WIĄZKI WEKTOROWE – RUDYMENTY (ANALIZA IIIR ’23/24 [RRS])

Spis treści

1. Struktury ogólne 1
2. Wiązki wektorowe 5

1. Struktury ogólne

W wykładzie pierwszym określiliśmy pierwszy cel naszych rozważań – jest nim konstrukcja gładkich rozkładów struktur modelujących przestrzenie wewnętrznych stopni swobody (przestrzenie wektorowe, algebry, grupy itd. z uzgodnioną strukturą topologiczną i różniczkowalną) nad rozmaitością czasoprzestrzenną. Pojęcia podstawowego dostarcza nam

Definicja 1. **Wiązka włóknista** klasy C^∞ to czwórka

$$(E, B, F, \pi_E)$$

złożona z rozmaitości gładkich:

- E, zwanej **przestrzenią totalną** (**wiązki**);
- B, zwanej **bazą** (**wiązki**);
- F, zwanej **włóknem typowym** (**wiązki**);

oraz odwzorowania surjektywnego klasy C^∞

$$\pi_E \;:\; E \twoheadrightarrow B\,,$$

zwanego **rzutem na bazę** (**wiązki**), dla których istnieje pokrycie otwarte $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ bazy B wraz ze stowarzyszoną z nim rodziną dyfeomorfizmów klasy C^∞

$$\tau_i \;:\; \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F\,,$$

zwanych **trywializacjami lokalnymi** (**wiązki**), domykających diagramy przemienne

$$\begin{tikzcd} \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[rr, "\tau_i"] \arrow[dr, "\pi_E"'] & & \mathcal{O}_i \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & \mathcal{O}_i & \end{tikzcd} .$$

Pokrycie o powyższej własności określamy mianem **trywializującego**. Odwzorowania

$$g_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{Aut}(F) \equiv \mathrm{Diff}^\infty(F, F)$$

określone, dla wszystkich par indeksów $(i,j) \in I^{\times 2}$, dla których $\mathcal{O}_{ij} \equiv \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j \neq \varnothing$, przez superpozycje dyfeomorfizmów

$$\tau_{ij} := \tau_i \circ \tau_j^{-1}\restriction_{\mathcal{O}_{ij}\times F} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \times F \circlearrowleft \;:\; (x, f) \longmapsto \big(x, g_{ij}(x)(f)\big)\,,$$

gdzie odwzorowanie $\mathcal{O}_{ij} \times F \longrightarrow F \;:\; (x,f) \longmapsto g_{ij}(x)(f)$ jest z założenia klasy C^∞, są nazywane **odwzorowaniami przejścia** (**wiązki**), a grupa automorfizmów $\mathrm{Aut}(F)$ włókna typowego (lub dowolna jej podgrupa, do której należą wszystkie odwzorowania przejścia) zyskuje miano **grupy strukturalnej** (**wiązki**), Wiązkę będziemy nieraz reprezentować przy użyciu diagramu

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & E \arrow[d, "\pi_E"] \\ & B \end{tikzcd} .$$

Przeciwobraz punktu $x \in B$ względem rzutu kanonicznego,

$$\pi_E^{-1}(\{x\}) \equiv E_x$$

nazywamy **włóknem wiązki E nad x**.

Morfizm wiązek włóknistych między dwiema wiązkami włóknistymi $(E_\alpha, B_\alpha, F_\alpha, \pi_{E_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ to para (Φ, f) odwzorowań klasy C^∞, które czynią przemiennym poniższy diagram

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_{E_1}"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_{E_2}"] \\ B_1 \arrow[r, "f"'] & B_2 \end{tikzcd} .$$

Izomorfizm wiązek włóknistych pokrywający identyczność na bazie, czyli spełniający warunek $f = \mathrm{id}_B$, nosi miano **równoważności wiązek włóknistych**.

Przykłady 1. (1) **Wiązka trywialna** to czwórka

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & B \times F \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ & B \end{tikzcd} ,$$

a więc np. 2-torus $\mathbb{T}^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, walec $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$.

(2) **Wstęga Möbiusa** jako wiązka nietrywialna nad $\mathbb{S}^1$ o włóknie typowym $\mathbb{R}$.

(3) **Wiązka Hopfa** $(\mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2, \mathbb{S}^1, h)$, przy czym rzut na bazę π_{H} we współrzędnych $(z_1, z_2) \equiv ((x_0, x_1), (x_2, x_3))$ na $\mathbb{C}^{\times 2} \equiv \mathbb{R}^{\times 4} \supset \{ (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{\times 4} \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \} \equiv \mathbb{S}^3$ przyjmuje postać $\pi_{\mathrm{H}}(z_1, z_2) = (2z_1\overline{z}_2, |z_1|^2 - |z_2|^2) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^{\times 3}$.

(4) **Ograniczenie** $(\pi_E^{-1}(C), C, F, \pi_E\restriction_{\pi_E^{-1}(C)})$ wiązki włóknistej $\mathcal{E} \equiv (E, B, F, \pi_E)$ do podrozmaitości $C \subset B$ jej bazy B w naturalny sposób dziedziczy strukturę wiązki włóknistej nad C o tym samym włóknie typowym F. W szczególności lokalne trywializacje powstają nad przecięciami C z pokryciem trywializującym wyjściowej wiązki $\mathcal{E}$.

Z Def. 1 wyłania się obiekt geometryczny dostarczający rygorystycznego modelu gładkiego rozkładu przestrzeni wewnętrznych stopni swobody F nad bazą czasoprzestrzenną B (ewentualna obecność dodatkowej struktury różniczkowej na B, tudzież na $\mathsf{T}B$, jak np. tensora metrycznego, nie odgrywa na tym etapie żadnego znaczenia). Zarazem istnienie trywializacji lokalnych wskazuje wyraźnie na możliwość zakodowania informacji o strukturze wiązki w *lokalnie* gładkich odwzorowaniach przejścia g_{ij}. O tym, jak bogata i jak wiernie przez nie kodowana jest to informacja, mówi

Twierdzenie 1 (O rekonstrukcji (izotypu) wiązki włóknistej)**.** Przyjmijmy zapis Def. 1. Odwzorowania przejścia wiązki włóknistej (E, B, F, π_E) o pokryciu trywializującym $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ bazy B spełniają **warunek 1-kocyklu**

$$\forall_{i,j,k\in I,\ x\in\mathcal{O}_{ijk}} \ : \ g_{ij}(x) \circ g_{kj}(x)^{-1} \circ g_{ki}(x) = \mathrm{id}_F \,. \tag{1}$$

I odwrotnie, niechaj $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ będzie pokryciem otwartym rozmaitości gładkiej B i niech F będzie dowolną rozmaitością gładką o grupie automorfizmów $\mathrm{Aut}(F)$. Dowolna stowarzyszona z $\mathcal{O}_B$ rodzina odwzorowań

$$g_{ij} \ : \ \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{Aut}(F) \,, \quad i, j \in I$$

indukujących odwzorowania klasy C^∞

$$\mathcal{O}_{ij} \times F \longrightarrow F \ : \ (x,f) \longmapsto g_{ij}(x)(f)$$

i spełniających powyższy warunek określa wiązkę włóknistą o odwzorowaniach przejścia stowarzyszonych z $\mathcal{O}_{ij}$ tożsamych z g_{ij}. Ilekroć odwzorowania te są odwzorowaniami przejścia pewnej wiązki włóknistej nad B o włóknie typowym F, ta ostatnia wiązka jest izomorficzna z wiązką określaną przez odwzorowania przejścia g_{ij}.

Dowód: Pierwsza część tezy jest bezpośrednią konsekwencją następującej równości, słusznej dla dowolnej trójki $(i,j,k) \in \langle I^{\times 3} \rangle$ oraz $(x,f) \in \mathcal{O}_{ijk} \times F$:

$$\begin{aligned} (x,f) &\equiv (\mathrm{id}_{\mathcal{O}_{ijk}} \times \mathrm{id}_F)(x,f) = \big((\tau_i \circ \tau_j^{-1}) \circ (\tau_k \circ \tau_j^{-1})^{-1} \circ (\tau_k \circ \tau_i^{-1})\big)(x,f) \\ &= \big(x, g_{ij}(x) \circ g_{kj}(x)^{-1} \circ g_{ki}(x)(f)\big) . \end{aligned}$$

Punktem wyjścia do dowodu drugiej jego części jest konstrukcja sumy rozłącznej $\bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F)$, na której określamy relację

$$(x,f,i) \sim_{g_{\cdot\cdot}} (y,g,j) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y = x \in \mathcal{O}_{ij} \\ g = g_{ji}(x)(f) \end{cases} ,$$

Warunek 1-kocyklu spełniony przez odwzorowania przejścia sprawia, że jest to relacja równoważności, oto bowiem dla $i = j = k$ dostajemy

$$g_{ii}(x) \equiv g_{ii}(x) \circ g_{ii}(x)^{-1} \circ g_{ii}(x) = \mathrm{id}_F ,$$

zatem $\sim_{g_{\cdot\cdot}}$ jest zwrotna, a dalej tenże warunek w połączeniu z poprzednią konkluzją implikuje skośną symetrię g_{ij},

$$g_{ji}(x) \circ g_{ij}(x) = g_{ji}(x) \circ g_{ii}(x)^{-1} \circ g_{ij}(x) = \mathrm{id}_F ,$$

która pociąga za sobą jej symetrię, i wreszcie stosownie przepisany warunek 1-kocyklu,

$$g_{ij}(x) \circ g_{jk}(x) = g_{ij}(x) \circ g_{kj}(x)^{-1} = g_{ki}(x)^{-1} = g_{ik}(x) ,$$

oznacza, że jest ona przechodnia. Możemy zatem przejść od $\bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F)$ do zbioru klas abstrakcji

$$\mathscr{R}_{g_{\cdot,\cdot}} := \big(\bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F)\big)/_{g_{\cdot\cdot}} ,$$

na którym określamy surjekcję

$$\pi_{\mathscr{R}_{g_{\cdot,\cdot}}} \ : \ \mathscr{R}_{g_{\cdot,\cdot}} \twoheadrightarrow B \ : \ [(x,f,i)]_{\sim_{g_{\cdot\cdot}}} \longmapsto x .$$

