W SIECI POWIĄZAŃ GŁÓWNYCH
(MAWF '22/23 2.XXI & 2.XXII [RRS])

Dotychczasowe nasze rozważania doprowadziły nas do studium powiązania na wiązce włóknistej jako – w gruncie rzeczy – konstruktywnej odpowiedzi na pytanie o naturalne/użyteczne różniczkowanie jej cięć. Mając za sobą – jako punkt wyjścia – logiczny Długi Marsz od wiązek wektorowych, z kanoniczną konstrukcją wiązki stycznej nad rozmaitością gładką na czele, poprzez wiązki główne aż ku wiązkom stowarzyszonym, ale zarazem przed sobą i przede wszystkim w tym wykładzie – jako punkt dojścia – konstrukcję uzgodnionego ze strukturą modułu cliffordowskiego powiązania na wiązce spinorowej nad orientowalną rozmaitością metryczną o znikającej drugiej klasie Stieffela–Whitneya, w której definicji centralną rolę odgrywa prolongacja wiązki *głównej* zorientowanych baz pseudo-ortonormalnych na wiązce stycznej nad tąż rozmaitością, dostrzegamy pierwszorzędne znaczenie w tak zorientowanym studium powiązania konstrukcji powiązania na wiązce głównej (rozumianej tu jako substrat podstawowy konstrukcji wiązek: Clifforda i spinorowej, a nawet – wtórnie – samej wiązki stycznej), przy czym naturalnym w tym kontekście jawi się rozpatrzenie warunków, w których powiązanie to jest zgodne z działaniem grupy strukturalnej we włóknie wiązki, a dalej – identyfikacja nośnika nie-kanonicznej informacji o powiązaniu, różnicującej jego dowolne wybory na danej wiązce głównej, a zakodowanej w lokalnej trywializacji formy powiązania. Tym właśnie zajmiemy się obecnie.

Zaczynamy od określenia najbardziej naturalnych więzów zgodności powiązania ze strukturą G-przestrzeni w róznych odsłonach tego pojęcia wprowadzonych w Wykładach 19. i 20.

Definicja 1. Powiązanie włókien w wiązce głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ nazywamy **zgodnym z działaniem grupy strukturalnej**, ilekroć dyfeomorfizmy

$$\mathsf{P}^{\gamma}_{t_1,t_2} \;:\; \mathsf{P}_{\mathrm{G}\,\gamma(t_1)} \xrightarrow{\cong} \mathsf{P}_{\mathrm{G}\,\gamma(t_2)}\,, \quad t_1, t_2 \in [0,1]$$

spełniają warunki

(1) $$\forall_{g\in\mathrm{G}} \;:\; \mathsf{P}^{\gamma}_{t_1,t_2} \circ r_g \restriction_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}\,\gamma(t_1)}} = r_g \circ \mathsf{P}^{\gamma}_{t_1,t_2}\,,$$

przy czym wtedy

(2) $$\nabla_{\mathcal{V}}(r_g \circ \sigma)(x) = \mathsf{T}_{\sigma(x)} r_g\big(\nabla_{\mathcal{V}}\sigma(x)\big)\,.$$

Powiązanie takie określamy również mianem **powiązania głównego włókien w wiązce** P_{G}.

Równie naturalnej koncepcji uzgodnienia struktur dostarcza

Definicja 2. Powiązanie Ehresmanna na wiązce głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ nazywamy **zgodnym z działaniem grupy strukturalnej**, ilekroć odwzorowania $r_g,\ g \in \mathrm{G}$ spełniają warunek

$$\forall_{p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\ :\ \mathsf{H}_{r_g(p)}\mathsf{P}_{\mathrm{G}} = \mathsf{T}_p r_g(\mathsf{H}_p \mathsf{P}_{\mathrm{G}})\,. \tag{3}$$

Powiązanie takie określamy również mianem **Ehresmanna powiązania głównego** na P_{G}.

Ażeby móc postąpić dalej w enumeracji naturalnych warunków uzgodnienia powiązania z działaniem grupy strukturalnej, a następną w kolejności jest jego definicja w terminach gładkiej dystrybucji (nad P_{G}) operatorów rzutowych na TP_{G}, potrzebujemy

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i niechaj $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego grupy strukturalnej G wiązki głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$. Podwiązka pionowa VP_{G} wiązki stycznej TP_{G} nad przestrzenią totalną P_{G} jest globalnie trywializowalna (czyli trywialna w rozumieniu Przykł. 2-3-4.1), tj. istnieje kanoniczny izomorfizm wiązek wektorowych (nad $\mathbb{R}$)

$$(\mathsf{VP}_{\mathrm{G}}, \mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathbb{K}^{\times \dim \mathrm{G}}, \pi_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}} \restriction_{\mathsf{VP}_{\mathrm{G}}}) \cong (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathfrak{g}, \mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathbb{K}^{\times \dim \mathrm{G}}, \mathrm{pr}_1)\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Rozważmy odwzorowanie (jawnie $\mathbb{R}$-liniowe i gładkie)

$$\widetilde{\mathrm{Vert}}.\quad :\quad \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathfrak{g} \xrightarrow{(\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}}, \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})} \mathsf{TP}_{\mathrm{G}} \times \mathfrak{g} \equiv \mathsf{T}_{(\cdot,e)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G}) \xrightarrow{\mathsf{T}_{(\cdot,e)} r.} \mathsf{VP}_{\mathrm{G}} \subset \mathsf{TP}_{\mathrm{G}}$$

$$:\quad (p, X) \longmapsto \big(\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}}(p), X\big) \longmapsto \mathsf{T}_{(p,e)} r.\big(\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}}(p), X\big) \equiv \widetilde{\mathrm{Vert}}_p(X)\,, \tag{5}$$

w którego definicji wykorzystujemy zerowe cięcie $\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}}$ wiązki wektorowej TP_{G} nad P_{G}. Przeciwdziedzina powyższego odwzorowania jest poprawnie określona, oto bowiem z uwagi na charakter działania definiującego $r.$ mamy

