

Lech, Čech : De Rham

- Studium Kompleksów
Odmierzonych

2022/23



CEL : USTANOWIENIE RELACJI STRUKTURALNEJ ①
POMIĘDZY NAPOTYKANymi OBIEKTAMI
KOMBINATORYCZNYMI (KLASAMI OBSTRUKCJI,
KOMBINACJAMI KLASYFIKUJĄCYMI etc.)
i ZNANYMI OBIEKTAMI RÓŻNICZKOWO-GEOMETRYCZNYMI
(FORMAMI, CYKLAMI HOMOLOGICZNYMI etc.)

METODA : HAXAMOVA

AKTORY: $M \in \text{Ob Man}$

(2)

$$\Theta := \{\Theta_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{I}(M), \quad \bigcup_{i \in I} \Theta_i = M$$

(ozn. $\Theta_{i_1 i_2 \dots i_N} := \Theta_{i_1} \cap \Theta_{i_2} \cap \dots \cap \Theta_{i_N}$)

(POKRYCIE
OTWARTE)

Rozważamy odwzorowania ustalonego typu T

(e.g., lokalnie gradienty, lokalnie state etc.)

$M \rightarrow G$, gdzie $G \in \text{Ob AbGrp}$ — TE POZWALAJĄ

ZDEFINIOWAĆ GRUPE $\check{C}$ -P-KOTAŃCUKÓW ČECHA
(stow. z Θ , o wartościach w G)

$$\check{C}^p(\Theta; G) = \left\{ (f_{i_0 i_1 \dots i_p})_{i_0, i_1, \dots, i_p \in I} \mid f_{i_0 i_1 \dots i_p} \in \text{Map}_T(\Theta_{i_0 i_1 \dots i_p}, G) \right\}$$

NB: NOTACJA **MULTYPLIKATYWNA**:

$$\forall \sigma \in G_{\mathcal{S}_p} : f_{i_0(i_0)} i_1(i_1) \dots i_p(i_p) = \eta_{\sigma} \sigma \cdot f_{i_0 i_1 \dots i_p}$$

(3)

TA WSPÓŁOKREŚLA KOMPLEKS KOŁANOWYCH ČECHA

$(\check{C}^\bullet(\mathcal{O}; G), \check{\delta}^\bullet)$:

$$\check{C}^0(\mathcal{O}; G) \xrightarrow{\check{\delta}^{(0)}} \check{C}^1(\mathcal{O}; G) \xrightarrow{\check{\delta}^{(1)}} \dots \xrightarrow{\check{\delta}^{(p-1)}} \check{C}^p(\mathcal{O}; G) \xrightarrow{\check{\delta}^{(p)}} \dots$$

o OPERATORACH KOBRZECU ČECHA

$$(\check{f}_{i_0 i_1 \dots i_p})_{i_0 i_1 \dots i_p \in \bar{I}}$$

$$\check{\delta}^{(p)} f_{i_0 i_1 \dots i_p i_{p+1}} := \prod_{k=0}^{p+1} \epsilon_{i_k} \left(\text{Inv}^k \circ f_{i_0 i_1 \dots \underset{i_k}{i_{p+1}}} \right),$$

$$\epsilon_{i_k} f_{i_0 i_1 \dots \underset{i_k}{i_{p+1}}} = f_{i_0 i_1 \dots \underset{i_k}{i_{p+1}}} \mid \theta_{i_k}$$

$$\equiv f_{i_0 i_1 \dots \underset{i_k}{i_{p+1}}} \mid \theta_{i_0 i_1 \dots \underset{i_k}{i_{p+1}}} \cap \theta_{i_k} \equiv f_{i_0 i_1 \dots \underset{i_k}{i_{p+1}}} \mid \theta_{i_0 i_1 \dots i_{p+1}}$$

DEFINICJE POCHODNE:

GRUPA p-KOCYKLI

$$\check{Z}^p(\sigma; G) := \text{Ker } \check{\delta}^{(p)}$$

GRUPA p-KOBRZECÓW

$$\check{B}^p(\sigma; G) := \text{Im } \check{\delta}^{(p-1)}$$

p-ta GRUPA KOKOMOLOGII

$$\check{H}^p(\sigma; G) := \check{Z}^p(\sigma; G) / \check{B}^p(\sigma; G)$$

MIANEN KOKOMOLOGII WSECH ROZMIARÓW M
O WARTÓŚCIACH W G OKREŚLAMY

$$\check{H}^*(M; G) = \varinjlim_{\sigma} \check{H}^*(\sigma; G)$$

(PO ROZDROBNIENIACH)

GRANICA TA ISTNIEJE I JEST OSIĄGANIA NP. (5)
POPRZĘDZ SPRYTNY WYBÓR POLRYCIA: POKRYCIE DOBRE,
TJ. TAKIE, DLA KtóREGO

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \forall i_1, i_2, \dots, i_N \in I: (\Theta_{i_1 i_2 \dots i_N} \neq \emptyset \Rightarrow \Theta_{i_1 i_2 \dots i_N} \text{ ściągające})$$

POLRYCIA TAKIE ISTNIEJĄ NA RZYMNIŁOŚCIACH KLASY C^2
(DOWÓD DE RHAMA KONSTRUJE JE W POSTACI OTOCZEN
GEODEZYJNYCH W METRYCE RIEMANNOWSKIEJ ZAINDUKOWANEJ
Z MODELEM LOKALNEGO $\mathbb{R}^{\dim M}$).

OD TEJ POLY BĘDZIEMY DODATKOWO ZAKŁADAĆ, ŻE MAMY
DO CZYNIEŃIA Z POKRYCIEM LOKALNIE SKŁÓJONYM...

3 TAKIM STOWARZYSZANYM ROZKŁAD JEDNOŚCI ⑥

$$\{h_i : M \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}\}_{i \in I} : (P_{U1}) \forall x \in M, i \in I : 0 \leq h_i(x) \leq 1$$

$$(P_{U2}) \forall i \in I : \text{supp } h_i \subset \Theta_i$$

$$(P_{U3}) \sum_{i \in I} h_i = 1$$

WYBRAWSZY $T = \text{LOKALNIE STAŁE}$ i $G = \mathbb{R}$, OTRZYMUJEMY

TW.

$$\check{H}^*(M; \mathbb{R}) \cong H_{dR}^*(M)$$

D : IZOMORFIZM POWYŻSZY ZAINDUKOWANY Z ODWZOROWAŃ
 $\omega : \check{C}^p(\Theta; \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^p(M) : (f_{i_0 i_1 \dots i_p}) \mapsto - \sum_{i_0, i_1, \dots, i_p} f_{i_0 i_1 i_2 \dots i_p} h_{i_0} dh_{i_1} \wedge dh_{i_2} \wedge \dots \wedge dh_{i_p}$

NB: p -FORMA $h_{i_0} dh_{i_1} \wedge dh_{i_2} \wedge \dots \wedge dh_{i_p}$ JEST TOŻSAMOŚCIOWO $= 0$ (7)

POZA $i_0, i_1, \dots, i_p$ CO POZWAŁA DOWOLNIE PRZEDŁUŻYĆ $f_{i_0, i_1, \dots, i_p}$
DLA UŻYSKANIA WYRAŻENIA GŁADKIEGO.