Zauważmy, że dowolna klasa $[(x,f,i)]_{\sim_{g_{\cdot\cdot}}}$ zawiera dokładnie jednego reprezentanta o ustalonym indeksie, $(x,f,i) \in \mathcal{O}_i \times F \times \{i\}$, gdyż – wprost z definicji –

$$(y,g,i) \in [(x,f,i)]_{\sim_{g_{\cdot\cdot}}} \quad \Longrightarrow \quad (y,g) = \big(x, g_{ii}(x)(f)\big) = \big(x, \mathrm{id}_F(f)\big) = (x,f) ,$$

a ponieważ także

$$\forall_{(x,f) \in \mathcal{O}_i \times F} \ : \ (x,f,i) \in [(x,f,i)]_{\sim_{g_{\cdot\cdot}}} ,$$

przeto otrzymujemy bijekcję

$$[\tau_i] \ : \ \pi^{-1}_{\mathscr{R}_{g_{\cdot,\cdot}}}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F \ : \ [(x,f,i)]_{\sim_{g_{\cdot\cdot}}} \longmapsto (x,f) .$$

Następnie wprowadzamy na $\mathscr{R}_{g_{\cdot,\cdot}}$ topologię ilorazową nazywając otwartym dowolny podzbiór $\mathcal{O} \subset \mathscr{R}_{g_{\cdot,\cdot}}$, którego przeciwobraz względem rzutu

(2) $$\pi_\sim \ : \ \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F) \longrightarrow \mathscr{R}_{g_{\cdot,\cdot}}$$

jest otwarty w $\widetilde{\mathscr{R}}_{g_{\cdot,\cdot}}$ w topologii sumy rozłącznej[1] przestrzeni $\mathcal{O}_i \times F$, $i \in I$, z których każda jest nośnikiem topologii produktowej. W rzeczonej topologii ilorazowej bijekcje $[\tau_i]$ są homeomorfizmami, a rzut $\pi_{\mathscr{R}_{g_{\cdot,\cdot}}}$ jest ciągły. Otrzymana tu topologia jest hausdorffowska. Istotnie, ilekroć

[1] Topologię sumy rozłącznej tworzą zbiory, których przeciwobrazy względem *wszystkich* injekcji kanonicznych $\mathcal{O}_j \times F \longrightarrow \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F)$ są otwarte.

$[(x_1,f_1,i_1)]_{\sim_{g..}} \neq [(x_2,f_2,i_2)]_{\sim_{g..}}$, mamy dwie możliwości: albo $x_2 \neq x_1$, a wtedy rozdzielamy punkty x_1 i x_2 zbiorami otwartymi – odpowiednio – $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_{i_1}$ i $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_{i_2}$ w hausdorffowskiej (z założenia) bazie, po czym tworzymy jawnie rozłączne otoczenia otwarte $\pi_\sim(\mathcal{O}_\alpha \times F \times \{i_\alpha\})$, $\alpha \in \{1,2\}$ obu klas w $\mathscr{R}_{g.,.}$ ($\pi_\sim$ utożsamia punktu we włóknie nad *wspólnym* punktem w bazie!), albo też $x_2 = x_1$ przy $i_2 = i_1$ (jako że $x_2 = x_1$, możemy *wybrać* $i_2 = i_1$, ewentualnie za cenę zmiany f_2), a wtedy rozdzielamy punkty f_1 i f_2 zbiorami otwartymi – odpowiednio – $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_2$ w hausdorffowskim (także z założenia) włóknie F i na zakończenie tworzymy rozłączne otoczenia otwarte $\pi_\sim(\mathcal{O}_{i_1} \times \mathcal{U}_\alpha \times \{i_1\})$, $\alpha \in \{1,2\}$ obu klas w $\mathscr{R}_{g.,.}$ (tym razem utożsamienia dotyczą punktów w $\bigsqcup_{i\in I}(\mathcal{O}_i \times F)$ o indeksach pokrycia *innych* niż i_2).

Możemy już teraz skonstruować atlas na tak określonej przestrzeni topologicznej. W tym celu ustalamy atlas na zbiorze $\mathcal{O}_i$ poprzez ograniczenie dowolnego atlasu na bazie B, otrzymując tym sposobem mapy lokalne $\xi_{i,A} : \mathcal{O}_{i,A} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{i,A}$, $A \in J_i$ na podzbiorach $\mathcal{O}_{i,A} \in \mathscr{T}(\mathcal{O}_i)$ (w topologii podprzestrzeni) modelowanych na $\mathcal{U}_{i,A} \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\times n})$, $n = \dim B$, a do tego – atlas na włóknie złożony z map lokalnych $\zeta_\alpha : \mathcal{V}_\alpha \xrightarrow{\cong} \mathcal{W}_\alpha$, $\alpha \in K$ na podzbiorach $\mathcal{V}_\alpha \in \mathscr{T}(F)$ modelowanych na $\mathcal{W}_\alpha \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\times m})$, $m = \dim F$. To uczyniwszy, definiujemy atlas na $\mathscr{R}_{g.,.}$ jako zbiór map lokalnych

$$\begin{aligned}\kappa_{i,A,\alpha} \quad &: \quad \mathcal{Q}_{i,A,\alpha} \equiv \pi_\sim(\mathcal{O}_{i,A} \times \mathcal{V}_\alpha) \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{i,A} \times \mathcal{W}_\alpha \subset \mathbb{R}^{\times n+m} \\ &: \quad [(x,f,i)]_{\sim_{g..}} \longmapsto \big(\xi_{i,A}(x), \zeta_\alpha(f)\big)\,,\end{aligned}$$

które są dobrze określone, jako że – w świetle wcześniejszych naszych ustaleń – istnieje jedyny reprezentant $(x,f) \in \mathcal{O}_{i,A} \times \mathcal{V}_\alpha \subset \mathcal{O}_i \times F$ klasy $[(x,f,i)]_{\sim_{g..}}$ o ustalonym indeksie pokrycia $i \in I$. Na przecięciu ich dziedzin znajdujemy transformacje współrzędniowe

$$\begin{aligned}\kappa_{i,A,\alpha\, j,B,\beta} \equiv \kappa_{i,A,\alpha} \circ \kappa_{j,B,\beta}^{-1} \quad &: \quad \kappa_{j,B,\beta}\big(\mathcal{O}_{i,A\, j,B} \times \mathcal{V}_{\alpha\beta}\big) \xrightarrow{\cong} \kappa_{i,A,\alpha}\big(\mathcal{O}_{i,A\, j,B} \times \mathcal{V}_{\alpha\beta}\big) \\ &: \quad \big(\xi_{j,B}(x), \zeta_\beta(f)\big) \longmapsto \big(\xi_{i,A}(x), \zeta_\alpha \circ g_{ij}(x)(f)\big) \\ &\equiv \big(\xi_{i,A} \circ \xi_{j,B}^{-1}\big(\xi_{j,B}(x)\big), \zeta_\alpha \circ \big(g_{ij} \circ \xi_{j,B}^{-1}\big)\big(\xi_{j,B}(x)\big) \circ \zeta_\beta^{-1}\big(\zeta_\beta(f)\big)\big)\,.\end{aligned}$$

Zważywszy, że odwzorowania $\xi_{i,A} \circ \xi_{j,B}^{-1}$ są transformacjami współrzędniowymi (rozdrobnionego) atlasu na B, C^∞-gładkimi z założenia, a ponadto $g_{ij} \circ \xi_{j,B}^{-1}$ są lokalnymi prezentacjami odwzorowań przejścia, także C^∞-gładkimi (w działaniu na F, w rozumieniu opisu odwzorowań g_{ij} podanego w treści dowodzonego twierdzenia) z założenia, i wreszcie $\zeta_\alpha \circ g_{ij}(x) \circ \zeta_\beta^{-1}$ są lokalnymi prezentacjami automorfizmów $g_{ij}(x)$ włókna F, również C^∞-gładkimi z założenia, stwierdzamy, że transformacje $\kappa_{i,A,\alpha\, j,B,\beta}$ są C^∞-gładkie, zatem mapy lokalne $\kappa_{i,A,\alpha}$ określają na $\mathscr{R}_{g.,.}$ strukturę rozmaitości różniczkowalnej klasy C^∞. Względem tejże struktury odwzorowania $[\tau_i]$ są (tautologicznie) dyfeomorfizmami klasy C^∞ (także rzut na bazę, $\pi_{\mathscr{R}_{g.,.}} \restriction_{\mathcal{Q}_{i,A,\alpha}} \equiv \mathrm{pr}_1 \circ [\tau_i]$, jest klasy C^∞) i określają na $\mathscr{R}_{g.,.}$ strukturę wiązki włóknistej klasy C^∞.