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_p \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\widetilde{\mathrm{Vert}}_p(X)\big) \quad &\equiv \quad \mathsf{T}_p \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \mathsf{T}_{(p,e)} r.\big(\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}}(p), X\big) = \mathsf{T}_{(p,e)}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ r.\big)\big(\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}}(p), X\big) \\ &= \quad \mathsf{T}_{(p,e)}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \mathrm{pr}_1\big)\big(\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}}(p), X\big) = \mathsf{T}_{(p,e)}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\ &= \quad \mathbf{0}_{\mathsf{T}B} \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\,, \end{aligned}$$

czyli – w istocie – nad dowolnym punktem $p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ zachodzi inkluzja

$$\mathrm{Im}\,\widetilde{\mathrm{Vert}}_p \subset \mathsf{V}_p \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,,$$

a przy tym odwzorowanie $\widetilde{\mathrm{Vert}}.$ pokrywa identyczność na wspólnej bazie obu wiązek,

$$\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\widetilde{\mathrm{Vert}}_p(X)\big) = p \equiv \mathrm{pr}_1(p, X)\,,$$

mamy przeto do czynienia z morfizmem wiązek wektorowych nad P_{G}, a ponieważ obrazem pola (stałego) $(\cdot, X)$ jest pole fundamentalne na P_{G} stowarzyszone z $X \ni \mathfrak{g}$,

$$\mathsf{T}_{(\cdot,e)} r.\big(\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}}(\cdot), X\big) = \mathcal{K}_X \tag{6}$$

(por. Def. 19-20.1), więc też wobec swobodnego charakteru działania G na P_{G}, otrzymujemy równoważność

$$\widetilde{\mathrm{Vert}}_p(X) = 0_{\mathsf{T}_p \mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad X = 0_{\mathfrak{g}}\,,$$

czyli $\widetilde{\mathrm{Vert}}.$ jest monomorfizmem. Na podstawie porównania rzędów obu wiązek,

$$\mathrm{rk}\,(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathfrak{g}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \dim \mathrm{G} \equiv \dim \mathsf{P}_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} = \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_p\big(\mathsf{P}_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\big) \equiv \mathrm{rk}\,\mathsf{VP}_{\mathrm{G}}\,,$$

wnioskujemy, że $\widetilde{\mathrm{Vert}}.$ jest w istocie postulowanym izomorfizmem. □

Powyższe przygotowuje nas do wysłowienia naturalnej adaptacji pojęcia formy powiązania z Def. 19-20.3 do obecnych okoliczności, jakie precyzuje

Definicja 3. Forma powiązania głównego na wiązce głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ to morfizm wiązek wektorowych nad $\mathbb{R}$

$$(\mathcal{A}, \mathrm{id}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}) \ : \ \mathsf{TP}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathfrak{g}$$

o własnościach

$$\mathcal{A} \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}. = \mathrm{id}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathfrak{g}} \tag{7}$$

oraz[1]

$$\forall_{g \in \mathrm{G}} \ : \ \mathcal{A} \circ \mathsf{T} r_g = (r_g \times \mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{g^{-1}}) \circ \mathcal{A} \,. \tag{8}$$

Wyznacza ona w naturalny sposób **potencjał powiązania głównego**

$$\underline{\mathcal{A}} \coloneqq \mathrm{pr}_2 \circ \mathcal{A} \in \Omega^1(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} \,.$$

Bez trudu przekonujemy się o strukturalnym charakterze trywilizacji $\widetilde{\mathrm{Vert}}.$,

Stwierdzenie 2. Trywializacja $\widetilde{\mathrm{Vert}}.$ z (dowodu) Stw. 1 jest odwzorowaniem G-ekwiwariantnym,

$$\widetilde{\mathrm{Vert}}. \ : \ \big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathfrak{g}, r. \times \mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{\mathrm{Inv}(\cdot)}\big) \xrightarrow{\cong} \big(\mathsf{VP}_{\mathrm{G}}, \mathsf{T} r. \restriction_{\mathsf{VP}_{\mathrm{G}}}\big) \,.$$

<u>*Dowód:*</u> Dla dowolnego wektora $v \in \mathsf{V}_p \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$, $p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ będącego przeciwobrazem $X = \mathrm{pr}_2 \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_p^{-1}(v) \in \mathfrak{g}$ i dowolnego elementu $g \in \mathrm{G}$ obliczamy

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_p r_g(v) \quad &= \quad \mathsf{T}_p r_g \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_p(X) \equiv \mathsf{T}_p r_g\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} p \triangleleft \exp^{\mathrm{G}}(t \triangleright X)\big) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} r_g\big(p \triangleleft \exp^{\mathrm{G}}(t \triangleright X)\big) \\ &\equiv \quad \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} r_g(p) \triangleleft \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big(\exp^{\mathrm{G}}(t \triangleright X)\big) \,, \end{aligned}$$

ale też w świetle Stw. Niezb.cart.11 (o naturalności odwzorowania eksponencjalnego) zachodzi tożsamość

$$\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big(\exp^{\mathrm{G}}(t \triangleright X)\big) = \exp^{\mathrm{G}}\big(t \triangleright \mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X)\big) \,,$$

możemy zatem powyższą równość przepisać w postaci

$$\mathsf{T}_p r_g(v) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} r_g(p) \triangleleft \exp\big(t \triangleright \mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X)\big) \equiv \widetilde{\mathrm{Vert}}. \circ \big(r_g \times \mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big) \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_p^{-1}(v) \,,$$

skąd postulowany wniosek, że

$$\mathsf{T}_p r_g \restriction_{\mathsf{V}_p \mathsf{P}_{\mathrm{G}}} = \widetilde{\mathrm{Vert}}. \circ \big(r_g \times \mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big) \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_p^{-1} \,. \tag{9}$$

□

Możemy już teraz sformułować i udowodnić

Twierdzenie 1. W dowolnej wiązce głównej powiązanie główne Ehresmanna wyznacza powiązanie główne włókien. Ponadto forma powiązania głównego na tejże wiązce określa na niej powiązanie główne Ehresmanna.