BEZ TRUDU PRZEKONUJEMY SIĘ, ŻE ω JEST KOAFIZMEM
KOMPLEKSÓW KOTANCUKÓW, T.J. SPEENIA

$$\check{C}^p(\mathcal{O}; \mathbb{R}) \longrightarrow \check{C}^{p+1}(\mathcal{O}; \mathbb{R})$$

$$\omega \downarrow$$

$$\downarrow \omega$$

$$\Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$$

OTO BOWIEM

$$d\omega_f = - \sum_{i_0, i_1, \dots, i_p} f_{i_0, i_1, \dots, i_p} dh_{i_0} \wedge dh_{i_1} \wedge dh_{i_2} \wedge \dots \wedge dh_{i_p},$$

A Z DRUGIEJ STRONY

$$\omega_{\check{\sigma}^{(p)}_f} = - \sum_{i_0, i_1, \dots, i_{p+1}} \sum_{k=0}^{p+1} e_{i_k} (\text{Inv}^k \circ f_{i_0, i_1, \dots, i_{p+1}}) h_{i_0} dh_{i_1} \wedge dh_{i_2} \wedge \dots \wedge dh_{i_{p+1}}$$

uwzględniając tożsamość $\sum_{i_k} \xi_{i_k} h_{i_k} = 1 \Rightarrow \sum_{i_k} \xi_{i_k} dh_{i_k} = 0$ ⑧

OTRZYMUJEMY - ZGODNIE Z OZNAČENIAMI -

$$\omega_{\delta^p \Gamma_f} = - \sum_{i_1 i_2 \dots i_{p+1}} f_{i_1 i_2 \dots i_{p+1}} dh_{i_1} \wedge dh_{i_2} \wedge \dots \wedge dh_{i_{p+1}} \equiv d\omega_f.$$

JAKO TAKIE, ω . INDUKUJE HOMOMORFIZM GRUP KOHOMOLOGII.
 OZNACZMY GO SYMBOLEM $[\omega]_* : \check{H}^*(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_{dR}^*(M)$
 I SPRAWDZIMY JEHO SURJEKTYWNOŚĆ I INJEKTYWNOŚĆ DLA $p=2$.
 DOWÓD MOŻNA BEZ TRUDU UOGÓLNIĆ DLA DOWOLNEGO p

ROZWAŻMY REPREZENTANTA $\omega \in \mathcal{Z}_{dR}^2(M)$ KLASY $[\omega] \in H_{dR}^2(M)$
 DOBROC' $\mathcal{U}$ POZWAŁA NAM STOWARZYSZYĆ Z ω LOKALNIE GŁADKIE
 1-FORMY PIERWOTNE: $0 \leftarrow \omega|_{\mathcal{U}_i} = d\theta_i, \theta_i \in \Omega^1(\mathcal{U}_i)$

KTÓRE SPŁEŃNIAJĄ ADWOLCI

$$O \stackrel{d}{\leftarrow} (\Theta_j - \Theta_i) \Big|_{\mathcal{O}_{ij}} = d\gamma_{ij} \quad , \quad \gamma_{ij} \in C^\infty(\mathcal{O}_{ij}, \mathbb{R}) \quad ,$$

A DALEJ

$$O \stackrel{d}{\leftarrow} (\gamma_{jk} - \gamma_{ik} + \gamma_{ij}) \Big|_{\mathcal{O}_{ijk}} = c_{ijk} \in \mathbb{R} \quad , \quad \text{PRZY CZYM } c_{ijk} = c_{[ijk]} \quad ,$$

$$\text{A NADTO } \check{\delta}^{(2)} c_{ijk} = 0 \quad , \quad \text{CZYLI } (c_{ijk}) \in \check{Z}^2(\mathcal{O}; \mathbb{R}) \quad .$$

DLA INNEGO REPREZENTANTA: $\omega \mapsto \omega + d\Theta$ ZNAJDUJEMY

$$\Theta_i \mapsto \Theta_i + \Theta \Big|_{\mathcal{O}_i} \Rightarrow \text{MOŻEMY POŁOŻYĆ } \gamma_{ij} \mapsto \gamma_{ij} + 0 \quad ,$$

A ZATEM TAKŻE $c_{ijk} \mapsto c_{ijk} + 0$, CZYLI - W ISTOCIE -

ω JEST STONARZYSZONY Z $[\omega]$.

Biorąc pod uwagę swobodę wyboru form pierwotnych, (10)

$$\theta_i \mapsto \theta_i + d\psi_i, \quad \psi_i \in C^\infty(\theta_i, \mathbb{R})$$

$$\gamma_{ij} \mapsto \gamma_{ij} + (\psi_j - \psi_i)|_{\theta_{ij}} + \nu_{ij}, \quad \nu_{ij} \in \mathbb{R}$$

$$c_{ijk} \mapsto c_{ijk} + \delta^{\check{\nu}} \nu_{ijk},$$

stwierdzamy, że powyższe przyporządkowanie $[\omega] \mapsto c$

ma sens wyłącznie na poziomie (klas) kohomologii,

tj. mamy dobrze określone

$$c.: H_{dR}^2(M) \ni [\omega] \mapsto [c] =: c_{[\omega]} \in \check{H}^2(M; \mathbb{R})$$

(NB: wykorzystaliśmy dobroć θ , stąd M po prawej stronie.)