Na zakończenie wykażemy równoważność struktur wiązki włóknistej: wyjściowej na danej wiązce włóknistej (E,B,F,π_E), o lokalnych trywializacjach $\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_I) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F$, $i \in I$, i tej zrekonstruowanej w sposób opisany wyżej z jej odwzorowań przejścia g_{ij}. W tym celu rozważymy odwzorowania dane lokalnie w postaci

$$\iota_i := [\tau_i]^{-1} \circ \tau_i \ : \ \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F \xrightarrow{\cong} \pi_{\mathscr{R}_{g.,.}}^{-1}(\mathcal{O}_i)\,, \quad i \in I \tag{3}$$

i zauważamy, że te lokalne dyfeomorfizmy w dowolnym punkcie $y \in \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_{ij})$, zadawanym przez pewne $x \in \mathcal{O}_{ij}$ oraz $f \in F$ w postaci $y = \tau_i^{-1}(x,f)$, spełniają relację

$$\begin{aligned}\iota_j(y) \quad &\equiv \quad \iota_j\big(\tau_i^{-1}(x,f)\big) \equiv [\tau_j]^{-1} \circ \tau_j \circ \tau_i^{-1}(x,f) = [\tau_j]^{-1}\big(x, g_{ji}(x)(f)\big) \\ &= \quad [\tau_i]^{-1} \circ [\tau_i] \circ [\tau_j]^{-1}\big(x, g_{ji}(x)(f)\big) = [\tau_i]^{-1}\big(x, g_{ij}(x) \circ g_{ji}(x)(f)\big) \\ &= \quad [\tau_i]^{-1}(x,f) \equiv [\tau_i]^{-1} \circ \tau_i \circ \tau_i^{-1}(x,f) \equiv \iota_i(y)\,,\end{aligned}$$

czyli że stanowią ograniczenia określonego globalnie dyfeomorfizmu

$$\iota \;:\; E \xrightarrow{\cong} \mathscr{R}_{g.,.}\,,$$

dane wzorem

$$\iota\restriction_{\pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \iota_i\,,$$

o własności wyrażonej przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\pi_E"'] & \mathscr{R}_{g.,.} \arrow[d, "\pi_{\mathscr{R}_{g.,.}}"] \\ B \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_B"'] & B \end{tikzcd}\,,$$

która pozwala nam zidentyfikować ι jako postulowany izomorfizm wiązek. □

2. Wiązki wektorowe

Geometrycznie absolutnie naturalnym i – także, choć nie wyłącznie z tego powodu – modelowym przykładem wiązki włóknistej jest wiązka styczna nad rozmaitością różniczkowalną $(M,\widehat{\mathscr{A}})$ klasy C^∞. Wiązkę tę można definiować na kilka wzajem równoważnych sposobów, z których każdy eksponuje inną jej cechę strukturalną – jeden z nich wykorzystuje np. odwzorowania styczne do odwzorowań przejścia pomiędzy mapami lokalnymi do rekonstrukcji wiązki stycznej z jej lokalnych trywializacji współrzędniowych wedle schematu z Tw. 1.

Definicja 2. **Wiązka styczna** C^{k+1}-rozmaitości $(M,\widehat{\mathscr{A}})$ wymiaru $n\in\mathbb{N}^\times$, o atlasie $\widehat{\mathscr{A}}=\{\kappa_i\}_{i\in I}$ stowarzyszonym z pokryciem otwartym $\mathcal{O}_M=\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$, to C^k-rozmaitość $(\mathsf{T}M,\mathsf{T}\widehat{\mathscr{A}})$ utworzona, jak następuje:

- nośnikiem struktury jest zbiór klas abstrakcji

$$\mathsf{T}M := \Big(\bigsqcup_{i\in I}\mathcal{O}_i\times\mathbb{R}^{\times n}\Big)/\sim_{\mathsf{D}t_{..}}$$

relacji

$$(x,i,v)\sim(y,j,w) \qquad\Longleftrightarrow\qquad \begin{cases} y=x\in\mathcal{O}_{ij} \\ w=\mathsf{D}\big(\kappa_j\circ\kappa_i^{-1}\big)\big(\kappa_i(x)\big)(v)\equiv\mathsf{D}t_{ji}\big(\kappa_i(x)\big)(v)\end{cases}\,,$$

wyposażony w odwzorowanie

$$\pi_{\mathsf{T}M}\;:\;\mathsf{T}M\longrightarrow M\;:\;[(x,i,v)]_{\sim_{\mathsf{D}t_{..}}}\longmapsto x\,,$$

zwane **rzutem kanonicznym** (**na bazę wiązki stycznej**), którego poziomica

$$\mathsf{T}_xM := \pi_{\mathsf{T}M}^{-1}\big(\{x\}\big)$$

nosi miano **przestrzeni stycznej** w punkcie x;
- topologia zbioru $\mathsf{T}M$ jest topologią ilorazową indukowaną wzdłuż surjektywnego rzutu

$$\pi_\sim\;:\;\bigsqcup_{i\in I}\mathcal{O}_i\times\mathbb{R}^{\times n}\longrightarrow\Big(\bigsqcup_{i\in I}\mathcal{O}_i\times\mathbb{R}^{\times n}\Big)/\sim_{\mathsf{D}t_{..}}\;:\;(x,i,v)\longmapsto[(x,i,v)]_{\sim_{\mathsf{D}t_{..}}}$$

z topologii sumy rozłącznej przestrzeni $\mathcal{O}_i\times\mathbb{R}^{\times n}$, o injekcjach kanonicznych

$$\jmath_i\;:\;\mathcal{O}_i\times\mathbb{R}^{\times n}\longrightarrow\bigsqcup_{j\in I}\mathcal{O}_j\times\mathbb{R}^{\times n}\;:\;(x,v)\longmapsto(x,i,v)\,,\quad i\in I\,,$$

z których każda jest nośnikiem topologii produktowej,

$$\mathscr{T}(\mathsf{T}M) := \big\{\;\mathcal{O}\subset\mathsf{T}M\quad|\quad\forall_{i\in I}\;:\;\jmath_i^{-1}\big(\pi_\sim^{-1}(\mathcal{O})\big)\in\mathscr{T}\big(\mathcal{O}_i\times\mathbb{R}^{\times n}\big)\big\}\;;$$

- strukturę różniczkową na przestrzeni topologicznej $\mathsf{T}M$ definiują (jawnie homeomorficzne) odwzorowania
$$\mathsf{T}\kappa_i \;:\; \pi_{\mathsf{T}M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times n} \;:\; [(x,i,v)]_{\sim_{\mathsf{D}t..}} \longmapsto \big(\kappa_i(x), v\big)\,, \quad i \in I\,,$$
zwane **mapami naturalnymi** (współczynniki rozkładu wektora v w (dowolnej) bazie są współrzędnymi globalnymi na $\mathbb{R}^{\times n}$), które określają transformacje współrzędniowe
$$\begin{aligned}\mathsf{T}t_{ji} := \mathsf{T}\kappa_j \circ (\mathsf{T}\kappa_i)^{-1}\restriction_{\kappa_i(\mathcal{O}_{ij})\times\mathbb{R}^{\times n}} \quad &: \quad \kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{\times n} \xrightarrow{\cong} \kappa_j(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{\times n} \\ &: \quad \big(\kappa_i(x), v\big) \longmapsto \big(\kappa_j(x), \mathsf{D}t_{ji}\big(\kappa_i(x)\big)(v)\big)\,,\end{aligned}$$
w oczywisty sposób należące do klasy C^k – mamy tu zatem do czynienia z gładkim działaniem grupy strukturalnej $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^{\times n}) \ni \mathsf{D}t_{ji}(\kappa_i(x))$.

Klasę abstrakcji

(4) $$V(x) := [(x,i,v)]_{\sim_{\mathsf{D}t..}} \in \mathsf{T}_x M$$

określamy mianem **wektora stycznego** do C^{k+1}-rozmaitości $(M, \widehat{\mathscr{A}})$ (zaczepionego) w punkcie $x \in M$.

Odwzorowanie (różniczkowalne klasy C^k)
$$\mathbf{0}_{\mathsf{T}M} \;:\; M \longrightarrow \mathsf{T}M \;:\; x \longmapsto [(x,i,\mathbf{0}^n)]_{\sim_{\mathsf{D}t..}}$$
nosi miano **cięcia zerowego** wiązki stycznej $\mathsf{T}M$.

Struktura liniowa, której oczekujemy od modelu „przestrzeni ruchów infinitezymalnych" albo „przestrzeni prędkości", jest w tym ujęciu zakamuflowana pod postacią przemyślnego wyboru lokalnego modelu włókna $\mathbb{R}^{\times \dim M}$, o naturalnej interpretacji w terminach lokalnych współrzędnych.

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Wybierzmy dowolny punkt $x \in \mathcal{O}_i \subset M$ C^k-rozmaitości $(M, \widehat{\mathscr{A}})$ wymiaru $n \in \mathbb{N}^\times$, a wówczas odwzorowanie
$$\begin{aligned}\mathsf{T}_x\kappa_i \quad &: \quad \mathsf{T}_x M \xrightarrow{\mathsf{T}\kappa_i} \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times n} \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathbb{R}^{\times n} \\ &: \quad [(x,i,v)]_{\sim_{\mathsf{D}t..}} \longmapsto \big(\kappa_i(x), v\big) \longmapsto v\,,\end{aligned}$$
będące złożeniem lokalnej mapy naturalnej na $\mathsf{T}M$ z kanonicznym rzutem na drugą składową iloczynu kartezjańskiego, jest bijekcją i jako takie w kanoniczny sposób indukuje na $\mathsf{T}_x M$ strukturę przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowej,
$$\mathsf{T}_x M \underset{\mathbb{R}-\mathrm{lin.}}{\cong} \mathbb{R}^{\times n}\,,$$
określaną mianem **przestrzeni stycznej do rozmaitości** M w punkcie x.

