

THE HOLY GRAIL
(MAWF '22/23 2.XVII & 2.XVIII [RRS])



Po długich i mozolnych przygotowaniach jesteśmy wreszcie w stanie przedstawić obiekty będące poszukiwanymi naturalnymi geometryzacjami struktur algebraicznych: algebry Clifforda i modułu spinorowego odnośnej grupy Spin. Zaczynamy od

Definicja 1. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Niechaj $((\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{p+q}, \pi_{\mathbb{V}}), g)$ będzie rzeczywistą zorientowaną wiązką riemannowską o metryce $g \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}^*)$ o sygnaturze (p, q) i orientacji $(F_{SO}\mathbb{V}, B, SO(p, q; \mathbb{R}), \pi_{F_{SO}\mathbb{V}})$ w rozumieniu Def. 12-13-14.6. **Rzeczywista wiązka Clifforda riemannowskiej wiązki wektorowej (\mathbb{V}, g)** to wiązka

$$(\mathcal{C}l_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g) \equiv F_{SO}\mathbb{V} \times_{\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}} \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q}), B, \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q}), \pi_{\mathcal{C}l_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g)})$$

stowarzyszona z wiązką zorientowanych reperów ortogonalnych $F_{SO}\mathbb{V}$ wiązki \mathbb{V} poprzez funkcjonalne cliffordowskie podniesienie $\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}$ definiującego działania

$$\rho_{\text{def}} : SO(p, q; \mathbb{R}) \longrightarrow \text{Aut}_{\square \text{Vect}_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}^{p,q})$$

jej grupy strukturalnej $SO(p, q; \mathbb{R})$ z modelowej przestrzeni kwadratowej $\mathbb{R}^{p,q}$ dla (\mathbb{V}, g) do jej algebry Clifforda $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})$.

Zespolona wiązka Clifforda riemannowskiej wiązki wektorowej (\mathbb{V}, g) to kompleksyfikacja

$$(\mathcal{C}l_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, g) \equiv \mathcal{C}l_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g)^{\mathbb{C}}, B, \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})^{\mathbb{C}} \cong \text{Cliff}(\mathbb{C}^{p+q}, \delta_{\mathbb{E}}^{(p+q)}), \pi_{\mathcal{C}l_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, g)^{\mathbb{C}}})$$

rzeczywistej wiązki Clifforda tejże wiązki wektorowej w rozumieniu Def. 2-3-4.9 i Tw. 6 z Wykładów XIII i XIV z I semestru.

Uwaga 1. Naturalnym przedstawicielem izoklasy¹ (więc też modelem) wiązki Clifforda nad ciałem bazowym $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ jest wiązka ilorazowa

$$\mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g}) \cong \left(\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}} \right) / \sim_{\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ g_{i,j}, \cdot, \text{id}_{\mathbb{K}}}, \quad \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}} \equiv \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$$

z oczywistą topologią i strukturą gładką, skonstruowana nad pokryciem $\mathcal{O} \equiv \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B trywializującym dla \mathbb{V} przy użyciu zredukowanych odwzorowań przejścia $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{SO}(p, q; \mathbb{R})$, $(i, j) \in \langle I \times I \rangle_{\mathcal{O}}$ wiązki \mathbb{V} (i $\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}$).

Mamy oczekiwane

Twierdzenie 1. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Wiązka Clifforda $\mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ jest wiązką algebr Clifforda, tj. obok naturalnej struktury \mathbb{K} -liniowej na $\mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})$ istnieje iloczyn w.p.w.

$$m_{\mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})} : \mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g}) \times_B \mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g}),$$

cięcie globalne

$$e^{\mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})} : B \rightarrow \mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})$$

oraz monomorfizm wiązek wektorowych (w konwencji $\mathbb{V}^{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{V}$)

$$J_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}} : \mathbb{V}^{\mathbb{K}} \hookrightarrow \mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})$$

o własnościach – wypisanych dla dowolnych $x \in B$ oraz $\Gamma \in \mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})_x$ i $V_1, V_2 \in \mathbb{V}_x^{\mathbb{K}}$ –

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{\mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})}(\Gamma, e^{\mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})}(x)) = \Gamma = m_{\mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})}(e^{\mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})}(x), \Gamma) \\ \{J_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}}(V_1), J_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}}(V_2)\} = 2g^{\mathbb{K}}(x)(V_1 \otimes V_2) \triangleright e^{\mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})}(x) \end{array} \right. ,$$

gdzie $\{\cdot, \cdot\}$ jest antykomutatorem zdefiniowanym dla mnożenia $m_{\mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})}$, a nadto $g^{\mathbb{R}} \equiv g$, wreszcie $g^{\mathbb{C}}$ jest naturalną kompleksyfikacją struktury metrycznej na \mathbb{V} geometryzującą konstrukcję z Def. 3 z Wykładów XIII i XIV z I semestru. Powyższe w kanoniczny sposób indukuje strukturę algebry Clifforda na $\Gamma(\mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g}))$.

Dowód: Zaczniemy od wskazania struktury \mathbb{R} -liniowej na rzeczywistej wiązce Clifforda (por. Def. 2-3-4.4). Mamy więc operację binarną

$$\mathbb{A} : \mathcal{C}l_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g}) \times_B \mathcal{C}l_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{C}l_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})$$

$$: \left([(p_1, \gamma_1)], [(p_2, \gamma_2)] \right) \mapsto \left[[(p_1, \gamma_1 + \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, p_2)(\gamma_2))] \right] \equiv [(p_1, \gamma_1)] + [(p_2, \gamma_2)]$$

o elemencie neutralnym (cięcie zerowe)

$$\mathbf{0}_{\mathcal{C}l_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})} : B \rightarrow \mathcal{C}l_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g}) : x \mapsto [(p, 0)],$$

w którego zapisie p jest *dowolnym* punktem z włókna $(\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V})_x$ nad punktem x w bazie, oraz działanie ciała bazowego $\mathbb{R} \ni \lambda$

$$\mathbb{L}_{\lambda} : \mathcal{C}l_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{C}l_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g}) : [(p, \gamma)] \mapsto [(p, \lambda \triangleright \gamma)].$$

Niezależność wyniku dodawania we włóknie $\mathcal{C}l_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})$ od wyboru reprezentantów dodawanych klas sprawdzamy w bezpośrednim rachunku, w którym wybieramy

$$(1) \quad \tilde{p}_{\alpha} = p_{\alpha} \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_{\alpha}, \tilde{p}_{\alpha}), \quad \tilde{\gamma}_{\alpha} = \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_{\alpha}, p_{\alpha})(\gamma_{\alpha}), \quad \alpha \in \{1, 2\},$$

a który – w odwołaniu do funktorialności Cliff i automorficznej (więc w szczególności liniowej) natury wyniku jego obliczenia na dowolnym elemencie grupy strukturalnej $\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}$, jak również Stw. 5-6.1 – daje nam wynik

$$\left[(\tilde{p}_1, \tilde{\gamma}_1) \right] + \left[(\tilde{p}_2, \tilde{\gamma}_2) \right] \equiv \left[(\tilde{p}_1, \tilde{\gamma}_1 + \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)(\tilde{\gamma}_2)) \right]$$

¹Wszak odwzorowania przejścia w $\mathcal{C}l_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})$ stowarzyszone z pokryciem \mathcal{O} to właśnie g_{ij} (działające poprzez $\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}$) – patrz: Def. 9-10-11.1, a przecież mamy ostatnią część tezy Tw. 2-3-4.2.