<u>*Dowód:*</u> Wybrawszy dowolną ścieżkę $\gamma \ : \ [0,1] \longrightarrow B$ spełniającą warunki $\gamma(0) = x$ i $\dot{\gamma}(0) = X \in \mathsf{T}_x B$, a następnie – punkty: $p \in \mathsf{P}_x$ i $g \in \mathrm{G}$, podnosimy γ poziomo do P_{G} tworząc ścieżkę

$$\widetilde{\gamma}_p \ : \ [0,1] \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$$

całkującą zaganienie początkowe

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\widetilde{\gamma}_p(t) = \mathrm{Hor}_{\widetilde{\gamma}_p(t)}\big(\dot{\gamma}(t)\big) \,, \qquad \widetilde{\gamma}_p(0) = p \,,$$

gdzie Hor_q jest podniesieniem poziomym wektorów indukowanym przez powiązanie Ehresmanna wedle schematu opisanego w konstruktywnym dowodzie Tw. 19-20.2. Obliczamy

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} r_g \circ \widetilde{\gamma}_p(t) = \mathsf{T}_{\widetilde{\gamma}_p(t)} r_g\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\widetilde{\gamma}_p(t)\big) = \mathsf{T}_{\widetilde{\gamma}_p(t)} r_g \circ \mathrm{Hor}_{\widetilde{\gamma}_p(t)}\big(\dot{\gamma}(t)\big) \,,$$

[1] Podkreślmy: warunek (7) stanowi ledwie adaptację warunku wyrażonego przez diagram przemienny w Def. 19-20.4 i jako taki definiuje (generyczną) formę powiązania, które dopiero warunek (8) uzgadnia z działaniem definiującym $r.$.

a ostatnia równość pokazuje, na gruncie założenia o zachowywaniu dystrybucji poziomej (do której należy pole prędkości na podniesieniu $\mathrm{Hor}_{\widetilde{\gamma}_p(t)}(\dot{\gamma}(t)))$, że pole prędkości na r_g-translacie podniesienia ścieżki γ do p (w $t=0$), jest także polem poziomym, czyli pewnym podniesieniem poziomym $\dot{\gamma}(t)$ (do $r_g \circ \widetilde{\gamma}_p(0) = r_g(p)$ w $t=0$). Krzywą całkową (lokalnie jedyną) poziomego podniesienia $\dot{\gamma}$ do TP_{G} przez $r_g(p)$ jest jednak – wprost z definicji – ścieżka $\widetilde{\gamma}_{r_g(p)}$, zatem nieodzownie

$$\widetilde{\gamma}_{r_g(p)} = r_g \circ \widetilde{\gamma}_p\,,$$

a to w świetle konstrukcji dyfeomorfizmu $\mathsf{P}^{\gamma}_{t_1,t_2}$ oznacza pożądaną jego G-ekwiwariantność, (1).

Przechodząc do drugiej części tezy dowodzonego twierdzenia, zauważamy, że forma powiązania głównego definiuje – w świetle Tw. 19-20.1 – podwiązkę wektorową

$$\mathsf{HP}_{\mathrm{G}} \coloneqq \mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}, \mathrm{id}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}) \subset \mathsf{TP}_{\mathrm{G}}\,. \tag{10}$$

Przy tym dla dowolnego $v \in \mathrm{Ker}\,(\mathsf{T}\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\restriction_{\mathsf{H}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}) \equiv \mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}\restriction_{\mathsf{T}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}) \cap \mathrm{Ker}\,(\mathsf{T}\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\restriction_{\mathsf{T}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} v &= \widetilde{\mathrm{Vert}}. \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_p^{-1}(v) \equiv \widetilde{\mathrm{Vert}}. \circ \mathrm{id}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathfrak{g}} \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_p^{-1}(v) = \widetilde{\mathrm{Vert}}. \circ (\mathcal{A} \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}.) \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_p^{-1}(v) \\ &= \widetilde{\mathrm{Vert}}. \circ \mathcal{A}(v) = 0_{\mathsf{T}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\,, \end{aligned}$$

co przesądza o injektywności $\mathsf{T}\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\restriction_{\mathsf{H}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}$ i (tym samym) dowodzi istnienia izomorfizmu

$$\mathrm{Im}\left(\mathsf{T}\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\restriction_{\mathsf{H}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\right) \cong \mathsf{H}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,.$$

Zarazem dla $\mathcal{A}\restriction_{\mathsf{T}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathsf{T}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathfrak{g})$ jest spełniona równość

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}\left(\mathcal{A}\restriction_{\mathsf{T}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\right) &= \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}} - \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\left(\mathcal{A}\restriction_{\mathsf{T}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\right) \\ &= \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{V}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}} + \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}B - \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}B\,, \end{aligned}$$

co oznacza, że $\mathsf{T}\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\restriction_{\mathsf{H}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}$ jest w istocie izomorfizmem. Na koniec przekonamy się o G-niezmienniczości tak określonej podwiązki poziomej. Niech zatem $\xi \in \mathsf{H}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \equiv \mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}\restriction_{\mathsf{T}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$, a wtedy

$$\mathcal{A} \circ \mathsf{T}_p r_g(\xi) = \left(r_g \times \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\right) \circ \mathcal{A}(\xi) = \left(r_g(p), \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(0_{\mathfrak{g}})\right) = (r_g(p), 0_{\mathfrak{g}})\,,$$

więc prawdziwą jest inkluzja

$$\mathsf{T}_p r_g(\mathsf{H}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \subset \mathsf{H}_{r_g(p)}\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,,$$

ale też w takim razie – wobec odwracalności $\mathsf{T}_p r_g$ –

$$\mathsf{T}_{r_g(p)} r_{g^{-1}}(\mathsf{H}_{r_g(p)}\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \subset \mathsf{H}_{r_g^{-1}\circ r_g(p)}\mathsf{P}_{\mathrm{G}} = \mathsf{H}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,,$$

czyli

$$\mathsf{H}_{r_g(p)}\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \equiv \mathsf{T}_p r_g \circ \mathsf{T}_{r_g(p)} r_{g^{-1}}(\mathsf{H}_{r_g(p)}\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \subset \mathsf{T}_p r_g\left(\mathsf{H}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\right),$$

co koniec końców daje nam pożądaną równość

$$\mathsf{T}_p r_g(\mathsf{H}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) = \mathsf{H}_{r_g(p)}\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,.$$

□

Odpowiedzi na fundamentalne pytanie o istnienie powiązania uzgodnionego, będącej zarazem pierwszym krokiem w kierunku wspomnianej wcześniej identyfikacji nośnika jego swoistości, dostarcza

Twierdzenie 2. Na dowolnej wiązce głównej istnieje forma powiązania głównego.

