widetilde{\tau}_V]\ :\ \bigotimes_{\mathbb{K}}V/\mathfrak{I}_Q\ \circlearrowleft\ :\ \tau+\mathfrak{I}_Q\longmapsto\widetilde{\tau}_V(\tau)+\mathfrak{I}_Q\,.$$

Tytułem oswojenia nowowprowadzonych obiektów wysłowimy najpierw oczywiste

Stwierdzenie 6. Przyjmijmy zapis Def. 4. Podprzestrzenie $\mathbb{K}$-liniowe $\mathrm{Cliff}(V,Q)^k\subset\mathrm{Cliff}(V,Q),\ k\in\{0,1\}$ możemy przedstawić w postaci
$$\begin{aligned}\mathrm{Cliff}(V,Q)^0\quad&=\quad\mathbb{K}\oplus\big\langle v_1\cdot v_2\cdot\dots\cdot v_{2k}\,|\,v_i\in\jmath_V^{\mathrm{C}}(V)\,,\ i\in\overline{1,2k}\ \ k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\big\rangle_{\mathbb{K}}\,,\\ \mathrm{Cliff}(V,Q)^1\quad&=\quad\big\langle v_1\cdot v_2\cdot\dots\cdot v_{2k+1}\,|\,v_j\in\jmath_V^{\mathrm{C}}(V)\,,\ j\in\overline{1,2k+1}\ \ k\in\mathbb{N}\big\rangle_{\mathbb{K}}\,.\end{aligned}$$
Spełnione są przy tym relacje
$$\begin{aligned}\mathrm{Cliff}(V,Q)^0.\mathrm{Cliff}(V,Q)^0\quad&\subset\quad\mathrm{Cliff}(V,Q)^0\,,\\ \mathrm{Cliff}(V,Q)^0.\mathrm{Cliff}(V,Q)^1\quad&\subset\quad\mathrm{Cliff}(V,Q)^1\,,\\ \mathrm{Cliff}(V,Q)^1.\mathrm{Cliff}(V,Q)^0\quad&\subset\quad\mathrm{Cliff}(V,Q)^1\,,\\ \mathrm{Cliff}(V,Q)^1.\mathrm{Cliff}(V,Q)^1\quad&\subset\quad\mathrm{Cliff}(V,Q)^0\,,\end{aligned}$$
w szczególności więc $\mathrm{Cliff}(V,Q)^0$ jest podalgebrą. Inwolucja główna jest funktorialnym obrazem izometrii $P_V\ :\ V\ \circlearrowleft\ :\ v\longmapsto -v$,
$$J_V=\mathrm{Cliff}(P_V)\,,$$
i spełnia relacje
$$\mathrm{Cliff}(V,Q)^0=\ker P^+\,,\qquad\qquad\mathrm{Cliff}(V,Q)^1=\ker P^-\,,$$
$$P^\pm:=2_{\mathbb{K}}^{-1}\triangleright(\mathrm{id}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}\mp J_V)\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Trywialny. □

Przyjdzie nam z czasem odwołać się także do

Stwierdzenie 7. Przyjmijmy zapis Def. 4. Dowolna podprzestrzeń $\mathbb{K}$-liniowa $U\subset\mathrm{Cliff}(V,Q)$ zachowywana przez J_V jest podprzestrzenią $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradowaną w rozumieniu Def. 6-7.5.

<u>*Dowód:*</u> Oznaczmy
$$U^k:=U\cap\mathrm{Cliff}(V,Q)^k\,,\qquad k\in\{0,1\}\,.$$

Dowolny element $u \in U$ możemy rozłożyć, jak następuje:

$$u \equiv P^+(u) + P^-(u)\,,$$

przy czym na mocy założenia $J_V(U) \subset U$ jest $P^\pm(u) \in U$, ale też $P^+(u) \in \mathrm{Cliff}(V,Q)^0$ i $P^-(u) \in \mathrm{Cliff}(V,Q)^1$, zatem wypisany rozkład jest w istocie rozkładem prostym na składowe u z U^k. □

Pierwszym istotnym wynikiem strukturalnym, określającym względną relację między funktorem Cliff i strukturą inicjalną, jaką jest suma prosta przestrzeni kwadratowych, jest kluczowe dla przyszłych naszych rozważań klasyfikacyjnych

Twierdzenie 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\big(\big((V_\alpha, +_\alpha, \mathsf{P}_\alpha, \bullet \longmapsto 0_\alpha), \ell_\alpha\big), Q_\alpha\big)$, $\alpha \in \{1,2\}$ będą przestrzeniami kwadratowymi nad ciałem $\mathbb{K}$. Istnieje kanoniczny izomorfizm $\mathbb{K}$-algebr unitalnych z $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradacją

$$\mathrm{Cliff}(V_1 \oplus V_2, Q_1 \oplus Q_2) \cong \mathrm{Cliff}(V_1, Q_2) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \mathrm{Cliff}(V_2, Q_2)\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Wprowadźmy oznaczenia

$$C_\alpha := \mathrm{Cliff}(V_\alpha, Q_\alpha)\,, \quad \alpha \in \{1,2\} \qquad\qquad C_\oplus := \mathrm{Cliff}(V_1 \oplus V_2, Q_1 \oplus Q_2)\,.$$

Zauważmy, że wobec funktorialności Cliff izometryczne monomorfizmy

$$\jmath_{V_\alpha} \;:\; V_\alpha \rightarrowtail V_1 \oplus V_2\,, \quad \alpha \in \{1,2\}$$

indukują unitalne homomorfizmy $\mathbb{K}$-algebr

$$\widetilde{\jmath}_\alpha \equiv \mathrm{Cliff}(\jmath_{V_\alpha}) \;:\; C_\alpha \longrightarrow C_\oplus\,,$$

co pozwala nam zdefiniować odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe

$$\chi := m_{C_\oplus} \circ \big(\widetilde{\jmath}_1 \otimes \widetilde{\jmath}_2\big) \;:\; C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2 \longrightarrow C_\oplus\,. \tag{9}$$