$$\begin{aligned}
 &\equiv \left[(p_1 \triangleleft \phi_{\text{FsoV}}(p_1, \tilde{p}_1), \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{FsoV}}(\tilde{p}_1, p_1)(\gamma_1) \right. \\
 &\quad \left. + \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{FsoV}}(p_1 \triangleleft \phi_{\text{FsoV}}(p_1, \tilde{p}_1), p_2 \triangleleft \phi_{\text{FsoV}}(p_2, \tilde{p}_2)) \circ \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{FsoV}}(\tilde{p}_2, p_2)(\gamma_2)) \right] \\
 &= \left[(p_1, \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{FsoV}}(p_1, \tilde{p}_1)(\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{FsoV}}(\tilde{p}_1, p_1)(\gamma_1) \right. \\
 &\quad \left. + \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{FsoV}}(p_1 \triangleleft \phi_{\text{FsoV}}(p_1, \tilde{p}_1), p_2 \triangleleft \phi_{\text{FsoV}}(p_2, \tilde{p}_2)) \circ \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{FsoV}}(\tilde{p}_2, p_2)(\gamma_2)) \right] \\
 &= \left[(p_1, \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{FsoV}}(p_1, \tilde{p}_1) \circ \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{FsoV}}(\tilde{p}_1, p_1)(\gamma_1) \right. \\
 &\quad \left. + \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{FsoV}}(p_1, \tilde{p}_1) \circ \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{FsoV}}(p_1 \triangleleft \phi_{\text{FsoV}}(p_1, \tilde{p}_1), p_2 \triangleleft \phi_{\text{FsoV}}(p_2, \tilde{p}_2)) \right. \\
 &\quad \left. \circ \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{FsoV}}(\tilde{p}_2, p_2)(\gamma_2)) \right] \\
 &= \left[(p_1, \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}(\phi_{\text{FsoV}}(p_1, \tilde{p}_1) \cdot \phi_{\text{FsoV}}(\tilde{p}_1, p_1))(\gamma_1) \right. \\
 &\quad \left. + \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}(\phi_{\text{FsoV}}(p_1, \tilde{p}_1) \cdot \phi_{\text{FsoV}}(p_1 \triangleleft \phi_{\text{FsoV}}(p_1, \tilde{p}_1), p_2 \triangleleft \phi_{\text{FsoV}}(p_2, \tilde{p}_2)) \cdot \phi_{\text{FsoV}}(\tilde{p}_2, p_2))(\gamma_2)) \right] \\
 &= \left[(p_1, \gamma_1 + \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{FsoV}}(p_1, p_2)(\gamma_2)) \right],
 \end{aligned}$$

tożsamy z poprzednim. Stwierdzona niezależność pozwala nam „uproszczyć” formułę definiującą \mathbb{A} poprzez wyzyskanie swobody wyboru reprezentantów dodawanych orbit. Oto więc drugi argument \mathbb{A} możemy przedstawić w postaci

$$[(p_2, \gamma_2)] = [(p_1 \triangleleft \phi_{\text{FsoV}}(p_1, p_2), \gamma_2)] = [(p_1, \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{FsoV}}(p_1, p_2)(\gamma_2))] \equiv [(p_1, \tilde{\gamma}_2)],$$

a wtedy

$$[(p_1, \gamma_1)] + [(p_2, \gamma_2)] \equiv [(p_1, \gamma_1)] + [(p_1, \tilde{\gamma}_2)] = [(p_1, \gamma_1 + \tilde{\gamma}_2)].$$

Zabieg ten dowodzi naturalności zaproponowanej operacji binarnej i pokazuje, że „złożona” postać sumy elementów włókna wypisana wcześniej jest ledwie artefaktem nieuniknionej redundancji stosowanego przez nas opisu dziedziny odwzorowania (w terminach reprezentantów orbit). Bez trudu dowodzimy teraz łączności dodawania,

$$\begin{aligned}
 &([(p_1, \gamma_1)] + [(p_2, \gamma_2)]) + [(p_3, \gamma_3)] \equiv ([[(p_1, \gamma_1)] + [(p_1, \tilde{\gamma}_2)]] + [(p_1, \tilde{\gamma}_3)]) \\
 &= [(p_1, \gamma_1 + \tilde{\gamma}_2)] + [(p_1, \tilde{\gamma}_3)] = [(p_1, (\gamma_1 + \tilde{\gamma}_2) + \tilde{\gamma}_3)] = [(p_1, \gamma_1 + (\tilde{\gamma}_2 + \tilde{\gamma}_3))] \\
 &\equiv [(p_1, \gamma_1)] + [(p_1, \tilde{\gamma}_2 + \tilde{\gamma}_3)] = [(p_1, \gamma_1)] + ([[(p_1, \tilde{\gamma}_2)] + [(p_1, \tilde{\gamma}_3)]] \\
 &\equiv [(p_1, \gamma_1)] + ([[(p_1, \gamma_2)] + [(p_1, \gamma_3)]]).
 \end{aligned}$$

W przypadku \mathbb{L}_λ niezależność wyniku działania skalarów we włóknie $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})$ od wyboru reprezentanta klasy elementu z włókna jest prostą konsekwencją liniowości $\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}(\chi)$ dla dowolnego $\chi \in \text{SO}(p, q; \mathbb{R})$.

Następnie definiujemy iloczyn, o którym mowa w tezie stwierdzenia. Jest on dany wzorem

$$\begin{aligned}
 m_{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})} &: \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g}) \times_B \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g}) \\
 &: ([[(p_1, \gamma_1)]], [(p_2, \gamma_2)]) \longmapsto [(p_1, \gamma_1 \cdot \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{FsoV}}(p_1, p_2)(\gamma_2))] \\
 &\quad \equiv [(p_1, \gamma_1)] \cdot [(p_2, \gamma_2)].
 \end{aligned}$$

Jest on dobrze określony, gdyż dla dowolnej innej pary reprezentantów wymnażanych orbit jak w Równ. (1) otrzymujemy wynik mnożenia

$$[(\tilde{p}_1, \tilde{\gamma}_1)] \cdot [(\tilde{p}_2, \tilde{\gamma}_2)] = [(\tilde{p}_1, \tilde{\gamma}_1 \cdot \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{FsoV}}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)(\tilde{\gamma}_2))]$$

$$\begin{aligned}
 &\equiv \left[(p_1 \triangleleft \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1), \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_1, p_1)(\gamma_1) \right. \\
 &\quad \left. \cdot \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1 \triangleleft \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1), p_2 \triangleleft \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_2, \tilde{p}_2)) \circ \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_2, p_2)(\gamma_2) \right)] \\
 &= \left[(p_1, \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1)(\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_1, p_1)(\gamma_1) \right. \\
 &\quad \left. \cdot \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1 \triangleleft \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1), p_2 \triangleleft \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_2, \tilde{p}_2)) \circ \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_2, p_2)(\gamma_2) \right)] \\
 &= \left[(p_1, \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1) \circ \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_1, p_1)(\gamma_1) \right. \\
 &\quad \left. \cdot \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1) \circ \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1 \triangleleft \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1), p_2 \triangleleft \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_2, \tilde{p}_2)) \right. \\
 &\quad \left. \circ \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_2, p_2)(\gamma_2) \right)] \\
 &= \left[(p_1, \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}(\phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1) \cdot \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_1, p_1))(\gamma_1) \right. \\
 &\quad \left. \cdot \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}(\phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1) \cdot \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1 \triangleleft \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1), p_2 \triangleleft \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_2, \tilde{p}_2)) \cdot \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_2, p_2))(\gamma_2) \right)] \\
 &= \left[(p_1, \gamma_1 \cdot \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, p_2)(\gamma_2) \right)],
 \end{aligned}$$

tożsamy z tym uzyskanym poprzednio. Ażeby upewnić się o łącznym charakterze powyższego działania, powtórzmy rozumowanie zastosowane w odniesieniu do \mathbb{A} , otrzymując najprostszą do pomyślenia postać iloczynnu

$$[(p_1, \gamma_1)] \cdot [(p_2, \gamma_2)] \equiv [(p_1, \gamma_1)] \cdot [(p_1, \tilde{\gamma}_2)] = [(p_1, \gamma_1 \cdot \tilde{\gamma}_2)].$$

