# O TYM, ŻE ZAWSZE WARTO MIEĆ KONEKSJE
## (MAWF '22/23 2.XIX & 2.XX [RRS])

W studiach nad strukturą stycznościową wiązek włóknistych oraz w obiektów tych zastosowaniach – począwszy od badań ich topologii (topologia różniczkowa, zagadnienia wariacyjne *etc.*), a skończywszy na modelowaniu fizykalnym z ich wykorzystaniem („dynamika” cięć opisywana przez zasadę wariacyjną dla wyróżnionego funkcjonału działania określonego na zbiorze cięć, procedura cechowania symetrii globalnych modelu fizykalnego, opis tła grawitacyjnego wzgl. elektromagnetycznego dynamiki punktu materialnego oraz tła tego fluktuacji *etc.*) – nierzadko pojawia się potrzeba nadania strukturalnego sensu geometrycznego operacji różniczkowania cięć wiązki, tj. wskazania takiej definicji ich pochodnej, która określi obiekt globalnie gładki o prostych własnościach transformacyjnych względem automorfizmów wiązki oraz, w obecności dodatkowej struktury na na wiązce (jak struktura liniowa lub struktura torsora grupy Liego na włóknie, czy też struktura modułu względem wiązki algebr *etc.*), w jakimś naturalnym sensie uzgodniony z ową strukturą. Jako że w obrazie lokalnej trywializacji $\tau : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O} \times F$ (nad elementem $\mathcal{O}$ topologii $\mathscr{T}(B)$ bazy $B$ wiązki $(E, B, F, \pi_E)$) dowolne cięcie $\phi \in \Gamma(E)$ możemy jednoznacznie wyreprezentować jako odwzorowanie (lokalnie) gładkie $f : \mathcal{O} \longrightarrow F$, a to w odwołaniu do tożsamości

$$\tau \circ \phi \restriction_{\mathcal{O}} =: \big(\mathrm{id}_{\mathcal{O}}, f\big) \ : \ \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O} \times F\,,$$

przeto oczywistym punktem wyjścia do rozważań nad definicją takowej pochodnej jest funktorialny obraz stycznościowy odwzorowania $f$, tj.

$$\mathsf{T}f \ : \ \mathsf{T}B \restriction_{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathsf{T}F\,.$$

I rzeczywiście, ta najprostsza definicja różniczkowania[1] zachowuje się w sposób pożądany tak długo, jak długo lokalny model $\mathcal{O} \times F$ wiązki poddajemy przekształceniom *nie*zależnym od punktu w bazie, tj. jak długo przekształcamy wyłącznie włókno typowe $F$ *globalnie* nad $\mathcal{O}$, a nadto (w przypadku wiązki nietrywialnej) – jak długo nie zadajemy pytania o rozszerzalność tej definicji na pełną dziedzinę $B \supsetneq \mathcal{O}$ określoności globalnego cięcia $\phi$. Istotnie, w przypadku przekształceń (gładkich)

$$\eta \equiv \mathrm{id}_{\mathcal{O}} \times h \ : \ \mathcal{O} \times F \ \circlearrowleft \ : \ (x, m) \longmapsto \big(x, h(m)\big)$$

reguła łańcuchowa dla

$${}^h\!f \equiv \mathrm{pr}_2 \circ \eta \circ (\tau \circ \phi) \ : \ \mathcal{O} \longrightarrow F \ : \ x \longmapsto h\big(f(x)\big)$$

daje nam

$$\mathsf{T}_x {}^h\!f = \mathsf{T}_{f(x)} h \circ \mathsf{T}_x f\,,$$

co jest właśnie przykładem owej „prostej własności transformacyjnej” pochodnej cięcia. Źródłem problemów, przejawiających się w odejściu od powyższego prostego schematu tranformacji stycznościowej, są wszelkie przekształcenia włókna $F$ nad bazą zależne od punktu w tej ostatniej, tj. generyczne odwzorowania

$$\begin{aligned}
\chi \equiv \big(\mathrm{id}_{\mathcal{O}} \times \mathrm{ev}\big) \circ \big(\mathrm{pr}_1, H \circ \mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2\big) \quad &: \quad \mathcal{O} \times F \longrightarrow \mathcal{O} \times \mathrm{Aut}(F) \times F \longrightarrow \mathcal{O} \times F \\
&: \quad (x, m) \longmapsto \big(x, H(x), m\big) \longmapsto \big(x, H(x)(m)\big)
\end{aligned}$$

zadawane przez odwzorowania $H : \mathcal{O} \longrightarrow \mathrm{Aut}(F) \subset \mathrm{Diff}(F)$ o wartościach w grupie automorfizmów włókna typowego (czyli dyfeomorfizmów zachowujących ew. dodatkową strukturę na $F$,

[1] Ażeby dostrzec w morfizmie wiązek wektorowych $\mathsf{T}f$ definicję różniczkowania, należy prekomponować go z dowolnym polem wektorowym na $\mathcal{O}$.

jak np. strukturę liniową lub strukturę G-przestrzeni). W ich przypadku mamy do czynienia z odwzorowaniem

$$^{H}f \equiv \mathrm{pr}_2 \circ \chi \circ (\tau \circ \phi) \;:\; \mathcal{O} \longrightarrow F \;:\; x \longmapsto H(x)\big(f(x)\big)\,,$$

którego nie cechuje wcześniejsza „prostota”:

$$\mathsf{T}_x{}^{H}f \neq \mathsf{T}_{f(x)}\big(H(x)\big) \circ \mathsf{T}_x f\,,$$

a to z racji nietrywialnej zależności dyfeomorfizmu $H(x)$ od punktu w bazie wiązki. Ta elementarna obserwacja przesądza o niemożności naturalnego zszycia zwykłych pochodnych cięć lokalnych na przecięciach dziedzin ich określoności (więc też – rekonstrukcji z nich obiektu globalnego, którego potrzebujemy w modelowaniu fizycznym biorącym za punkt wyjścia rachunek tensorowy na (lub wyższą geometrię nad) przestrzenią wewnętrznych stopni swobody $F$, jak np. przy cechowaniu symetrii sztywnych $(\mathrm{G},\lambda)$ teorii o polach $\phi \in C^\infty(B,F) \equiv \Gamma(B \times F)$, kiedy to zastępujemy wyjściową wiązkę konfiguracyjną teorii pola $B \times F$ wiązką stowarzyszoną $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda F$), gdzie napotykamy (w kontekście Tw. 2-3-4.2) nieodzowne przekształcenia $(\mathcal{O},H) \equiv (\mathcal{O}_{ij}, g_{ij})$ implementujące utożsamienia modeli (trywializacji) lokalnych, tudzież – o nienaturalnym prawie transformacyjnym dla tychże pochodnych względem lokalnych prezentacji morfizmów wiązek (jak te rozpatrywane w Tw. 2-3-4.4 i 5-6.2 oraz (implicite) w Stw. 9-10-11.4), gdzie scenariusz powyższy realizuje się wprost nad dziedzinami $\mathcal{O}_i$ lokalnych trywializacji $E$, a w roli odwzorowań $H$ występują lokalne prezentacje tychże morfizmów, $H \equiv h_i$. Chwila zastanowienia pozwala zrozumieć, że – na poziomie konceptualnym – nasz kłopot wynika z obstrukcji wobec *zwykłego* stycznościowego transportu własności „pionowości” wektora (czyli jego styczności do włókna), za którym kroczy problem wtórny: brak *kanonicznych* utożsamień wiązek stycznych nad nietożsamymi włóknami (będący pochodną braku takich utożsamień dla samych włókien).

Ażeby móc postąpić dalej w dyskusji, musimy sformalizować wyłaniające się z rozważań dotychczasowych pojęcie „dystrybucji stycznej do włókien wiązki” w wiązce stycznej do przestrzeni totalnej tejże. Punktem wyjścia jest

**Twierdzenie 1.** Przyjmijmy zapis Def. 2-3-4.4 i niechaj $(\Phi, f) \;:\; (\mathbb{V}_1, B_1, \mathbb{K}^{\times n_1}, \pi_{\mathbb{V}_1}) \longrightarrow (\mathbb{V}_2, B_2, \mathbb{K}^{\times n_2}, \pi_{\mathbb{V}_2})$ będzie morfizmem wiązek wektorowych $\mathbb{V}_A,\ A \in \{1,2\}$ stałego rzędu $\mathrm{rk}\,(\Phi, f) \equiv r \in \mathbb{N}$. Wówczas **jądro morfizmu** $(\Phi, f)$

$$\mathrm{Ker}\,(\Phi, f) \coloneqq \bigsqcup_{x \in B_1} \mathrm{Ker}\,\big(\Phi\restriction_{\mathbb{V}_{1\,x}}\big)$$

niesie kanoniczną strukturę podwiązki wektorowej jego dziedziny $\mathbb{V}_1$, przy czym

$$\mathrm{rk}\,\mathrm{Ker}\,(\Phi, f) = n_1 - r\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Jest oczywistym, że ograniczenie atlasu $\mathbb{V}_1$ do podprzestrzeni topologicznej $\mathrm{Ker}\,(\Phi, f)$ indukuje na niej strukturę (pod)rozmaitości klasy $C^\infty$ (wszak nad każdym punktem bazy mamy do czynienia z podprzestrzenią liniową włókna), przy czym nad dowolnym punktem bazy $x \in B$ zachodzi – na mocy algebraicznego bilansu wymiarów –

$$\big(\pi_{\mathbb{V}_1}\restriction_{\mathrm{Ker}\,(\Phi,f)}\big)^{-1}(\{x\}) \cong \mathbb{K}^{\times n_1 - r}\,.$$