Sprawdzamy, że χ jest unitalnym homomorfizmem $\mathbb{K}$-algebr. W tym celu ustalmy (dowolnie) liczby $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \overline{\mathbb{N}}$ i rozważmy elementy jednorodne $\tau^{(1)}_\alpha := v^\alpha_1.v^\alpha_2.\cdots.v^\alpha_{p_\alpha} \in C_1$, $v^\alpha_k \in \jmath^{\mathrm{C}}_{V_1}(V_1)$, $k \in \overline{1,p_\alpha}$, $\alpha \in \{1,2\}$ oraz $\tau^{(2)}_\beta := w^\beta_1.w^\beta_2.\cdots.w^\beta_{q_\beta} \in C_2$, $w^\beta_l \in \jmath^{\mathrm{C}}_{V_2}(V_2)$, $l \in \overline{1,q_\beta}$, $\beta \in \{1,2\}$, z których tworzymy tensory proste

$$\tau^{12}_1 := \tau^{(1)}_1 \otimes_{\mathbb{K}} \tau^{(2)}_1\,, \qquad\qquad \tau^{12}_2 := \tau^{(1)}_2 \otimes_{\mathbb{K}} \tau^{(2)}_2\,.$$

Możemy następnie zapisać równość (stosując ten sam symbol . dla oznaczenia mnożenia w każdej z trzech występujących tu algebr Clifforda oraz utożsamiając $\jmath^{\mathrm{C}}_{V_1 \oplus V_2}(V_1 \oplus V_2)$ z $V_1 \oplus V_2$)

$$\begin{aligned}
\chi\big(\tau^{12}_1 \widehat{\cdot} \tau^{12}_2\big) &= (-1)^{q_1 \cdot p_2}\, \chi\big(\tau^{(1)}_1.\tau^{(1)}_2 \otimes_{\mathbb{K}} \tau^{(2)}_1.\tau^{(2)}_2\big) \\
&= (-1)^{q_1 \cdot p_2}\, \widetilde{\jmath}_1\big(\tau^{(1)}_1.\tau^{(1)}_2\big).\widetilde{\jmath}_2\big(\tau^{(2)}_1.\tau^{(2)}_2\big) \\
&= (-1)^{q_1 \cdot p_2}\, \widetilde{\jmath}_1\big(\tau^{(1)}_1\big).\widetilde{\jmath}_1\big(\tau^{(1)}_2\big).\widetilde{\jmath}_2\big(\tau^{(2)}_1\big).\widetilde{\jmath}_2\big(\tau^{(2)}_2\big) \\
&= (-1)^{q_1 \cdot p_2}\, \jmath_{V_1}(v^1_1).\jmath_{V_1}(v^1_2).\cdots.\jmath_{V_1}(v^1_{p_1}).\jmath_{V_1}(v^2_1).\jmath_{V_1}(v^2_2).\cdots.\jmath_{V_1}(v^2_{p_2}) \\
&\quad .\jmath_{V_2}(w^1_1).\jmath_{V_2}(w^1_2).\cdots.\jmath_{V_2}(w^1_{q_1}).\jmath_{V_2}(w^2_1).\jmath_{V_2}(w^2_2).\cdots.\jmath_{V_2}(w^2_{q_2})\,,
\end{aligned}$$

która wobec tożsamości

$$\jmath_{V_1}(v^2_k).\jmath_{V_2}(w^1_l) + \jmath_{V_2}(w^1_l).\jmath_{V_1}(v^2_k) = (v^2_k \oplus 0_2).(0_1 \oplus w^1_l) + (0_1 \oplus w^1_l).(v^2_k \oplus 0_2)$$

$$= 2\Phi_{Q_1 \oplus Q_2}(v^2_k \oplus 0_2, 0_1 \oplus w^1_l) \triangleright \mathbf{1}_{C_\oplus} \equiv 2\big(\Phi_{Q_1}(v^2_k, 0_1) + \Phi_{Q_2}(0_2, w^1_l)\big) \triangleright \mathbf{1}_{C_\oplus} = 0_{C_\oplus}$$

przepisuje się w oczekiwanej postaci

$$\begin{aligned}
\chi\big(\tau^{12}_1 \widehat{\cdot} \tau^{12}_2\big) &= (-1)^{2q_1 \cdot p_2}\, \jmath_{V_1}(v^1_1).\jmath_{V_1}(v^1_2).\cdots.\jmath_{V_1}(v^1_{p_1}).\jmath_{V_2}(w^1_1).\jmath_{V_2}(w^1_2).\cdots.\jmath_{V_2}(w^1_{q_1}) \\
&\quad .\jmath_{V_1}(v^2_1).\jmath_{V_1}(v^2_2).\cdots.\jmath_{V_1}(v^2_{p_2}).\jmath_{V_2}(w^2_1).\jmath_{V_2}(w^2_2).\cdots.\jmath_{V_2}(w^2_{q_2})
\end{aligned}$$

$$= \widetilde{\jmath}_1\big(\tau_1^{(1)}\big).\widetilde{\jmath}_2\big(\tau_1^{(2)}\big).\widetilde{\jmath}_1\big(\tau_2^{(1)}\big).\widetilde{\jmath}_2\big(\tau_2^{(2)}\big) \equiv \chi\big(\tau_1^{12}\big).\chi\big(\tau_2^{12}\big)\,.$$

W świetle (wielo-)$\mathbb{K}$-liniowości wszystkich napotkanych powyżej odwzorowań i operacji nasze rozumowanie uogólnia się na przypadek (super)iloczynu dowolnych elementów skośnego iloczynu tensorowego algebr C_1 i C_2. Mamy też równość

$$\chi(\mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}) = m_{C_\oplus}(\mathbf{1}_{C_\oplus} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_\oplus}) = \mathbf{1}_{C_\oplus}\,,$$

pozostaje zatem pokazać, że χ jest izomorfizmem, co uczynimy konstruując homomorfizm doń odwrotny. Rozważmy odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe

$$\eta \;:\; V_1 \oplus V_2 \longrightarrow C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2 \;:\; (v,w) \longmapsto v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2} + \mathbf{1}_{C_2} \otimes_{\mathbb{K}} w\,.$$