Możemy więc zapisać, wykorzystując po drodze łączność mnożenia w $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})$,

$$\begin{aligned}
 &([(p_1, \gamma_1)] \cdot [(p_2, \gamma_2)]) \cdot [(p_3, \gamma_3)] \equiv ([[(p_1, \gamma_1)] \cdot [(p_1, \tilde{\gamma}_2)]] \cdot [(p_1, \tilde{\gamma}_3)]) = [(p_1, \gamma_1 \cdot \tilde{\gamma}_2)] \cdot [(p_1, \tilde{\gamma}_3)] \\
 &= [(p_1, (\gamma_1 \cdot \tilde{\gamma}_2) \cdot \tilde{\gamma}_3)] = [(p_1, \gamma_1 \cdot (\tilde{\gamma}_2 \cdot \tilde{\gamma}_3))] \equiv [(p_1, \gamma_1)] \cdot [(p_1, \tilde{\gamma}_2 \cdot \tilde{\gamma}_3)] \\
 &\equiv [(p_1, \gamma_1)] \cdot ([[(p_1, \tilde{\gamma}_2)] \cdot [(p_1, \tilde{\gamma}_3)]] \equiv [(p_1, \gamma_1)] \cdot ([[(p_2, \gamma_2)] \cdot [(p_3, \gamma_3)]]).
 \end{aligned}$$

Analogicznie dowodzimy \mathbb{R} -liniowości iloczynu względem wprowadzonej wcześniej struktury \mathbb{R} -liniowej (w.p.w.).

W następnej kolejności wskazujemy cięcie „jedynkowe”:

$$e^{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})} : B \longrightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g}) : x \longmapsto [(p, e^{\text{C}})],$$

w którego zapisie p jest *dowolnym* punktem z włókna $(\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V})_x$ nad punktem x w bazie. O sensowności tej definicji przekonuje krótki rachunek bezpośredni dla dowolnego $\tilde{p} \in (\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V})_x$:

$$[(\tilde{p}, e^{\text{C}})] = [(p \triangleleft \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p, \tilde{p}), e^{\text{C}})] \equiv [(p, \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p, \tilde{p})(e^{\text{C}}))] = [(p, e^{\text{C}})],$$

w którym wykorzystaliśmy automorficzną naturę $\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p, \tilde{p})$ (implikującą w szczególności zachowywanie jedynki w unitalnej algebrze $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})$). Bez trudu sprawdzamy pożądaną własność (neutralność względem $m_{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})}$) powyższego cięcia (dla dowolnych $p \in (\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V})_x$ i $\gamma \in \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})$):

$$\begin{aligned}
 [(p, \gamma)] \cdot e^{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})}(x) &\equiv [(p, \gamma)] \cdot [(p, e^{\text{C}})] = [(p, \gamma \cdot e^{\text{C}})] = [(p, \gamma)], \\
 e^{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})}(x) \cdot [(p, \gamma)] &\equiv [(p, e^{\text{C}})] \cdot [(p, \gamma)] = [(p, e^{\text{C}} \cdot \gamma)] = [(p, \gamma)].
 \end{aligned}$$

Definicja włożenia $\mathcal{J}_{\mathbb{V}}$ wymaga przywołania kanonicznego izomorfizmu

$$\hat{e}_{\mathbb{V}} : \mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V} \times_{\rho_{\text{def}}} \mathbb{R}^{\times p+q} \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}$$

z Rozdz. 9-10-11.1. Wykorzystując tenże, możemy zadać odwzorowanie

$$\mathcal{J}_{\mathbb{V}} \equiv [\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{\times p+q}}] \circ \hat{e}_{\mathbb{V}}^{-1} : \mathbb{V} \longrightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g}),$$

w którego definicji

$$[J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}] : F_{\text{SO}}\mathbb{V} \times_{\rho_{\text{def}}} \mathbb{R}^{\times p+q} \longrightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g}) : [(p, v)] \longmapsto [(p, J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^{\text{C}}(v))]$$

jest jawnie injektywnym morfizmem wiązek wektorowych używającym kanonicznego odwzorowania Clifforda z Def. 2 z Wykładów VIII, IX i X z semestru I (injektywność gwarantuje Stw. 5 z tegoż wykładu). O sensowności powyższej definicji przekonujemy się w bezpośrednim rachunku z użyciem dowolnej pary

$$\tilde{p} = p \triangleleft \phi_{F_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p, \tilde{p}), \quad \tilde{v} = \rho_{\text{def}} \circ \phi_{F_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}, p)(v)$$

definiującej tę samą orbitę $[(\tilde{p}, \tilde{v})] = [(p, v)]$. Obliczamy

$$\begin{aligned} [J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p, v)]) &\equiv [(\tilde{p}, J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^{\text{C}}(\tilde{v}))] \equiv [(p \triangleleft \phi_{F_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p, \tilde{p}), J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^{\text{C}} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{F_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}, p)(v))] \\ &= [(p \triangleleft \phi_{F_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p, \tilde{p}), \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{F_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}, p) \circ J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^{\text{C}}(v))] \equiv [(p, J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^{\text{C}}(v))]. \end{aligned}$$

Na koniec dowodzimy słuszności fundamentalnych relacji antykomutacyjnych w zrekonstruowanej powyżej wiązce algebr nad B . W rachunku wykorzystujemy dotychczasowe ustalenia. Obliczamy

$$\begin{aligned} &J_{\mathbb{V}}(\widehat{e}\mathbb{V}([(p_1, v_1)])) \cdot J_{\mathbb{V}}(\widehat{e}\mathbb{V}([(p_2, v_2)])) + J_{\mathbb{V}}(\widehat{e}\mathbb{V}([(p_2, v_2)])) \cdot J_{\mathbb{V}}(\widehat{e}\mathbb{V}([(p_1, v_1)])) \\ &= [J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p_1, v_1)]) \cdot [J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p_2, v_2)]) + [J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p_2, v_2)]) \cdot [J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p_1, v_1)]) \\ &= [J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p_1, v_1)]) \cdot [J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p_1, \tilde{v}_2)]) + [J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p_1, \tilde{v}_2)]) \cdot [J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p_1, v_1)]) \\ &\equiv [(p_1, J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^{\text{C}}(v_1))] \cdot [(p_1, J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^{\text{C}}(\tilde{v}_2))] + [(p_1, J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^{\text{C}}(\tilde{v}_2))] \cdot [(p_1, J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^{\text{C}}(v_1))] \\ &\equiv [(p_1, J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^{\text{C}}(v_1) \cdot J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^{\text{C}}(\tilde{v}_2))] + [(p_1, J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^{\text{C}}(\tilde{v}_2) \cdot J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^{\text{C}}(v_1))] \\ &\equiv [(p_1, J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^{\text{C}}(v_1) \cdot J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^{\text{C}}(\tilde{v}_2) + J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^{\text{C}}(\tilde{v}_2) \cdot J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^{\text{C}}(v_1))] = [(p_1, 2\delta_{\text{E}}^{(p,q)}(v_1 \otimes \tilde{v}_2) \triangleright e^{\text{C}})]. \end{aligned}$$

Na obecnym etapie doprecyzujemy definicję włożenia $J_{\mathbb{V}}$. Niech więc $F_{\text{SO}}\mathbb{V}$ będzie podwiązką $F_{\text{GL}}\mathbb{V}$ uzyskaną poprzez wybór orientacji na zbiorze lokalnych baz w \mathbb{V} stanowiących orbitę, względem naturalnego działania $O(p, q; \mathbb{R})$, ustalonej bazy (lokalnej) pseudoortonormalnej względem $\mathfrak{g}(x)$ w każdym punkcie swego nośnika (czyli wiązką zredukowaną w rozumieniu Def. 12-13-14.1). W świetle Tw. 2-3-4.3 wybór takiej bazy jest równoznaczny z lokalną trywializacją \mathbb{V} . Wybór taki jako definicja zbioru lokalnych trywializacji (modelu) $F_{\text{SO}}\mathbb{V}$ ma sens, gdyż odwzorowania przejścia tej ostatniej biorą wartości w $SO(p, q; \mathbb{R})$ i jako takie przeprowadzają lokalne bazy pseudoortonormalne pochodzące z jednej trywializacji lokalnej w takie same bazy pochodzące z drugiej trywializacji lokalnej. Mamy zatem

$$F_{\text{SO}}\mathbb{V} = \bigsqcup_{x \in B} \text{Iso}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times p+q}, \mathbb{V}_x)^{\text{SO}(p,q;\mathbb{R})} \ni (\beta_x, x) \equiv p_1,$$

gdzie dla dowolnej bazy $\beta_x : \mathbb{R}^{\times p+q} \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}_x$ spełniona jest tożsamość

$$\mathfrak{g}(x) \circ (\beta_x \otimes \beta_x) \equiv \delta_{\text{E}}^{(p,q)}.$$