NIECHAJ TERAZ C_ω BĘDZIE 2-KO CYKLEM STOWARZYSZONYM (11)
 Z 2-KO CYKLEM DE RHAMA ω JAK WYŻEJ. PORÓWNAJMY
 ODNOŚNY 2-KO CYKL ω_{C_ω} Z WYJŚCIOWYM $\omega \dots$

WYKORZYSTUJĄC $C_{ijk}|_{\partial_{ijk}} = (C_{jke} - C_{ike} + C_{ije})|_{\partial_{ijk}}$ ORAZ (P43),
 STWIERDZAMY, ŻE NASTĘPUJE: $(\sum_i dh_i \leq 0)$

$$\omega_{C_\omega}|_{\partial_\omega} \equiv - \sum_{ijk} C_{ijk} h_i dh_j \wedge dh_k|_{\partial_\omega} \equiv - \sum_{ijk} C_{ijk}|_{\partial_{ijk}} h_i dh_j \wedge dh_k|_{\partial_\omega}$$

$$= - \sum_{ijk} (C_{jke} - C_{ike} + C_{ije}) h_i dh_j \wedge dh_k|_{\partial_\omega}$$

$$= - \sum_{ijk} C_{jke} h_i dh_j \wedge dh_k|_{\partial_\omega} = - \sum_{jik} C_{jke} dh_j \wedge dh_k|_{\partial_\omega}$$

$$= d \left(- \sum_{j,k} c_{ljk} h_j dh_k \right) \Big|_{\partial L}, \quad \text{A PONIEWAŻ TEŻ} \quad (12)$$

(Z TYCH SAMYCH POWODÓW)

$$\left(- \sum_{j,k} c_{ljk} h_j dh_k + \sum_{j,k} c_{mjk} h_j dh_k \right) \Big|_{\partial_{Lm}}$$

$$= \sum_{j,k} (c_{jlm} - c_{klm}) h_j dh_k \Big|_{\partial_{Lm}} = - \sum_{j,k} c_{klm} h_j dh_k \Big|_{\partial_{Lm}}$$

$$= - \sum_k c_{lmk} dh_k \Big|_{\partial_{Lm}} = d \left(- \sum_k c_{lmk} h_k \right) \Big|_{\partial_{Lm}}$$

$$= d \left(- \sum_k (\gamma_{mk} - \gamma_{lk} + \gamma_{lm}) h_k \right) \Big|_{\partial_{Lm}}$$

$$= - d\gamma_{lm} + d \left(\sum_k (\gamma_{lk} - \gamma_{mk}) h_k \right) \Big|_{\partial_{Lm}}, \quad \text{PRZETO 1-FORMY}$$

$$\eta_i := \theta_i + \sum_{j,k} c_{ijk} h_j dh_k \Big|_{\theta_i} + d\left(\sum_j r_{ij} h_j\right) \Big|_{\theta_i} \in \Omega^1(\theta_i) \quad \text{SPECENIĄZA} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} (\eta_j - \eta_i) \Big|_{\theta_{ij}} &= d\gamma_{ij} - d\gamma_{ji} + d\left(\sum_k (\gamma_{ik} - \gamma_{jk}) h_k\right) \Big|_{\theta_{ij}} \\ &\quad + d\left(\sum_k \gamma_{jk} h_k\right) \Big|_{\theta_{ij}} - d\left(\sum_k \gamma_{ik} h_k\right) \Big|_{\theta_{ij}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

SA ŻATEM OGRANICZENIAMI 1-FORMY GLOBALNIE GŁADKIEJ

$$\eta \in \Omega^1(M) \quad : \quad \eta \Big|_{\theta_i} = \eta_i$$

O WŁASNOŚCI

$$d\eta_i = d\theta_i - d\left(-\sum_{j,k} c_{ijk} h_j dh_k\right) \Big|_{\theta_i} = \omega \Big|_{\theta_i} - \omega_c \omega \Big|_{\theta_i} \quad ,$$

KTÓRA POZWALA NAM ZAPISAĆ

(14)

$$\omega = \omega_{c\omega} + d\eta, \text{ A ZATEM TAKŻE}$$

$$[\omega] = [\omega_{c\omega}].$$

POWYŻSZE POŁAZUJĄCE DOWODNIE, ŻE $[\omega]$ JEST SURJEKTYWNY.

POZOSTAJE PRZEKONAĆ SIĘ JESZCZE, ŻE JEST INJEKTYWNY...

W TYM CELU ROZWAŻMY KLASĘ $[c] \in \check{H}^2(M; \mathbb{R})$, DLA KTÓREJ $[\omega_c] = 0$. 2-KOCHKI C MOŻEMY WYZNACZYĆ W ROZUMOWANIU

ZE STR. 8-9 Z DOKŁADNOŚCIĄ DO 2-KOBRZECU. JEST OTÓŻ

$$\omega_c = d\theta, \theta \in \Omega^1(M), \text{ ZATEM MOŻEMY POŁOŻYĆ } \theta_i = \theta|_{\sigma_i},$$

$$\text{A WTEDY } d\chi_{ij} = (\theta - \theta)|_{\sigma_{ij}} = 0, \text{ UJYLI MOŻNA WYRAZİĆ } \chi_{ij} \in \mathbb{R},$$

WTE DY JEDNAK $C = \check{\delta}^{(n)} \gamma$, czyli $[C] = 0$, jak (15)
OCZEKIWAŁYŚMY. OSTATECZNIE WIĘC

$$[\omega] : \check{H}^2(M; \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H_{\text{dR}}^2(M). \quad \square$$

CZYMY MOŻEMY W TYM OBRAZKU ZNALEŹĆ ŚLAD GRUPY

$$\check{H}^*(M; \mathbb{Z})?$$

ODPOWIEDŹ POZYNOŚĆ (RE)INTERPRETACJA KLAS DE RHAMA $[\omega]$
JAKO OBIEKTÓW DUALNYCH DO KLAS HOMOLOGII (SINGULARNEJ)
 M , CZYLI — MÓWIĄC WPROST — OBIEKTÓW DAJĄCYCH SIĘ
CALKOWAĆ PO PODROZMAIŃCACH BEZ BRZEGU W M
W SPODÓB JAWNIE NIEZALEŻNY OD WYBORU REPREZENTANTA

(16)

KLASY $[\omega]$ W KOHOMOLOGII DE RHAMA ANI
 OD REPREZENTANTA KLASY $[\Sigma]$ PODROZMAITOŚCI Σ
 (CYKLU) O $\partial\Sigma = \emptyset$ I ORIENTACJI o, τ . WEDŁE SCHEMATU

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H_{\text{dr}}^p(M) \times H_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$: ([\omega], [\Sigma]) \mapsto \int_{(\Sigma, o)} \omega$$

GDZIE $H_p(M)$ JEST GRUPĄ (Z OPERACJĄ BINARNĄ I
 NA REPREZENTANTACH) KLAS p -PODROZMAITOŚCI BEZ BRZEGU W M
 WZGL. RELACJI $\Sigma_1 \sim \Sigma_2 \Leftrightarrow \exists \Omega$ $(p+1)$ -PODROZMAITOŚĆ: $\Sigma_1 \cup \bar{\Sigma}_2 = \partial\Omega$,
 PRZY CZYM $\bar{\Sigma}_2$ JEST TUTAJ ROZMAITOŚCIĄ Σ_2 O PRZECIWNĄ ORIENTACJĄ.
 (WIĘCEJ O DWOISTOŚCI MIĘDZY $H_{\text{dr}}^p(M)$ I $H_p(M)$ MOŻNA ZNALEZĆ
 W MONOGRAFII BOTTA I TU.)