Pozostaje jedynie skonstruować gładkie trywializacje lokalne tak otrzymanej wiązki (wzajem izomorficznych) przestrzeni wektorowych. Zważywszy lokalny charakter zagadnienia, ograniczymy się do (dostatecznie małych) otoczeń otwartych: $\mathcal{O}_1$ (ustalonego dowolnie) punktu $x_1 \in B_1$ oraz $\mathcal{O}_2 \supset f(\mathcal{O}_1)$ punktu $f(x_1)$, na których określone są dyfeomorfizmy (klasy $C^\infty$)

$$\tau_{\mathcal{O}_A} \;:\; \pi_{\mathbb{V}_A}^{-1}(\mathcal{O}_A) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_A \times \mathbb{K}^{\times n_A}\,, \quad A \in \{1,2\}\,.$$

W obrazie tychże morfizm $(\Phi, f)$ przybiera postać

$$\Phi_{21} \equiv \tau_{\mathcal{O}_2} \circ \Phi \circ \tau_{\mathcal{O}_1}^{-1} \;:\; \mathcal{O}_1 \times \mathbb{K}^{\times n_1} \longrightarrow \mathcal{O}_2 \times \mathbb{K}^{\times n_2} \;:\; (x, v) \longmapsto \big(f(x), L_\Phi(x)(v)\big)$$

dla pewnego gładkiego odwzorowania

$$L_\Phi \;:\; \mathcal{O}_1 \longrightarrow \mathbb{K}(n_2) \;:\; x \longmapsto L_\Phi(x)$$

o rzędzie

$$\operatorname{rk} L_\Phi(x) = r\,.$$

Dokonajmy rozkładu

$$\mathbb{K}^{\times n_1} = \operatorname{Ker} L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_1\,, \qquad\qquad \mathbb{K}^{\times n_2} = \operatorname{Image} L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_2\,,$$

określonego dla pewnych przestrzeni dopełniających $\Delta_A \subset \mathbb{K}^{\times n_A}$ o wymiarach

$$\dim_{\mathbb{K}} \Delta_1 = n_1 - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} L_\Phi(x_1) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Image} L_\Phi(x_1) = n_2 - \dim_{\mathbb{K}} \Delta_2\,.$$

Wobec oczywistej relacji

$$\Delta_1 \cong \operatorname{Image} L_\Phi(x_1)$$

możemy następnie skonstruować indeksowaną przez $\mathcal{O}_1 \ni x$ rodzinę odwzorowań $\mathbb{K}$-liniowych

$$\begin{aligned}\widetilde{\Lambda}_\Phi(x) \quad : \quad & \mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2 \equiv \operatorname{Ker} L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_1 \oplus \Delta_2 \longrightarrow \operatorname{Ker} L_\Phi(x_1) \oplus \operatorname{Image} L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_2 \\ & \equiv \operatorname{Ker} L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2} \\ : \quad & (k, \delta_1, \delta_2) \longmapsto (k, 0_{\operatorname{Image} L_\Phi(x_1)}, \delta_2) +_\oplus \big(0, L_\Phi(x)\big)(k, \delta_1)\,,\end{aligned}$$

o jawnie odwracalnym elemencie

$$\widetilde{\Lambda}_\Phi(x_1) = \mathrm{id}_{\operatorname{Ker} L_\Phi(x_1)} \oplus L_\Phi(x_1)\restriction_{\Delta_1} \oplus \mathrm{id}_{\Delta_2}\,.$$

Jako że odwzorowania odwracalne tworzą podzbiór otwarty w $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2, \operatorname{Ker} L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2})$ (a mianowicie: dopełnienie przeciwobrazu zbioru domkniętego $\{0_{\mathbb{K}}\}$ względem odwzorowania $\det_{(n_1 + \dim_{\mathbb{K}} \Delta_2)}$ będącego superpozycją odwzorowań ciągłych, więc też ciągłego), przeto $\widetilde{\Lambda}_\Phi(x_1)$ należy do tego podzbioru wraz z pewnym swoim otoczeniem otwartym $\mathcal{U}$, którego przeciwobraz względem (ciągłego) odwzorowania $\widetilde{\Lambda}_\Phi$ jest otoczeniem otwartym $\mathcal{V}_1 \equiv \widetilde{\Lambda}_\Phi^{-1}(\mathcal{U}) \ni x_1$ o własności $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{O}_1$. Oto więc obok $C^\infty$-gładkiego odwzorowania

$$\Lambda_\Phi \equiv \widetilde{\Lambda}_\Phi\restriction_{\mathcal{V}_1} \; : \; \mathcal{V}_1 \longrightarrow \operatorname{Iso}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2, \operatorname{Ker} L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2}\big)\,,$$

mamy też $C^\infty$-gładkie odwzorowanie

$$V_\Phi \equiv \operatorname{Inv} \circ \Lambda_\Phi \; : \; : \; \mathcal{V}_1 \longrightarrow \operatorname{Iso}_{\mathbb{K}}\big(\operatorname{Ker} L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2}, \mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2\big)\,,$$

(punktowo) odwrotne do $\Lambda_\Phi$ w każdym $x \in \mathcal{V}_1$. Rozważmy dowolny wektor

$$(k, \delta_1) \in \operatorname{Ker} L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_1 \equiv \mathbb{K}^{\times n_1}\,.$$

Ustaliwszy $x \in \mathcal{V}_1$, stwierdzamy, że

$$\begin{aligned}(k, \delta_1) \in \operatorname{Ker} L_\Phi(x) \qquad & \Longleftrightarrow \qquad \Lambda_\Phi(x)(k, \delta_1, 0_{\Delta_2}) = (k, 0_{\Delta_1}, 0_{\Delta_2}) \\ & \Longleftrightarrow \qquad (k, \delta_1, 0_{\Delta_2}) = V_\Phi(x)(k, 0_{\Delta_1}, 0_{\Delta_2})\,.\end{aligned}$$

Wziąwszy pod uwagę włożenia kanoniczne:

$$\jmath_{\operatorname{Ker} L_\Phi(x_1)} \; : \; \operatorname{Ker} L_\Phi(x_1) \rightarrowtail \operatorname{Ker} L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2}$$

oraz

$$\jmath_{\mathbb{K}^{\times n_1}} \; : \; \mathbb{K}^{\times n_1} \rightarrowtail \mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2\,,$$

możemy zatem zapisać

$$\jmath_{\mathbb{K}^{\times n_1}}\big(\operatorname{Ker} L_\Phi(x)\big) \subseteq V_\Phi(x)\big(\operatorname{Image} \jmath_{\operatorname{Ker} L_\Phi(x_1)}\big)\,,$$

ale też

$$\begin{aligned}& \dim_{\mathbb{K}} \jmath_{\mathbb{K}^{\times n_1}}\big(\operatorname{Ker} L_\Phi(x)\big) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} L_\Phi(x) = n_1 - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Image} L_\Phi(x) \\ = \quad & n_1 - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Image} L_\Phi(x_1) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} L_\Phi(x_1) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Image} \jmath_{\operatorname{Ker} L_\Phi(x_1)} \\ \equiv \quad & \dim_{\mathbb{K}} V_\Phi(x)\big(\operatorname{Image} \jmath_{\operatorname{Ker} L_\Phi(x_1)}\big)\,,\end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika z odwracalności $V_\Phi(x)$. Widzimy więc, że

$$\jmath_{\mathbb{K}^{\times n_1}}\big(\mathrm{Ker}\,L_\Phi(x)\big) = V_\Phi(x)\big(\mathrm{Image}\,\jmath_{\mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1)}\big)\,,$$

i na tej podstawie konstatujemy, że odwzorowanie

$$\begin{aligned}\tau_{\mathcal{V}_1}^{-1} \quad &: \quad \mathcal{V}_1 \times \mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1) \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(\Phi_{21}, f\restriction_{\mathcal{O}_1})\restriction_{\mathcal{V}_1} \\ &: \quad (x,k) \longmapsto \big(x, \mathrm{pr}_{1,2} \circ V_\Phi(x)(k, 0_{\mathrm{Image}\,L_\Phi(x_1)}, 0_{\Delta_2})\big)\end{aligned}$$

jest ($C^\infty$-)gładką odwrotnością trywializacji lokalnej (także ($C^\infty$-)gładkiej)

$$\begin{aligned}\tau_{\mathcal{V}_1} \quad &: \quad \mathrm{Ker}\,(\Phi_{21}, f\restriction_{\mathcal{O}_1})\restriction_{\mathcal{V}_1} \longrightarrow \mathcal{V}_1 \times \mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1) \\ &: \quad (x,v) \longmapsto \big(x, \mathrm{pr}_1 \circ \Lambda_\Phi(x)(v, 0_{\Delta_2})\big)\,.\end{aligned}$$

Tym sposobem ustanawiamy referencyjną przestrzeń wektorową $\mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1)$ w roli włókna typowego, co jest wynikiem pożądanym. □

Antycypowanej formalizacji dostarcza przeto

**Corollarium 1.** Przyjmijmy dotychczasowy zapis, w tym ten ze Stw. 1, i niechaj $(E, B, F, \pi_E)$ będzie wiązką włóknistą klasy $C^\infty$. Jądro epimorfizmu wiązek wektorowych

$$(\mathsf{T}\pi_E, \pi_E) \; : \; \mathsf{T}E \longrightarrow \mathsf{T}B$$

jest podwiązką wektorową klasy $C^\infty$

$$\big(\mathsf{V}E \equiv \mathrm{Ker}\,(\mathsf{T}\pi_E, \pi_E), E, \mathbb{K}^{\times \dim F}, \pi\big)$$

wiązki stycznej $\mathsf{T}E$. Określamy ją mianem (**pod**)**wiązki pionowej** (lub **wertykalnej**) nad $E$. Jej włókno $\mathsf{V}_pE \equiv (\mathsf{V}E)_p$ nad $p \in E$, zwane (**pod**)**przestrzenią pionową** (lub **wertykalną**), rozpinają **wektory pionowe** (lub **wertykalne**), styczne do włókien wiązki $E$.