Dla tak skonstruowanej wiązki zorientowanych baz ortogonalnych wiązki \mathbb{V} możemy powrócić do dowodu fundamentalnych relacji antykomutacyjnych. Obliczamy

$$\begin{aligned} &[J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p_1, v_1)]) \cdot [J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p_2, v_2)]) + [J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p_2, v_2)]) \cdot [J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p_1, v_1)]) \\ &= [(p_1, 2\delta_{\text{E}}^{(p,q)}(v_1 \otimes \tilde{v}_2) \triangleright e^{\text{C}})] \equiv [(p_1, 2\mathfrak{g}(x) \circ (\beta_x \otimes \beta_x)(v_1 \otimes \tilde{v}_2) \triangleright e^{\text{C}})] \\ &= [(p_1, 2\mathfrak{g}(x)(\beta_x(v_1) \otimes \beta_x(\tilde{v}_2)) \triangleright e^{\text{C}})] \equiv [(p_1, 2\mathfrak{g}(x) \circ (\widehat{e}\mathbb{V} \otimes \widehat{e}\mathbb{V})([(p_1, v_1)] \otimes [(p_1, \tilde{v}_2)]) \triangleright e^{\text{C}})] \\ &= [(p_1, 2\mathfrak{g}(x) \circ (\widehat{e}\mathbb{V} \otimes \widehat{e}\mathbb{V})([(p_1, v_1)] \otimes [(p_2, v_2)]) \triangleright e^{\text{C}})] \end{aligned}$$

$$\equiv \mathbb{L}_{2g(x) \circ (\widehat{\mathfrak{e}\mathfrak{v}} \otimes \widehat{\mathfrak{e}\mathfrak{v}})}([[(p_1, v_1)] \otimes [(p_2, v_2)]])([(p_1, e^C)]) \equiv \mathbb{L}_{2g(x) \circ (\widehat{\mathfrak{e}\mathfrak{v}}([[(p_1, v_1)]]) \otimes \widehat{\mathfrak{e}\mathfrak{v}}([[(p_2, v_2)]]))}(e^{\mathcal{E}l_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g)}(x)),$$

co kończy dowód dla przypadku rzeczywistego. W przypadku zespolonym dowód przebiega w pełni analogicznie, przeto jego samodzielną rekonstrukcję pozostawiamy zainteresowanemu Czytelnikowi. \square

Pierwszym krokiem na drodze ku geometryzacji spinorowej reprezentacji $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}$ jest identyfikacja w przestrzeni totalnej $\mathcal{E}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)$ dwóch gładko zanurzonych podrozmaitości będących geometryzacjami podprzestrzeni $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}^n$, $n \in \{0, 1\}$ o ustalonej parzystości. O ich istnieniu orzeka

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Istnieje kanoniczny rozkład wiązki Clifforda

$$\mathcal{E}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g) \cong \mathcal{E}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)^0 \oplus_{\mathbb{R}, B} \mathcal{E}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)^1$$

na sumę Whitneya podwiązek własnych $\mathcal{E}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)^n$, $n \in \{0, 1\}$ inwolutywnego automorfizmu wiązki Clifforda

$$J_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}} : \mathcal{E}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g) \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)$$

stanowiącego podniesienie automorfizmu

$$P_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}} : \mathbb{V}^{\mathbb{K}} \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}^{\mathbb{K}}$$

o ograniczeniach

$$P_{\mathbb{V}_x^{\mathbb{K}}} : \mathbb{V}_x^{\mathbb{K}} \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}_x^{\mathbb{K}} : v \mapsto -v.$$

Dowód: Tym razem w dowodzie odwołamy się do modelu lokalnego² $\mathcal{E}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)$ z Uwagi 1. Jest oczywiste, że w obrazie lokalnym podniesienie $P_{\mathbb{V}}$, o którym mowa w treści dowodzonego stwierdzenia, przybiera postać

$$J_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}} \upharpoonright_{\mathcal{O}_i \times \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}} : \mathcal{O}_i \times \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}} \circlearrowleft : (x, \gamma) \mapsto (x, J_{\mathbb{R}^{p+q}}(\gamma)),$$

gdzie $J_{\mathbb{K}^{p+q}} \in \text{Aut}_{\mathbf{uAssAlg}_{\mathbb{K}}}(\text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}})$ jest inwolucją główną z Def. 4 z Wykładów VIII, IX i X z semestru I, wobec czego lokalnie mamy rozkład wiązki trywialnej na sumę prostą podwiązek własnych

$$(2) \quad \mathcal{O}_i \times \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}} = (\mathcal{O}_i \times \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}^0) \oplus_{\mathbb{R}, \mathcal{O}_i} (\mathcal{O}_i \times \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}^1).$$

Pozostaje upewnić się, że rozkład ten jest zachowywany przez utożsamienia dokonywane nad przecięciami $\mathcal{O}_{ij} \ni x$ pokrycia trywializującego. Te jednak są postaci (patrz: Tw. 2-3-4.2)

$$(3) \quad (x, \gamma, i) \sim (x, (\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ g_{ji}(x) \otimes \text{id}_{\mathbb{K}})(\gamma), j),$$

gdzie $g_{ji} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{SO}(p, q; \mathbb{R})$ są odwzorowaniami przejścia $F_{\text{SO}}\mathbb{V}$, a ponieważ w świetle Twierdzenia Cartana–Dieudonnégo (Tw. 4 z Wykładów XVII, XVIII i XIX z semestru I) każdy element grupy strukturalnej $\text{SO}(p, q; \mathbb{R})$ jest superpozycją (skończonej) parzystej liczby odbić w hiperpłaszczyznach ortogonalnych do pewnych wektorów nieizotropowych, przeto każdy takie element zachowuje parzystość transformowanego elementu algebry Clifforda. W interesującym nas kontekście fakt ten przesądza o globalnym charakterze rozkładu (2). \square

Mamy również istotne

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy dotychczasowy zapis, w szczególności ten z Tw. 1 i Def. 1 i 2 z Wykładów XIII i XIV z I semestru. Wiązka $\mathcal{E}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)$ ma cięcie globalne – zwane **cięciem objętości** –

$$\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}} : B \rightarrow \mathcal{E}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g) : x \mapsto [(p, \omega_{\mathbb{K}})],$$

²Zmiana schematu dowodzenia jest podyktowana li tylko wolą pozostawienia Czytelnika z bogatszym arsenalem metod rachunkowych, które mogą okazać się przydatne w przyszłości. Przeprowadzenie dowodu bez odwoływania się do modelu nie powinno Czytelnikowi nastręczyć żadnych trudności.

w którego zapisie p jest dowolnym punktem z włókna $(F_{SO}V)_x$ nad punktem x w bazie. Ilekroć $p + q \in 2\mathbb{N}$, jest

$$\forall_{x \in B} \forall_{\Gamma \in \mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})_x^1} : \{\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}}(x), \Gamma\} = \mathbf{0}_{\mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})}(x),$$

w pozostałych zaś przypadkach, $p + q \in 2\mathbb{N} + 1$ jest

$$\forall_{x \in B} \forall_{\Gamma \in \mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})_x^1} : [\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}}(x), \Gamma] = \mathbf{0}_{\mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})}(x).$$