Dowód: Zaczniemy od rekonstrukcji kanonicznego modelu formy powiązania w obrazie lokalnej trywializacji (co ma sens wobec „wertykalnego" charakteru warunków ją definiujących). Niechaj zatem $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ będzie wiązką główną o lokalnych trywializacjach $\tau_i \,:\, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}$, $i \in I$. Wykorzystując relacje

$$\mathsf{T}_{(x,g)}(\mathcal{O}_i \times \mathrm{G}) \equiv \mathsf{T}_x\mathcal{O}_i \oplus \mathsf{T}_g\mathrm{G} \equiv \mathsf{T}_x\mathcal{O}_i \oplus \mathsf{T}_e\ell_g(\mathfrak{g}),$$

nad każdym z elementów pokrycia trywializującego $\mathcal{O}_i$ definiujemy odwzorowanie

$$\mathcal{A}_i \,:\, \mathsf{T}\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times \mathfrak{g} \,:\, \mathsf{T}_{(x,g)}\tau_i^{-1}(v,V) \longmapsto \big(\tau_i^{-1}(x,g), \mathsf{T}_g\ell_{g^{-1}}(V)\big),$$

jawnie $\mathbb{R}$-liniowe i zachowujące włókna. Sprawdzamy, że odwzorowania te mają własności wymienione w Def. 3. Po pierwsze więc, korzystając z przemienności diagramu

$$\begin{tikzcd}
\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times \mathrm{G} \arrow[r, "r."] \arrow[d, "\tau_i \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}}"'] & \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[d, "\tau_i"] \\
\mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[r, "\mathrm{id}_B \times m"'] & \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}
\end{tikzcd}$$

oraz Równ. (Niezb.cart.2), obliczamy – dla dowolnego wektora $X \in \mathfrak{g}$ –

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}_i \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{\tau_i^{-1}(x,g)}(X) \equiv \mathcal{A}_i \circ \mathsf{T}_{(\tau_i^{-1}(x,g),e)} r.\big(\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}} \circ \tau_i^{-1}(x,g), X\big) \\
= \;& \mathcal{A}_i \circ \mathsf{T}_{(x,g)}\tau_i^{-1} \circ \mathsf{T}_{(\tau_i^{-1}(x,g),e)}(\tau_i \circ r.)\big(\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}} \circ \tau_i^{-1}(x,g), X\big) \\
= \;& \mathcal{A}_i \circ \mathsf{T}_{(x,g)}\tau_i^{-1} \circ \mathsf{T}_{(x,g,e)}(\mathrm{id}_B \times m) \circ \mathsf{T}_{(\tau_i^{-1}(x,g),e)}(\tau_i \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}})\big(\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}} \circ \tau_i^{-1}(x,g), X\big) \\
= \;& \mathcal{A}_i \circ \mathsf{T}_{(x,g)}\tau_i^{-1} \circ (\mathsf{T}_x\mathrm{id}_B \oplus \mathsf{T}_{(g,e)}m)\big(\mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)}\tau_i \circ \mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}} \circ \tau_i^{-1}(x,g), \mathsf{T}_e\mathrm{id}_{\mathrm{G}}(X)\big) \\
= \;& \mathcal{A}_i \circ \mathsf{T}_{(x,g)}\tau_i^{-1} \circ (\mathrm{id}_{\mathsf{T}_xB} \oplus \mathsf{T}_{(g,e)}m)\big(0_{\mathsf{T}_xB}, 0_{\mathsf{T}_g\mathrm{G}}, \mathrm{id}_{\mathsf{T}_e\mathrm{G}}(X)\big) \\
\equiv \;& \big(\tau_i^{-1}(x,g), \mathsf{T}_g\ell_{g^{-1}} \circ \mathsf{T}_{(g,e)}m(0_{\mathsf{T}_g\mathrm{G}}, X)\big) = \big(\tau_i^{-1}(x,g), \mathsf{T}_g\ell_{g^{-1}} \circ \mathsf{T}_e\ell_g(X)\big) \\
= \;& \big(\tau_i^{-1}(x,g), X\big) \equiv \mathrm{id}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathfrak{g}}\big(\tau_i^{-1}(x,g), X\big).
\end{aligned}$$

Po drugie w dotychchczasowych oznaczeniach i dla dowolnego elementu $h \in \mathrm{G}$, a w odwołaniu do diagramu przemiennego

$$\begin{tikzcd}
\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[r, "r_h"] & \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \\
\mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \arrow[r, "\mathrm{id}_B \times \wp_h"'] \arrow[u, "\tau_i^{-1}"] & \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \arrow[u, "\tau_i^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

sprawdzamy warunek G-ekwiwariantności $\mathcal{A}_i$,

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}_i \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)}r_h \circ \mathsf{T}_{(x,g)}\tau_i^{-1}(v,V) = \mathcal{A}_i \circ \mathsf{T}_{(x,gh)}\tau_i^{-1} \circ \mathsf{T}_{(x,g)}(\mathrm{id}_B \times \wp_h)(v,V) \\
= \;& \mathcal{A}_i \circ \mathsf{T}_{(x,gh)}\tau_i^{-1} \circ (\mathsf{T}_x\mathrm{id}_B \oplus \mathsf{T}_g\wp_h)(v,V) = \mathcal{A}_i \circ \mathsf{T}_{(x,gh)}\tau_i^{-1}\big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}_xB}(v), \mathsf{T}_g\wp_h(V)\big) \\
\equiv \;& \big(\tau_i^{-1}(x,gh), \mathsf{T}_{gh}\ell_{(gh)^{-1}} \circ \mathsf{T}_g\wp_h(V)\big) = \big(r_h \circ \tau_i^{-1}(x,g), \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h^{-1}} \circ \mathsf{T}_g\ell_{g^{-1}}(V)\big) \\
\equiv \;& \big(r_h \times \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h^{-1}}\big) \circ \mathcal{A}_i \circ \mathsf{T}_{(x,g)}\tau_i^{-1}(v,V).
\end{aligned}$$