<u>*Dowód:*</u> Strukturę $\mathbb{R}$-liniowa, o której mowa w tezie stwierdzenia, określa formuła
$$\lambda_1 \triangleright [(x,i,v_1)]_{\sim_{\mathsf{D}t..}} + \lambda_2 \triangleright [(x,i,v_2)]_{\sim_{\mathsf{D}t..}} := [(x,i,\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)]_{\sim_{\mathsf{D}t..}}\,,$$
zapisana dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Wobec $\mathbb{R}$-liniowego charakteru relacji z Def. 2, struktura ta jest dobrze określona. Istotnie, niechaj $x \in \mathcal{O}_{ij}$ i niech $w_\alpha := \mathsf{D}t_{ji}\big(\kappa_i(x)\big)(v_\alpha)$, $\alpha \in \{1,2\}$, a wtedy
$$\begin{aligned}&\lambda_1 \triangleright [(x,j,w_1)]_{\sim_{\mathsf{D}t..}} + \lambda_2 \triangleright [(x,j,w_2)]_{\sim_{\mathsf{D}t..}} = [(x,j,\lambda_1 \triangleright w_1 + \lambda_2 \triangleright w_2)]_{\sim_{\mathsf{D}t..}} \\ = \quad & [(x,j,\lambda_1 \triangleright \mathsf{D}t_{ji}\big(\kappa_i(x)\big)(v_1) + \lambda_2 \triangleright \mathsf{D}t_{ji}\big(\kappa_i(x)\big)(v_2))]_{\sim_{\mathsf{D}t..}} \\ = \quad & \Big[\big(x,j,\mathsf{D}t_{ji}\big(\kappa_i(x)\big)(\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)\big)\Big]_{\sim} = [(x,i,\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)]_{\sim_{\mathsf{D}t..}} \\ \equiv \quad & \lambda_1 \triangleright [(x,j,w_1)]_{\sim_{\mathsf{D}t..}} + \lambda_2 \triangleright [(x,i,v_2)]_{\sim_{\mathsf{D}t..}}\,.\end{aligned}$$

□

Poniżej przedyskutujemy odmienne spojrzenie na tę samą strukturę, stanowiące udaną próbę uwolnienia opisu wewnętrznej geometrii stycznościowej od lokalnej euklidesowej kartografii rozmaitości. Pierwszy krok w tym kierunku czynimy w

Stwierdzenie 2. Rozważmy relację równoważności na zbiorze **ścieżek** klasy C^1 w C^k-rozmaitości $(M, \widehat{\mathscr{A}})$ wymiaru $n \in \mathbb{N}^\times$ przechodzących przez jej punkt x,

$$\gamma \ :\ ]-\varepsilon_\gamma, \varepsilon_\gamma[\longrightarrow M\,, \quad \varepsilon_\gamma > 0\,, \qquad \gamma(0) = x\,,$$

określaną przez warunek (współ)styczności w x,

$$\widetilde{\gamma} \sim_x \gamma \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \widetilde{\gamma}(0) = x = \gamma(0) \\ \mathsf{D}(\kappa \circ \widetilde{\gamma})(0) = \mathsf{D}(\kappa \circ \gamma)(0) \end{cases},$$

wypowiedziany w terminach dowolnej mapy $\kappa \ :\ \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times n}$ określonej na otoczeniu otwartym $\mathcal{O} \ni x$. Oznaczywszy $v_\gamma := \mathsf{D}(\kappa \circ \gamma)(0) \in \mathbb{R}^{\times n}$ dla skrótu, na zbiorze P_x klas abstrakcji ścieżek względem powyższej relacji określamy strukturę grupy przemiennej z działaniem

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}_x \times \mathsf{P}_x \longrightarrow \mathsf{P}_x \\ :\quad &\big([\gamma_1]_{\sim_x}, \gamma_2]_{\sim_x}\big) \longmapsto \big[\,]-\varepsilon, \varepsilon[\ni t \mapsto \kappa^{-1}\big(\kappa(x) + t \triangleright (v_{\gamma_1} + v_{\gamma_2})\big) \in \mathcal{O}\big]_{\sim_x} \\ &=: [\gamma_1]_{\sim_x} + [\gamma_2]_{\sim_x} \end{aligned}$$

i elementem neutralnym danym w postaci klasy $[\gamma_x]_{\sim_x}$ ścieżki stałej

$$x \ :\ \mathbb{R} \longrightarrow M \ :\ t \longmapsto x\,,$$

a następnie działanie ciała $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \times \mathsf{P}_x \longrightarrow \mathsf{P}_x \ :\ \big(\lambda, [\gamma]_{\sim_x}\big) \longmapsto \big[\,]-\varepsilon, \varepsilon[\ni t \mapsto \kappa^{-1}\big(\kappa(x) + t \cdot \lambda \triangleright v_\gamma\big) \in \mathcal{O}\big]_{\sim_x}\,,$$

przy czym w obu przypadkach $\varepsilon > 0$ jest dobrane tak, ażeby ścieżka będąca wynikiem działania leżała w całości w $\mathcal{O}$. Tak zdefiniowana przestrzeń $\mathbb{R}$-liniowa jest izomorficzna z przestrzenią $\mathbb{R}$-liniową o nośniku $\mathsf{T}_x M$ opisaną w Stw. 1.

<u>Dowód:</u> Zacznijmy od spostrzeżenia, że relacja współstyczności nie zależy od wyboru lokalnej mapy – istotnie, jeśli $\psi \ :\ \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times n}$ jest lokalną mapą na otoczeniu otwartym $\mathcal{U} \ni x$, to dla ścieżek γ i $\widetilde{\gamma}$ z treści stwierdzenia zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned} \mathsf{D}(\psi \circ \widetilde{\gamma})(0) &= \mathsf{D}\big(\psi \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi \circ \widetilde{\gamma}(0)\big) \circ \mathsf{D}(\varphi \circ \widetilde{\gamma})(0) \\ &= \mathsf{D}\big(\psi \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big) \circ \mathsf{D}(\varphi \circ \widetilde{\gamma})(0) \\ &= \mathsf{D}\big(\psi \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi \circ \gamma(0)\big) \circ \mathsf{D}(\varphi \circ \gamma)(0) = \mathsf{D}(\psi \circ \gamma)(0)\,. \end{aligned}$$

Bez trudu sprawdzamy też analogiczną własność definicji struktury $\mathbb{R}$-liniowej na zbiorze ścieżek, a to za sprawą tożsamości

$$\begin{aligned} &\psi^{-1}\big(\psi(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)\big)\restriction_{t=0} = \psi^{-1} \circ \psi(x) = x \\ \equiv\quad &\kappa^{-1}\big(\kappa(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)\big)\restriction_{t=0} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} &\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} \psi\Big(\psi^{-1}\big(\psi(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)\big)\Big) = \lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2 \\ = \quad &\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} \kappa\Big(\kappa^{-1}\big(\kappa(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)\big)\Big) \equiv \mathsf{D}\Big(\kappa\Big(\kappa^{-1}\big(\kappa(x) + \cdot \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)\big)\Big)\Big)(0)\,. \end{aligned}$$

Możemy następnie przystąpić do konstrukcji pożądanego izomorfizmu przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowych. Oto więc klasie współstyczności ścieżek przez $x \in \mathcal{O}_i$ przyporządkowujemy punkty we włóknie $\mathsf{T}_x M$ wedle formuły (w oczywisty sposób dobrze określonej)

$$V_x \ :\ [\gamma]_{\sim_x} \longmapsto \big[\big(\gamma(0), i, \mathsf{D}(\kappa_i \circ \gamma)(0)\big)\big]_{\sim_{\mathsf{D}t..}}\,, \tag{5}$$

i odwrotnie – punktowi $[(x,i,v)]_{\sim_{\mathrm{D}t..}}$ w tymże włóknie przypisujemy klasę ścieżki (trajektorii) „ruchu jednostajnego prostoliniowego" wedle formuły

$$\Gamma_x \;:\; [(x,i,v)]_{\sim_{\mathrm{D}t..}} \longmapsto \big[\,]-\varepsilon,\varepsilon[\ni t \mapsto \kappa_i^{-1}\big(\kappa_i(x)+t\triangleright v\big)\in\mathcal{O}_i\big]_{\sim_x}\,,$$

przy czym liczba $\varepsilon>0$ w ostatnim wzorze jest dobrana tak, by warunek $\kappa_i(x)+t\triangleright v\in\kappa_i(\mathcal{O}_i)$ był spełniony dla dowolnego $t\in]-\varepsilon,\varepsilon[$ (jej istnienie jest konsekwencją otwartości $\kappa_i(\mathcal{O}_i)$). Zauważmy, że oba przyporządkowania są dobrze określone, oto bowiem dla $x\in\mathcal{O}_{ij}$ dostajemy z jednej strony