Spełnia ono warunek Clifforda,

$$\begin{aligned}
\eta(v,w)^2 &= (v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2} + \mathbf{1}_{C_2} \otimes_{\mathbb{K}} w)\widehat{\cdot}(v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2} + \mathbf{1}_{C_2} \otimes_{\mathbb{K}} w) = (-1)^{0\cdot 1}\, v^2 \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}^2 \\
&\quad +(-1)^{0\cdot 0}\, v.\mathbf{1}_{C_2} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}.w + (-1)^{1\cdot 1}\, \mathbf{1}_{C_2}.v \otimes_{\mathbb{K}} w.\mathbf{1}_{C_2} + (-1)^{1\cdot 0}\, \mathbf{1}_{C_2}^2 \otimes_{\mathbb{K}} w^2 \\
&= Q_1(v) \triangleright \mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2} + v \otimes_{\mathbb{K}} w - v \otimes_{\mathbb{K}} w + \mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} Q_2(w) \triangleright \mathbf{1}_{C_2} \\
&= \big(Q_1(v) + Q_2(w)\big) \triangleright (\mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}) \equiv (Q_1 \oplus Q_2)(v,w) \triangleright \mathbf{1}_{C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2}\,,
\end{aligned}$$

a zatem rozszerza się do unitalnego homomorfizmu $\mathbb{K}$-algebr

$$\widetilde{\eta} \;:\; C_\oplus \longrightarrow C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2\,,$$

przy czym – dla dowolnego $v \in V_1$ –

$$\widetilde{\eta} \circ \chi(v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}) = \widetilde{\eta}\big(\widetilde{\jmath}_1(v).\widetilde{\jmath}_2(\mathbf{1}_{C_2})\big) = \widetilde{\eta}\big(\jmath_1(v).\mathbf{1}_{C_\oplus}\big) = \widetilde{\eta}(v, 0_2) = v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}$$

i – dla dowolnego $w \in V_2$ –

$$\widetilde{\eta} \circ \chi(\mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} w) = \widetilde{\eta}\big(\widetilde{\jmath}_1(\mathbf{1}_{C_1}).\widetilde{\jmath}_2(w)\big) = \widetilde{\eta}\big(\mathbf{1}_{C_\oplus}.\jmath_2(w)\big) = \widetilde{\eta}(0_1, w) = \mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} w\,,$$

a nadto

$$\widetilde{\eta} \circ \chi(\mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}) = \widetilde{\eta}\big(\widetilde{\jmath}_1(\mathbf{1}_{C_1}).\widetilde{\jmath}_2(\mathbf{1}_{C_2})\big) = \widetilde{\eta}\big(\mathbf{1}_{C_\oplus}^2\big) = \mathbf{1}_{C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2} \equiv \mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}\,,$$

co w połączeniu z obserwacją (rozumianą jako stwierdzenie dotyczące $\mathbb{K}$-algebr)

$$C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2 = \langle v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}, \mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} w, \mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2} \mid (v,w) \in V_1 \times V_2 \rangle_{\mathbb{K}}\,,$$

a wobec homomorficznego charakteru χ i $\widetilde{\eta}$, daje nam pożądany wniosek:

$$\widetilde{\eta} \circ \chi = \mathrm{id}_{C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2}\,.$$

Z drugiej strony otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\chi \circ \widetilde{\eta}(v,w) &= \chi(v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2} + \mathbf{1}_{C_2} \otimes_{\mathbb{K}} w) = \chi(v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}) + \chi(\mathbf{1}_{C_2} \otimes_{\mathbb{K}} w) \\
&= \jmath_1(v).\mathbf{1}_{C_\oplus} + \mathbf{1}_{C_\oplus}.\jmath_2(w) = \jmath_1(v) + \jmath_2(w) = (v, 0_2) + (0_1, w) = (v,w)
\end{aligned}$$

oraz

$$\chi \circ \widetilde{\eta}(\mathbf{1}_{C_\oplus}) = \chi(\mathbf{1}_{C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2}) = \mathbf{1}_{C_\oplus}\,,$$

co wobec tożsamości (rozumianej jako równość $\mathbb{K}$-algebr)

$$C_\oplus = \big\langle (v,w), \mathbf{1}_{C_\oplus} \mid (v,w) \in V_1 \times V_2 \big\rangle_{\mathbb{K}}$$

daje nam relację komplementarną wobec poprzedniej,

$$\chi \circ \widetilde{\eta} = \mathrm{id}_{C_\oplus}\,.$$

$\square$

Jako proste, a przydatne corollarium powyższego znajdujemy

Stwierdzenie 8. Przyjmijmy zapis Tw. 2. Obrazem względem funktora Cliff injektywnej izometrii przestrzeni kwadratowych o niezwyrodniałej dziedzinie jest (unitalny) monomorfizm ich algebr Clifforda. Takimż obrazem surjektywnej izometrii przestrzeni kwadratowych jest (unitalny) epimorfizm ich algebr Clifforda. Wreszcie też obrazem bijektywnej izometrii jest (unitalny) izomorfizm ich algebr Clifforda.

Dowód: Ostatnia część tezy powyższego stwierdzenia, dotycząca obrazu izomorfizmu przestrzeni kwadratowych, jest bezpośrednią konsekwencją funktorialnej natury Cliff, która implikuje, że funktorialny obraz odwrotności tegoż izomorfizmu jest odwrotnością obrazu samego izomorfizmu. Zajmiemy się więc dwiema pierwszymi składowymi tej tezy. Niechaj $\big(((V_\alpha, +_\alpha, \mathsf{P}_\alpha, \bullet \longmapsto 0_\alpha), \ell_\alpha\big), Q_\alpha\big)$, $\alpha \in \{1,2\}$ będą przestrzeniami kwadratowymi nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ będzie izometrycznym monomorfizmem. Ten określa kanonicznie (na gruncie Pierwszego twierdzenia o izomorfizmie modułów nad pierścieniem) izometryczny izomorfizm

$$\lambda_\varphi \ : \ V_1 \xrightarrow{\cong} \mathrm{Image}\,\varphi\,,$$

jeśli zatem napiszemy – przy założeniu niezwyrodnienia Q_1, które implikuje niezwyrodnienie $\mathrm{Image}\,\varphi$ jako (izometrycznie) izomorficznego obrazu jej dziedziny, a w odwołaniu do twierdzenia o istnieniu dopełnienia ortogonalnego dowolnej (skończenie wymiarowej) niezwyrodniałej podprzestrzeni przestrzeni kwadratowej –

$$V_2 = \mathrm{Image}\,\varphi \textcircled{$\perp$}_{Q_2} \mathrm{Image}\,\varphi^{\perp_{Q_2}}\,,$$

to na podstawie Tw. 3 dostaniemy diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cliff}(V_1,Q_1) \arrow[r, "\mathrm{Cliff}(\varphi)"] \arrow[d, "\mathrm{Cliff}(\lambda_\varphi)"'] & \mathrm{Cliff}(V_2,Q_2) \equiv \mathrm{Cliff}\big(\mathrm{Image}\,\varphi \textcircled{$\perp$}_{Q_2} \mathrm{Image}\,\varphi^{\perp_{Q_2}}, Q_2\big) \\
\mathrm{Cliff}(\mathrm{Image}\,\varphi, Q_2{\restriction}_{\mathrm{Image}\,\varphi}) \arrow[r, tail, "\iota_1"'] & \mathrm{Cliff}(\mathrm{Image}\,\varphi, Q_2{\restriction}_{\mathrm{Image}\,\varphi}) \hat{\otimes}_{\mathbb{K}} \mathrm{Cliff}\big(\mathrm{Image}\,\varphi^{\perp_{Q_2}}, Q_2{\restriction}_{\mathrm{Image}\,\varphi^{\perp_{Q_2}}}\big) \arrow[u, "\chi"']
\end{tikzcd},$$