*Dowód:* Wystarczy zauważyć, że odwzorowanie styczne $\mathsf{T}\pi_E$ do submersji $\pi_E$ jest – wprost z definicji – surjektywne, ma zatem stały rząd (maksymalny)

$$\mathrm{rk}\big(\mathsf{T}\pi_E, \pi_E\big) = \dim B\,.$$

□

Jest przeto jasne, że rozwiązanie problemu z początku naszej dyskusji umożliwia lub w każdym razie przybliża jakaś globalna (tj. niezależna od wyboru lokalnych trywializacji) definicja *rzutu* (zwykłej pochodnej) na podwiązkę pionową, czyli – innymi słowy – rozkładu wiązki stycznej $\mathsf{T}E$ na whitneyowską sumę prostą tejże podwiązki pionowej i jakiegoś jej dopełnienia (które *nie* jest kanonicznie wpisane w definicję wiązki $E$), oczywiście z zachowaniem aksjomatycznych właściwości różniczkowania, które dostarczy nam różniczkowania rozumianego jako strukturalne przyporządkowanie

(1) $$\nabla \; : \; \Gamma(E) \ni \phi \longmapsto \nabla\phi \in \Gamma\big(\mathsf{T}^*B \otimes_{B,\mathbb{R}} \phi^*\mathsf{V}E\big)\,,$$

którego przeciwdziedzina jest opisana przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathsf{T}B \arrow[r, "\nabla\phi"] \arrow[d, "\pi_{\mathsf{T}B}"'] & \mathsf{V}E \arrow[r, hook, "\jmath_{\mathsf{V}E}"] \arrow[d] & \mathsf{T}E \arrow[dl, "\pi_{\mathsf{T}E}"] \\ B \arrow[r, "\phi"'] & E & \end{tikzcd}\,.$$

Poszukiwanie takiego właśnie rozwiązania będzie przedmiotem dalszych naszych roztrząsań, które – jak to nierzadko bywa w umotywowanych fizykalnie poszukiwaniach matematycznych – doprowadzą nas w obszary bliskie modelowaniu zjawisk na pierwszy rzut oka niepowiązanych z postawionym sobie przez nas celem pragmatycznym[2], jakim jest konstrukcja naturalnej operacji różniczkowania cięć wiązki włóknistej.

Chcąc przydać naszej dotychczasowej dyskusji pożądanej cechy konkretności i tym sposobem przybliżyć się do rozwiązania formalnego postawionego powyżej problemu (lub raczej: ustalić konkretny, choć „brzydki", bo zależny od wyboru lokalnych trywializacji, punkt odniesienia i dojścia przyszłych dociekań „eleganckich", więc uwolnionych od „brzydoty" opisu lokalnego), przyjrzymy się bliżej obstrukcji wobec postulowanej przez nas „prostoty" w wyrażeniu $\mathsf{T}_x{}^H f$. Założymy przy tym dla ułatwienia (a bez straty dla dalszych rozważań szczegółowych), że odwzorowanie $H : \mathcal{O} \longrightarrow \mathrm{Aut}(F)$ przyjmuje wartości w pewnej *skończenie wymiarowej* grupie Liego $\mathrm{G} \subsetneq \mathrm{Aut}(F)$, co da nam do ręki narzędzia i metody rachunku cartanowskiego wprowadzonego na wykładach z Teorii Grup II (patrz: Wykłady 2., 3. i 4. pt. "Lie to me, Cartan!" wygłoszone przez Autora na Wydziale Fizyki UW w roku akademickim 2022/23, do których w dalszej części dyskusji będziemy się odwoływać jako do „Niezbędnika cartanowskiego" i etykietą Niezb.cart). Ich nieodzownym uzupełnieniem w obecnym kontekście jest

**Definicja 1.** Niechaj $\mathrm{G}$ będzie grupą Liego w rozumieniu Def. 7-8.1 i niech $(M,\lambda)$ będzie $\mathrm{G}$-rozmaitością gładką lewostronną w rozumieniu Def. 7-8.2. **Fundamentalne pole wektorowe dla** $\lambda$ to przyporządkowanie

$$\mathcal{K}^{(\lambda)} \; : \; \mathsf{T}_e\mathrm{G} \longrightarrow \Gamma(\mathsf{T}M) \; : \; X \longmapsto \mathsf{T}_{(e,\cdot)}\lambda\big(-X, \mathbf{0}_{\mathsf{T}M}(\cdot)\big) \equiv \mathcal{K}^{(\lambda)}_X(\cdot)\,.$$

Bez trudu dowodzimy wysoce strukturalnego charakteru powyższego przyporządkowania:

**Stwierdzenie 1.** Przyjmijmy oznaczenia Def. 1. Fundamentalne pole wektorowe $\mathcal{K}$ jest $\mathrm{G}$-ekwiwariantnym homomorfizmem algebr Liego

$$\mathcal{K}^{(\lambda)} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}\big(\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}, \big(\Gamma(\mathsf{T}M), [\cdot,\cdot]_{\Gamma(\mathsf{T}M)}\big)\big)\,,$$

przy czym $[\cdot,\cdot]_{\Gamma(\mathsf{T}M)}$ jest tutaj komutatorem pól wektorowych, a działania $\mathrm{G}$ na dziedzinie i przeciwdziedzinie $\mathcal{K}^{(\lambda)}$ brane pod uwagę to, odpowiednio, stycznościowe działanie dołączone

$$\mathsf{T}_e\mathrm{Ad} \; : \; \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbf{LieAlg}_{\mathbb{R}}}\big(\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}\big)$$

i kanoniczne stycznościowe podniesienie $\lambda$ (pchnięcie), dane w postaci

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_2\lambda \quad &: \quad \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbf{LieAlg}_{\mathbb{R}}}\big(\Gamma(\mathsf{T}M), [\cdot,\cdot]_{\Gamma(\mathsf{T}M)}\big) \\ &: \quad g \longmapsto \big(\Gamma(\mathsf{T}M) \ni \mathcal{V} \longmapsto \mathsf{T}_{\lambda_{g^{-1}}(\cdot)}\lambda_g \circ \mathcal{V}\big(\lambda_{g^{-1}}(\cdot)\big) \equiv \lambda_{g*}\mathcal{V}(\cdot) \in \Gamma(\mathsf{T}M)\big)\,. \end{aligned}$$

*Dowód:* Punktem wyjścia do dowodu tezy Stwierdzenia jest jawne przedstawienie wartości pola $\mathcal{K}^{(\lambda)}$ w dowolnym punkcie $m \in M$ jego dziedziny jako klasy współstyczności przechodzących przezeń ścieżek:

$$\mathcal{K}^{(\lambda)}_X(m) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\lambda\big(\exp^{\mathrm{G}}(-t \triangleright X), m\big)\,,$$

w którym odwołujemy się do Def. Niezb.cart.5. Uwzględniwszy naturalność odwzorowania eksponencjalnego (patrz: Stw. Niezb.cart.11), która w interesującym nas przypadku implikuje tożsamość

$$\mathrm{Ad}_g \circ \exp^{\mathrm{G}} = \exp^{\mathrm{G}} \circ \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g\,,$$

obliczamy na tej podstawie

$$\begin{aligned} &\mathcal{K}^{(\lambda)}_{\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g(X)}\big(\lambda_g(m)\big) \equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\lambda\big(\exp^{\mathrm{G}}\big(-t \triangleright \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g(X)\big), \lambda_g(m)\big) \\ = \;& \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\lambda\big(\exp^{\mathrm{G}}\big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g(-t \triangleright X)\big), \lambda_g(m)\big) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\lambda\big(\mathrm{Ad}_g\big(\exp^{\mathrm{G}}(-t \triangleright X)\big), \lambda_g(m)\big) \\ = \;& \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\lambda\big(\mathrm{Ad}_g\big(\exp^{\mathrm{G}}(-t \triangleright X)\big) \cdot g, m\big) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\lambda\big(g \cdot \exp^{\mathrm{G}}(-t \triangleright X), m\big) \end{aligned}$$

[2]Insynuacja dotyczy matematycznej konstrukcji tzw. pól cechowania (fotonu, gluonów, bozonów $W^{\pm}$ i $Z\ldots$), „zapośredniczających" wszystkie bez wyjątku oddziaływania fundamentalne w ich Modelu Standardowym, oraz ich naturalnych (i obserwowanych w doświadczeniu) sprzężeń z polami materii.

$$\equiv \quad \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\lambda_g\circ\lambda\big(\exp^{\mathrm{G}}(-t\triangleright X),m\big)=\mathsf{T}_m\lambda_g\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\lambda\big(\exp^{\mathrm{G}}(-t\triangleright X),m\big)\big)$$

$$\equiv \quad \mathsf{T}_m\lambda_g\big(\mathcal{K}^{(\lambda)}(m)\big)\,,$$

wykorzystując po drodze oczywistą tożsamość

$$\lambda\circ\big(\ell_g\times\mathrm{id}_M\big)=\lambda_g\circ\lambda\,, \tag{2}$$

zapisaną dla działania lewego regularnego $\ell:\mathrm{G}\times\mathrm{G}\longrightarrow\mathrm{G}:(g,h)\longmapsto g\cdot h\equiv\ell_g(h)$ grupy G na sobie z dowodu Stw. Niezb.cart.1. Wynik dowodzi G-ekwiwariantności fundamentalnego pola wektorowego $\mathcal{K}^{(\lambda)}$. Jego homomorficzność jest prostą konsekwencją elementarnych własności komutatora pól wektorowych. Istotnie, mamy

**Lemat 1.** Przyjmijmy zapis Def. 2-3-4.4 i 1. Pole wektorowe $\widetilde{R}_X\equiv(R_X,\mathbf{0}_{\mathsf{T}M})$ na rozmaitości produktowej $\mathrm{G}\times M$ indukowane kanonicznie przez pole prawo-niezmiennicze $R_X\in\mathfrak{X}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ na G przyporządkowane wektorowi $X\in\mathfrak{g}$ według schematu ze Stw. Niezb.cart.4 jest w $\lambda$-relacji (wedle Uwagi Niezb.cart.3) z fundamentalnym polem wektorowym $-\mathcal{K}^{(\lambda)}_X$.