Ponadto gdy $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$ i $q - p \equiv 3 \pmod{4}$, zachodzi tożsamość

$$\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{R}}}(\cdot) \cdot \omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{R}}}(\cdot) = e^{\mathcal{C}l_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})}(\cdot)$$

i rzeczywista wiązka Clifforda jest sumą Whitneya

$$(4) \quad \mathcal{C}l_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g}) \cong \mathcal{C}l_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})^+ \oplus_{\mathbb{R}, B} \mathcal{C}l_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})^-$$

podwiązek własnych cięcia objętości (samodualnych (+) wzgl. antysamodualnych (-)), o własnościach

$$\forall_{x \in B} \forall_{\Gamma^{\pm} \in \mathcal{C}l_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})_x^{\pm}} : \omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{R}}}(x) \cdot \Gamma^{\pm} = \pm \Gamma^{\pm},$$

odwzorowywanych w siebie wzajemnie przez inwolutywny automorfizm $J_{\mathbb{V}^{\mathbb{R}}}$,

$$J_{\mathbb{V}^{\mathbb{R}}}(\mathcal{C}l_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})^{\pm}) = \mathcal{C}l_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})^{\mp}.$$

Ilekroć zaś $\mathbb{K} \equiv \mathbb{C}$ i $p + q \equiv 1 \pmod{2}$, zachodzi tożsamość

$$\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{C}}}(\cdot) \cdot \omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{C}}}(\cdot) = e^{\mathcal{C}l_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})}(\cdot)$$

i zespolona wiązka Clifforda jest sumą Whitneya

$$\mathcal{C}l_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g}) \cong \mathcal{C}l_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})^+ \oplus_{\mathbb{R}, B} \mathcal{C}l_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})^-$$

podwiązek własnych cięcia objętości (samodualnych (+) wzgl. antysamodualnych (-)), o własnościach

$$\forall_{x \in B} \forall_{\Gamma^{\pm} \in \mathcal{C}l_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})_x^{\pm}} : \omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{C}}}(x) \cdot \Gamma^{\pm} = \pm \Gamma^{\pm},$$

odwzorowywanych w siebie wzajemnie przez inwolutywny automorfizm $J_{\mathbb{V}^{\mathbb{C}}}$,

$$J_{\mathbb{V}^{\mathbb{C}}}(\mathcal{C}l_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})^{\pm}) = \mathcal{C}l_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})^{\mp}.$$

Dowód: Sensowność definicji cięcia objętości wynika wprost z definicji $\mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})$, która pozwala zapisać, dla dowolnego $\tilde{p} \in (F_{SO}V)_x$,

$$[(\tilde{p}, \omega_{\mathbb{K}})] = [(p \triangleleft \phi_{F_{SO}V}(p, \tilde{p}), \omega_{\mathbb{K}})] = [(p, (\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{F_{SO}V}(p, \tilde{p}) \otimes \text{id}_{\mathbb{K}})(\omega_{\mathbb{K}}))],$$

a nadto z elementarnej własności transformacyjnej elementu objętości:

Lemat 1. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Niechaj $\chi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(p + q)$ i niech $\chi^* \omega_{\mathbb{K}}$ będzie elementem $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}$ otrzymanym z $\omega_{\mathbb{K}}$ przez zastąpienie elementu e_i , $i \in \overline{1, p+q}$ bazy (pseudo)ortonormalnej $\mathbb{R}^{p,q}$ w jego definicji (patrz: Def. 1 i 2 z Wykładów XIII i XIV z I semestru) elementem $\chi(e_i)$. Wówczas zachodzi tożsamość

$$\chi^* \omega_{\mathbb{K}} = \det \chi \triangleright \omega_{\mathbb{K}}.$$

Dowód Lematu 1.: Proste ćwiczenie wykorzystujące relacje antykomutacyjne między elementami bazy e_i . \square

Wobec powyższego

$$[(\tilde{p}, \omega_{\mathbb{K}})] = [(p, \det \phi_{F_{SO}V}(p, \tilde{p}) \triangleright \omega_{\mathbb{K}})] = [(p, \omega_{\mathbb{K}})].$$

Przechodząc do drugiej części tezy stwierdzenia, zauważamy, że w modelu $\mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g}) \cong \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}$ istnienie postulowanych podwiązek własnych nad elementami pokrycia trywializującego jest konsekwencją Stw. 2 i 5 z Wykładów XIII i XIV z I semestru – oto mamy

$$\mathcal{O}_i \times \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}} \cong (\mathcal{O}_i \times \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}^+) \oplus_{\mathbb{K}, \mathcal{O}_i} (\mathcal{O}_i \times \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}^-).$$

Nad przecięciami $\mathcal{O}_{ij} \ni x$ dokonujemy utożsamień (3), jeśli zatem

$$\omega_{\mathbb{V}\mathbb{C}}(x) \cdot \Gamma^\pm = \pm \Gamma^\pm,$$

to także – na mocy Twierdzenia Cartana–Dieudonnégo i rozumowania identycznego jak w dowodzie Stw. 1, w połączeniu z Tw. 1 z Wykładów XI i XII z I semestru,

$$(5) \quad \forall_{\gamma \in \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}^0} : [\omega_{\mathbb{K}}, \gamma] = 0,$$

oraz definicją $m_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},g)}$ z konstruktywnego dowodu Tw. 1 –

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbb{V}\mathbb{C}}(x) \cdot (\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ g_{ji}(x) \otimes \text{id}_{\mathbb{K}})(\Gamma^\pm) &= (\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ g_{ji}(x) \otimes \text{id}_{\mathbb{K}})(\omega_{\mathbb{V}\mathbb{C}}(x) \cdot \Gamma^\pm) \\ &= \pm (\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ g_{ji}(x) \otimes \text{id}_{\mathbb{K}})(\Gamma^\pm), \end{aligned}$$

a w takim razie powyższy rozkład na podwiązki własne w dziedzinach lokalnych trywializacji jest zachowywany przez utożsamienia, skąd wniosek globalny (4). Wszystkie pozostałe składowe tezy są powtórzeniem treści Stw. 2 i 5 z Wykładów XIII i XIV z I semestru, uprawomocnionym przez dotychczasowe rozumowanie. \square

Mamy w rękę wszystkie narzędzia niezbędne do wskazania z dawna wyczekiwanej geometryzacji modułu spinorowego. Zaczniemy od konstrukcji pomocniczej:

Definicja 2. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Niechaj $((\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times p+q}, \pi_{\mathbb{V}}), g)$ będzie rzeczywistą zorientowaną wiązką riemannowską o metryce $g \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R},B} \mathbb{V}^*)$ o sygnaturze (p, q) i orientacji $(F_{\text{SO}}\mathbb{V}, B, \text{SO}(p, q; \mathbb{R}), \pi_{F_{\text{SO}}\mathbb{V}})$ w rozumieniu Def. 12-13-14.6. **Struktura spinowa na riemannowskiej wiązce wektorowej** (\mathbb{V}, g) to wybór prolongacji

$$(6) \quad (\Xi, \text{id}_B, \xi) : (F_{\text{Spin}}\mathbb{V}, B, \text{Spin}(p, q; \mathbb{R}), \pi_{F_{\text{Spin}}\mathbb{V}}) \longrightarrow (F_{\text{SO}}\mathbb{V}, B, \text{SO}(p, q; \mathbb{R}), \pi_{F_{\text{SO}}\mathbb{V}})$$

wiązki zorientowanych baz ortogonalnych \mathbb{V} wzdłuż nakrycia uniwersalnego

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{J\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \text{Spin}(p, q; \mathbb{R}) \xrightarrow{\xi \equiv \widetilde{\text{Ad}} \uparrow_{\mathbb{R}^{p,q} \subset \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})}} \text{SO}(p, q; \mathbb{R}) \longrightarrow 1$$

z Tw. 1 z Wykładów XVII, XVIII i XIX z I semestru. W tym kontekście wiązkę główną $(F_{\text{Spin}}\mathbb{V}, B, \text{Spin}(p, q; \mathbb{R}), \pi_{F_{\text{Spin}}\mathbb{V}})$ określa się mianem **wiązki baz (lub reperów) spinowych riemannowskiej wiązki wektorowej** (\mathbb{V}, g) .