w którym $\mathrm{Cliff}(\lambda_\varphi)$ jest izomorfizmem na podstawie obronionej wcześniej ostatniej składowej tezy stwierdzenia, ι_1 zaś jest monomorfizmem

$$\begin{aligned}
\iota_1 \quad : \quad & \mathrm{Cliff}(\mathrm{Image}\,\varphi, Q_2{\restriction}_{\mathrm{Image}\,\varphi}) \longrightarrow \mathrm{Cliff}(\mathrm{Image}\,\varphi, Q_2{\restriction}_{\mathrm{Image}\,\varphi}) \hat{\otimes}_{\mathbb{K}} \mathrm{Cliff}\big(\mathrm{Image}\,\varphi^{\perp_{Q_2}}, Q_2{\restriction}_{\mathrm{Image}\,\varphi^{\perp_{Q_2}}}\big) \\
: \quad & \gamma \longmapsto \gamma \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{\mathrm{Cliff}(\mathrm{Image}\,\varphi^{\perp_{Q_2}}, Q_2{\restriction}_{\mathrm{Image}\,\varphi^{\perp_{Q_2}}})}\,.
\end{aligned}$$

Przemienność diagramu sprawdzamy na generatorach $\mathrm{Cliff}(V_1,Q_1)$:

$$\begin{aligned}
\chi \circ \iota_1 \circ \mathrm{Cliff}(\lambda_\varphi)(\mathbf{1}_{C_1}) \quad &= \quad \mathbf{1}_{C_2} = \mathrm{Cliff}(\varphi)(\mathbf{1}_{C_1})\,, \\
\chi \circ \iota_1 \circ \mathrm{Cliff}(\lambda_\varphi)\big(\jmath^{\mathrm{C}}_{V_1}(v)\big) \quad &= \quad \chi \circ \iota_1 \circ \jmath^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Image}\,\varphi}\big(\varphi(v)\big) = \chi\big(\jmath^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Image}\,\varphi}\big(\varphi(v)\big) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{\mathrm{Cliff}(\mathrm{Image}\,\varphi^{\perp_{Q_2}}, Q_2{\restriction}_{\mathrm{Image}\,\varphi^{\perp_{Q_2}}})}\big) \\
&= \quad \tilde{\jmath}_1 \circ \jmath^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Image}\,\varphi} \circ \varphi(v).\mathbf{1}_{C_2} \equiv \mathrm{Cliff}(\jmath_{\mathrm{Image}\,\varphi}) \circ \jmath^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Image}\,\varphi} \circ \varphi(v) \\
&= \quad \jmath^{\mathrm{C}}_{V_2} \circ \jmath_{\mathrm{Image}\,\varphi} \circ \varphi(v) \equiv \mathrm{Cliff}(\varphi) \circ \jmath^{\mathrm{C}}_{V_1}(v)\,,
\end{aligned}$$

przy czym pierwsza tożsamość wynika stąd, że wszystkie występujące w niej odwzorowania są unitalnymi homomorfizmami $\mathbb{K}$-algebr. Ostatecznie otrzymujemy zatem przedstawienie

$$\mathrm{Cliff}(\varphi) = \chi \circ \iota_1 \circ \mathrm{Cliff}(\lambda_\varphi)$$

rozpatrywanego homomorfizmu $\mathrm{Cliff}(\varphi)$ w postaci złożenia monomorfizmów.

Na koniec zajmiemy się przypadkiem izometrii surjektywnej, którą będziemy oznaczać dotychczasowym symbolem φ. Zauważmy, że obraz względem $\mathrm{Cliff}(\varphi)$ układu generującego $\mathrm{Cliff}(V_1,Q_1)$ (jako $\mathbb{K}$-algebrę) to

$$\{\mathbf{1}_{C_2}\} \cup \jmath^{\mathrm{C}}_{V_2}(\mathrm{Image}\,\varphi) \equiv \{\mathbf{1}_{C_2}\} \cup \jmath^{\mathrm{C}}_{V_2}(V_2)$$

(wszak φ jest surjekcją), czyli układ generujący $\mathrm{Cliff}(V_2, Q_2)$, skoro jednak $\mathrm{Cliff}(\varphi)$ jest unitalnym homomorfizmem $\mathbb{K}$-algebr, to zachodzi

$$\begin{aligned} \mathrm{Cliff}(\varphi)(C_1) &\equiv \mathrm{Cliff}(\varphi)\big(\langle \mathbf{1}_{C_1}, v \,|\, v \in V_1 \rangle_{\mathbb{K}}\big) = \langle \mathrm{Cliff}(\varphi)(\mathbf{1}_{C_1}), \mathrm{Cliff}(\varphi)(v) \,|\, v \in V_1 \rangle_{\mathbb{K}} \\ &\equiv \langle \mathbf{1}_{C_2}, \varphi(v) \,|\, v \in V_1 \rangle_{\mathbb{K}} = \langle \mathbf{1}_{C_2}, w \,|\, w \in V_2 \rangle_{\mathbb{K}} \equiv C_2 \,. \end{aligned}$$

□

Na następnym wykładzie będziemy kontynuować nasze badania anatomii algebr Clifforda...

Dodatek A. Dodatkowe własności sumy prostej

Stwierdzenie 9. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj G będzie dowolnym R-modułem lewostronnym. Homomorfizmy

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(\jmath, G) &: \mathrm{Hom}_R\Big(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda, G\Big) \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Hom}_R(G_\lambda, G) \;:\; \chi \longmapsto \chi \circ \jmath \,, \\ \chi \circ \jmath &: \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Hom}_R(G_\lambda, G) \;:\; \lambda \longmapsto \chi \circ \jmath_\lambda \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(G, \mathrm{pr}) &: \mathrm{Hom}_R\Big(G, \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda\Big) \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Hom}_R(G, G_\lambda) \;:\; \chi \longmapsto \mathrm{pr} \circ \chi \,, \\ \mathrm{pr} \circ \chi &: \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Hom}_R(G, G_\lambda) \;:\; \lambda \longmapsto \mathrm{pr}_\lambda \circ \chi \,, \end{aligned}$$

indukowane – odpowiednio – przez rzuty kanoniczne na moduły składowe i ich włożenia kanoniczne, są izomorfizmami grup przemiennych. Określamy je mianem **izomorfizmów kanonicznych**.