$$\begin{aligned}\big[\big(\gamma(0),j,\mathsf{D}(\kappa_j\circ\gamma)(0)\big)\big]_{\sim_{\mathrm{D}t..}} &= \big[\big(\gamma(0),j,\mathsf{D}t_{ji}\big(\kappa_i\circ\gamma(0)\big)\circ\mathsf{D}(\kappa_i\circ\gamma)(0)\big)\big]_{\sim_{\mathrm{D}t..}}\\ &\equiv \big[\big(\gamma(0),i,\mathsf{D}(\kappa_i\circ\gamma)(0)\big)\big]_{\sim_{\mathrm{D}t..}}\,,\end{aligned}$$

a z drugiej, dla $w:=\mathsf{D}t_{ji}\big(\kappa_i(x)\big)(v)$,

$$\Gamma_x\big([(x,j,w)]_{\sim_{\mathrm{D}t..}}\big)=\big[\gamma_j^w\;:\;]-\varepsilon,\varepsilon[\ni t\mapsto\kappa_j^{-1}\big(\kappa_j(x)+t\triangleright w\big)\in\mathcal{O}_i\big]_{\sim_x}\,,$$

więc też

$$\gamma_j^w(0)=\kappa_j^{-1}\big(\kappa_j(x)+0\triangleright w\big)\equiv\kappa_j^{-1}\circ\kappa_j(x)=x=\gamma_i^v(0)$$

oraz

$$\begin{aligned}\mathsf{D}(\kappa_i\circ\gamma_j^w)(0) &= \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(t_{ij}\big(\kappa_j(x)+t\triangleright w\big)\big)=\mathsf{D}t_{ij}\big(\kappa_j(x)\big)(w)\\ &\equiv \mathsf{D}t_{ij}\big(\kappa_j(x)\big)\circ\mathsf{D}t_{ji}\big(\kappa_i(x)\big)(v)=\mathsf{D}\mathrm{id}_{\kappa_i(\mathcal{O}_i)}\big(\kappa_i(x)\big)(v)\\ &= \mathrm{id}_{\mathsf{T}_{\kappa_i(x)}\mathbb{R}^n}(v)=v=\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(\kappa_i(x)+t\triangleright v\big)=\mathsf{D}(\kappa_i\circ\gamma_i^v)(0)\,,\end{aligned}$$

co implikuje pożądaną równoważność

$$\gamma_j^w\sim\gamma_i^v\,.$$

Bez trudu sprawdzamy, że odwzorowania te są wzajem odwrotne. Istotnie, jak pokazuje powyższy rachunek,

$$V_x\circ\Gamma_x\big([(x,i,v)]_{\sim_{\mathrm{D}t..}}\big)=V_x\big([\gamma_i^v]_{\sim_x}\big)=\big[\big(\gamma_i^v(0),j,\mathsf{D}(\kappa_j\circ\gamma_i^v)(0)\big)\big]_{\sim_{\mathrm{D}t..}}=[(x,i,v)]_{\sim_{\mathrm{D}t..}}\,,$$

a ponadto

$$\Gamma_x\circ V_x\big([\gamma]_{\sim_x}\big)=\big[\gamma_i^{\mathsf{D}(\kappa_i\circ\gamma)(0)}\;:\;]-\varepsilon,\varepsilon[\ni t\mapsto\kappa_i^{-1}\big(\kappa_i\circ\gamma(0)+t\triangleright\mathsf{D}(\kappa_i\circ\gamma)(0)\big)\in\mathcal{O}_i\big]_{\sim_x}\,,$$

przy czym

$$\gamma_i^{\mathsf{D}(\kappa_i\circ\gamma)(0)}(0)=\kappa_i^{-1}\circ\kappa_i\circ\gamma(0)=\gamma(0)$$

oraz

$$\mathsf{D}\big(\kappa_i\circ\gamma_i^{\mathsf{D}(\kappa_i\circ\gamma)(0)}\big)(0)=\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(\kappa_i\circ\gamma(0)+t\triangleright\mathsf{D}(\kappa_i\circ\gamma)(0)\big)=\mathsf{D}(\kappa_i\circ\gamma)(0)$$

więc też

$$\big[\gamma_i^{\mathsf{D}(\kappa_i\circ\gamma)(0)}\big]_{\sim_x}=[\gamma]_{\sim_x}\,,$$

zgodnie z wysłowionym wcześniej stwierdzeniem.

Na zakończenie dowodzimy liniowości obu przyporządkowań. W tym celu w definicji kombinacji liniowej klas ścieżek współstycznych w x wybierzmy lokalną mapę $\kappa\equiv\kappa_i$ i oznaczmy

$$\gamma_{v_1,v_2;\lambda_1,\lambda_2;i}(t):=\kappa_i^{-1}\big(\kappa_i(x)+t\triangleright(\lambda_1\triangleright v_1+\lambda_2\triangleright v_2)\big)\,,$$

a wtedy

$$\begin{aligned}&V_x\big(\lambda_1\triangleright[\gamma_1]_{\sim_x}+\lambda_2\triangleright[\gamma_2]_{\sim_x}\big)\equiv\big[\big(\gamma_{v_1,v_2;\lambda_1,\lambda_2;i}(0),i,\mathsf{D}(\kappa_i\circ\gamma_{v_1,v_2;\lambda_1,\lambda_2;i})(0)\big)\big]_{\sim_x}\\ &= \big[\big(\kappa_i^{-1}\circ\kappa_i(x),i,\lambda_1\triangleright v_1+\lambda_2\triangleright v_2\big)\big]_{\sim_x}=\big[\big(x,i,\lambda_1\triangleright v_1+\lambda_2\triangleright v_2\big)\big]_{\sim_x}\\ &\equiv \lambda_1\triangleright\big[\big(x,i,\mathsf{D}(\kappa_i\circ\gamma_1)(0)\big)\big]_{\sim_x}+\lambda_2\triangleright\big[\big(x,i,\mathsf{D}(\kappa_i\circ\gamma_2)(0)\big)\big]_{\sim_x}\end{aligned}$$

$$\equiv \quad \lambda_1 \triangleright V_x\big([\gamma_1]_{\sim_x}\big) + \lambda_2 \triangleright V_x\big([\gamma_2]_{\sim_x}\big)\,.$$

Jako odwrotność $\mathbb{R}$-liniowej bijekcji odwzorowanie Γ_x jest automatycznie $\mathbb{R}$-liniowe. $\square$

Możemy już teraz przedstawić alternatywną w stosunku do tej z Tw. 1 metodę rekonstrukcji struktury globalnej wiązki włóknistej z danych lokalnych, która doprowadzi nas do opisu (równoważnego temu wspomnianemu uprzednio) przestrzeni totalnej wiązki (włóknistej) stycznej $\mathsf{T}M$.

Definicja 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. **Wiązka** (**włóknista**) **styczna nad rozmaitością** klasy C^{k+1} $(M, \widehat{\mathscr{A}})$ wymiaru $n \in \mathbb{N}^\times$ o atlasie $\widehat{\mathscr{A}}$ złożonym z map lokalnych $\kappa_i \,:\, \mathcal{O}_i \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i,\ i \in I$ to wiązka włóknista o składowych:

- baza M, o strukturze rozmaitości różniczkowalnej klasy C^{k+1} zadawanej przez atlas $\widehat{\mathscr{A}}$;
- przestrzeń totalna
$$\mathsf{T}M := \bigsqcup_{x \in M} \mathsf{P}_x$$
o strukturze rozmaitości opisanej poniżej;
- włókno typowe $\mathbb{R}^{\times n}$ o naturalnej strukturze rozmaitości różniczkowalnej klasy C^∞ (więc też w szczególności klasy C^k);
- rzut na bazę
$$\pi_{\mathsf{T}M} \,:\, \mathsf{T}M \longrightarrow M \,:\, ([\gamma]_{\sim_x}, x) \longmapsto x\,.$$

Przy tym odwzorowania

$$\mathsf{T}\kappa_i \,:\, \mathsf{T}\mathcal{O}_i := \pi_{\mathsf{T}M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times n} \,:\, \big([\gamma]_{\sim_x}, x\big) \longmapsto \big(\kappa_i(x), \mathsf{D}(\kappa_i \circ \gamma)(0)\big)$$

indukują na $\mathsf{T}M$ mocną topologię cofnięciową z topologii produktowej (podprzestrzeni) na zbiorach $\mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times n} \subset \mathbb{R}^{\times 2n}$, tj. taką, w której podzbiór $\mathcal{V} \subset \mathsf{T}M$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek

$$\forall_{i \in I} \,:\, \mathsf{T}\kappa_i(\mathcal{V} \cap \mathsf{T}\mathcal{O}_i) \in \mathscr{T}\big(\mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times n}\big)\,.$$

W tej topologii odwzorowania $\mathsf{T}\kappa_i$ są jawnie homeomorficzne, stanowią przeto mapy lokalne, zwane **mapami naturalnymi**, dla których transformacje współrzędniowe to

$$\begin{aligned}
\mathsf{T}t_{ij} := \mathsf{T}\kappa_i \circ \big(\mathsf{T}\kappa_j\big)^{-1} \quad &: \quad \kappa_j(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{\times n} \xrightarrow{\cong} \kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{\times n} \\
&: \quad \big(\kappa_j(x), \mathsf{D}(\kappa_j \circ \gamma)(0)\big) \longmapsto \big(\kappa_i(x), \mathsf{D}(\kappa_i \circ \gamma)(0)\big) \\
&\qquad \equiv \big(t_{ij}\big(\kappa_j(x)\big), \mathsf{D}(t_{ij} \circ \kappa_j \circ \gamma)(0)\big) \\
&\qquad = \big(t_{ij}\big(\kappa_j(x)\big), \mathsf{D}t_{ij}\big(\kappa_j(x)\big)\big(\mathsf{D}(\kappa_j \circ \gamma)(0)\big)\big)\,.
\end{aligned}$$