W świetle powyższych wyników $\mathcal{A}_i$ tworzą rodzinę lokalnych form powiązania głównego. Wykorzystując dowolny rozkład jedności $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ (klasy C^∞) stowarzyszony z pokryciem trywializującym $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ bazy B (którego istnienie możemy założyć bez straty ogólności rozważań), tworzymy z nich formę określoną (i gładką) globalnie

$$\mathcal{A}(\cdot) := \sum_{i\in I} \lambda_i \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \pi_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}}(\cdot) \triangleright \mathcal{A}_i(\cdot)\,,$$

o pożądanych własnościach. □

Wysłowiwszy kilka powiązanych wzajemnie definicji uzgodnienia struktur na wiązce głównej i zbadawszy zagadnienie istnienia (formy) powiązania głównego, możemy uzupełnić dotychczasową dyskusję o wskazanie podklasy morfizmów zachowujących to ostatnie.

Definicja 4. Przyjmijmy zapis Def. 1, 2 oraz 3 i niechaj $(\mathsf{P}^\alpha_{\mathrm{G}}, B_\alpha, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}^\alpha_{\mathrm{G}}})$, $\alpha \in \{1,2\}$ będą wiązkami głównymi z powiązaniem włókien. **Morfizm wiązek głównych z powiązaniem głównym włókien** $(\Phi, f, \mathrm{id}_{\mathrm{G}})$ (**nad dyfeomorfizmem baz i identycznością na grupie strukturalnej**) pomiędzy $\mathsf{P}^1_{\mathrm{G}}$ i $\mathsf{P}^2_{\mathrm{G}}$ to morfizm wiązek głównych opisany przez diagram przemienny (5-6.1) z Def. 5-6.4 dodatkowo spełniający warunek (FCM1) z Def. 19-20.4. Ilekroć na obu wiązkach określone jest powiązanie główne Ehresmanna, mianem **morfizmu wiązek głównych z powiązaniem głównym Ehresmanna** określamy morfizm wiązek głównych (opisany, jak poprzednio, przez diagram przemienny (5-6.1)), który dodatkowo spełnia warunek (FCM2) z Def. 19-20.4. Wreszcie też w obecności form powiązania głównego na obu wiązkach mówimy o **morfizmie wiązek głównych z formą powiązania głównego** (lub **zachowującym formę powiązania głównego**), jeśli morfizm $(\Phi, f, \mathrm{id}_{\mathrm{G}})$ jest opisany, jak poprzednio, przez diagram przemienny (5-6.1), a nadto spełniony jest warunek

(PFCM3') morfizm Φ zachowuje formę powiązania głównego w rozumieniu równości

$$\mathcal{A}_2 \circ \mathsf{T}\Phi = (\Phi \times \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) \circ \mathcal{A}_1\,.$$

W następnej kolejności przechodzimy do nader istotnego z fizycznego punktu widzenia (w tym – konstrukcji strukturalnego powiązania na wiązce spinorowej) opisu lokalnego powiązania uzgodnionego. Zaczynamy od pomocniczego

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i niechaj ∇ będzie pochodną kowariantną na wiązce głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ stowarzyszoną z formą powiązania głównego. Odwzorowania $\alpha_{\mathcal{O}}$ z (19-20.4) są $C^\infty(\mathcal{O}, \mathrm{G})$-ekwiwariantne w drugim argumencie, tj. dla dowolnych: odwzorowania $g \in C^\infty(\mathcal{O}, \mathrm{G})$ oraz cięcia $\sigma \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\restriction_{\mathcal{O}})$ przyjmującego postać $\tau_{\mathcal{O}} \circ \sigma(\cdot) = (\cdot, \gamma(\cdot))$ w obrazie trywializacji lokalnej $\tau_{\mathcal{O}} : \pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O} \times \mathrm{G}$ zachodzi

$$\forall_{x\in\mathcal{O}} : \alpha_{\mathcal{O}}\big(x, \wp_{g(x)}(\gamma(x))\big) = \mathsf{T}_{\sigma(x)}\wp_{g(x)} \circ \alpha_{\mathcal{O}}\big(x, \gamma(x)\big)\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Wobec definicji formy (wektorowej) $\alpha_{\mathcal{O}}$ jest jasne, że kluczowym dla naszych rozważań jest związek między pochodną kowariantną a formą powiązania głównego. Biorąc pod uwagę to, że rzut na podprzestrzeń wertykalną wzdłuż przestrzeni horyzontalnej w wiązce z powiązaniem Ehresmanna jest dany wzorem

$$P^{\mathsf{H}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}{}_{\mathsf{V}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \equiv \mathrm{id}_{\mathsf{T}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} - \mathrm{Hor}_p \circ \mathsf{T}_p\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\,,$$

oraz Równ. (19-20.9), możemy ustalić – dla dowolnego cięcia σ jak w treści stwierdzenia oraz dowolnego pola wektorowego $\mathcal{V} \in \Gamma(\mathsf{T}B\restriction_{\mathcal{O}})$ o wartości $V \equiv \mathcal{V}(x)$ – związek

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathcal{V}}\sigma(\cdot) &= \mathsf{T}.\sigma(\mathcal{V}) - \mathrm{Hor}_{\sigma(\cdot)}(\mathcal{V}) = \mathsf{T}.\sigma(\mathcal{V}) - \mathrm{Hor}_{\sigma(\cdot)} \circ \mathsf{T}.\mathrm{id}_{\mathcal{O}}(\mathcal{V}) \\ &= \mathsf{T}.\sigma(\mathcal{V}) - \mathrm{Hor}_{\sigma(\cdot)} \circ \mathsf{T}.(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \sigma)(\mathcal{V}) \equiv P^{\mathsf{H}_{\sigma(\cdot)}\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}{}_{\mathsf{V}_{\sigma(\cdot)}\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \mathsf{T}.\sigma(\mathcal{V})\,.\end{aligned}$$