I wreszcie

Definicja 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy, w szczególności – Def. 2. **Wiązka rzeczywistych modułów Clifforda riemannowskiej wiązki wektorowej** (\mathbb{V}, g) to wiązka

$$(\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g) \equiv F_{\text{Spin}}\mathbb{V} \times_{\rho \uparrow_{\text{Spin}(p,q;\mathbb{R})}} W, B, W, \pi_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},g)})$$

stowarzyszona z wiązką baz spinowych $F_{\text{Spin}}\mathbb{V}$ wiązki \mathbb{V} poprzez ograniczenie reprezentacji

$$\rho \equiv \rho^{\mathbb{R}} : \text{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p,q}) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(W)$$

(nietrywialnego) rzeczywistego modułu Clifforda (W, ρ) algebry Clifforda $\text{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p,q})$ do jej grupy strukturalnej $\text{Spin}(p, q; \mathbb{R})$. Ilekroć moduł $(W, \rho) \equiv (S, \sigma)$ jest nieprzywiedlny, mówimy o **rzeczywistej wiązce spinorowej riemannowskiej wiązki wektorowej** (\mathbb{V}, g) , którą oznaczamy symbolem

$$(\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g) \equiv F_{\text{Spin}}\mathbb{V} \times_{\sigma \uparrow_{\text{Spin}(p,q;\mathbb{R})}} S, B, S \equiv S^{\mathbb{R}}, \pi_{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},g)}).$$

Wiązka zespolonych modułów Clifforda riemannowskiej wiązki wektorowej (\mathbb{V}, g) to wiązka

$$(\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, g) \equiv F_{\text{Spin}}\mathbb{V} \times_{\rho \uparrow_{\text{Spin}(p,q;\mathbb{R})} \otimes \text{id}_{\mathbb{C}}} W^{\mathbb{C}}, B, W^{\mathbb{C}}, \pi_{\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V},g)})$$

stowarzyszona z wiązką baz spinowych $F_{\text{Spin}}\mathbb{V}$ wiązki \mathbb{V} poprzez ograniczenie reprezentacji

$$\rho^{\mathbb{C}} \equiv \rho \otimes \text{id}_{\mathbb{C}} : \text{Cliff}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{p,q}) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(W^{\mathbb{C}})$$

(nietrywialnego) skompleksyfikowanego modułu Clifforda $(W^{\mathbb{C}}, \rho^{\mathbb{C}})$ skompleksyfikowanej algebry Clifforda $\text{Cliff}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{p,q})$ do jej grupy strukturalnej $\text{Spin}(p, q; \mathbb{R}) (\subset \text{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p,q}) \otimes 1 \subset \text{Cliff}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{p,q}))$. Ilekroć moduł $(W^{\mathbb{C}}, \rho^{\mathbb{C}}) \equiv (S^{\mathbb{C}}, \sigma^{\mathbb{C}})$ jest nieprzywiedlny, mówimy o **zespolonej wiązce spinorowej riemannowskiej wiązki wektorowej** (\mathbb{V}, g) , którą oznaczamy symbolem

$$(\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, g) \equiv \text{F}_{\text{Spin}} \mathbb{V} \times_{\sigma \uparrow_{\text{Spin}(p,q;\mathbb{R})} \otimes \text{id}_{\mathbb{C}}} S^{\mathbb{C}}, B, S^{\mathbb{C}}, \pi_{\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, g)}).$$

W szczególności gdy $\mathbb{V} \equiv \text{T}M$ jest wiązką styczną (zorientowanej) rozmiatości różniczkowalnej (riemannowskiej), mówimy o **rzeczywistej** wzgl. **zespolonej wiązce spinorowej nad rozmiatością** M , którą oznaczamy symbolem

$$(\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(M, g) \equiv \text{F}_{\text{Spin}} \text{T}M \times_{\sigma \uparrow_{\text{Spin}(p,q;\mathbb{R})} \otimes \text{id}_{\mathbb{K}}} S^{\mathbb{K}}, B, S^{\mathbb{K}}, \pi_{\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(M, g)}), \quad \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}.$$

Uwaga 2. Naturalnym przedstawicielem izoklaszy (więc też modelem) wiązki modułów Clifforda nad ciałem bazowym $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ zorientowanej riemannowskiej wiązki wektorowej jest wiązka ilorazowa (zapisana w konwencji $(W^{\mathbb{R}}, \rho^{\mathbb{R}}) \equiv (W, \rho)$)

$$\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g) \cong \left(\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times W^{\mathbb{K}} \right) / \sim_{\rho^{\mathbb{K}} \circ \widehat{g}_{ij}},$$

z oczywistą topologią i strukturą gładką, skonstruowana nad pokryciem $\mathcal{O} \equiv \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B trywializującym dla \mathbb{V} przy użyciu zredukowanych odwzorowań przejścia $\widehat{g}_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{Spin}(p, q; \mathbb{R})$, $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$ wiązki baz spinowych \mathbb{V} .

Uwaga 3. Podany przez nas schemat geometryzacji spinorowego modułu Clifforda jest bodaj najbardziej rozpowszechnionym, lecz bynajmniej nie jedynym rozpatrywanym przez matematyków i fizyków. W alternatywnym podejściu zaproponowanym przez Tetrodego, Schrödingera, Infelda, van der Waerdena i Focka rozważa się (dowolne) wiązki wektorowe o włóknach niosących strukturę spinorowego modułu Clifforda względem włókien (odnośnych, nad tym samym punktem bazy) wiązki. Relacje pomiędzy oboma podejściami w kontekście teorii wiązek włóknistych dyskutuje Andrzej Trautman w swej pracy pt. “Connections and the Dirac operator on spinor bundles” [Tra08]. Warto przy tej okazji przypomnieć, że Profesor Trautman był jednym z pionierów zastosowań teorii wiązek włóknistych w opisie zjawisk fizycznych (patrz np.: jego wczesna praca [Tra70]). Autor niniejszego wykładu poczytuje sobie za przywilej możliwość uczenia się elementów teorii spinorów (oraz teorii grup i teorii wiązek włóknistych) wprost od Arcymistrza „Spinorowej Szachownicy” [BT88].

Przedstawiwszy zwartą definicję obiektu pożądanego, możemy obecnie przejść do studium jego (nie mniej pożądanego) właściwości. Pierwsze z twierdzeń wieńczących nasze wielotygodniowe wysiłki uprawomocnią myślenie o wiązkach spinorowych jako geometryzacjach modułów spinorowych.

Twierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 1 i 3. Wiązka spinorowa $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ jest wiązką nieprzywiedlnych modułów Clifforda, tj. obok naturalnej struktury \mathbb{K} -liniowej na $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)$ istnieje działanie w.p.w.

$$\Sigma : \mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g) \times_B \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g) \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)$$

lokalnie modelowane na działaniu algebry Clifforda $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}$ na jej module $S^{\mathbb{K}}$ indukowanym przez reprezentację spinorową $\rho^{\mathbb{K}}$. Powyższe w kanoniczny sposób indukuje strukturę spinorowego $\Gamma(\mathcal{C}l_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g))$ -modułu na $\Gamma(\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g))$.

Dowód: Dowód przeprowadzamy dla $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$, pozostawiając jego powtórzenie dla $\mathbb{K} \equiv \mathbb{C}$ upartemu Czytelnikowi.

Istnienie struktury \mathbb{R} -liniowej na $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g)$ weryfikujemy analogicznie jak w przypadku $\mathcal{C}l_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g)$, tę zatem część dowodu także pomijamy.