Dowód: O istnieniu homomorfizmów odwrotnych do wypisanych przesądzają definicje odnośnych struktur uniwersalnych. I tak, np., rodzinie $\{\chi^{(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$ odwzorowań R-liniowych $\chi^{(\lambda)} : G_\lambda \longrightarrow G$ przypisane jest jedyne odwzorowanie R-liniowe $\chi : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \longrightarrow G$ o własności $\chi \circ \jmath_\lambda = \chi^{(\lambda)}$, któremu homomorfizm $\mathrm{Hom}_R(\jmath, G)$ przyporządkowuje na powrót wyjściową rodzinę odwzorowań. □

Corollarium 1. Przyjmijmy zapis Stw. 9 i niechaj $\{G_{A\,\lambda_A}\}_{\lambda_A \in \Lambda_A}$, $A \in \{1,2\}$ będą dwiema rodzinami R-modułów o sumach prostych, odpowiednio, $G_{A\,\oplus} := \bigoplus_{\lambda_A \in \Lambda_A} G_{A\,\lambda_A}$. Odwzorowanie

$$\begin{aligned} \mathscr{M} &: \mathrm{Hom}_R(G_{1\,\oplus}, G_{2\,\oplus}) \longrightarrow \prod_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1} \mathrm{Hom}_R(G_{1\,\lambda_1}, G_{2\,\lambda_2}) \\ &: \chi \longmapsto \mathrm{pr} \circ \chi \circ \jmath \,, \\[2em] \mathrm{pr} \circ \chi \circ \jmath &: \Lambda_2 \times \Lambda_1 \longrightarrow \bigcup_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1} \mathrm{Hom}_R(G_{1\,\lambda_1}, G_{2\,\lambda_2}) \\ &: (\lambda_2, \lambda_1) \longmapsto \mathrm{pr}_{\lambda_2} \circ \chi \circ \jmath_{\lambda_1} \end{aligned}$$

jest monomorfizmem grup przemiennych. Ilekroć zbiór indeksów Λ_2 jest skończony, $\mathscr{M}$ jest izomorfizmem.

Dowód: Wprost z konstrukcji sumy prostej modułów wynika, że $G_{2\,\oplus} \subset \prod_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\,\lambda_2}$, a zatem każde odwzorowanie R-liniowe $\chi : G \longrightarrow G_{2\,\oplus}$ jest zarazem elementem $\mathrm{Hom}_R(G, \prod_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\,\lambda_2})$. Przy tym zawieranie przechodzi w równość dla skończonego zbioru indeksów. Teza jest więc następstwem Stw. 9. □

Dodatek B. Dodatkowe własności iloczynu tensorowego

Twierdzenie 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $G_1 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R_1}$, $G_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{(R_1, R_2^{\rm opp})}$, $G_3 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R_2}$. Istnieje kanoniczny homomorfizm grup przemiennych

$$\varepsilon \;:\; \mathrm{Hom}_{R_1}\big(G_1, G_2\big) \otimes_{R_2} G_3 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R_1}\big(G_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3\big)\,,$$

który na tensorach prostych przyjmuje postać

$$\forall_{(\chi, g_3, g_1) \in \mathrm{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \times G_3 \times G_1} \;:\; \varepsilon\big(\chi \otimes_{R_2} g_3\big)\big(g_1\big) = \chi\big(g_1\big) \otimes_{R_2} g_3\,.$$

Jeśli moduł G_3 jest wolny, to homomorfizm ten jest monomorfizmem. Jeżeli zaś moduł G_1 lub moduł G_3 jest wolny i skończenie generowany, to homomorfizm ten jest izomorfizmem, co implikuje – w szczególności – istnienie, w tym przypadku i dla $R_1 = R_2 =: R$, kanonicznego izomorfizmu

$$G_1^* \otimes_R G_3 \cong \mathrm{Hom}_R\big(G_1, G_3\big)\,, \tag{10}$$

w tym także – dla $G_1 = G_3 =: G$ –

$$\theta_G \equiv \varepsilon \;:\; G^* \otimes_R G \xrightarrow{\cong} \mathrm{End}_R(G, G)\,. \tag{11}$$

<u>*Dowód:*</u> Zauważmy przede wszystkim, że teza dowodzonego twierdzenia ma sens formalny w świetle Stw. 3.5. Z kolei istnienie homomorfizmu ε jest konsekwencją oczywistej śród-R_2-liniowości odwzorowania

$$\begin{aligned} \varphi \quad &: \quad \mathrm{Hom}_{R_1}\big(G_1, G_2\big) \times G_3 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R_1}\big(G_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3\big) \\ &: \quad \big(\chi, g_3\big) \longmapsto \chi(\cdot) \otimes_{R_2} g_3\,. \end{aligned}$$

Dowód zaczniemy od rozważenia przypadku, kiedy G_3 ma bazę $\{g_\lambda^{(3)}\}_{\lambda \in \Lambda}$. W świetle Stw. 3.9 dowolny tensor z dziedziny ε możemy wówczas przedstawić w postaci (danej jednoznacznie)

$$\tau = \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi^\lambda \otimes_{R_2} g_\lambda^{(3)}\,, \qquad \chi^\lambda \in \mathrm{Hom}_{R_1}\big(G_1, G_2\big)\,.$$

Niech $\varepsilon(\tau) = 0$, albo równoważnie

$$\forall_{g_1 \in G_1} \;:\; 0_{G_2 \otimes_{R_2} G_3} = \varepsilon(\tau)\big(g_1\big) \equiv \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi^\lambda\big(g_1\big) \otimes_{R_2} g_\lambda^{(3)}\,.$$

Przywoławszy tezę Stw. 3.9 raz jeszcze, konstatujemy, iż $0_{G_2 \otimes_{R_2} G_3}$ ma jednoznaczny rozkład wypisanej postaci, więc koniecznie

$$\forall_{g_1 \in G_1}\ \forall_{\lambda \in \Lambda} \;:\; \chi^\lambda\big(g_1\big) = 0_{(2)}\,,$$

a stąd

$$\forall_{\lambda \in \Lambda} \;:\; \chi^\lambda = 0\,.$$

Stwierdzamy zatem na koniec, że $\tau = 0$, co dowodzi injektywności ε w rozpatrywanym przypadku.