NIECHAJ ZATEM $[\omega] \in H_{\text{dr}}^2(M)$, KTORĘJ TRYWIALIZACJA (17)
NAO POWYŻSZEJ (NP. DOSTYCH) $\{D_i\}_{i \in I}$ Daje $[c] \in \check{H}^2(M; \mathbb{Z})$ I NIECH $[\Sigma] \in H_2(M)$.

WYBIERZMY PAKIETAŻ $\Sigma - T_j$. ROZUTAD Σ NA PŁASZCZYN
 π , TWORZĄCE ZBIÓR Δ_2 , O KRAWĘDZIACH e , TWORZĄCYCH
ZBIÓR Δ_1 , O KONCACH v , TWORZĄCYCH ZBIÓR Δ_0 -
PODPORZĄDKOWANY $\mathcal{D}$, T_j . TAKI, DLA KTORÉGO
ISTNIEJE ODWZROKANIE $\iota : \Delta_2 \cup \Delta_1 \cup \Delta_0 \rightarrow I$

O WŁASNOŚCI: $\forall \tau \in \Delta_2 \cup \Delta_1 \cup \Delta_0 : \tau \subset \mathcal{D}_{\iota_\tau}$.

CAŁKA $\langle [\omega], [\Sigma] \rangle$ DAJE SIĘ ZAPISAC JAKO

$$\int_{(\Sigma, \phi)} \omega = \sum_{\pi \in \Delta_2} \int_{(\pi, \phi|_{\pi})} \omega \equiv \sum_{\pi \in \Delta_2} \int_{(\pi, \phi|_{\pi})} d\theta_{\pi} = \sum_{\pi \in \Delta_2} \int_{\partial(\pi, \phi|_{\pi})} \theta_{\pi} \quad (18)$$

OSTATNIA SUMA MOŻEMY ŁATWO ZAMIENICIĆ NA SUMĘ PO Δ_1 ,
 UZYSKUJĄC WSKAZĘ, IŻ KAŻDA KRAWĘDZ e — ORAZ KRAWĘDZ
 JEST ORIENTACJĄ θ_e — JEST SKŁADOWĄ BRZĘGU $\partial\pi_+(e)$ JEDNEJ
 Z PŁASZCZYN $\pi_+(e)$, OD KTÓREJ DZIEDZICZY ORIENTACJĘ,
 T.J. $\theta_e \equiv \partial\theta|_{\pi_+(e)}$, I ZARAŻEM — SKŁADOWĄ BRZĘGU
 $\partial\pi_-(e)$ INNEJ PŁASZCZYN $\pi_-(e)$, OD KTÓREJ DZIEDZICZY
 ORIENTACJĘ PRZECIWNĄ DO TEJ PRZEZ NAS WYBRANEJ,
 T.J. $\theta_e = -\partial\theta|_{\pi_-(e)}$, A ZATEM...

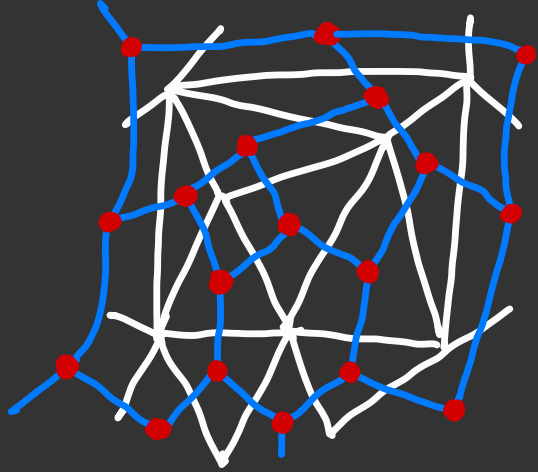
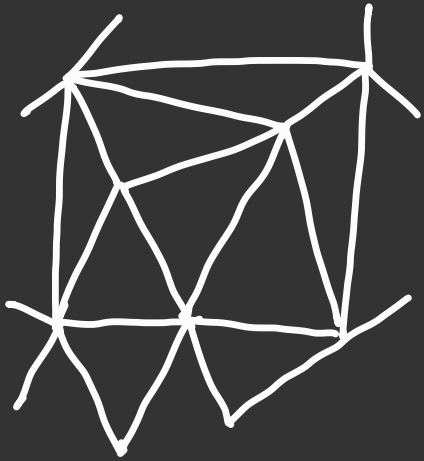
$$\int_{(\Sigma, \sigma)} \omega = \sum_{e \in \Delta_1} \int_{(e, \sigma_e)} (\theta_{\iota_{\pi_+(e)}} - \theta_{\iota_{\pi_-(e)}}) = \sum_{e \in \Delta_1} \int_{(e, \sigma_e)} d\gamma_{\iota_{\pi_-(e)} \iota_{\pi_+(e)}} \quad (19)$$

$$= \sum_{e \in \Delta_1} \int_{\partial(e, \sigma_e)} \gamma_{\iota_{\pi_-(e)} \iota_{\pi_+(e)}}$$

TAKŻE I TYM RAZEM MOŻEMY ZASTĄPIĆ SUMĘ KOŃCOWĄ SUMĄ PO ZBIORZE ELEMENTÓW PARIETAŻU WYMIARU O JEDEN NIŻSZEJO, PRZY CZYM DLA WYŁODY INTERPRETACJI WYNIKU DOKONANY NAJPIERW „SPRYTNEGO” WYBORU JEDNEGO PARIETAŻU. ZAŁOŻYMY OTÓŻ, ŻE TEN JEST TRIANGULACJĄ (DOWOLNĄ),

(20)

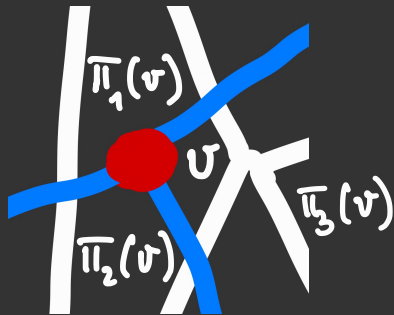
PO CZYM PRZEJDEM DO TRIANGULACJI DUALNEJ Δ^*