Pierwszoplanową rolę w konstrukcji działania w.p.w. Σ odgrywa morfizm prolongacji (6), który pozwala powiązać ze sobą działania grup strukturalnych obu wiązek baz: $\text{SO}(p, q; \mathbb{R})$ na $\text{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p,q})$ i nakrywającej $\text{Spin}(p, q; \mathbb{R})$ na $S^{\mathbb{R}}$. Przy pomocy tego morfizmu definiujemy

$$\Sigma : \mathcal{C}l_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g) \times_B \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g) \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g)$$

$$: \quad \left([(p, \gamma)], [(\widehat{p}, v)] \right) \longmapsto \left[(\widehat{p}, \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}), p)(\gamma) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v) \right] \equiv [(p, \gamma)] \triangleright [(\widehat{p}, v)],$$

gdzie gwoli odciążenia zapisu użyliśmy oznaczenia

$$\gamma \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v \equiv \sigma^{\mathbb{R}}(\gamma)(v).$$

Powyzsza definicja nie jest pozbawiona sensu w sposób oczywisty, oto bowiem

$$\pi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}} \circ \Xi(\widehat{p}) = \pi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}) \equiv \pi_{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})}([\widehat{p}, v]) = \pi_{\mathcal{E}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})}([(p, \gamma)]) \equiv \pi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p),$$

zatem element grupy strukturalnej $\phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}), p) \in \text{SO}(p, q; \mathbb{R})$ jest dobrze określony. Na obecnym etapie pozostaje jeszcze upewnić się, że wartość przyjmowana przez Σ na wypisanej parze orbit nie zależy od wyboru ich reprezentantów. W tym celu wybieramy pary:

$$p' = p \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p, p'), \quad \gamma' = \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p', p)(\gamma)$$

oraz

$$\widehat{p}' = \widehat{p} \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}, \widehat{p}'), \quad v' = \phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}', \widehat{p}) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v$$

i obliczamy – wykorzystując po drodze funktorialność Cliff i automorficzną (więc w szczególności liniową) naturę wyniku jego obliczenia na dowolnym elemencie grupy strukturalnej $\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}$, jak również Stw. 5-6.1 – , co następuje:

$$\begin{aligned} & \left[(p', \gamma') \right] \triangleright [(\widehat{p}', v')] \equiv \left[(\widehat{p}', \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}'), p')(\gamma') \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v') \right] \\ & \equiv \left[(\widehat{p} \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}, \widehat{p}'), (\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}(\phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}'), \Xi(\widehat{p})) \cdot \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}), p')) \right. \\ & \quad \left. \circ (\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p', p))(\gamma) \cdot \phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}', \widehat{p}) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v) \right] \\ & = \left[(\widehat{p} \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}, \widehat{p}'), \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}(\phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}'), \Xi(\widehat{p})) \cdot \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}), p') \cdot \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p', p))(\gamma) \right. \\ & \quad \left. \cdot \phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}, \widehat{p}')^{-1} \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v) \right] \\ & = \left[(\widehat{p}, \text{Ad}_{\phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}, \widehat{p}')}(\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}(\phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}'), \Xi(\widehat{p})) \cdot \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}), p))(\gamma) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v) \right]. \end{aligned}$$

Wykorzystując parzystość $\phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}, \widehat{p}') \in \text{Spin}(p, q; \mathbb{R}) \subset \text{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p, q})^0$ (która znosi różnicę pomiędzy elementu tego realizacjami: dołączoną i zwichrowaną dołączoną) i oczywistą relację między ξ i $\widetilde{\text{Ad}}$, jak również definiującą relację między Ξ i ξ , upraszczamy powyższe:

$$\begin{aligned} & \left[(p', \gamma') \right] \triangleright [(\widehat{p}', v')] = \left[(\widehat{p}, \widetilde{\text{Ad}}_{\phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}, \widehat{p}')} \circ (\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}(\xi \circ \phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}', \widehat{p}) \cdot \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}), p)))(\gamma) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v) \right] \\ & \equiv \left[(\widehat{p}, (\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \xi \circ \phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}, \widehat{p}')) \circ (\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}(\xi \circ \phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}', \widehat{p}) \cdot \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}), p)))(\gamma) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v) \right] \\ & \equiv \left[(\widehat{p}, \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}(\xi \circ \phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}, \widehat{p}') \cdot \xi \circ \phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}', \widehat{p}) \cdot \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}), p))(\gamma) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v) \right] \\ & = \left[(\widehat{p}, \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}(\xi(\phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}, \widehat{p}') \cdot \phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}', \widehat{p})) \cdot \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}), p))(\gamma) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v) \right] \\ & = \left[(\widehat{p}, \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}), p)(\gamma) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v) \right], \end{aligned}$$

co ostatecznie daje nam wyjściowe wyrażenie. Mając swobodę wyboru reprezentantów, możemy – jak poprzednio – dokonać wyboru roztropnego,

$$p = \Xi(\widehat{p}),$$

który pozwala zdemistyfikować pozorną nieoczywistość formuły definicyjnej na Σ . Przepisawszy stosownie pierwszy z argumentów,

$$[(p, \gamma)] = [(\Xi(\widehat{p}) \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}), p), \gamma)] = [(\Xi(\widehat{p}), \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}), p)(\gamma))] \equiv [(\Xi(\widehat{p}), \widetilde{\gamma})],$$

otrzymujemy antycypowany wynik

$$(7) \quad [(\Xi(\widehat{p}), \widetilde{\gamma})] \triangleright [(\widehat{p}, v)] = [(\widehat{p}, \widetilde{\gamma} \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v)],$$

który przekonuje o tym, że mamy do czynienia z geometryzacją modułu spinorowego.

W następnej kolejności sprawdzamy, że Σ jest działaniem, przywołując w tym celu postać iloczynu w.p.w. w wiązce algebr Clifforda $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})$ z dowodu Tw.1. Dostajemy więc – dla dowolnych $p_1, p_2 \in (\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V})_x$ i $\widehat{p} \in (\mathbb{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V})_x$ nad wspólnym $x \in B$ oraz $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p,q})$ i $v \in S^{\mathbb{R}}$, które możemy zawsze przepisać w wygodnej postaci, zarówno w formule na działanie, jak i w formule na mnożenie, co czynimy poniżej –

$$\begin{aligned}
 & [(p_2, \gamma_2)] \triangleright ([(p_1, \gamma_1)] \triangleright [(\widehat{p}, v)]) = [(\Xi(\widehat{p}), \widetilde{\gamma}_2)] \triangleright ([(\Xi(\widehat{p}), \widetilde{\gamma}_1)] \triangleright [(\widehat{p}, v)]) \\
 &= [(\Xi(\widehat{p}), \widetilde{\gamma}_2)] \triangleright [(\widehat{p}, \widetilde{\gamma}_1 \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v)] = [(\widehat{p}, \widetilde{\gamma}_2 \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} (\widetilde{\gamma}_1 \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v))] = [(\widehat{p}, \widetilde{\gamma}_2 \cdot \widetilde{\gamma}_1 \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v)] \\
 &\equiv [(\Xi(\widehat{p}), \widetilde{\gamma}_1 \cdot \widetilde{\gamma}_2)] \triangleright [(\widehat{p}, v)] \equiv [(\Xi(\widehat{p}), \widetilde{\gamma}_1)] \cdot [(\Xi(\widehat{p}), \widetilde{\gamma}_2)] \triangleright [(\widehat{p}, v)] \\
 &= [(p_2, \gamma_2)] \cdot [(p_1, \gamma_1)] \triangleright [(\widehat{p}, v)],
 \end{aligned}$$

to zaś jest wynikiem pożądanym.