*Dowód Lematu 1:* Przywoławszy tożsamość

$$\lambda\circ\big(\wp_g\times\mathrm{id}_M\big)=\lambda\circ\big(\mathrm{id}_{\mathrm{G}}\times\lambda_g\big)\,,$$

zapisaną dla działania prawego regularnego $\wp:\mathrm{G}\times\mathrm{G}\longrightarrow\mathrm{G}:(h,g)\longmapsto h\cdot g\equiv\wp_g(h)$ grupy G na sobie z dowodu Stw. Niezb.cart.1, obliczamy bez trudu

$$\mathsf{T}_{(g,m)}\lambda\big(\widetilde{R}_X(g,m)\big)=\mathsf{T}_{(g,m)}\lambda\circ\big(\mathsf{T}_e\wp_g\times\mathrm{id}_{\mathsf{T}_mM}\big)(X,0_{\mathsf{T}_mM})=\mathsf{T}_{(e,m)}\big(\lambda\circ\big(\wp_g\times\mathrm{id}_M\big)\big)(X,0_{\mathsf{T}_mM})$$

$$=\quad\mathsf{T}_{(e,m)}\big(\lambda\circ\big(\mathrm{id}_{\mathrm{G}}\times\lambda_g\big)\big)(X,0_{\mathsf{T}_mM})=\mathsf{T}_{(e,\lambda_g(m))}\lambda\circ\mathsf{T}_{(e,m)}\big(\mathrm{id}_G\times\lambda_g\big)(X,0_{\mathsf{T}_mM})$$

$$=\quad\mathsf{T}_{(e,\lambda_g(m))}\lambda\big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}_e\mathrm{G}}(X),\mathsf{T}_m\lambda_g(0_{\mathsf{T}_mM})\big)=\mathsf{T}_{(e,\lambda_g(m))}\lambda\big(X,0_{\mathsf{T}_{\lambda_g(m)}M}\big)\equiv-\mathcal{K}^{(\lambda)}_X\big(\lambda(g,m)\big)\,.$$

□

W świetle Lematu 1. możemy odwołać się do Twierdzenia o Polach Wektorowych w Relacji, wysłowionego w Uwadze Niezb.cart.3 w postaci Równ. (Niezb.cart.5), w bezpośrednim rachunku

$$[\mathcal{K}^{(\lambda)}_X,\mathcal{K}^{(\lambda)}_Y]_{\Gamma(M)}(m)\equiv[-\mathcal{K}^{(\lambda)}_X,-\mathcal{K}^{(\lambda)}_Y]_{\Gamma(M)}\big(\lambda(e,m)\big)=\mathsf{T}_{(g,x)}\lambda\big([\widetilde{R}_X,\widetilde{R}_Y]_{\Gamma(\mathsf{T}(\mathrm{G}\times M))}(e,m)\big)$$

$$\equiv\quad\mathsf{T}_{(g,m)}\lambda\big(\big([R_X,R_Y]_{\Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G})},\mathbf{0}_{\mathsf{T}M}\big)(e,m)\big)\,,$$

który po uwzględnieniu Stw. Niezb.cart.12 daje nam oczekiwany wynik

$$[\mathcal{K}^{(\lambda)}_X,\mathcal{K}^{(\lambda)}_Y]_{\Gamma(M)}(m)=\mathsf{T}_{(g,m)}\lambda\big(\big(-R_{[X,Y]_{\mathfrak{g}}},\mathbf{0}_{\mathsf{T}M}\big)(e,m)\big)=-\mathsf{T}_{(g,m)}\lambda\big(\widetilde{R_{[X,Y]_{\mathfrak{g}}}}(e,m)\big)=\mathcal{K}^{(\lambda)}_{[X,Y]_{\mathfrak{g}}}(m)\,.$$

□

Wyposażeni w powyższe struktury i przy wypowiedzianym wcześniej założeniu $H:\mathcal{O}\longrightarrow\mathrm{G}$ uzupełnionym o definicję działania $\lambda:\mathrm{G}\times F\longrightarrow F$, pozwalającą zapisać $H(x)(m)\equiv\lambda_{H(x)}(m)$, liczymy wprost (w zapisie Def. Niezb.cart.4, dla dowolnego $v\in\mathsf{T}_xB$,

$$\mathsf{T}_x{}^Hf(v)\equiv\mathsf{T}_{f(x)}\lambda_{H(x)}\circ\mathsf{T}_xf(v)+\mathsf{T}_{(H(x),f(x))}\lambda\big(\mathsf{T}_xH(v),0_{\mathsf{T}_{f(x)}F}\big)\,,$$

a dalej – wobec tożsamości

$$\mathsf{T}_xH(v)\quad=\quad h^A\triangleright L_A(H(x))\equiv\theta^A_{\mathrm{L}}(H(x))(\mathsf{T}_xH(v))\triangleright L_A(H(x))$$

$$\equiv\quad\theta^A_{\mathrm{L}}(H(x))\circ\mathsf{T}_xH(v)\triangleright L_A(H(x))\equiv H^*\theta^A_{\mathrm{L}}(x)(v)\triangleright L_A(H(x))\,,$$

wynikającej z bazowości układu $\{L_A(H(x))\}_{A\in\overline{1,\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}}}$ w $\mathsf{T}_{H(x)}\mathrm{G}$ i i raz jeszcze w odwołaniu do tożsamości (2), a z uwzględnieniem Stw. 1 oraz Stw. Niezb.cart.12 i Niezb.cart.13 –

$$\mathsf{T}_x{}^Hf\quad=\quad\mathsf{T}_{f(x)}\lambda_{H(x)}\circ\mathsf{T}_xf+H^*\theta^A_{\mathrm{L}}(x)\otimes_{\mathbb{R}}\mathsf{T}_{(H(x),f(x))}\lambda\big(L_A(H(x)),0_{\mathsf{T}_{f(x)}F}\big)$$

$$=\quad\mathsf{T}_{f(x)}\lambda_{H(x)}\circ\mathsf{T}_xf+H^*\theta^A_{\mathrm{L}}(x)\otimes_{\mathbb{R}}\mathsf{T}_{(H(x),f(x))}\lambda\big(\mathsf{T}_e\ell_{H(x)}(t_A),0_{\mathsf{T}_{f(x)}F}\big)$$

$$= \mathsf{T}_{f(x)}\lambda_{H(x)} \circ \mathsf{T}_x f + H^*\theta_{\mathrm{L}}^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_{(e,f(x))}\big(\lambda \circ \big(\ell_{H(x)} \times \mathrm{id}_F\big)\big)\big(t_A, 0_{\mathsf{T}_{f(x)}F}\big)$$

$$= \mathsf{T}_{f(x)}\lambda_{H(x)} \circ \mathsf{T}_x f + H^*\theta_{\mathrm{L}}^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_{f(x)}\lambda_{H(x)} \circ \mathsf{T}_{(e,f(x))}\lambda\big(t_A, 0_{\mathsf{T}_{f(x)}F}\big)$$

$$\equiv \mathsf{T}_{f(x)}\lambda_{H(x)} \circ \mathsf{T}_x f - H^*\theta_{\mathrm{L}}^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_{f(x)}\lambda_{H(x)}\big(\mathcal{K}_{t_A}^{(\lambda)}\big(f(x)\big)\big)$$

$$= \mathsf{T}_{f(x)}\lambda_{H(x)} \circ \mathsf{T}_x f - H^*\theta_{\mathrm{L}}^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \big(\mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{H(x)}\big)_A^{\ B}\big(\mathcal{K}_{t_B}^{(\lambda)}\big({}^H f(x)\big)\big)$$

$$= \mathsf{T}_{f(x)}\lambda_{H(x)} \circ \mathsf{T}_x f - H^*\theta_{\mathrm{R}}^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_A}^{(\lambda)}\big({}^H f(x)\big)$$

$$\equiv \mathsf{T}_{f(x)}\lambda_{H(x)} \circ \mathsf{T}_x f - \mathcal{K}_{\cdot}^{(\lambda)}\big({}^H f(x)\big) \circ H^*\theta_{\mathrm{R}}(x)\,. \tag{3}$$

Widzimy zatem jasno, że wzmiankowana wcześniej operacja rzutowania jest całkiem konkretnie określona w obrazie trywializacji lokalnej: sprowadza się ona do zastąpienia

$$\mathsf{T}_x f \rightsquigarrow \mathsf{T}_x f + \alpha_{\mathcal{O}}(x, f(x))$$

przy użyciu pewnej 1-formy wektorowej

$$\alpha_{\mathcal{O}}(\cdot, f(\cdot)) \in \mathsf{T}^*_{\cdot} B \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_{f(\cdot)} F \subset \mathsf{T}^*_{\cdot} B \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_{(\cdot, f(\cdot))}(\mathcal{O} \times F) \tag{4}$$

o *afinicznych* własnościach transformacyjnych:

$$\chi^*\alpha_{\mathcal{O}}\big(x, f(x)\big) = \mathsf{T}_{f(x)}\lambda_{H(x)} \circ \alpha_{\mathcal{O}}\big(x, f(x)\big) + \mathcal{K}_{\cdot}^{(\lambda)}\big({}^H f(x)\big) \circ H^*\theta_{\mathrm{R}}^A(x)\,. \tag{5}$$

Wyjściowy problem sprowadza się zatem do identyfikacji naturalnej struktury geometrycznej (globalnej), z której po wyborze trywializacji lokalnych odczytamy powyższe relacje, ewentualnie uzupełnione o więzy zgodności z dodatkową strukturą. Poniżej zapoznamy się z kilkoma propozycjami rozwiązań, biorącymi za punkt wyjścia różne intuicje algebraiczne. Głębokie relacje pomiędzy tymi na pierwszy rzut oka dość luźno ze sobą powiązanymi propozycjami, których dowiedziemy w toku dalszych rozważań, stanowić będą mocny argument potwierdzający *a posteriori* słuszność i naturalność wybranej przez nas ścieżki rozumowania.