Zależność punktu w obrazie od argumentu z dziedziny jest klasy C^{k+1} w składowej bazowej (z założenia),

$$t_{ij} \in \mathrm{Diff}^{k+1}\big(\kappa_j(\mathcal{O}_{ij}), \kappa_i(\mathcal{O}_{ij})\big)\,,$$

i klasy C^k w składowej z włókna w argumencie bazowym,

$$\mathsf{D}t_{ij} \in C^k\big(\kappa_j(\mathcal{O}_{ij}), \mathbb{R}^{\times n^2}\big)\,,$$

a nadto liniowa, więc klasy C^k w argumencie z włókna $\mathsf{D}(\kappa_j \circ \gamma)(0)$, czyli ostatecznie klasy C^k, i jako taka zadaje na $\mathsf{T}M$ strukturę rozmaitości różniczkowalnej klasy C^k. Zarazem odwzorowania $\mathsf{T}\kappa_i$ pełnią też rolę lokalnych trywializacji, tautologicznie C^k-gładkich względem zdefiniowanej tu (przy ich użyciu) struktury różniczkowej. Wreszcie też rzut na bazę jest surjekcją klasy C^k jako superpozycja odwzorowań tego samego typu,

$$\pi_{\mathsf{T}M}\restriction_{\mathsf{T}\mathcal{O}_i} = \kappa_i^{-1} \circ \mathrm{pr}_1 \circ \mathsf{T}\kappa_i\,.$$

Uwaga 1. Odwzorowania (5) określają równoważność (izomorfizm) między oboma opisami wiązki stycznej zgodną z naturalną strukturą liniową na włóknach $\mathsf{T}M$, opisaną w Stw. 2. Odwzorowanie

$$\iota_{x;i} \;:\; (\mathsf{T}M)_x \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{\times n} \;:\; \big([\gamma]_{\sim_x}, x\big) \longmapsto \mathsf{D}(\kappa^i \circ \gamma)(0)\,.$$

jest izomorfizmem (niekanonicznym) włókna $(\mathsf{T}M)_x \equiv \mathsf{P}_x$ nad punktem $x \in \mathcal{O}_i \subset B$ z włóknem typowym $\mathbb{R}^{\times n}$. Bez trudu wskazujemy nad każdym punktem B bazę w wiązce przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowych $\mathsf{T}M$, a mianowicie – dla $x \in \mathcal{O}_i$ i pewnego $\varepsilon_k > 0$ –

$$\mathsf{T}_x M = \bigoplus_{k=1}^{n} \langle [\gamma_k]_{\sim_x} \rangle_{\mathbb{R}}\,, \qquad \gamma_k \;:\;]-\varepsilon_k, \varepsilon_k[\longrightarrow M \;:\; t \longmapsto \tau_i^{-1}\big(\tau_i(x) + t \triangleright e_k\big)\,,$$

gdzie $\{e_k\}_{k \in \overline{1,n}}$ jest bazą standardową $\mathbb{R}^{\times n}$.

Zaobserwowaną w powyższym przykładzie strukturę wiązki przestrzeni liniowych formalizujemy w

Definicja 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy, ustalmy (dowolnie) $n \in \mathbb{N}$ i rozważmy $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ze standardową topologią (euklidesową) i strukturą różniczkową klasy C^∞. **Wiązka wektorowa rzędu n nad ciałem $\mathbb{K}$** klasy C^∞ to wiązka włóknista $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ o własnościach

- $\forall_{x \in B} \;:\; \mathbb{V}_x \equiv \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\{x\}) \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{(<\infty)}$;
- ograniczenia dyfeomorfizmów klasy C^∞ (lokalnych trywializacji)

$$\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i \restriction_{\mathbb{V}_x} \;:\; \mathbb{V}_x \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^{\times n}\,, \quad x \in B$$

  są izomorfizmami przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowych,

przy czym odwzorowania definiujące strukturę $\mathbb{K}$-liniową na włóknach $\mathbb{V}$ są klasy C^∞, w szczególności więc mamy dyfeomorfizm

$$\mathbb{A} \;:\; \mathbb{V} \times_B \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V} \tag{6}$$

modelowany na definiującej operacji binarnej $A^n \;:\; \mathbb{K}^{\times n} \times \mathbb{K}^{\times n} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times n}$ w rozumieniu diagramu przemiennego

$$\begin{tikzcd} \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times_B \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[r, "\mathbb{A}"] \arrow[d, "\tau_i \times \tau_i"'] & \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[d, "\tau_i"] \\ \big(\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}\big) \times_{\mathcal{O}_i} \big(\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}\big) \arrow[r, "(\mathrm{pr}_1, A^n \circ \mathrm{pr}_{2,4})"'] & \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} \end{tikzcd} \tag{7}$$

oraz rodzinę dyfeomorfizmów

$$\mathbb{K}^\times \longrightarrow \mathrm{Diff}^k(\mathbb{V}) \;:\; \lambda \longmapsto \mathbb{L}_\lambda \tag{8}$$

o $\mathbb{K}$-liniowych ograniczeniach do włókien, uzupełnianą przez odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe $\mathbb{L}_{0_{\mathbb{K}}}$, modelowanych na definiującym działaniu $\ell^n \;:\; \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{\times n} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times n}$ w rozumieniu diagramu przemiennego

$$\begin{tikzcd} \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[r, "\mathbb{L}_\lambda"] \arrow[d, "\tau_i"'] & \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[d, "\tau_i"] \\ \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} \arrow[r, "\ell^n_\lambda"'] & \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} \end{tikzcd}\;. \tag{9}$$

W przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mówimy o **rzeczywistej wiązce wektorowej**, gdy zaś $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ – o **zespolonej wiązce wektorowej**.

Rząd wiązki będziemy oznaczać symbolem $\mathrm{rk}\,\mathbb{V}$. Ilekroć $\mathrm{rk}\,\mathbb{V}=1$, wiązkę określamy mianem **wiązki liniowej** i zwyczajowo oznaczamy symbolem L,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r] & L \arrow[d, "\pi_L"] \\ & B \end{tikzcd} .$$

Odwzorowanie (różniczkowalne klasy C^∞)

$$\mathbf{0}_{\mathbb{V}}\ :\ B\longrightarrow\mathbb{V}\ :\ x\longmapsto\tau_i^{-1}(x,\mathbf{0}^n)\,,\quad x\in\mathcal{O}_i\,,$$

nosi miano **cięcia zerowego** wiązki wektorowej $\mathbb{V}$. Jest ono cięciem globalnym $\mathbb{V}$ w rozumieniu Uwagi **??**, przy czym zarówno zbiór cięć lokalnych $\Gamma_{\rm loc}(\mathbb{V})$, jak i zbiór cięć globalnych $\Gamma(\mathbb{V})$ niosą naturalną (punktową) strukturę modułu nad pierścieniem $C^\infty(B,\mathbb{K})$.

Podwiązka wektorowa rzędu $m\le n$ wiązki wektorowej $(\mathbb{V},B,\mathbb{K}^{\times n},\pi_{\mathbb{V}})$ to podwiązka $(\mathbb{W},B,\mathbb{K}^{\times m},\pi_{\mathbb{V}}\restriction_{\mathbb{W}})$ tejże wiązki (włóknistej) o tej własności, że nad dowolnym punktem bazy $x\in B$ jej włókno $\mathbb{W}_x\subset\mathbb{V}_x$ jest podprzestrzenią $\mathbb{K}$-liniową.

Morfizm wiązek wektorowych (nad ciałem $\mathbb{K}$**)** $(\mathbb{V}_\alpha,B_\alpha,\mathbb{K}^{\times n_\alpha},\pi_{\mathbb{V}_\alpha})$, $n_\alpha\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\{1,2\}$ to dwójka (Φ,f) złożona z morfizmu wiązek włóknistych

$$(\Phi,f)\ :\ (\mathbb{V}_1,B_1,\mathbb{K}^{\times n_1},\pi_{\mathbb{V}_1})\longrightarrow(\mathbb{V}_2,B_2,\mathbb{K}^{\times n_2},\pi_{\mathbb{V}_2})\,,$$

którego ograniczenie do włókna nad dowolnym punktem bazy $x\in B_1$,

$$\Phi\restriction_{\mathbb{V}_{1\,x}}\ :\ \mathbb{V}_{1\,x}\longrightarrow\mathbb{V}_{2\,f(x)}\,,\tag{10}$$

jest odwzorowaniem $\mathbb{K}$-liniowym. **Rząd morfizmu wiązek wektorowych** (Φ,f) to odwzorowanie

$$\mathrm{rk}\,(\Phi,f)\ :\ B_1\longrightarrow\mathbb{N}\ :\ x\longmapsto\mathrm{rk}\big(\Phi\restriction_{\mathbb{V}_{1\,x}}\big)\,.$$

Wiązki wektorowe skończonego rzędu nad ciałem $\mathbb{K}$ o bazie B wraz z morfizmami wiązek wektorowych między nimi tworzą **kategorię wiązek wektorowych skończonego rzędu nad ciałem** $\mathbb{K}$ **nad** B, którą będziemy oznaczać symbolem

$$\mathbf{VectBun}_{\mathbb{K}}^{(<\infty)}(B)\,.$$

Podobnie jak same wiązki wektorowe, morfizmy tych wiązek pokrywające dyfeomorfizm identycznościowy na bazie mają prosty opis lokalny, z którego przyjdzie nam skorzystać w przyszłości.

Twierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 4. Dowolny morfizm $(\Phi,\ \mathrm{id}_B)$ wiązek wektorowych $(\mathbb{V}_\alpha,B,\mathbb{K}^{\times n_\alpha},\pi_{\mathbb{V}_\alpha})$, $\alpha\in\{1,2\}$ o odnośnych trywializacjach lokalnych $\tau_i^\alpha\ :\ \pi_{\mathbb{V}_\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i)\xrightarrow{\cong}\mathcal{O}_i\times\mathbb{K}^{\times n_\alpha}$ (stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\mathcal{O}_B=\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$) i odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^\alpha\ :\ \mathcal{O}_{ij}\longrightarrow\mathrm{GL}(n_\alpha;\mathbb{K})$, opisany przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathbb{V}_1 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_{\mathbb{V}_1}"'] & \mathbb{V}_2 \arrow[d, "\pi_{\mathbb{V}_2}"] \\ B \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_B"'] & B \end{tikzcd} ,$$

zadaje rodzinę $\{h_i\}_{i\in I}$ odwzorowań macierzowych (lokalnie) klasy C^∞

$$h_i\ :\ \mathcal{O}_i\longrightarrow\mathrm{Mat}(n_1\times n_2,\mathbb{K})\,,\quad i\in I$$

o własności

$$\forall_{x\in\mathcal{O}_{ij}}\ :\ g_{ij}^2(x)\cdot h_j(x)=h_i(x)\cdot g_{ij}^1(x)\,.\tag{11}$$

I odwrotnie, każda taka rodzina wyznacza jedyny morfizm opisanego typu.

<u>*Dowód:*</u> Wybierzmy (dowolnie) bazę $\{e_a\}_{a\in\overline{1,n_1}}$ w przestrzeni $\mathbb{K}^{\times n_1}$ i na tej podstawie zdefiniujmy cięcia lokalne

$$\varepsilon_a^{(i)} \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{V}_1 \;:\; x \longmapsto \tau_i^{1\,-1}(x,e_a)\,. \tag{12}$$

Zauważmy, że odwzorowanie Φ jest w pełni określone przez wartości przyjmowane przezeń na powyższych cięciach, oto bowiem wobec założonej $\mathbb{K}$-liniowości τ_i oraz Φ w dowolnym punkcie

$$v \equiv \tau_i^{-1}\big(x, v^a \triangleright_n e_a\big) \equiv \mathbb{L}^{(1)}_{v^a}\big(\varepsilon_a^{(i)}(x)\big)\,, \qquad x \in \mathcal{O}_i$$

otrzymujemy

$$\Phi(v) = \Phi\big(\mathbb{L}^{(1)}_{v^a}\big(\varepsilon_a^{(i)}(x)\big)\big) = \mathbb{L}^{(2)}_{v^a} \circ \Phi\big(\varepsilon_a^{(i)}(x)\big)\,.$$

Wybierzmy zatem (dowolnie) bazę $\{f_r\}_{r\in\overline{1,n_2}}$ w $\mathbb{K}^{\times n_2}$, o bazie dualnej $\{f_r^*\}_{r\in\overline{1,n_2}}$, i oznaczmy odnośne cięcia lokalne $\mathbb{V}_2$ jako

$$\phi_r^{(i)} \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{V}_2 \;:\; x \longmapsto \tau_i^{2\,-1}(x,f_r)\,,$$

po czym zdefiniujmy

$$h_{i\,ar} \coloneqq f_r^* \circ \mathrm{pr}_2 \circ \tau_i^2 \circ \Phi \circ \tau_i^{1\,-1}(\cdot, e_a) \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{Mat}(n_1 \times n_2; \mathbb{K})\,,$$

czyli poprzez formułę

$$\mathbb{L}^2_{h_{i\,ar}(x)}\big(\phi_r^{(i)}(x)\big) \coloneqq \Phi\big(\varepsilon_a^{(i)}(x)\big)\,. \tag{13}$$

Powyższe dane lokalne morfizmu Φ możemy zapisać w postaci macierzy (ε_A to stosowne kanoniczne izomorfizmy $V_A^* \otimes_{\mathbb{K}} W_A \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_A, W_A)$)

$$h_i(x) \coloneqq h_{i\,ar}(x) \triangleright \varepsilon_1(e_a^* \otimes_{\mathbb{K}} f_r)\,, \quad x \in \mathcal{O}_i\,,$$

podobnie reprezentujemy też odwzorowania przejścia:

$$g^1_{ij}(x) = g^1_{ij\,ab}(x) \triangleright \varepsilon_2(e_a^* \otimes_{\mathbb{K}} e_b)\,, \qquad\qquad g^2_{ij}(x) = g^2_{ij\,rs}(x) \triangleright \varepsilon_3(f_r^* \otimes_{\mathbb{K}} f_s)\,.$$

Przywołując definicję tych ostatnich, ustalamy relację

$$\tau_j^{2\,-1}\big(x, h_j(x)(e_a)\big) = \tau_i^{2\,-1}\big(x, g^2_{ij}(x)\cdot h_j(x)(e_a)\big)\,,$$

a jednocześnie, wobec $\mathbb{K}$-liniowości τ_i^α oraz Φ, znajdujemy

$$\begin{aligned}
\tau_j^{2\,-1}\big(x, h_j(x)(e_a)\big) &= \Phi\big(\tau_j^{1\,-1}(x,e_a)\big) = \Phi\big(\tau_i^{1\,-1}\big(x, g^1_{ij}(x)(e_a)\big)\big) \\
&= \mathbb{L}^2_{g^1_{ij\,ab}(x)} \circ \Phi\big(\tau_i^{1\,-1}(x,e_b)\big) = \mathbb{L}^2_{g^1_{ij\,ab}(x)} \circ \tau_i^{2\,-1}\big(x, h_i(x)(e_b)\big) \\
&= \tau_i^{2\,-1}\big(x, h_i(x)\cdot g^1_{ij}(x)(e_a)\big)\,.
\end{aligned}$$

Niechaj teraz $(\mathbb{V}_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times n_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$, $\alpha \in \{1,2\}$ będą wiązkami wektorowymi o trywializacjach lokalnych $\tau_i^\alpha \;:\; \pi^{-1}_{\mathbb{V}_\alpha}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n_\alpha}$ i odwzorowaniach przejścia $g^\alpha_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{GL}(n_\alpha; \mathbb{K})$. Niech też $h_i \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{Mat}(n_1 \times n_2; \mathbb{K})$, $i \in I$ będzie rodziną odwzorowań jak w tezie dowodzonego twierdzenia, przy użyciu której określamy odwzorowania lokalne

$$\Phi_i \;:\; \pi^{-1}_{\mathbb{V}_1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \pi^{-1}_{\mathbb{V}_2}(\mathcal{O}_i) \;:\; \tau_i^{1\,-1}(x,v) \longmapsto \tau_i^{2\,-1}\big(x, h_i(x)(v)\big)\,,$$

które w świetle tożsamości, spełnionej dla dowolnych $x \in \mathcal{O}_{ij}$ i $v \in \mathbb{K}^{\times n_1}$,

$$\begin{aligned}
\Phi_j\big(\tau_i^{1\,-1}(x,v)\big) &= \Phi_j\big(\tau_j^{1\,-1}\big(x, g^1_{ji}(x)(v)\big)\big) = \tau_j^{2\,-1}\big(x, h_j(x)\cdot g^1_{ji}(x)(v)\big) \\
&= \tau_i^{2\,-1}\big(x, g^2_{ij}(x)\cdot h_j(x)\cdot g^1_{ji}(x)(v)\big) = \tau_i^{2\,-1}\big(x, h_i(x)(v)\big) \\
&= \Phi_i\big(\tau_i^{1\,-1}(x,v)\big)\,,
\end{aligned}$$

jawią się ograniczeniami odwzorowania globalnie gładkiego

$$\Phi \;:\; \mathbb{V}_1 \longrightarrow \mathbb{V}_2\,, \qquad\qquad \Phi\restriction_{\pi^{-1}_{\mathbb{V}_1}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i\,.$$

Odwzorowanie to jest w oczywisty sposób $\mathbb{K}$-liniowe i zachowuje włókna. □

Wynikiem teorii wiązek wektorowych kluczowym w kontekście konstrukcji wiązki stycznej nad rozmaitością zanurzoną jest

Twierdzenie 3. Przyjmijmy zapis Def. 2-3-4.4 i niechaj $(\Phi, f) : (\mathbb{V}_1, B_1, \mathbb{K}^{\times n_1}, \pi_{\mathbb{V}_1}) \longrightarrow (\mathbb{V}_2, B_2, \mathbb{K}^{\times n_2}, \pi_{\mathbb{V}_2})$ będzie morfizmem wiązek wektorowych $\mathbb{V}_A$, $A \in \{1,2\}$ stałego rzędu $\mathrm{rk}\,(\Phi, f) \equiv r \in \mathbb{N}$. Wówczas **jądro morfizmu** (Φ, f)

$$\mathrm{Ker}\,(\Phi, f) \coloneqq \bigsqcup_{x \in B_1} \mathrm{Ker}\left(\Phi\restriction_{\mathbb{V}_{1\,x}}\right)$$

niesie kanoniczną strukturę podwiązki wektorowej jego dziedziny $\mathbb{V}_1$, przy czym

$$\mathrm{rk}\,\mathrm{Ker}\,(\Phi, f) = n_1 - r\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Jest oczywistym, że ograniczenie atlasu $\mathbb{V}_1$ do podprzestrzeni topologicznej $\mathrm{Ker}\,(\Phi, f)$ indukuje na niej strukturę (pod)rozmaitości klasy C^∞ (wszak nad każdym punktem bazy mamy do czynienia z podprzestrzenią liniową włókna), przy czym nad dowolnym punktem bazy $x \in B$ zachodzi – na mocy algebraicznego bilansu wymiarów –

$$\left(\pi_{\mathbb{V}_1}\restriction_{\mathrm{Ker}\,(\Phi,f)}\right)^{-1}(\{x\}) \cong \mathbb{K}^{\times n_1 - r}\,.$$