Niech teraz dodatkowo $N := |\Lambda| < \infty$. Na mocy Tw. 3.5 oraz Stw. 3.6 (i wcześniejszych naszych rozważań, w tym Stw. 3.4) wnioskujemy o istnieniu (niekanonicznych) izomorfizmów grup przemiennych:

$$\begin{aligned} \iota_1 \;:\; \mathrm{Hom}_{R_1}\big(G_1, G_2\big) \otimes_{R_2} G_3 \quad &\cong \quad \mathrm{Hom}_{R_1}\big(G_1, G_2\big) \otimes_{R_2} \bigoplus_{n=1}^N R_2 \\ &\cong \quad \bigoplus_{n=1}^N \big(\mathrm{Hom}_{R_1}\big(G_1, G_2\big) \otimes_{R_2} R_2\big) \\ &\cong \quad \bigoplus_{n=1}^N \mathrm{Hom}_{R_1}\big(G_1, G_2\big) \end{aligned}$$

oraz

$$\iota_2 \;:\; \mathrm{Hom}_{R_1}\big(G_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3\big) \quad \cong \quad \mathrm{Hom}_{R_1}\big(G_1, G_2 \otimes_{R_2} \bigoplus_{n=1}^N R_2\big)$$

$$\begin{aligned}
&\cong \mathrm{Hom}_{R_1}\big(G_1, \bigoplus_{n=1}^{N} (G_2 \otimes_{R_2} R_2)\big) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{R_1}\big(G_1, \bigoplus_{n=1}^{N} G_2\big) \\
&\cong \bigoplus_{n=1}^{N} \mathrm{Hom}_{R_1}\big(G_1, G_2\big)\,,
\end{aligned}$$

przy czym w ostatnim przejściu wykorzystaliśmy Cor. 1. Obłożywszy injektywny homomorfizm ε z obu stron stosownymi izomorfizmami, otrzymujemy nowy monomorfizm: $\iota_2 \circ \varepsilon \circ \iota_1^{-1}$, którego strukturę możemy bez trudu zanalizować wobec tożsamości jego dziedziny i przeciwdziedziny. Tym sposobem bez trudu przekonujemy się, że w obrazie rzeczonego złożenia monomorfizm ε jawi się odwzorowaniem identycznościowym (w przyjętej notacji $\iota_2 \circ \varepsilon \circ \iota_1^{-1}$ przeprowadza na siebie wektor odwzorowań R_1-liniowych $(\chi^1, \chi^2, \ldots, \chi^N)$, gdzie przyjęliśmy dla ustalenia uwagi, że $\Lambda \equiv \overline{1,N}$), przeto i sam ε jest nieodzownie izomorfizmem.

Zajmiemy się wreszcie przypadkiem, kiedy to G_1 jest modułem o skończonej bazie $\{g_k^{(1)}\}_{k\in\overline{1,N}}$. Dowolny element $\chi \in \mathrm{Hom}_{R_1}\big(G_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3\big)$ jest teraz jednoznacznie określony przez wynik ewaluacji na owej bazie – niech to będzie (w notacji Równ. (3.7))

$$\chi(g_k^{(1)}) = \sum_{(g,h)\in G_2\times G_3} \nu_k(g,h) \triangleright (g \otimes_{R_2} h)\,, \quad k \in \overline{1,N}\,. \tag{12}$$

Zdefiniujmy odwzorowania $\chi_{(k,g)} \in \mathrm{Hom}_{R_1}\big(G_1, G_2\big)$ indeksowane elementami zbioru $\overline{1,N} \times G_2 \ni (k,g)$ i będące jedynymi R_1-liniowymi rozszerzeniami przyporządkowań

$$\forall_{l\in\overline{1,N}}\ :\ \chi_{(k,g)}(g_l^{(1)}) := \delta^{\mathbb{Z}}_{l,k} \triangleright g\,.$$

Oznaczmy ponadto, dla dowolnego *ustalonego* rozkładu tensora $\chi(g_k^{(1)})$ (pamiętajmy, że tensory proste w ogólności nie stanowią układu bazowego, a jedynie układ generujący)

$$\forall_{(k,g,h)\in\overline{1,N}\times G_2\times G_3}\ :\ \nu\big(\chi_{(k,g)}, h\big) := \nu_k(g,h)\,.$$

Bez trudu przekonujemy się, że obrazem tensora

$$\gamma(\chi) := \sum_{(k,g,h)\in\overline{1,N}\times G_2\times G_3} \nu\big(\chi_{(k,g)}, h\big) \triangleright \big(\chi_{(k,g)} \otimes_{R_2} h\big) \tag{13}$$

(suma w jego definicji jest skończona w konsekwencji skończoności N oraz nośnika ν_k) względem homomorfizmu ε jest homomorfizm χ określony w Równ. (12), oto bowiem

$$\begin{aligned}
\varepsilon\big(\gamma(\chi)\big)(g_k^{(1)}) &:= \sum_{(l,g,h)\in\overline{1,N}\times G_2\times G_3} \nu\big(\chi_{(l,g)}, h\big) \triangleright \big(\chi_{(l,g)}(g_k^{(1)}) \otimes_{R_2} h\big) \\
&= \sum_{(l,g,h)\in\overline{1,N}\times G_2\times G_3} \nu\big(\chi_{(l,g)}, h\big) \triangleright \big(\delta^{\mathbb{Z}}_{l,k} \triangleright g \otimes_{R_2} h\big) \\
&= \sum_{(g,h)\in G_2\times G_3} \nu\big(\chi_{(k,g)}, h\big) \triangleright (g \otimes_{R_2} h) \equiv \chi(g_k^{(1)})\,.
\end{aligned}$$

Jest przeto ε epimorfizmem, a ponieważ istnieją (niekanoniczne) izomorfizmy:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{R_1}\big(G_1, G_2\big) \otimes_{R_2} G_3 &\cong \mathrm{Hom}_{R_1}\big(\bigoplus_{n=1}^{N} R_1, G_2\big) \otimes_{R_2} G_3 \\
&\cong \bigoplus_{n=1}^{N} \mathrm{Hom}_{R_1}\big(R_1, G_2\big) \otimes_{R_2} G_3 \\
&\cong \bigoplus_{n=1}^{N} G_2 \otimes_{R_2} G_3
\end{aligned}$$

oraz

$$\mathrm{Hom}_{R_1}\big(G_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3\big) \cong \mathrm{Hom}_{R_1}\big(\bigoplus_{n=1}^{N} R_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3\big)$$

$$\cong \bigoplus_{n=1}^{N} \mathrm{Hom}_{R_1}\big(R_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3\big)$$
$$\cong \bigoplus_{n=1}^{N} G_2 \otimes_{R_2} G_3\,,$$