Uzbrojeni w ścisłą definicję podwiązki stycznej do włókien, możemy przejść do omówienia konstrukcji o znaczeniu zasadniczym dla różniczkowania cięć wiązki włóknistej. Nasze rozważania zaczynamy od

**Definicja 2.** Niechaj $(E, B, F, \pi_E)$ będzie wiązką włóknistą. Rozważmy gładką ścieżkę

$$\gamma \;:\; [0,1] \longrightarrow B\,.$$

**Przeniesienie równoległe (klasy $C^\infty$) w $E$ wzdłuż $\gamma$** to rodzina dyfeomorfizmów (gładkich odwzorowań odwracalnych o gładkich odwrotnościach)

$$\mathsf{P}^\gamma_{t_1,t_2} \;:\; E_{\gamma(t_1)} \xrightarrow{\cong} E_{\gamma(t_2)}\,, \qquad t_1, t_2 \in [0,1]$$

o własnościach

(PT1) odwzorowanie

$$\mathsf{P}^\gamma_{\cdot,\cdot} \;:\; [0,1]^{\times 2}\ {}_{\gamma\circ\mathrm{pr}_1}\!\times_{\pi_E} E \longrightarrow E \;:\; ((t_1,t_2),x) \longmapsto \mathsf{P}^\gamma_{t_1,t_2}(x)$$

jest klasy $C^\infty$;

(PT2) $\mathsf{P}^\gamma_{t_1,t_1} = \mathrm{id}_{E_{\gamma(t_1)}}$;

(PT3) $\forall_{t_1,t_2,t_3 \in [0,1} \;:\; \mathsf{P}^\gamma_{t_2,t_3} \circ \mathsf{P}^\gamma_{t_1,t_2} = \mathsf{P}^\gamma_{t_1,t_3}$;

(PT4) dla dowolnego cięcia $\sigma \;:\; \mathcal{O}_x \longrightarrow E$ określonego na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_x$ punktu $x \in B$ jego **pochodna kowariantna** w $x$ wzdłuż dowolnego pola wektorowego $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}(\mathcal{O}_x)$, zdefiniowana wzorem

$$\nabla_{\mathcal{V}}\sigma(x) := \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(\mathsf{P}^\gamma_{0,t}\big)^{-1} \circ \sigma \circ \gamma(t)\,,$$

nie zależy od wyboru reprezentanta klasy współstyczności ścieżek przez $x$ określonej przez warunki

$$\gamma(0) = x \qquad \wedge \qquad \dot{\gamma}(0) = \mathcal{V}(x)\,,$$

a odwzorowanie

$$\nabla.\sigma \;:\; \mathsf{T}\mathcal{O}_x \longrightarrow \sigma^*\mathsf{V}E \subset \sigma^*\mathsf{T}E$$

jest $C^\infty(\mathcal{O}_x, \mathbb{R})$-liniowe.

Ilekroć dany jest wybór przeniesienia równoległego dla dowolnej ścieżki $\gamma$ na pewnym otoczeniu dowolnego punktu $x \in B$, mówimy, że zostało określone **powiązanie włókien (klasy $C^\infty$) w wiązce** $E$.

Elementarną konsekwencję istnienia przeniesienia równoległego wskazuje

**Stwierdzenie 2.** Przyjmijmy zapis Def. 2. Jeśli dla dowolnej ścieżki w $B$ istnieje przeniesienie równoległe, to wówczas dla dowolnego punktu $p \in E$ we włóknie $E_x$ nad dowolnym punktem $x \in B$ istnieje jednoznacznie określona monomorfizm

$$\mathrm{Hor}_p \;:\; \mathsf{T}_x B \rightarrowtail \mathsf{T}_p E \tag{6}$$

o własności

$$\mathrm{Hor}_p\big(\dot{\gamma}(0)\big) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} \mathsf{P}^\gamma_{0,t}(p) \tag{7}$$

dla dowolnej ścieżki $\gamma$ spełniającej warunek $\gamma(0) = x$, która implikuje tożsamość

$$\mathsf{T}_p\pi_E \circ \mathrm{Hor}_p = \mathrm{id}_{\mathsf{T}_{\pi_E(p)}B}\,. \tag{8}$$

Ponadto przestrzeń styczna $\mathsf{T}_pE$ ma rozkład

$$\mathsf{T}_pE = \mathsf{V}_pE \oplus \mathrm{Image}\,\mathrm{Hor}_p\,.$$

Odwzorowanie $\mathrm{Hor}_p$ określamy mianem **podniesienia poziomego** (lub **horyzontalnego**) **wektorów** z bazy do włókna.

*Dowód:* Zacznijmy od podkreślenia, że formuła (7) określa $\mathrm{Hor}_p$ jednoznacznie, a to z uwagi na dowolność wektora stycznego do ścieżki w danym punkcie bazy. Wystarczy zatem sprawdzić pożądane własności wyrażenia z prawej strony tej równości. To rzekłszy, zauważmy dalej, że rodzina dyfeomorfizmów $\mathsf{P}^\gamma_{t_1,t_2}$, $t_1, t_2 \in [0,1]$ dla ścieżki o nigdzie nie znikającym wektorze stycznym $\dot{\gamma}$ określa (lokalnie) gładkie pole wektorowe $\mathcal{Y}$ nad $\gamma([0,1])$ o potoku (albo, równoważnie, lokalnej grupie lokalnych dyfeomorfizmów)

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{Y}} \quad &: \quad [0,1] \times \pi_E^{-1}\big(\gamma([0,1])\big) \longrightarrow \pi_E^{-1}\big(\gamma([0,1])\big) \\ &: \quad (t,p) \longmapsto \mathsf{P}^\gamma_{\gamma^{-1}\circ\pi_E(p),t}(p) \equiv \Phi_{\mathcal{Y}}(t,p)\,, \end{aligned}$$

przy czym zachodzi, rzecz jasna, tożsamość

$$\Phi_{\mathcal{Y}}\big(\gamma^{-1} \circ \pi_E(p), p\big) = p\,,$$

a samo pole $\mathcal{Y}$ spełnia równanie

$$\mathcal{Y}(p) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=\gamma^{-1}\circ\pi_E(p)} \Phi_{\mathcal{Y}}(t,p)\,.$$

Rozważmy następnie dowolne cięcie lokalne

$$\sigma \;:\; \mathcal{O}_x \longrightarrow E\,, \qquad\qquad \pi_E \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_x}$$

o własności

$$\sigma \circ \gamma(0) \equiv \sigma(x) = p\,.$$

Jego pochodną kowariantną w $x$ wzdłuż pola stycznego do $\gamma$,

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\sigma(x) \equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} \mathsf{P}^{\gamma\,-1}_{0,t}\big(\sigma \circ \gamma(t)\big)\,,$$

obliczamy przy pomocy następującego zabiegu (różniczkując potok względem drugiego argumentu, należy pamiętać, że przy pierwszym argumencie zamrożonym na wartości $t = 0$, różniczkujemy w istocie odwzorowanie identycznościowe na przestrzeni warunków początkowych):

$$\begin{aligned}\mathsf{T}_x\sigma(\dot\gamma(0)) &\equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\mathsf{P}^\gamma_{0,t}\big(\mathsf{P}^{\gamma\,-1}_{0,t}\big(\sigma\circ\gamma(t)\big)\big) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\Phi_{\mathcal{Y}}\big(t,\mathsf{P}^{\gamma\,-1}_{0,t}\big(\sigma\circ\gamma(t)\big)\big)\\ &= \mathsf{D}_1\Phi_{\mathcal{Y}}\big(0,\mathsf{P}^{\gamma\,-1}_{0,0}\big(\sigma\circ\gamma(0)\big)\big) + \mathsf{D}_2\Phi_{\mathcal{Y}}\big(0,\mathsf{P}^{\gamma\,-1}_{0,0}\big(\sigma\circ\gamma(0)\big)\big)\big(\nabla_{\dot\gamma}\sigma(x)\big)\\ &= \mathcal{Y}\big(\mathsf{P}^{\gamma\,-1}_{0,0}\big(\sigma\circ\gamma(0)\big)\big) + \mathsf{T}_{\mathsf{P}^{\gamma\,-1}_{0,0}(\sigma\circ\gamma(0))}\mathrm{id}_E\big(\nabla_{\dot\gamma}\sigma(x)\big)\\ &\equiv \mathcal{Y}\big(\sigma(x)\big) + \mathrm{id}_{\mathsf{T}_{\sigma(x)}E}\big(\nabla_{\dot\gamma}\sigma(x)\big) = \mathcal{Y}(p) + \nabla_{\dot\gamma}\sigma(x)\,,\end{aligned}$$

który pozwala nam ostatecznie zapisać

$$\mathcal{Y}(p) = \mathsf{T}_x\sigma(\dot\gamma(0)) - \nabla_{\dot\gamma}\sigma(x)\,,$$

a zatem także

$$\mathrm{Hor}_p\big(\dot\gamma(0)\big) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\mathsf{P}^\gamma_{0,t}(p) \equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\Phi_{\mathcal{Y}}(t,p) = \mathcal{Y}\big(p\big) = \mathsf{T}_x\sigma(\dot\gamma(0)) - \nabla_{\dot\gamma}\sigma(x)\,,$$

czyli

$$\nabla_{\dot\gamma}\sigma(x) = \mathsf{T}_x\sigma(\dot\gamma(0)) - \mathrm{Hor}_p\big(\dot\gamma(0)\big)\,. \tag{9}$$