Pozostaje jedynie skonstruować gładkie trywializacje lokalne tak otrzymanej wiązki (wzajem izomorficznych) przestrzeni wektorowych. Zważywszy lokalny charakter zagadnienia, ograniczymy się do (dostatecznie małych) otoczeń otwartych: $\mathcal{O}_1$ (ustalonego dowolnie) punktu $x_1 \in B_1$ oraz $\mathcal{O}_2 \supset f(\mathcal{O}_1)$ punktu $f(x_1)$, na których określone są dyfeomorfizmy (klasy C^∞)

$$\tau_{\mathcal{O}_A} : \pi_{\mathbb{V}_A}^{-1}(\mathcal{O}_A) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_A \times \mathbb{K}^{\times n_A}\,, \quad A \in \{1,2\}\,.$$

W obrazie tychże morfizm (Φ, f) przybiera postać

$$\Phi_{21} \equiv \tau_{\mathcal{O}_2} \circ \Phi \circ \tau_{\mathcal{O}_1}^{-1} : \mathcal{O}_1 \times \mathbb{K}^{\times n_1} \longrightarrow \mathcal{O}_2 \times \mathbb{K}^{\times n_2} : (x, v) \longmapsto \big(f(x), L_\Phi(x)(v)\big)$$

dla pewnego gładkiego odwzorowania

$$L_\Phi : \mathcal{O}_1 \longrightarrow \mathbb{K}(n_2) : x \longmapsto L_\Phi(x)$$

o rzędzie

$$\mathrm{rk}\,L_\Phi(x) = r\,.$$

Dokonajmy rozkładu

$$\mathbb{K}^{\times n_1} = \mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_1\,, \qquad \mathbb{K}^{\times n_2} = \mathrm{Image}\,L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_2\,,$$

określonego dla pewnych przestrzeni dopełniających $\Delta_A \subset \mathbb{K}^{\times n_A}$ o wymiarach

$$\dim_{\mathbb{K}} \Delta_1 = n_1 - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Image}\,L_\Phi(x_1) = n_2 - \dim_{\mathbb{K}} \Delta_2\,.$$

Wobec oczywistej relacji

$$\Delta_1 \cong \mathrm{Image}\,L_\Phi(x_1)$$

możemy następnie skonstruować indeksowaną przez $\mathcal{O}_1 \ni x$ rodzinę odwzorowań $\mathbb{K}$-liniowych

$$\begin{aligned}\widetilde{\Lambda}_\Phi(x) \quad &: \quad \mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2 \equiv \mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_1 \oplus \Delta_2 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1) \oplus \mathrm{Image}\,L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_2 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \equiv \mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2} \\ &: \quad (k, \delta_1, \delta_2) \longmapsto (k, 0_{\mathrm{Image}\,L_\Phi(x_1)}, \delta_2) +_\oplus \big(0, L_\Phi(x)\big)(k, \delta_1)\,,\end{aligned}$$

o jawnie odwracalnym elemencie

$$\widetilde{\Lambda}_\Phi(x_1) = \mathrm{id}_{\mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1)} \oplus L_\Phi(x_1)\restriction_{\Delta_1} \oplus \mathrm{id}_{\Delta_2}\,.$$

Jako że odwzorowania odwracalne tworzą podzbiór otwarty w $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2, \mathrm{Ker}\, L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2})$ (a mianowicie: dopełnienie przeciwobrazu zbioru domkniętego $\{0_{\mathbb{K}}\}$ względem odwzorowania $\det_{(n_1+\dim_{\mathbb{K}} \Delta_2)}$ będącego superpozycją odwzorowań ciągłych, więc też ciągłego), przeto $\widetilde{\Lambda}_\Phi(x_1)$ należy do tego podzbioru wraz z pewnym swoim otoczeniem otwartym $\mathcal{U}$, którego przeciwobraz względem (ciągłego) odwzorowania $\widetilde{\Lambda}_\Phi$ jest otoczeniem otwartym $\mathcal{V}_1 \equiv \widetilde{\Lambda}_\Phi^{-1}(\mathcal{U}) \ni x_1$ o własności $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{O}_1$. Oto więc obok C^∞-gładkiego odwzorowania

$$\Lambda_\Phi \equiv \widetilde{\Lambda}_\Phi \restriction_{\mathcal{V}_1} \;:\; \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2, \mathrm{Ker}\, L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2}\big)\,,$$

mamy też C^∞-gładkie odwzorowanie

$$V_\Phi \equiv \mathrm{Inv} \circ \Lambda_\Phi \;:\;:\; \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}\big(\mathrm{Ker}\, L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2}, \mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2\big)\,,$$

(punktowo) odwrotne do Λ_Φ w każdym $x \in \mathcal{V}_1$. Rozważmy dowolny wektor

$$(k, \delta_1) \in \mathrm{Ker}\, L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_1 \equiv \mathbb{K}^{\times n_1}\,.$$

Ustaliwszy $x \in \mathcal{V}_1$, stwierdzamy, że

$$\begin{aligned}(k,\delta_1) \in \mathrm{Ker}\, L_\Phi(x) \qquad &\Longleftrightarrow \qquad \Lambda_\Phi(x)(k,\delta_1,0_{\Delta_2}) = (k, 0_{\Delta_1}, 0_{\Delta_2}) \\ &\Longleftrightarrow \qquad (k,\delta_1,0_{\Delta_2}) = V_\Phi(x)(k, 0_{\Delta_1}, 0_{\Delta_2})\,.\end{aligned}$$

Wziąwszy pod uwagę włożenia kanoniczne:

$$\jmath_{\mathrm{Ker}\, L_\Phi(x_1)} \;:\; \mathrm{Ker}\, L_\Phi(x_1) \rightarrowtail \mathrm{Ker}\, L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2}$$

oraz

$$\jmath_{\mathbb{K}^{\times n_1}} \;:\; \mathbb{K}^{\times n_1} \rightarrowtail \mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2\,,$$

możemy zatem zapisać

$$\jmath_{\mathbb{K}^{\times n_1}}\big(\mathrm{Ker}\, L_\Phi(x)\big) \subseteq V_\Phi(x)\big(\mathrm{Image}\, \jmath_{\mathrm{Ker}\, L_\Phi(x_1)}\big)\,,$$

ale też

$$\begin{aligned}&\dim_{\mathbb{K}} \jmath_{\mathbb{K}^{\times n_1}}\big(\mathrm{Ker}\, L_\Phi(x)\big) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, L_\Phi(x) = n_1 - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Image}\, L_\Phi(x) \\ = \;& n_1 - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Image}\, L_\Phi(x_1) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, L_\Phi(x_1) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Image}\, \jmath_{\mathrm{Ker}\, L_\Phi(x_1)} \\ \equiv \;& \dim_{\mathbb{K}} V_\Phi(x)\big(\mathrm{Image}\, \jmath_{\mathrm{Ker}\, L_\Phi(x_1)}\big)\,,\end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika z odwracalności $V_\Phi(x)$. Widzimy więc, że

$$\jmath_{\mathbb{K}^{\times n_1}}\big(\mathrm{Ker}\, L_\Phi(x)\big) = V_\Phi(x)\big(\mathrm{Image}\, \jmath_{\mathrm{Ker}\, L_\Phi(x_1)}\big)\,,$$

i na tej podstawie konstatujemy, że odwzorowanie

$$\begin{aligned}\tau_{\mathcal{V}_1}^{-1} \quad &: \quad \mathcal{V}_1 \times \mathrm{Ker}\, L_\Phi(x_1) \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(\Phi_{21}, f\restriction_{\mathcal{O}_1})\restriction_{\mathcal{V}_1} \\ &: \quad (x,k) \longmapsto \big(x, \mathrm{pr}_{1,2} \circ V_\Phi(x)(k, 0_{\mathrm{Image}\, L_\Phi(x_1)}, 0_{\Delta_2})\big)\end{aligned}$$

jest (C^∞-)gładką odwrotnością trywializacji lokalnej (także (C^∞-)gładkiej)

$$\begin{aligned}\tau_{\mathcal{V}_1} \quad &: \quad \mathrm{Ker}\,(\Phi_{21}, f\restriction_{\mathcal{O}_1})\restriction_{\mathcal{V}_1} \longrightarrow \mathcal{V}_1 \times \mathrm{Ker}\, L_\Phi(x_1) \\ &: \quad (x,v) \longmapsto \big(x, \mathrm{pr}_1 \circ \Lambda_\Phi(x)(v, 0_{\Delta_2})\big)\,.\end{aligned}$$

Tym sposobem ustanawiamy referencyjną przestrzeń wektorową $\mathrm{Ker}\, L_\Phi(x_1)$ w roli włókna typowego, co jest wynikiem pożądanym. $\square$