Na koniec upewniamy się, że rozpatrywane przez nas działanie jest modelowane lokalnie na $\sigma^{\mathbb{R}}$. Rzecz jasna, jest to jedyna możliwa interpretacja formuły demistyfikacyjnej (7), my jednak wykonamy niezależny rachunek z użyciem stosownych izomorfizmów modelujących włókna (patrz: Def.9-10-11.1), trzymając się rozumienia pojęcia „modelowania lokalnego” zaproponowanego w dowodzie Stw.9-10-11.4. Wybieramy zatem (dowolnie) punkt $x \in B$, a nad nim (także dowolnie) – referencyjny punkt $\widehat{p}_* \in (\mathbb{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V})_x$. W tym momencie możemy już wykorzystać swobodę wyboru referencyjnego punktu $p_* \in (\mathbb{F}_{\text{SO}}\mathbb{V})_x$, kładąc $p_* \equiv \Xi(\widehat{p}_*)$. Na koniec dokonujemy wygodnych korekt wyborów reprezentantów rozpatrywanych orbit (j/w), aby ostatecznie dostać

$$\begin{aligned}
 & [\widehat{p}_*]_{\sigma^{\mathbb{R}}}([(p, \gamma)] \triangleright [(\widehat{p}, v)]) = [\widehat{p}_*]_{\sigma^{\mathbb{R}}}([(\Xi(\widehat{p}_*), \widetilde{\gamma})] \triangleright [(\widehat{p}_*, \widetilde{v})]) \equiv [\widehat{p}_*]_{\sigma^{\mathbb{R}}}([(\widehat{p}_*, \widetilde{\gamma} \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} \widetilde{v})]) \\
 &\equiv \widetilde{\gamma} \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} \widetilde{v} \equiv [\Xi(\widehat{p}_*)]_{\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}}([(\Xi(\widehat{p}_*), \widetilde{\gamma})] \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} [\widehat{p}_*]_{\sigma^{\mathbb{R}}}([(\widehat{p}_*, \widetilde{v})])) \\
 &= [\Xi(\widehat{p}_*)]_{\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}}([(p, \gamma)] \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} [\widehat{p}_*]_{\sigma^{\mathbb{R}}}([(\widehat{p}, v)])),
 \end{aligned}$$

co jest wynikiem satysfakcjonującym, który domyka dowód. \square

I wreszcie w podsumowaniu czysto geometrycznej części wykładu w II semestrze wypowiadamy

Twierdzenie 3 (Klasyfikacyjne dla wiązek spinorowych). Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Wiązka modułów Clifforda riemannowskiej zorientowanej wiązki wektorowej $(\mathbb{V}, \mathfrak{g})$ jest rozkładalna na sumę Whitneya podwiązek nieprzywiedlnych, tj. takich, których włókna są nieprzywiedlnymi modułami Clifforda. Przy tym o ile baza B wiązki jest spójna, liczba i typ (\mathbb{R}, \mathbb{C} wzgl. \mathbb{H}) nierównoważnych podwiązek nieprzywiedlnych jest określana przez Twierdzenia Klasyfikacyjne 2. i 3. z Wykładów XVII, XVIII i XIX z I semestru. W szczególności dla $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$ i $q-p \equiv 0 \pmod{4}$ cięcie objętości $\omega_{\mathbb{V}\mathbb{R}} \in \Gamma(\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g}))$ określa rozkład rzeczywistej wiązki spinorowej $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})$, nazywanej w tych okolicznościach **rzeczywistą wiązką Diraca riemannowskiej wiązki wektorowej** $(\mathbb{V}, \mathfrak{g})$, na sumę Whitneya

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g}) \cong \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})^+ \oplus_{\mathbb{R}, B} \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})^-$$

podwiązek własnych $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})^{\pm}$ cięcia $\omega_{\mathbb{V}\mathbb{R}}$ (stowarzyszonych z wartościami własnymi ± 1 , odpowiednio), zwanych **rzeczywistymi chiralnymi podwiązkami Weyla**. Analogicznie dla $\mathbb{K} \equiv \mathbb{C}$ i $p+q \equiv 0 \pmod{2}$ cięcie objętości $\omega_{\mathbb{V}\mathbb{C}} \in \Gamma(\mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g}))$ określa rozkład zespolonej wiązki spinorowej $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})$, nazywanej w tych okolicznościach **zespoloną wiązką Diraca riemannowskiej wiązki wektorowej** $(\mathbb{V}, \mathfrak{g})$, na sumę Whitneya

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g}) \cong \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})^+ \oplus_{\mathbb{C}, B} \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})^-$$

podwiązek własnych $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})^{\pm}$ cięcia $\omega_{\mathbb{V}\mathbb{C}}$ (stowarzyszonych z wartościami własnymi ± 1 , odpowiednio), zwanych **zespolonymi chiralnymi podwiązkami Weyla**.

Dowód: Wszystkie konstatacje wypowiedziane w treści twierdzenia są prostymi konsekwencjami

dotychczasowych ustaleń, z których wylania się spójny obraz wiązki Clifforda jako geometryzacji struktury algebry Clifforda (w istocie wiązki algebr Clifforda) zgodnej z własnościami tej ostatniej oraz wiązki modułów Clifforda jako geometryzacji struktury modułu Clifforda (w istocie wiązki modułów Clifforda) zgodnej z własnościami tego ostatniego, przy czym własności te są szczególnie wyraziście widoczne w obrazie lokalnym w modelach zaproponowanych w Uwagach 1 i 2, odpowiednio, a zarazem w oczywisty sposób zachowywane przez utożsamienia dokonywane nad przecięciami dziedzin lokalnych trywializacji wobec zawierania $\widehat{g}_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \text{Spin}(p, q; \mathbb{R}) \subset \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p, q})^0 \equiv \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p, q})^0 \otimes_{\mathbb{R}} 1 \subset \text{Cliff}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^{p, q})^0$. Jako ilustrację tej reguły prześledzimy mechanizm utożsamiania ze sobą nad \mathcal{O}_{ij} podwiązek własnych cięcia objętości z obrazu lokalnych trywializacji

$$\mathcal{O}_i \times S^{\mathbb{K}} \cong (\mathcal{O}_i \times S^{\mathbb{K}, +}) \oplus_{\mathbb{K}, \mathcal{O}_i} (\mathcal{O}_i \times S^{\mathbb{K}, -}).$$

Niechaj zatem

$$(x, v^{\pm}) \in \mathcal{O}_i \times S^{\mathbb{K}, \pm},$$

czyli

$$(x, \omega^{\mathbb{K}} \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} v^{\pm}) \equiv \omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}}(x) \triangleright (x, v^{\pm}) = \pm(x, v^{\pm}).$$

Ilekcioć $x \in \mathcal{O}_{ij}$, dokonujemy utożsamienia

$$(x, v^{\pm}, i) \sim (x, \widehat{g}_{ji}(x) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} v^{\pm}, j).$$

Uwzględnwszy (5) (i parzystość odwzorowań przejścia), stwierdzamy w bezpośrednim rachunku:

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}}(x) \triangleright (x, \widehat{g}_{ji}(x) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} v^{\pm}) &= (x, \omega^{\mathbb{K}} \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} (\widehat{g}_{ji}(x) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} v^{\pm})) = (x, \omega^{\mathbb{K}} \cdot \widehat{g}_{ji}(x) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} v^{\pm}) \\ &= (x, \widehat{g}_{ji}(x) \cdot \omega^{\mathbb{K}} \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} v^{\pm}) = (x, \widehat{g}_{ji}(x) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} (\omega^{\mathbb{K}} \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} v^{\pm})) = \pm(x, \widehat{g}_{ji}(x) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} v^{\pm}), \end{aligned}$$

że składowe o różnej chiralności nie mieszają się ze sobą pod wpływem utożsamienia, co przesądza o globalnej naturze rozkładu wiązki Diraca na chiralne podwiązki Weyla. \square

Powyższy wynik zamyka czysto geometryczną część studium wiązek spinorowych. Różniczkowanie czas zacząć!



LITERATURA

- [BT88] P. Budinich and A.M. Trautman, *The Spinorial Chessboard*, Trieste Notes in Physics, Springer, 1988.
 [Tra70] A.M. Trautman, "Fibre bundles associated with space-time", Rep. Math. Phys. **1** (1970), 29–62.
 [Tra08] ———, "Connections and the Dirac operator on spinor bundles", J. Geom. Phys. **58** (2008), 238–252.