Widzimy więc, że wprost na mocy definicji pochodnej kowariantnej (oraz odwzorowania stycznego) odwzorowanie $\mathrm{Hor}_p$ jest $\mathbb{R}$-liniowe, przy czym zależy od wyboru ścieżki wyłącznie poprzez $\dot\gamma(0)$ (oraz $\gamma(0) = x$). Jest ono także injektywne, gdyż z jednej strony

$$\nabla_{\dot\gamma}\sigma(x) \in \mathsf{V}_pE\,,$$

a z drugiej

$$\mathsf{T}_x\sigma(\dot\gamma(0)) \in \mathsf{V}_pE \qquad\Longleftrightarrow\qquad \dot\gamma(0) \equiv \mathsf{T}_{\sigma(x)}\pi_E\circ\mathsf{T}_x\sigma\big(\dot\gamma(0)\big) = 0_{\mathsf{T}_xB}\,,$$

przeto koniec końców

$$\begin{aligned}\mathsf{T}_x\sigma(\dot\gamma(0)) - \nabla_{\dot\gamma}\sigma(x) \in \mathsf{V}_pE \qquad&\Longleftrightarrow\qquad \mathsf{T}_x\sigma(\dot\gamma(0)) \in \mathsf{V}_pE\\ &\Longleftrightarrow\qquad \dot\gamma(0) = 0_{\mathsf{T}_xB}\,,\end{aligned}$$

czyli

$$\mathrm{Image}\,\mathrm{Hor}_p \cap \mathsf{V}_pE = \{0_{\mathsf{T}_pE}\}\,.$$

Powyższe implikuje ciąg relacji między przestrzeniami $\mathbb{R}$-liniowymi (mamy tu do czynienia z wewnętrzną sumą prostą)

$$\mathrm{Image}\,\mathrm{Hor}_p \oplus \mathsf{V}_pE = \mathrm{Image}\,\mathrm{Hor}_p +_{\mathsf{T}_pE} \mathsf{V}_pE \subset \mathsf{T}_pE\,,$$

a ponieważ – z racji injektywności $\mathrm{Hor}_p$, która czyni z niego izomorfizm na obraz – prawdziwą jest równość

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{Image}\,\mathrm{Hor}_p \oplus \mathsf{V}_pE\big) &= \dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Image}\,\mathrm{Hor}_p + \dim_{\mathbb{R}}\mathsf{V}_pE = \dim_{\mathbb{R}}\mathsf{T}_xB + \dim F\\ &= \dim B + \dim F = \dim E \equiv \dim_{\mathbb{R}}\mathsf{T}_pE\,,\end{aligned}$$

przeto w istocie

$$\mathrm{Image}\,\mathrm{Hor}_p \oplus \mathsf{V}_pE = \mathsf{T}_pE\,.$$

Tożsamość (8) wynika bezpośrednio z wyprowadzonego powyżej wyrażenia na $\mathrm{Hor}_p\big(\dot\gamma(0)\big)$. □

Alternatywny sposób rozumienia powiązania wprowadzamy w

**Definicja 3. Powiązanie Ehresmanna** na wiązce włóknistej $(E, B, F, \pi_E)$ to wybór takiej podwiązki wektorowej $\mathsf{H}E \subset \mathsf{T}E$ wiązki stycznej do przestrzeni totalnej $E$, która dopełnia wiązkę pionową $\mathsf{V}E$ do wiązki stycznej $\mathsf{T}E$ wedle formuły

$$\mathsf{T}E = \mathsf{V}E \oplus_{\mathbb{R},B} \mathsf{H}E\,,$$

zapisanej w duchu (i notacji) Def. 2-3-4.5. Podwiązka $\mathsf{H}E$ nosi miano (**pod**)**wiązki poziomej** (lub **horyzontalnej**) nad $E$. Jej włókno $\mathsf{H}_pE \equiv (\mathsf{H}E)_p$ nad $p \in E$, zwane (**pod**)**przestrzenią poziomą** (lub **horyzontalną**), rozpinają **wektory poziome** (lub **horyzontalne**).

Relację pomiędzy oboma dotychczasowymi podejściami do definicji powiązania określa

**Twierdzenie 2.** Powiązanie Ehresmanna na wiązce włóknistej określa na niej powiązanie włókien.

<u>*Dowód:*</u> Istnienie powiązania Ehresmanna na wiązce $E$ wymiaru $D \equiv \dim E$ nad bazą $B$ wymiaru $d \equiv \dim B$ pozwala nam wybrać na pewnym otoczeniu $\mathcal{U}_p$ dowolnego punktu $p \in E$ współrzędne lokalne $\{y^\mu\}^{\mu\in\overline{1,D}}$ stowarzyszone z lokalną bazą $\{\frac{\partial}{\partial y^\mu}\}_{\mu\in\overline{1,D}}$ (przestrzeni cięć) wiązki stycznej $\mathsf{T}E$ uzgodnioną z rozkładem $\mathsf{T}E = \mathsf{V}E \oplus_{\mathbb{R},B} \mathsf{H}E$ poprzez warunek

$$\forall_{q\in\mathcal{U}_p} \ : \ \mathsf{V}_qE \equiv \mathrm{Ker}\,\mathsf{T}_q\pi_E = \bigoplus_{\alpha\in\overline{d+1,D}} \left\langle \tfrac{\partial}{\partial y^\alpha}(q) \right\rangle_{\mathbb{R}}\,.$$

Niechaj $\{x^a\}^{a\in\overline{1,d}}$ będą lokalnymi współrzędnymi na pewnym otoczeniu $\mathcal{O}_x \supset \pi_E(\mathcal{U}_p)$ punktu $x \equiv \pi_E(p)$ stowarzyszonymi z lokalną bazą $\{\frac{\partial}{\partial x^a}\}_{a\in\overline{1,d}}$ (przestrzeni cięć) wiązki stycznej $\mathsf{T}B$. Powyższa adaptacja bazy $\mathsf{T}E\restriction_{\mathcal{U}_p}$ (i wynikająca z niej interpretacja współrzędnych $\{y^\alpha\}^{\alpha\in\overline{d+1,D}}$ jako współrzędnych we włóknach $\pi_E$) pozwala zapisać (lokalną prezentację współrzędniową odwzorowania stycznego do rzutu na bazę)

$$\mathsf{T}_q\pi_E\big(\tfrac{\partial}{\partial y^\mu}(q)\big) = \Pi(q)^a_{\ \mu}\,\tfrac{\partial}{\partial x^a}\big(\pi_E(q)\big)\,,$$

przy czym submersywność $\pi_E$ implikuje stały (maksymalny) rząd $\mathrm{rk}\,\Pi(q) = d$ macierzy funkcji (lokalnie) gładkich $\Pi(q) \equiv (\Pi(q)^a_{\ \mu})^{a\in\overline{1,d}}_{\mu\in\overline{1,D}}$, która przybiera postać

$$\Pi(q) = \big(\ \underline{\Pi}(q) \quad | \quad \mathbf{0}_{d\times D-d}\ \big)\,, \qquad\qquad \underline{\Pi}(q) \equiv \big(\Pi(q)^a_{\ \lambda}\big)^{a\in\overline{1,d}}_{\lambda\in\overline{1,d}} \in \mathrm{GL}(d;\mathbb{R})\,.$$

W analogiczny sposób możemy przedstawić rzut kanoniczny

$$\mathsf{P}^{\mathsf{H}_qE}_{\mathsf{V}_qE} \ : \ \mathsf{T}_qE \longrightarrow \mathsf{V}_qE$$

na podprzestrzeń wertykalną wzdłuż przestrzeni horyzontalnej,

$$\mathsf{P}^{\mathsf{H}_qE}_{\mathsf{V}_qE}\big(\tfrac{\partial}{\partial y^\mu}(q)\big) = \Upsilon(q)^\alpha_{\ \mu}\,\tfrac{\partial}{\partial y^\alpha}(q)\,,$$

w terminach macierzy funkcji (lokalnie) gładkich $\Upsilon(q) \equiv (\Upsilon(q)^\alpha_{\ \mu})^{\alpha\in\overline{d+1,D}}_{\mu\in\overline{1,D}}$, która przybiera postać

$$\Upsilon(q) = \big(\ \underline{\Upsilon}(q) \quad | \quad \mathbf{1}_{D-d\times D-d}\ \big)\,, \qquad\qquad \underline{\Upsilon}(q) \equiv \big(\Upsilon(q)^\alpha_{\ \lambda}\big)^{\alpha\in\overline{d+1,D}}_{\lambda\in\overline{1,d}}\,.$$

Niech teraz $\gamma \ : \ [0,1] \longrightarrow \pi_E(\mathcal{U}_p)$ będzie ścieżką przez $\gamma(t_*) \equiv x,\ t_* \in [0,1]$, o reprezentacji współrzędniowej $x^a \circ \gamma \equiv \gamma^a,\ a \in \overline{1,d}$. Pokażemy, że istnieje jednoznaczne lokalne **podniesienie poziome** (lub **horyzontalne**) tejże **ścieżki** przechodzące przez punkt $p \in E_x$, tj. lokalna ścieżka $\widetilde{\gamma}_p \ : \ ]t_* - \varepsilon_p, t_* + \varepsilon_p[ \longrightarrow \mathcal{U}_p,\ \varepsilon_p > 0$ przez $\widetilde{\gamma}_p(t_*) \equiv p$ (o reprezentacji współrzędniowej $y^\mu \circ \widetilde{\gamma}_p \equiv \widetilde{\gamma}^\mu_p,\ \mu \in \overline{1,D}$) spełniająca warunki

$$\forall_{t\in]t_*-\varepsilon_p,t_*+\varepsilon_p[} \ : \ \big(\ \pi_E \circ \widetilde{\gamma}_p(t) = \gamma(t) \qquad \wedge \qquad \mathsf{D}\widetilde{\gamma}_p(t) \in \mathsf{H}_{\widetilde{\gamma}_p(t)}E\ \big)\,.$$