więc też nieodzownie ε ma trywialne jądro, czyli jest izomorfizmem. □

Uwaga 4. W szczególnym przypadku $R_1 = R_2 =: R$, a dla $G_2 = R$ i G_1 wolnego odwrotność kanonicznego izomorfizmu R-modułów z tezy powyższego twierdzenia daje się wypisać wprost w zwartej postaci

$$\varepsilon^{-1}\ :\ \mathrm{Hom}_R\big(G_1, G_3\big) \xrightarrow{\cong} G_1^* \otimes_R G_3\ :\ \chi \longmapsto \sum_{k=1}^{N} \gamma_k^{(1)} \otimes_R \chi\big(g_k^{(1)}\big)$$

przy użyciu bazy $\{\gamma_k^{(1)}\}_{k\in\overline{1,N}}$ modułu G_1^* dwoistej wzgl. $\{g_k^{(1)}\}_{k\in\overline{1,N}}$, por.: Równ. (13). Jeśli ponadto $G_1 = G_3 \equiv G$, to izomorfizm θ_G dostarcza nam powszechnie spotykanej reprezentacji endomorfizmu identycznościowego (w konwencji $\gamma_k^{(1)} \equiv e_k^*,\ g_k^{(1)} \equiv e_k$)

$$\theta_G^{-1}(\mathrm{id}_G) = \sum_{k=1}^{N} e_k^* \otimes_R e_k\,.$$

Powyższe rozważania prowadzą wprost do jakże użytecznej

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Tw. 4, zakładając w szczególności, że pierścień R jest przemienny, R-moduł G zaś – wolny i skończenie generowany. Wówczas kanoniczny homomorfizm R-modułów

$$\tau\ :\ G^* \otimes_R G \longrightarrow R$$

o własności

$$\forall_{(\varphi,g)\in G^*\times G}\ :\ \tau(\varphi \otimes_R g) = \varphi(g)$$

określa **kanoniczną formę R-liniową**

$$\mathrm{tr}_G := \tau \circ \theta_G^{-1}\ :\ \mathrm{End}_R(G) \longrightarrow R$$

zwaną **śladem endomorfizmu po module** G.

Stwierdzenie 10. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i załóżmy, że R jest pierścieniem przemiennym. Istnieje kanoniczny homomorfizm R-modułów

$$\imath\ :\ \mathrm{Hom}_R\big(G_1, H_1\big) \otimes_R \mathrm{Hom}_R\big(G_2, H_2\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\big(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2\big)$$

o własności

$$\imath(\chi_1 \otimes_R \chi_2) = \chi_1 \otimes \chi_2\,.$$

Ilekroć moduły w którejś z par $(G_1, H_1), (G_2, H_2)$ lub (G_1, G_2) są wolne i skończenie generowane, homomorfizm ten jest izomorfizmem. W szczególności więc dla $H_1 = R = H_2$ stwierdzamy, że jeżeli jeden z modułów $G_\alpha,\ \alpha \in \{1, 2\}$ jest wolny i skończenie generowany, istnieje kanoniczny izomorfizm R-modułów

$$\big(G_1 \otimes_R G_2\big)^* \cong G_1^* \otimes_R G_2^*\,. \tag{14}$$

<u>*Dowód:*</u> Dowód pierwszej części stwierdzenia stanowi prostą wariację na temat (dowodu) Stw. 3.3. Przejdziemy więc od razu do dowodu części drugiej, przy czym wobec symetrii (jakościowej niezmienniczości) zagadnienia względem transpozycji indeksów $(1, 2) \longmapsto (2, 1)$ wystarczy rozpatrzeć niezależnie przypadek, w którym moduły pary (G_1, H_1) są wolne i skończenie generowane, oraz ten, w którym moduły pary (G_1, G_2) mają tę cechę. Zaczniemy od tego pierwszego. Niechaj

$\{g_k^{(1)}\}_{k\in\overline{1,M_1}}$ będzie bazą R-modułu G_1, a $\{h_l^{(1)}\}_{l\in\overline{1,N_1}}$ bazą R-modułu H_1. Wówczas bazą R-modułu $\mathrm{Hom}_R(G_1,H_1)$ jest – w świetle Tw. 4 (patrz: Równ. (10)) – rodzina odwzorowań R-liniowych

$$\tau_{k,l}^{(1)} := \varepsilon\big(g_k^{(1)*}\otimes_R h_l^{(1)}\big)\,, \qquad (k,l)\in\overline{1,M_1}\times\overline{1,N_1}\,.$$

Na mocy Stw. 3.9 dowolny tensor $\tau\in\mathrm{Hom}_R(G_1,H_1)\otimes_R\mathrm{Hom}_R(G_2,H_2)$ można zatem przedstawić (jednoznacznie) w postaci

$$\tau = \sum_{(k,l)\in\overline{1,M_1}\times\overline{1,N_1}} \tau_{k,l}^{(1)}\otimes_R\chi^{k,l}\,, \qquad \chi^{k,l}\in\mathrm{Hom}_R(G_2,H_2)\,,$$

warunek $\imath(\tau)=0$ jest więc równoważny układowi tożsamości

$$\begin{aligned}\forall_{m\in\overline{1,M_1}}\ \forall_{g\in G_2}\ :\ 0_{H_1\otimes_R H_2} &= \sum_{(k,l)\in\overline{1,M_1}\times\overline{1,N_1}} \tau_{k,l}^{(1)}(g_m^{(1)})\otimes_R\chi^{k,l}(g)\\ &= \sum_{l\in\overline{1,N_1}} h_l^{(1)}\otimes_R\chi^{m,l}(g)\,,\end{aligned}$$

z których na podstawie tegoż Stw. 3.9 odczytujemy warunki

$$\forall_{(m,l)\in\overline{1,M_1}\times\overline{1,N_1}}\ \forall_{g\in G_2}\ :\ \chi^{m,l}(g)=0_{H_2}\,.$$