W połączeniu z identyfikacją, z dowodu Tw. 19-20.3, podwiązki horyzontalnej indykowanej przez formę powiązania oraz Stw. 1 daje nam to przydatną równość

$$\nabla_{\mathcal{V}}\sigma(\cdot) = \widetilde{\mathrm{Vert}}_{\sigma(\cdot)} \circ \mathcal{A} \circ \mathsf{T}.\sigma(\mathcal{V})\,. \tag{11}$$

Na gruncie adaptacji szczegółowego wyprowadzenia Równ. (19-20.3) do działań *prawych*:

$$\mathsf{T}_x\big(\wp_{g(\cdot)}(\gamma(\cdot))\big) = \mathsf{T}_{\gamma(x)}\wp_{g(x)} \circ \big(\mathsf{T}_x\gamma + g^*\theta^A_{\mathrm{R}}(x) \otimes L_A(\gamma(x))\big)$$

(gdzie $L_A \equiv \mathcal{K}^{(\wp)}_{t_A}$ jest fundamentalnym polem wektorowym (prawostronnym) dla działania *prawego* regularnego $\wp$, stowarzyszonym z generatorem t_A algebry Liego $\mathfrak{g}$ wedle prawostronnego wariantu Def. 19-20.1) oraz

$$\mathsf{T}_x\big(r_{g(\cdot)}\big(\sigma(\cdot)\big)\big) = \mathsf{T}_{\sigma(x)} r_{g(x)} \circ \big(\mathsf{T}_x\sigma + g^*\theta^A_{\mathrm{R}}(x) \otimes \mathcal{K}^{(r)}_{t_A}\big(\sigma(x)\big)\big) \tag{12}$$

(gdzie $\mathcal{K}^{(r)}_{t_A}$ jest polem wektorowym fundamentalnym (prawostronnym) na P_{G} stowarzyszonym z generatorem t_A algebry Liego $\mathfrak{g}$ wedle prawostronnego wariantu Def. 19-20.1), równość ta pozwala porównać

$$\begin{aligned}
& \mathsf{T}_{\gamma(x)}\wp_{g(x)}\big(\mathsf{T}_x\gamma(V) + \big(\mathcal{V} \lrcorner g^*\theta^A_{\mathrm{R}}\big)(x) \triangleright L_A\big(\gamma(x)\big)\big) + V \lrcorner \alpha_{\mathcal{O}}\big(x, \wp_{g(x)}\big(\gamma(x)\big)\big) \\
= \; & \mathsf{T}_x\big(\wp_{g(\cdot)}\big(\gamma(\cdot)\big)\big)(V) + V \lrcorner \alpha_{\mathcal{O}}\big(x, \wp_{g(x)}\big(\gamma(x)\big)\big) \equiv \mathrm{pr}_2 \circ \mathsf{T}_{r_{g(x)}(\sigma(x))}\tau_i\big(\nabla_{\mathcal{V}} r_{(\cdot)}\big(\sigma(\cdot)\big)(x)\big) \\
= \; & \mathrm{pr}_2 \circ \mathsf{T}_{r_{g(x)}(\sigma(x))}\tau_i \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \circ \mathcal{A} \circ \mathsf{T}_x\big(r_{g(\cdot)}\big(\sigma(\cdot)\big)\big)(V) \\
= \; & \mathrm{pr}_2 \circ \mathsf{T}_{r_{g(x)}(\sigma(x))}\tau_i \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \circ \mathcal{A} \circ \mathsf{T}_{\sigma(x)} r_{g(x)}\big(\mathsf{T}_x\sigma(V) + \big(\mathcal{V} \lrcorner g^*\theta^A_{\mathrm{R}}\big)(x) \triangleright \mathcal{K}^{(r)}_{t_A}\big(\sigma(x)\big)\big) \\
= \; & \mathrm{pr}_2 \circ \mathsf{T}_{r_{g(x)}(\sigma(x))}\tau_i \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \circ \big(r_{g(x)} \times \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g(x)^{-1}}\big) \circ \mathcal{A}\big(\mathsf{T}_x\sigma(V) \\
& + \big(\mathcal{V} \lrcorner g^*\theta^A_{\mathrm{R}}\big)(x) \triangleright \mathcal{K}^{(r)}_{t_A}\big(\sigma(x)\big)\big) \\
= \; & \mathrm{pr}_2 \circ \mathsf{T}_{r_{g(x)}(\sigma(x))}\tau_i \circ \mathsf{T}_{\sigma(x)} r_{g(x)} \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{\sigma(x)} \circ \mathcal{A}\big(\mathsf{T}_x\sigma(V) + \big(\mathcal{V} \lrcorner g^*\theta^A_{\mathrm{R}}\big)(x) \triangleright \mathcal{K}^{(r)}_{t_A}\big(\sigma(x)\big)\big) \\
= \; & \mathrm{pr}_2 \circ \mathsf{T}_{\tau_i \circ \sigma(x)}\big(\mathrm{id}_B \times \wp_{g(x)}\big) \circ \mathsf{T}_{\sigma(x)}\tau_i \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{\sigma(x)} \circ \mathcal{A}\big(\mathsf{T}_x\sigma(V) + \big(\mathcal{V} \lrcorner g^*\theta^A_{\mathrm{R}}\big)(x) \triangleright \mathcal{K}^{(r)}_{t_A}\big(\sigma(x)\big)\big) \\
= \; & \mathsf{T}_{\sigma_i(x)}\wp_{g(x)} \circ \mathrm{pr}_2 \circ \mathsf{T}_{\sigma(x)}\tau_i \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{\sigma(x)} \circ \mathcal{A}\big(\mathsf{T}_x\sigma(V) + \big(\mathcal{V} \lrcorner g^*\theta^A_{\mathrm{R}}\big)(x) \triangleright \mathcal{K}^{(r)}_{t_A}\big(\sigma(x)\big)\big) \\
\equiv \; & \mathsf{T}_{\gamma(x)}\wp_{g(x)}\big(\mathsf{T}_x\gamma(V) + V \lrcorner \alpha_{\mathcal{O}}\big(x, \gamma(x)\big) \\
& + \big(\mathcal{V} \lrcorner g^*\theta^A_{\mathrm{R}}\big)(x) \triangleright \mathrm{pr}_2 \circ \mathsf{T}_{\sigma(x)}\tau_i \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{\sigma(x)} \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{K}^{(r)}_{t_A}\big(\sigma(x)\big)\big)\big).
\end{aligned}$$