W tym celu przepiszemy drugi z powyższych warunków (który implikuje pierwszy) w postaci współrzędniowej:

$$M\big(\widetilde{\gamma}_p(t)\big)^A_{\ \mu}\,\tfrac{\mathsf{d}\widetilde{\gamma}^\mu_p}{\mathsf{d}t}(t) = \mathsf{D}\gamma(t)^A\,, \qquad A \in \overline{1,D}\,,$$

w której

$$M\big(\widetilde{\gamma}_p(t)\big) = \begin{pmatrix} \Pi\big(\widetilde{\gamma}_p(t)\big) \\ \Upsilon\big(\widetilde{\gamma}_p(t)\big) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \underline{\Pi}\big(\widetilde{\gamma}_p(t)\big) & \mathbf{0}_{d\times D-d} \\ \underline{\Upsilon}\big(\widetilde{\gamma}_p(t)\big) & \mathbf{1}_{D-d\times D-d} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(D)$$

i

$$\mathsf{D}\gamma(t)^a = \tfrac{\mathsf{d}\gamma^a}{\mathsf{d}t}(t)\,, \qquad a \in \overline{1,d}\,, \qquad\qquad \mathsf{D}\gamma(t)^\alpha = 0\,, \qquad \alpha \in \overline{d+1,D}\,.$$

Macierz $M(\widetilde{\gamma}_p(t))$ jest jawnie odwracalna, możemy przeto przepisać warunki podniesienia poziomego w formie zagadnienia początkowego

$$\tfrac{\mathsf{d}(\widetilde{\gamma}_p^\mu)}{\mathsf{d}t}(t) = \Big(M\big(\widetilde{\gamma}_p(t)\big)^{-1\,\mu}{}_A\,\mathsf{D}\gamma(t)^A\Big)\,, \qquad\qquad \widetilde{\gamma}_p(t_*) \equiv p\,.$$

Zagadnienie to (nieautonomiczne) ma – w świetle Lematu Picarda–Lindelöfa (Tw. Niezb.r-g.18 z „Niezbędnika różniczkowo-geometrycznego", oznaczanego odtąd etykietą Niezb.r-g) – lokalnie jednoznaczne rozwiązanie, które jest postulowanym podniesieniem poziomym $\gamma$. Rozwiązanie to zależy gładko od warunku „początkowego" (pośredniego) $\widetilde{\gamma}_p(t_*) \equiv p$. Możemy je gładko przedłużać wybierając w tym celu otoczenia punktów wzdłuż tak rekonstruowanego podniesienia położonych coraz dalej od wyjściowego $p \in E_{\gamma(t_*)}$ będące dziedzinami lokalnych map – w każdym z nich podniesienie jest, jak powyżej, określone jednoznacznie. Przy tym zwartość krzywej $\gamma([0,1])$ (jako ciągłego obrazu zbioru zwartego $[0,1]$) gwarantuje, że procedurę przedłużania podniesionej poziomo krzywej można zrealizować w skończonej liczbie kroków. Przebiegając $E_x$ jako dziedzinę warunków początkowych dla podniesienia $\gamma$, uzyskujemy tym sposobem gładką rodzinę dyfeomorfizmów (wobec jedyności rozwiązań powyższych zagadnień początkowych podniesienia $\widetilde{\gamma}_p$ do różnych punktów $p$ *nie* przecinają się)

$$\mathsf{P}^\gamma_{0,t}\ :\ E_x \xrightarrow{\cong} E_{\gamma(t)}\ :\ p \longmapsto \widetilde{\gamma}_p(t)\,, \qquad t \in [0,1]\,, \tag{10}$$

określających w naturalny sposób (lokalne – nad $\pi_E^{-1}(\gamma([0,1]))$) gładkie pole wektorowe $\mathcal{V} \in \Gamma(\mathsf{H}E\restriction_{\pi_E^{-1}(\gamma([0,1]))})$ – jest to pole wektorów stycznych do podniesień poziomych. Innymi słowy, opisana tu procedura podniesienia poziomego daje nam gładką rodzinę izomorfizmów

$$\mathrm{Hor}_{\widetilde{\gamma}_p(t)}\ :\ \mathsf{T}_{\gamma(t)}M \xrightarrow{\cong} \mathsf{H}_{\widetilde{\gamma}_p(t)}E\,, \qquad p \in E_x\,,\ t \in [0,1]\,,$$

zyskując przy tym interpretację parametryzowanej gładko przez warunek początkowy $p \in E_x$ rodziny krzywych całkowych podniesienia $\mathcal{V}$ pola prędkości $\dot{\gamma}$ rozwiązujących zagadnienia początkowe

$$\dot{\widetilde{\gamma}}_p(t) = \mathrm{Hor}_{\widetilde{\gamma}_p(t)}\big(\dot{\gamma}(t)\big)\,, \qquad\qquad \widetilde{\gamma}_p(0) = p\,. \tag{11}$$

Z tego punktu widzenia zasada superpozycji (PT3) z Def. 2, jak również warunek początkowy (PT2), wynikają bezpośrednio z konstrukcji potoku zagadnienia początkowego z Tw. Niezb.r-g.21 (patrz: także Tw. Niezb.r-g.22).

Pozostaje na koniec rozpatrzeć pochodną kowariantną definiowaną przez tak określone powiązanie włókien w $E$. Rozumując jak w dowodzie Stw. 2, wyznaczamy

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}}\sigma(x) &\equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\mathsf{P}^{\gamma\,-1}_{0,t}\big(\sigma\circ\gamma(t)\big) = -\mathrm{Hor}_{\sigma(x)}\big(\dot{\gamma}(0)\big) + \mathsf{T}_{\sigma(x)}\mathsf{P}^{\gamma\,-1}_{0,0}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\sigma\circ\gamma(t)\big) \\ &= -\mathrm{Hor}_{\sigma(x)}\big(\dot{\gamma}(0)\big) + \mathsf{T}_x\sigma\big(\dot{\gamma}(0)\big) \end{aligned} \tag{12}$$

(znak „-" w wyrażeniu $-\mathrm{Hor}_{\sigma(x)}(\dot{\gamma}(0))$ odzwierciedla odwrócenie kierunku upływu „czasu" względem tego w potoku pola $\mathrm{Hor}_{\widetilde{\gamma}_p(t)}(\dot{\gamma}(t))$) konstatujemy więc, że pochodna zależy od użytej w jej definicji ścieżki $\gamma$ tylko poprzez $\dot{\gamma}(0)$ (oraz $\gamma(0) = x$), od samego zaś pola $\dot{\gamma}$ – w sposób jawnie $C^\infty(B,\mathbb{R})$-liniowy, zgodnie z aksjomatem (PT4) w Def. 2. □

Na gruncie interpretacji sumy Whitneya jako geometryzacji sumy prostej przestrzeni wektorowych, a w odwołaniu do równoważności opisu tejże konstrukcji przy użyciu zupełnej rodziny rzutów komplementarnych, wnioskujemy, że opis powiązania na wiązce włóknistej w terminach rozkładu wiązki stycznej do przestrzeni totalnej tejże wiązki na sumę (Whitneya) podwiązek: pionowej i poziomej niesie w sobie podpowiedź dotyczącą kolejnego naturalnego przeformułowania definicji powiązania. Oto więc

**Definicja 4.** **Forma powiązania** na wiązce włóknistej $(E, B, F, \pi_E)$ to $C^\infty(B,\mathbb{R})$-liniowy morfizm wiązek wektorowych

$$(\mathsf{A}, \mathrm{id}_E) \;:\; \mathsf{T}E \longrightarrow \mathsf{V}E$$

o własności wyrażonej przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathsf{V}E \arrow[r, "\jmath_{\mathsf{V}E}"] \arrow[dr, equal, "\mathrm{id}_{\mathsf{V}E}"'] & \mathsf{T}E \arrow[d, "\mathsf{A}"] \\ & \mathsf{V}E \end{tikzcd},$$

na którym $\jmath_{\mathsf{VE}}$ jest włożeniem kanonicznym.

I tym razem konstatujemy istnienie prostej relacji pomiędzy definicjami.

**Twierdzenie 3.** Forma powiązania na wiązce włóknistej określa na niej w sposób kanoniczny powiązanie Ehresmanna.

<u>*Dowód:*</u> Z dowolnym morfizmem wiązek wektorowych $\mathsf{A} \;:\; \mathsf{T}E \longrightarrow \mathsf{V}E$ o własności $\mathsf{A}\restriction_{\mathsf{V}E} = \mathrm{id}_{\mathsf{V}E}$ możemy – w świetle Tw. 2.4 – stowarzyszyć podwiązkę

$$\mathsf{H}E := \mathrm{Ker}(\mathsf{A}, \mathrm{id}_E) \subset \mathsf{T}E\,.$$

Przy tym dla dowolnego $v \in \mathsf{H}_pE \cap \mathsf{V}_pE,\ p \in E$ otrzymujemy wynik

$$v = \mathrm{id}_{\mathsf{V}E}(v) = \mathsf{A}(v) = 0_{\mathsf{T}_pE}\,,$$

zatem

$$\mathsf{H}E \cap \mathsf{V}E = \{\mathbf{0}_{\mathsf{T}E}(E)\}\,.$$

□

Zwieńczeniem naszych rozważań jest dopełnienie definicji kategorii wiązek włóknistych z powiązaniem poprzez specjalizację pojęcia morfizmu wiązek włoknistych w obecności powiązania, której dokonujemy poniżej.

**Definicja 5.** Przyjmijmy zapis Def. 2, 3 oraz 4 i niechaj $(E_\alpha, B_\alpha,\ F_\alpha, \pi_{E_\alpha}),\ \alpha \in \{1, 2\}$ będą wiązkami włóknistymi z powiązaniem włókien. **Morfizm wiązek włóknistych z powiązaniem włókien** (**nad dyfeomorfizmem baz**) pomiędzy $E_1$ i $E_2$ to morfizm wiązek włóknistych opisany przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_{E_1}"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_{E_2}"] \\ B_1 \arrow[r, "f"'] & B_2 \end{tikzcd}$$

o składowej bazowej[3] $f \in \mathrm{Diff}^\infty(B_1, B_2)$ spełniający poniższy warunek:

[3]Powód zawężenia wyboru składowej bazowej morfizmu jest oczywisty – zawężenie takie zapewnia istnienie naturalnego transportu pól wektorowych między bazami, a zatem także pomiędzy podwiązkami poziomymi. Możliwe jest uogólnienie podanej definicji, którego jednak nie będziemy tu rozważać.