KTÓRY - MAJĄC WIERZCHOŁKI PRZYPISANE PŁANETKOM Δ ,
 KRAWĘDZIE JĄS - TRANSWERSALNIE KRAWĘDZIOM Δ -
 MA ISTOTNĄ CECHĘ WYRÓŻNIĄJĄCĄ : DOWOLNY JEGO
 WIERZCHOŁEK v MA WALENCJĘ 3, WYRÓŻNIA ZATEM 3

SĄSIADUJĄCE W PORZĄDKU $\hookrightarrow$ PŁASZCZYNY : $\pi_1(v), \pi_2(v)$ (21)

i $\pi_3(v)$,



DLA TAKIEGO WYBORU

PŁASZCZYNY : Δ^* DOSTATEK WYNIK

$$\int_{(\Sigma, 0)} \omega = \sum_{v \in \Delta_0^*} \left[\varepsilon_{12}(v) r_{\pi_1(v) \pi_2(v)} + \varepsilon_{23}(v) r_{\pi_2(v) \pi_3(v)} + \varepsilon_{31}(v) r_{\pi_3(v) \pi_1(v)} \right](v),$$

W KTÓREGO ZAPISIE $\varepsilon_{ij}(v) \in \{-1, +1\}$ JEST ZADAWANY JEDNOZNACZNIE
 - W OJYWNITY SPOSÓB - PRZEZ ORIENTACJĘ KRAWĘDZI MIĘDZY
 $\pi_i(v)$ i $\pi_j(v)$ ORAZ v (JAKO KRAWĘDZI TEJ KOŃCA).

DLA USTALENIA UWAGI POTRZEBYMY $\varepsilon_{ij}(v) = +1$ (WSZYSTKIE 22
 KRAWĘDZIE WCHODZĄCE DO v), A WÓWGAŚ ODNOŚNY
 SKŁADNIK SUMY PO Δ_0^* PRZYJMUJE ZNANĄ POSTAĆ

$$\left(r_{\iota_{\pi_1(v)} \iota_{\pi_2(v)}} + r_{\iota_{\pi_2(v)} \iota_{\pi_3(v)}} + r_{\iota_{\pi_3(v)} \iota_{\pi_1(v)}} \right)(v)$$

$$\equiv r_{\iota_{\pi_2(v)} \iota_{\pi_3(v)}}(v) - r_{\iota_{\pi_1(v)} \iota_{\pi_3(v)}}(v) + r_{\iota_{\pi_1(v)} \iota_{\pi_2(v)}}(v)$$

$$= c_{\iota_{\pi_1(v)} \iota_{\pi_2(v)} \iota_{\pi_3(v)}}.$$

WIDZIMY WIEC, ŻE OKRESY $[\omega]$, UŻYCI CAŁKI $\int \omega$ PO Σ
 REPREZENTUJĄCYCH $[\Sigma] \in H_2(M)$, WYRAŻAJĄ SIĘ ... $(\Sigma, 0)$

JAKO SUMY STAŁYCH LOCALNYCH C_{ijk} STOWARZYSZONYCH (23)

z w wzgl. wybranego pokrycia $\mathcal{O}$, któremu
podporządkowujemy Δ^* . Mamy przeto oczywistą

implikację

$$[(C_{ijk})] \in \check{H}^2(M, \mathbb{Z}) \Rightarrow \text{Per}([w]) \subset \mathbb{Z}$$

stow.
z w !

zbiór okresów $[w]$

$\Updownarrow$ ex def

$$[w] \in H_{\text{dr}}^2(M, \mathbb{Z})$$

NB: klasa $[c]$ pochodzi z trójmupacji
2-formy w .

Implikacja odwrotna jest subtelniejsza: można pokazać,
że dla każdej w j/w istnieje wyбір stowarzyszonego

z nią 2-kocyklu $\mathbb{C}P^1$, przy którym $C_{ijk} \in \mathbb{Z}$. (24)

Wybór taki może wymagać „poprawienia” wyjściowego (C_{ijk}) , a twierdzenia zapewniające wykonalność stosownej „poprawki” dowodzą np. Bott i Tu w swojej monografii

pt. „DIFFERENTIAL FORMS IN ALGEBRAIC GEOMETRY” (Tw. 15.8.).

W powyższej dyskusji czai się jedna jeszcze – dużo poważniejsza – subtelność...

Otóż więc KOHOMOLOGIA SINGULARNA M O WARTOŚCIACH
W $\mathbb{Z}$, $H^*(M; \mathbb{Z})$,
której izomorficzność z $\check{H}^*(M; \mathbb{Z})$ orzeka wzmiankowane

POWYŻEJ TWIERDZENIE, JEST STRUKTURĄ DUALNĄ (w Abgrp) (25)
 WZGLĘDEM HOMOLOGII SINGULARNEJ $H_*(M)$ ROZMAITOŚCI M ,

$$H^*(M; \mathbb{Z}) \equiv \text{Hom}_{\text{Abgrp}}(H_*(M), \mathbb{Z}),$$

I JAKO TAKA NA TZW. SKŁADOWĄ TORSYJNĄ,

$$H^*(M; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p_2\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/p_N\mathbb{Z}}_{\text{Tor } H^*(M; \mathbb{Z})}$$

[Cor.

DLA PEWNYCH
 $p_i \in \mathbb{N}, i \in \overline{1, N}$

Tor $H^*(M; \mathbb{Z})$

ZANIM WSKAŻEMY TOPOLOGICZNE ŹRÓDŁO $\uparrow$, ODNOTUJMY KLUCZOWY
 FAKT: W PROCESIE IR-LINEARYZACJI

$$H^*(M; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cdot \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}} H^*(M; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} \text{(NA GRANICIE} \\ \text{UNIWEERSALNEGO} \\ \text{TW. O WSPÓŁCZYNNIKACH)} \end{array} \quad (26)$$

KTÓREGO PRODUKTEM KOŃCOWYM JEST **KOHOMOLOGIA**
RZECZYWISTA M ,

O MODELU $H_{\text{dR}}^*(M; \mathbb{R})$, GUBIMY TORSJĘ!