Jeśli teraz uwzględnić pionową naturę pól fundamentalnych $\mathcal{K}_A$ (wynikającą z charakteru działania definiującego $r.$), to można powyższe przepisać w postaci

$$\begin{aligned}
& \mathsf{T}_{\gamma(x)}\wp_{g(x)}\big(\mathsf{T}_x\gamma(V) + \big(\mathcal{V} \lrcorner g^*\theta^A_{\mathrm{R}}\big)(x) \triangleright L_A\big(\gamma(x)\big)\big) + V \lrcorner \alpha_{\mathcal{O}}\big(x, \wp_{g(x)}\big(\gamma(x)\big)\big) \\
= \; & \mathsf{T}_{\sigma_i(x)}\wp_{g(x)}\big(\mathsf{T}_x\gamma(V) + V \lrcorner \alpha_{\mathcal{O}}\big(x, \gamma(x)\big) \\
& + \big(\mathcal{V} \lrcorner g^*\theta^A_{\mathrm{R}}\big)(x) \triangleright \mathrm{pr}_2 \circ \mathsf{T}_{\sigma(x)}\tau_i \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{\sigma(x)} \circ \big(\mathcal{A} \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{\sigma(x)}\big) \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}^{-1}_{\sigma(x)}\big(\mathcal{K}^{(r)}_{t_A}\big(\sigma(x)\big)\big)\big)\big) \\
= \; & \mathsf{T}_{\gamma(x)}\wp_{g(x)}\big(\mathsf{T}_x\gamma(V) + V \lrcorner \alpha_{\mathcal{O}}\big(x, \gamma(x)\big) + \big(\mathcal{V} \lrcorner g^*\theta^A_{\mathrm{R}}\big)(x) \triangleright \mathrm{pr}_2 \circ \mathsf{T}_{\sigma(x)}\tau_i\big(\mathcal{K}^{(r)}_{t_A}\big(\sigma(x)\big)\big)\big)\big),
\end{aligned}$$

czyli też – wobec G-ekwiwariantności trywializacji τ_i – w czytelniejszej postaci

$$\begin{aligned}
& \mathsf{T}_{\gamma(x)}\wp_{g(x)}\big(\mathsf{T}_x\gamma(V) + \big(\mathcal{V} \lrcorner g^*\theta^A_{\mathrm{R}}\big)(x) \triangleright L_A\big(\gamma(x)\big)\big) + V \lrcorner \alpha_{\mathcal{O}}\big(x, \wp_{g(x)}\big(\gamma(x)\big)\big) \\
= \; & \mathsf{T}_{\gamma(x)}\wp_{g(x)}\big(\mathsf{T}_x\gamma(V) + V \lrcorner \alpha_{\mathcal{O}}\big(x, \gamma(x)\big) + \big(\mathcal{V} \lrcorner g^*\theta^A_{\mathrm{R}}\big)(x) \triangleright L_A\big(\gamma(x)\big)\big),
\end{aligned}$$

a stąd już wprost wynika pożądana równość

$$V \lrcorner \alpha_{\mathcal{O}}\big(x, \wp_{g(x)}\big(\gamma(x)\big)\big) = \mathsf{T}_{\gamma(x)}\wp_{g(x)}\big(V \lrcorner \alpha_{\mathcal{O}}\big(x, \gamma(x)\big)\big).$$

□

Powyższe prowadzi nas wprost do

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Def. 3 i niechaj $\tau_i : \pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}$, $i \in I$ będą trywializacjami lokalnymi wiązki głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$. Zdefiniujmy **płaskie cięcia unitalne**

$$s_{(i)} : \mathcal{O}_i \longrightarrow \pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i) : x \longmapsto \tau_i^{-1}(x, e).$$

Potencjał lokalny powiązania głównego $\mathcal{A}$ na wiązce głównej P_{G} nad $\mathcal{O}_i$ (stowarzyszony z cięciami $s_{(i)}$) to odwzorowanie (klasy C^∞)

$$\mathsf{A}_i := s_{(i)}^*\underline{\mathcal{A}} \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$$

przyjmujące w dowolnym punkcie $x \in \mathcal{O}_i$ postać[2]

(13) $$\mathsf{A}_i(x) := \underline{\mathcal{A}} \circ \mathsf{T}_x s_{(i)} \,.$$

Uwaga 1. Na podstawie relacji (11) między pochodną kowariantną a formą powiązania głównego oraz treści Stw. 3, a w odwołaniu do tych samych obserwacji co w dowodzie Stw. 3 oraz do Równ. (6) wyprowadzamy (w użytych wcześniej oznaczeniach) dla cięcia

$$\sigma(x) = \tau_i^{-1}\big(x, \sigma_i(x)\big) = r_{\sigma_i(x)}\big(\tau_i^{-1}(x,e)\big) \equiv r_{\sigma_i(x)}\big(s_{(i)}(x)\big)$$