Z nich wyciągamy wniosek

$$\forall_{(m,l)\in\overline{1,M_1}\times\overline{1,N_1}}\ :\ \chi^{m,l}=0\,,$$

a dalej

$$\tau=0\,,$$

co dowodzi injektywności $\imath$ w rozważanym przypadku. Na obecnym etapie wystarczy upewnić się o istnieniu stosownego (niekanonicznego) izomorfizmu między dziedziną i przeciwdziedziną $\imath$, aby móc zanalizować bezpośrednio ten monomorfizm, podobnie jak w dowodzie Tw. 4. Czynimy to w rachunku wykorzystującym Tw. 3.5 oraz Stw. 3.6 (i wcześniejsze nasze rozważania, w tym Stw. 3.4) – oto więc z jednej strony

$$\begin{aligned}\iota_1\ :\quad & \mathrm{Hom}_R(G_1,H_1)\otimes_R\mathrm{Hom}_R(G_2,H_2)\\ \cong\ & \mathrm{Hom}_R\Big(\bigoplus_{k=1}^{M_1}R,\bigoplus_{l=1}^{N_1}R\Big)\otimes_R\mathrm{Hom}_R(G_2,H_2)\\ \cong\ & \bigoplus_{(k,l)\in\overline{1,M_1}\times\overline{1,N_1}}\mathrm{Hom}_R(R,R)\otimes_R\mathrm{Hom}_R(G_2,H_2)\\ \cong\ & \bigoplus_{(k,l)\in\overline{1,M_1}\times\overline{1,N_1}}R\otimes_R\mathrm{Hom}_R(G_2,H_2)\\ \cong\ & \bigoplus_{(k,l)\in\overline{1,M_1}\times\overline{1,N_1}}\big(R\otimes_R\mathrm{Hom}_R(G_2,H_2)\big)\cong\bigoplus_{(k,l)\in\overline{1,M_1}\times\overline{1,N_1}}\mathrm{Hom}_R(G_2,H_2)\,,\end{aligned}$$

a z drugiej

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(G_1\otimes_R G_2,H_1\otimes_R H_2) &\cong \mathrm{Hom}_R\Big(\bigoplus_{k=1}^{M_1}R\otimes_R G_2,\bigoplus_{l=1}^{N_1}R\otimes_R H_2\Big)\\ &\cong \mathrm{Hom}_R\Big(\bigoplus_{k=1}^{M_1}(R\otimes_R G_2),\bigoplus_{l=1}^{N_1}(R\otimes_R H_2)\Big)\\ &\cong \mathrm{Hom}_R\Big(\bigoplus_{k=1}^{M_1}G_2,\bigoplus_{l=1}^{N_1}H_2\Big)\\ &\cong \bigoplus_{(k,l)\in\overline{1,M_1}\times\overline{1,N_1}}\mathrm{Hom}_R(G_2,H_2)\,.\end{aligned}$$

Jak łatwo widać, monomorfizm $\iota_2\circ\imath\circ\iota_1^{-1}$ jest odwzorowaniem identycznościowym (w przyjętej notacji przeprowadza na siebie macierz odwzorowań R-liniowych $(\chi^{k,l})_{(k,l)\in\overline{1,M_1}\times\overline{1,N_1}}$), więc też i

$\imath$ jest izomorfizmem. Zauważmy, że dowiedziona część tezy twierdzenia uzasadnia (w połączeniu z Tw. 3.3) Równ. (14).

Na koniec zajmiemy się przypadkiem, kiedy to moduły $G_\alpha,\ \alpha \in \{1,2\}$ są wolne i skończenie generowane. Wybierzmy w G_1 bazę jak w poprzedniej części dowodu, a w G_2 bazę $\{g_l^{(2)}\}_{l\in\overline{1,N_2}}$. Pokażemy najpierw, że homomorfizm $\imath$ jest surjektywny. W tym celu rozważmy odwzorowanie R-liniowe $\chi \in \mathrm{Hom}_R\big(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2\big)$, które na bazie $\{g_k^{(1)} \otimes_R g_l^{(2)}\}_{(k,l)\in\overline{1,N_1}\times\overline{1,N_2}}$ dziedziny przyjmuje postać

$$\chi\big(g_k^{(1)} \otimes_R g_l^{(2)}\big) = \sum_{(h_1,h_2)\in H_1\times H_2} r_{kl}(h_1,h_2) \triangleright_\otimes (h_1 \otimes_R h_2) \tag{15}$$

dla pewnych $r_{kl}(\cdot,\cdot) \in \mathscr{R}_0(R; H_1 \times H_2)$. Postępując analogicznie jak w dowodzie Tw. 4, zdefiniujmy odwzorowania $\chi_{(k,h_\alpha)} \in \mathrm{Hom}_R(G_\alpha, H_\alpha)$ indeksowane elementami zbioru $\overline{1,N_\alpha} \times H_\alpha \ni (k,h_\alpha)$ i będące jedynymi R-liniowymi rozszerzeniami przyporządkowań

$$\forall_{l\in\overline{1,N_\alpha}}\ :\ \chi_{(k,h_\alpha)}\big(g_l^{(A)}\big) := \delta^{\mathbb{Z}}_{l,k} \triangleright h_\alpha\,.$$

Ustaliwszy dowolnie rozkład tensora $\chi\big(g_k^{(1)} \otimes_R g_l^{(2)}\big)$, wprowadźmy oznaczenia

$$\forall_{(k,l,h_1,h_1)\in\overline{1,N_1}\times\overline{1,N_2}\times H_1\times H_2}\ :\ r\big(\chi_{(k,h_1)},\chi_{(l,h_2)}\big) := r_{kl}(h_1,h_2)\,.$$

Łatwo widać, że obrazem tensora

$$\gamma(\chi) := \sum_{(k,l,h_1,h_1)\in\overline{1,N_1}\times\overline{1,N_2}\times H_1\times H_2} r\big(\chi_{(k,h_1)},\chi_{(l,h_2)}\big) \triangleright_\otimes \big(\chi_{(k,h_1)} \otimes_R \chi_{(l,h_2)}\big)$$

(suma w jego definicji jest skończona w konsekwencji skończoności N_A oraz nośnika $r_{kl}(\cdot,\cdot)$) względem homomorfizmu $\imath$ jest homomorfizm χ określony w Równ. (15). Konstatujemy więc, że $\imath$ jest epimorfizmem, a ponieważ na mocy Równ. (14) i Tw. 3.4 oraz innych przywoływanych wcześniej (s)twierdzeń (w tym Tw. 3.3) istnieje (kanoniczny) izomorfizm

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_R\big(G_1,H_1\big) \otimes_R \mathrm{Hom}_R\big(G_2,H_2\big) &\cong \big(G_1^* \otimes_R H_1\big) \otimes_R \big(G_2^* \otimes_R H_2\big) \\
&\cong \big(G_1^* \otimes_R G_2^*\big) \otimes_R \big(H_1 \otimes_R H_2\big) \\
&\cong \big(G_1 \otimes_R G_2\big)^* \otimes_R \big(H_1 \otimes_R H_2\big) \\
&\cong \mathrm{Hom}_R\big(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2\big)\,,
\end{aligned}$$

przeto z całą pewnością $\imath$ jest izomorfizmem. □