ISTOTNIE, $\forall p \in \mathbb{N}: \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = 0$. [ĆWICZENIE]

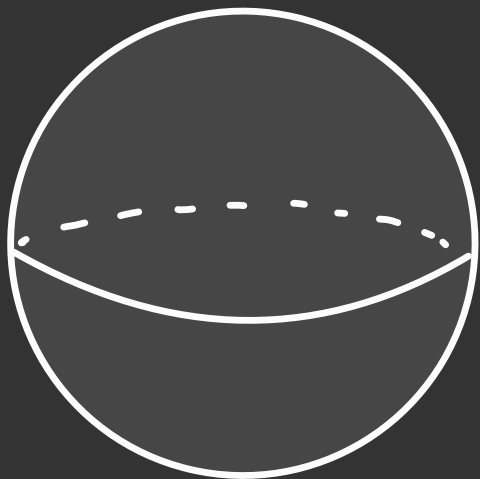
ROZWAŻANE UPRZEDNIO PRZĘJŚCIE OD $\check{H}^*(M; \mathbb{R})$ DO $H_{\text{dR}}^*(M)$
POPĘDZA TAKĄ WŁAŚNIE $\mathbb{R}$ -LINEARYZACJĄ $\check{H}^*(M; \mathbb{Z})$,
TJ. - W SZCZEGÓLNOŚCI - KOCYKLE ČECHA OPAZYMYWANE
W WYNIKU TRYWIALIZACJI KOCYKLI DE RHAMA SĄ JUŻ „PRZEBRANE”
- POKIADAJĄ $\check{H}^*(M; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$,

CO OZNACZA NIEUSUWALNĄ NIE-WIERNOŚĆ PROCEDURY PRZYPISYWANIA FORM RÓŻNICZKOWYCH CAŁKOWITYM KOCYKLOM

CECHA: W PROCEDURZE TEJ GINĄ KOCYKLE DUALNE DO TORSYJNYCH SKŁADOWYCH HOMOLOGIJI M (GRUPA PRZEMIENNA Z SUMĄ ROZŁĄCZNĄ (NA REPREZENTANTACH) JAKO OPERACJĄ BINARNĄ). SKĄD BIORĄ SIĘ TE OSTATNIE?

AŻEBY ODPOWIEDZIEĆ SOBIE KONSTRUKTYWNI NA TĘ PYTANIE, TRZEBA WRÓCIĆ DO DEFINICJI $H_*(M)$. MAMY TU WŁEĆ DO CZYNIEŃ Z SKOŃCZONYMI SUMAMI ^(z ułożeniami brzegowymi) ROZŁĄCZNYMI ^{WŁĄCZYMI} OBRAZÓW SYMPLEKSÓW $(\mathbb{R}^{* \dim M})$ W M , O PUSTYM BRZEGU,

A PRZY TYM ROZPATRYWANYMI Z DOKŁADNOŚCIĄ DO TAKICHŻE (28)
SUM BĘDĄCYCH BRZĘCAMI (OBRAZÓW) WIĘCEJ WYMIAROWYMI
(SUM) SYMPLEKSÓW. k -CYKŁ TORSYJNY RZĘDU p (REPREZENTANT
GENERATORA $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \subset H_*(M)$) TO TAKI CIĄGŁY OBRAZ
 k -SYMPLEKSU W M , KTÓRY MA PUSTY BRZĘC,
A DO p -KROTNYM „ZŁOŻENIU” ZE SOBĄ (A ŚCIŚLEJ:
ZE SOBĄ Z DOKŁADNOŚCIĄ DO k -BRZĘCU) ODTWARZA
PEWIEŃ k -BRZĘC. SUBSTRATU DLA WIZUALIZACJI TAKOWEJ
EWENTUALNOŚCI TOPOLOGICZNEJ DOSTARCZA WYOBRAŻENI
STUDIUM PROSTEJ GEOMETRII RZUTOWEJ: $\mathbb{R}P^2 \simeq S^2/\mathbb{Z}_2$.

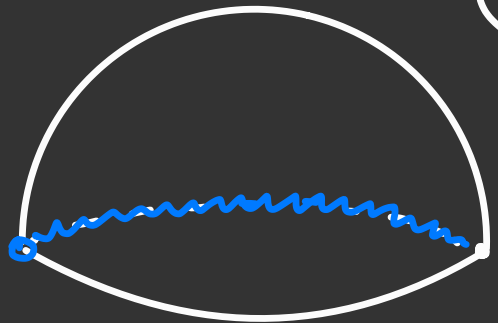


S^2



$$\vec{\pi} \sim -\vec{\pi}$$

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$



$$S^2 / \sim \equiv \mathbb{R}P^2$$

(29)

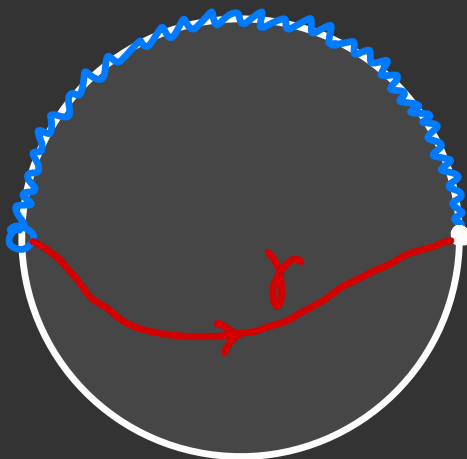
PRZY CZYM PODZBIÓR KOŁA WIELKIEGO ZAŻNACJONY
NA NIEBIESKO JEST UTOŻSAMIONY Z JEJEGO ANTYPODALNYM
OBRAZEM, TAKŻE W TYM KOŁE. TORSTĘ ZOBRAZUJEMY
NA STEREOGRAFICZNYM RZUCIE $\mathbb{R}P^2$ NA PŁASZCZYZNĘ STYCZNĄ

DO B^2 W „BIEGUNIE POŁEŃCZNYM”...

30

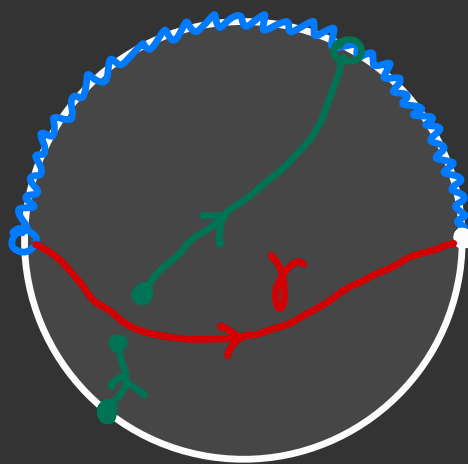


W NAKREŚLONEJ POWYŻEJ TOPOLOGII MAMY DO CZYNNIENIA
Z KLASĄ (HOMOLOGIĄ) NIEŚCIAŁALNEJ PĘTLI γ ROZPIĘTEJ
POMIĘDZY PUNKTAMI ANTYPODALNYMI NA KOŁE WIELKIM
— NP. $\bullet$ i $\circ$ — i — JAKO TAKA — POCZODZĄCĄ OD ŚCIEŻKI
W B^2 :



O TYM, ŻE KRZYWA TA ISTOTNIE NIE ROZSPÓJNIA $\mathbb{RP}^2$,
 MOŻEMY ŁATWO SIĘ PRZEKONAĆ WYKRESLAJĄC CIĄGLĄ
 KRZYWĄ $\wedge$ ŁĄCZĄCĄ DOWOLNE DWA PUNKTY LEŻĄCE PO „OBU
 STRONACH” γ W $\mathbb{RP}^2$ BEZ PRZECINANIA SAMEJ γ

— OTO ONA :



(WYKORZYSTALIŚMY
UTOŻSAMIENIE
PUNKTÓW ANTYPODALNYCH).