(FCM1) dla dowolnych: ścieżki $\gamma : [0,1] \longrightarrow B_1$ i $t \in [0,1]$ zachodzi tożsamość

$$\Phi \circ \mathsf{P}^{(1)\,\gamma}_{0,t} = \mathsf{P}^{(2)\,f\circ\gamma}_{0,t} \circ \Phi\,,$$

przy czym wówczas dla dowolnych: cięcia (lokalnego) $\sigma : \mathcal{O}_x \longrightarrow E_1$ określonego na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_x$ punktu $x \in B_1$ oraz pola wektorowego $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}(\mathcal{O}_x)$ spełniony jest **warunek kowariancji**

$$\mathsf{T}_{\sigma(x)}\Phi\big(\nabla^{(1)}_{\mathcal{V}}\sigma(x)\big) = \nabla^{(2)}_{\mathsf{T}f(\mathcal{V})}\big(\Phi\circ\sigma\circ f^{-1}\big)\big(f(x)\big)\,.$$

Ilekroć na obu wiązkach określone jest powiązanie Ehresmanna, mianem **morfizmu wiązek włóknistych z powiązaniem Ehresmanna** (**nad dyfeomorfizmem baz**) określamy morfizm wiązek włóknistych $(\Phi, f)$ spełniający warunek:

(FCM2) para odwzorowań stycznych: $(\mathsf{T}\Phi, \mathsf{T}f)$ ogranicza się do podwiązek poziomych $\mathsf{H}E_\alpha$, $\alpha \in \{1,2\}$ i zadaje tym sposobem morfizm wiązek wektorowych opisany przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathsf{H}E_1 \arrow[r, "\mathsf{T}\Phi\restriction_{\mathsf{H}E_1}"] \arrow[d, "\mathsf{T}\pi_{E_1}\restriction_{\mathsf{H}E_1}"'] & \mathsf{H}E_2 \arrow[d, "\mathsf{T}\pi_{E_2}\restriction_{\mathsf{H}E_1}"] \\ \mathsf{T}B_1 \arrow[r, "\mathsf{T}f"'] & \mathsf{T}B_2 \end{tikzcd} \qquad (13)$$

Wreszcie też w obecności formy powiązania na obu wiązkach mówimy o **morfizmie wiązek włóknistych z formą powiązania** (lub **zachowującym formę powiązania**) (**nad dyfeomorfizmem baz**), jeśli $(\Phi, f)$ spełnia warunek:

(FCM3) odwzorowanie styczne $\mathsf{T}\Phi$ zachowuje formę powiązania w rozumieniu równości

$$\mathsf{T}\Phi\circ\mathsf{A}_1 = \mathsf{A}_2\circ\mathsf{T}\Phi\,.$$

**Uwaga 1.** Warunek kowariancji z punktu (FCM1) sprawdzamy w bezpośrednim rachunku (przeprowadzonym z wykorzystaniem dowolnej ścieżki $\gamma$ w $B_1$ przez $x = \gamma(0)$ o wektorze stycznym $\dot\gamma(0) = \mathcal{V}(x)$),

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_{\sigma(x)}\Phi\big(\nabla_{\mathcal{V}}\sigma(x)\big) &\equiv \mathsf{T}_{\sigma(x)}\Phi\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\mathsf{P}^{(1)\,\gamma^{-1}}_{0,t}\big(\sigma\circ\gamma(t)\big)\big) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\Phi\circ\mathsf{P}^{(1)\,\gamma^{-1}}_{0,t}\big(\sigma\circ\gamma(t)\big) \\ &= \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\mathsf{P}^{(2)\,f\circ\gamma^{-1}}_{0,t}\big(\big(\Phi\circ\sigma\circ f^{-1}\big)\circ(f\circ\gamma)(t)\big) \\ &= \nabla_{\mathsf{T}f(\mathcal{V})}\big(\Phi\circ\sigma\circ f^{-1}\big)\big(f(x)\big)\,, \end{aligned}$$

przy czym identyfikacja pola wektorowego, wzdłuż którego różniczkowane jest cięcie $\Phi\circ\sigma$ na końcu ciągu równości, wynika wprost z tożsamości

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(f\circ\gamma)(t) = \mathsf{T}_{\gamma(t)}f\big(\dot\gamma(t)\big)\,.$$

To właśnie zweryfikowany powyżej warunek tłumaczy nazwę nadaną obiektowi $\nabla_{\mathcal{V}}\sigma$.

Należy też zauważyć, w odniesieniu do punktu (FCM2), że para $(\mathsf{T}\Phi, \mathsf{T}f)$ zawsze jest morfizmem wiązek wektorowych z racji funktorialności $\mathsf{T}$ i dopiero postulat zachowywania podwiązek poziomych stanowi nietrywialny warunek dodatkowo ograniczający morfizm wiązek $(\Phi, f)$.

**Twierdzenie 4.** Przyjmijmy zapis Def. 5. Warunki (FCM1), (FCM2) i (FCM3) są powiązane relacjami

$$(\text{FCM3}) \Longrightarrow (\text{FCM2}) \Longrightarrow (\text{FCM1})\,.$$

*Dowód:*

$(FCM2) \Rightarrow (FCM1)$ Przemienność diagramu (13) z warunku (FCM2), który w ograniczeniu do punktu $p \in E_{1\,x},\ x \in B_1$ przybiera postać

$$\begin{tikzcd} \mathsf{H}_p E_1 \arrow[r, "\mathsf{T}_p\Phi\restriction_{\mathsf{H}_p E_1}"] & \mathsf{H}_{\Phi(p)} E_2 \\ \mathsf{T}_x B_1 \arrow[u, "\mathrm{Hor}^{(1)}_p"] \arrow[r, "\mathsf{T}_x f"'] & \mathsf{T}_{f(x)} B_2 \arrow[u, "\mathrm{Hor}^{(2)}_{\Phi(p)}"'] \end{tikzcd}\,, \tag{14}$$

pozwala obliczyć, dla dowolnych ścieżek $\widetilde{\gamma}_p,\ p \in E_{1\,x}$ będących podniesieniami ścieżki $\gamma$ w $B_1$ przez $x \equiv \gamma(0)$, tj. będących rozwiązaniem zagadnienia początkowego (11) i definiujących tym samym powiązanie włókien wedle formuły (10), co następuje:

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\Phi \circ \widetilde{\gamma}_p)(t) &= \mathsf{T}_{\widetilde{\gamma}_p(t)}\Phi\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\widetilde{\gamma}_p(t)\big) = \mathsf{T}_{\widetilde{\gamma}_p(t)}\Phi \circ \mathrm{Hor}^{(1)}_{\widetilde{\gamma}_p(t)}\big(\dot{\gamma}(t)\big) \\ &= \mathrm{Hor}^{(2)}_{\Phi\circ\widetilde{\gamma}_p(t)} \circ \mathsf{T}_{\gamma(t)} f\big(\dot{\gamma}(t)\big) = \mathrm{Hor}^{(2)}_{\Phi\circ\widetilde{\gamma}_p(t)}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(f\circ\gamma)(t)\big)\,. \end{aligned}$$

Z drugiej strony wprost na mocy definicji podniesienia poziomego ścieżki $(f \circ \gamma$ w $B_2$ przez $f(x) \equiv f \circ \gamma(0)$ do $\Phi(p))$ zachodzi równość

$$\mathrm{Hor}^{(2)}_{\Phi(\widetilde{\gamma}_p(t))}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(f\circ\gamma)(t)\big) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\widetilde{(f\circ\gamma)}_{\Phi(\widetilde{\gamma}_p(0))}(t) \equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\widetilde{(f\circ\gamma)}_{\Phi(p)}(t)\,,$$

ewidentnie więc – wobec tożsamości punktów początkowych, $\widetilde{(f\circ\gamma)}_{\Phi(p)}(0) = \Phi(p) = \Phi \circ \widetilde{\gamma}_p(0)$, oraz wektorów stycznych, a na gruncie twierdzenia o jedyności krzywej całkowej pola wektorowego przechodzącej przez dany punkt jego dziedziny – zachodzi równość

$$\widetilde{(f\circ\gamma)}_{\Phi(p)} = \Phi \circ \widetilde{\gamma}_p\,,$$

która w dowolnym punkcie $p \in E_1$ implikuje pożądaną relację

$$\big(\Phi \circ \mathsf{P}^{(1)\,\gamma}_{0,t}\big)(p) \equiv \Phi \circ \widetilde{\gamma}_p(t) = \widetilde{(f\circ\gamma)}_{\Phi(p)}(t) \equiv \mathsf{P}^{(2)\,f\circ\gamma}_{0,t}\big(\Phi(p)\big) = \big(\mathsf{P}^{(2)\,f\circ\gamma}_{0,t} \circ \Phi\big)(p)\,.$$

$(FCM3) \Rightarrow (FCM2)$ Skoro $\mathsf{H}E_\alpha \equiv \mathrm{Ker}\,\mathsf{A}_\alpha,\ \alpha \in \{1,2\}$, to wystarczy wykazać, że

$$\mathsf{T}\Phi(\mathrm{Ker}\,\mathsf{A}_1) \subset \mathrm{Ker}\,\mathsf{A}_2\,,$$

to jednak wynika wprost z ciągu relacji

$$\mathsf{A}_2\big(\mathsf{T}\Phi(\mathrm{Ker}\,\mathsf{A}_1)\big) = \mathsf{T}\Phi\big(\mathsf{A}_1(\mathrm{Ker}\,\mathsf{A}_1)\big) = \mathsf{T}\Phi\big(\{\mathbf{0}_{\mathsf{T}E_1}(E_1)\}\big) = \{\mathbf{0}_{\mathsf{T}E_2}(E_2)\}\,.$$

□