MAMY ZATEM $[\gamma] \neq 0$ w $H_1(\mathbb{RP}^2) \subset H_*(\mathbb{RP}^2)$.

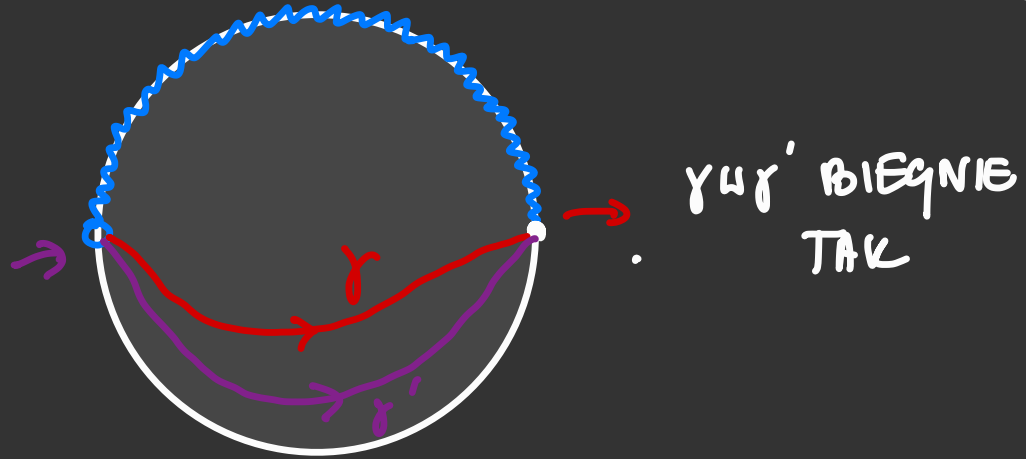
SPRÓBUJMY WYZNACZYĆ $2[\gamma] \equiv [\gamma] \sqcup [\gamma]$, WYBIERAJĄC

JAKO REPREZENTANTA DRUGIEGO SKŁADNIKA SUMY KRZYWAJĄ

γ' HOMOTOPIJNIE RÓWNOWAŻNĄ γ , KTÓRĄ „DOKLEJAMY”
w o.

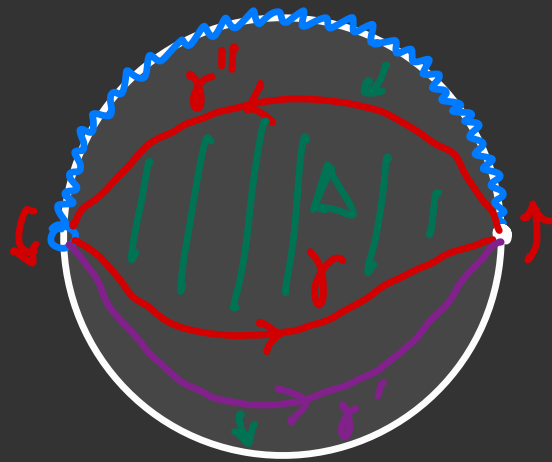
TYM SPOSOBEM OTRZYMUJEMY

33



γ i γ' BIEGNIE
TAK

NA KONIEC, CELEM UZYSKANIA STANDARDOWEGO OBRAZKA,
W KTÓRYM SKŁADOWE BRZĘCY MAJĄ WZAJEM UZGODNIONĄ
ORIENTACJĘ, HOMOTOPIJNIE "PRZEPYCHAMY" γ' NA "DRUGĄ
STRONĘ" γ PRZĘŻ PÓŁKOLĘ WIELKIE...



§4

OTRZYMUJĄC TYM SPOSOBEM
 $\gamma \cup \gamma''$ BIEGNIE γ''
TAK

W ODWZWIENNY SPOSÓB

(TEN OBLĄZEK JEST TROKIE "NA SIĘ" GDYŻ $\mathbb{R}P^2$ JEST NIEORIENTOWANA...)
 Z DRUGIEJ STRONY TO "TYLKO" WŁASNOŚĆ GLOBALNA, A MY WSGADNIAMY LOKALNIE.
 PRZY CZYM ROZUMOWANIE ANALOGICZNE DO TEGO POPROWADZONEGO
 POPRZEDNIO PRZEKONUJE NAS, ŻE $2[\gamma] = [\gamma \cup \gamma'']$ ROZCINA
 $\mathbb{R}P^2$ NA Dwie SPÓJNE SKŁADOWE, KTÓRYCH NIE MOŻNA
 POŁĄCZYĆ KĄZYNA CIĄGŁĄ BEZ ROZCIĘCIA $\gamma \cup \gamma''$ - JEDNĄ Z NICH

OZNACZYLIŚMY NA RYSUNKU SYMBOLEM $\triangle$ (i zakreślaliśmy). (35)

JEST $\gamma \cup \gamma'' = \partial \Delta$, ZATEM TEŻ

$$2[\gamma] = 0 \quad (\text{w } H_1(\mathbb{RP}^2)),$$

ZGODNIE Z ZANÓWIENIEM. POWYŻSZA PROSTA ILUSTRACJA

ZJAWISKA TORZI W (KO)HOMOLOGII SINGULARNEJ

ZAMYKA NASZĄ OGÓLNAJĄ DYSKUSJĘ STRUKTUR

KOHOMOLOGICZNYCH O ZNACZENIU FIZYKALNYM.

————— X —————

NA OBECNYM ETAPIE PORÓBIAJĘ JUŻ „TYLKO” PRZEKONAĆ (36)
SIĘ, ŻE NASZUCIOWANY POWYŻEJ WIELCE ESTETYCZNY OBRAZ
LOGICZNY ZNAJDUJE ZASTOSOWANIE PRAKTYCZNE,
TJ. ŻE JESTEŚMY NA JEGO PODSTAWIE (CZASEM;
Z PEWNOŚCIĄ PO UWZGLĘDNIENIU DAJSZYCH REZULTATÓW
ALGEBRY HOMOLOGICZNEJ W KATEGORII MAN,
W SZCZEGÓLNOŚCI ZAS - TW. MAYERA - VICTORISA)
USTALIĆ KONKRETNĄ ODPOWIEŹ NA PYTANIE - NP.-
O ZNIKANIE INTERESUJĄCEJ NAS KLASY OBSTRUKCJI
WZGL. POKLASYFIKOWAĆ KONSTRUKCJE (REDUKCJE, PROLONGACJE)
NIERÓWNOWAŻNE...

O TYM, ŻE SPRAWA NIE JEST BEZNAADZIEJNA, (37)
 PRZEKONUJE STUDIUM DWÓCH PRZYPADKÓW (JAWNIE
 BEZTORSYJNYCH: S^1 i S^2 ORAZ KRÓTKIEGO
 CIĄGU DOKŁADNEGO GRUP WSPÓŁCZYNNIKÓW:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2\cdot} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0 \\
 & & k & \mapsto & 2k & & \\
 & & & & l & \mapsto & l + 2\mathbb{Z}
 \end{array}$$

ROZWAŻYMY OTÓŻ DŁUGI CIĄG DOKŁADNY W KOHOMOLOGII
 (CECHA) DLA S^1 i S^2 INDUKOWANY PRZESZ POWIŻSZY
 KRÓTKI CIĄG DOKŁADNY...

I KOHOLOGIA S' :

(38)

$$\check{H}^0(S'; \mathbb{Z}) \xrightarrow{2_*} \check{H}^0(S'; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_*} \check{H}^0(S'; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta^0} \check{H}^1(S'; \mathbb{Z})$$

$$\overset{12}{H_0(S')} \Rightarrow \overset{12}{\mathbb{Z}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \downarrow 2_*$$

$\overset{11}{\mathbb{Z}}$
(spójność)

$$\mathbb{Z} \simeq \langle [S'] \rangle \equiv H_1(S') \simeq \check{H}^1(S'; \mathbb{Z})$$

$$\downarrow \pi_*$$

$$\check{H}^2(S'; \mathbb{Z}) \xleftarrow[\beta^1]{\quad} \check{H}^1(S'; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

$$0 \equiv H_2(S'; \mathbb{Z})$$

(3 przyczyn wymiarowych)

W INTERPRETACJI NAS CZĘŚCI MAMY JATEM:

(39)

$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_*} \check{H}^1(S'; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta'} 0 \quad (1) \\ \check{H}^2(S'; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

WNIOSKI: (2) $\Rightarrow$ $\exists$ STRUKTURA SPINOWA NA S'

$$(1) \Rightarrow \check{H}^1(S'; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \equiv \text{Ker } \beta' \stackrel{!}{=} \text{Im } \pi_*,$$

ALB TEŻ $\text{Ker } \pi_* = 2\mathbb{Z}$, WIEC

$\exists$ DWIE KLASY $\Leftarrow \check{H}^1(S'; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} / \text{Ker } \pi_* \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
STRUKTURA SPINOWA NA S'

II KΟΜΟΛΟΓΙΑ S^2 :

(40)

$$\check{H}^0(S^1; \mathbb{Z}) \xrightarrow{2 \cdot *} \check{H}^0(S^2; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_*} \check{H}^0(S^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta^0} \check{H}^1(S^2; \mathbb{Z})$$

$$\overset{12}{H}_0(S^1) \Rightarrow \overset{12}{\mathbb{Z}}$$

$$\Rightarrow \overset{0}{\cong} \downarrow 2 \cdot *$$

$\overset{11}{\mathbb{Z}}$
(SPÓJNOŚĆ)

$$0 \simeq H_1(S^2) \simeq \check{H}^1(S^2; \mathbb{Z})$$

(BRAK PĘTLI
(NIEŚCIAŁAŁNYCH))

$$\check{H}^1(S^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xleftarrow{\pi_*} \check{H}^1(S^2; \mathbb{Z}) \xleftarrow{2 \cdot *} \check{H}^2(S^2; \mathbb{Z}) \xleftarrow{\beta^1} \check{H}^1(S^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

$$\beta^2 \downarrow \quad \overset{12}{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \overset{21}{H}_2(S^2; \mathbb{Z}) = \langle [S^2] \rangle \simeq \mathbb{Z}$$

$$\check{H}^3(S^2; \mathbb{Z}) \simeq H_3(S^2) = 0 \text{ (3 PRZYCŁYN WYMIAROWYCH)}$$

MAMY ZATEM

(41)

$$0 \xrightarrow{\pi_*} \check{H}^1(S^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta^1} \mathbb{Z} \xrightarrow{2_*} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_*} \check{H}^2(S^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta^2} 0$$

WNIOSKI: (1) $\text{Ker } \beta^1 = \text{Im } \pi_* = \{0\}$, ZATEM

$$\check{H}^1(S^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \text{Im } \beta^1 = \text{Ker } 2_* = \{0\},$$

Tj. O ILE ISTNIEJE NA S^2 STRUKTURA
SPINOWA, JEST JEDYNA (Z DOKŁADNOŚCIĄ
DO ISOMORFIZMU).

$$\begin{aligned} (2) \check{H}^2(S^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &\equiv \text{Ker } \beta^2 = \text{Im } \pi_* \simeq \mathbb{Z} / \text{Ker } \pi_* \\ &\simeq \mathbb{Z} / \text{Im } 2_* \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

NIE MOŻEMY WPROWADZIĆ WYKLUCZYĆ $SW_2(T\mathbb{S}^2) \neq 0$, (42)
WIEMY WSZAKŻE, GDZIE POSZUKIWAĆ STRUKTURY SPINOWEJ
(JEDYNEJ!): WŚRÓD TYCH GEOMETRYZACJI* KLAS $H_{dr}^2(\mathbb{S}^2; \mathbb{Z})$,
KTÓRE LEŻĄ W OBRAZIE 2^* , T.J. SĄ ... PARZYSTE.

OWE KLASY TO POLA MAXWELLA F NA $\mathbb{S}^2$
o $Per([F]) \in 2\mathbb{Z}$, NIE POWINNO WIĘC DZIWIĆ,
ŻE SZUKAMY WŚRÓD

* WIAZEEK $U(1)$ NAD $\mathbb{S}^2$ O KRZYWIŹNIO (POWIĄZANIA
GŁÓWNEGO) 2, 3 KTÓRYCH ... „WYCIĄGAMY PIERWIASTEK”.
TO JEDNAK TEMAT NA INNĄ ROZMOWĘ...