związek

$$\begin{aligned} & \mathrm{pr}_2 \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{\sigma(x)}^{-1}\big(\nabla.\sigma(x)\big) = \underline{\mathcal{A}} \circ \mathsf{T}_x\sigma \equiv \underline{\mathcal{A}} \circ \mathsf{T}_x\big(r_{\sigma_i(\cdot)}\big(s_{(i)}(\cdot)\big)\big) \\ = \; & \underline{\mathcal{A}} \circ \mathsf{T}_{s_{(i)}(x)} r_{\sigma_i(x)} \circ \big(\mathsf{T}_x s_{(i)} + \sigma_i^* \theta_{\mathrm{R}}^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_A}^{(r)}\big(s_{(i)}(x)\big)\big) \\ = \; & \mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}} \circ \underline{\mathcal{A}} \circ \big(\mathsf{T}_x s_{(i)} + \sigma_i^* \theta_{\mathrm{R}}^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_A}^{(r)}\big(s_{(i)}(x)\big)\big) \\ = \; & \mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}} \circ \big(\mathsf{A}_i(x) + \sigma_i^* \theta_{\mathrm{R}}^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{pr}_2 \circ \big(\mathcal{A} \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{s_i(x)}\big) \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{s_i(x)}^{-1}\big(\mathcal{K}_{t_A}^{(r)}\big(s_{(i)}(x)\big)\big)\big) \\ = \; & \mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}} \circ \big(\mathsf{A}_i(x) + \sigma_i^* \theta_{\mathrm{R}}^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{pr}_2\big(s_{(i)}(x), t_A\big)\big) \\ \equiv \; & \mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}} \circ \big(\mathsf{A}_i(x) + (\sigma_i^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{R}}(x)\big) = \mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}} \circ \mathsf{A}_i(x) + (\sigma_i^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}}(x) \,, \end{aligned}$$

przy czym w ostatnim przejściu skorzystaliśmy ze Stw. Niezb.cart.13. Specjalizacja powyższej formuły pozwala zarówno ustalić regułę zszycia potencjałow lokalnych nad (niepustymi) przecięciami $\mathcal{O}_{ij}$ ich dziedzin określoności, jak i wyznaczyć dla wzory transformacyjne względem automorfizmów wiązki P_{G}.

Pierwszą z wymienionych powyżej relacji ustala

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. W dowolnym punkcie $x \in \mathcal{O}_{ij}$ należącym do przecięcia dziedzin trywializacji lokalnych τ_i i τ_j wiązki głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ o odwzorowaniach przejścia $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{G}$ zachodzi tożsamość

$$\mathsf{A}_j(x) = \mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)} \circ \mathsf{A}_i(x) + (g_{ij}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_L(x) \,.$$

Dowód: Wystarczy zauważyć, że

$$s_{(j)}(x) \quad \equiv \quad \tau_j^{-1}(x,e) = \tau_i^{-1}\big(x, g_{ij}(x)\big) = r_{g_{ij}(x)}\big(\tau_i^{-1}(x,e)\big) \equiv r_{g_{ij}(x)}\big(s_{(i)}(x)\big) \,,$$

a następnie wykorzystać rachunek z Uwagi 1. □

Tak przygotowani możemy wreszcie omówić szczegółowo strukturę formy powiązania głównego w obrazie trywializacji lokalnej, co doprowadzi do uwypuklenia roli potencjałów lokalnych.

Stwierdzenie 5. Przyjmijmy zapis Def. 5. W obrazie trywializacji lokalnej $\tau_i : \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}$ forma powiązania głównego wyraża się przez potencjał tegoż powiązania, jak następuje:

$$\tau_i^{-1\,*}\underline{\mathcal{A}}(x,g) \equiv \underline{\mathcal{A}} \circ \mathsf{T}_{(x,g)}\tau_i^{-1} = \mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \mathsf{A}_i(x) + \theta_{\mathrm{L}}(g) \,,$$

przy czym obiekt po prawej stronie znaku równości należy traktować jako wektor z przestrzeni $\mathsf{T}_{(x,g)}^*(\mathcal{O}_i \times \mathrm{G}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} \equiv (\mathsf{T}_x^* B \oplus \mathsf{T}_g^* \mathrm{G}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ w dowolnym punkcie $(x,g) \in \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}$.

[2] Odwzorowanie $\mathsf{T}_x s_{(i)} : \mathsf{T}_x\mathcal{O}_i \longrightarrow \mathsf{T}_{s_{(i)}(x)}\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i)$ traktujemy tu jako element przestrzeni $\mathsf{T}_x^*\mathcal{O}_i \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_{s_{(i)}(x)}\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i)$.

<u>*Dowód*</u>: Uwzględniając powyższy rozkład przestrzeni $\mathsf{T}^*_{(x,g)}(\mathcal{O}_i \times \mathrm{G})$, możemy zawsze zapisać

$$\underline{\mathcal{A}} \circ \mathsf{T}_{(x,g)}\tau_i^{-1} = a_i(x;g) + \vartheta_i(g;x)\,, \tag{14}$$

gdzie $a_i(x;g) \in \mathsf{T}^*_x B \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ oraz $\vartheta_i(g;x) \in \mathsf{T}^*_g \mathrm{G} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ są 1-formami o własnościach

$$\forall_{(v,V)\in \mathsf{T}_x B \oplus \mathsf{T}_g \mathrm{G}} \ : \ V \lrcorner\, a_i(x;g) = 0_{\mathfrak{g}} = v \lrcorner\, \vartheta_i(g;x)\,.$$

Rozłożywszy 1-formę $\vartheta_i(g;x)$ w bazie utworzonej przez formy lewo niezmiennicze,

$$\vartheta_i(g;x) =: \vartheta^B_{i\,A}(x,g) \triangleright \theta^A_{\mathrm{L}}(g) \otimes_{\mathbb{R}} t_B\,,$$

obliczamy najpierw obie strony Równ. (14) na wektorze pionowym $(0_{\mathsf{T}_x B}, L_A(g))$, dostając – w odwołaniu do definicji (5) i Równ. (6), jak również Równ. (7) –

$$\begin{aligned}
&\vartheta^B_{i\,A}(x,g) \triangleright t_B = L_A(g) \lrcorner\, \vartheta_i(g;x) = \big(0_{\mathsf{T}_x B}, L_A(g)\big) \lrcorner\, \big(a_i(x;g) + \vartheta_i(g;x)\big) \\
= \quad & \underline{\mathcal{A}} \circ \mathsf{T}_{(x,g)}\tau_i^{-1}\big(0_{\mathsf{T}_x B}, L_A(g)\big) = \underline{\mathcal{A}} \circ \mathsf{T}_{(x,g)}\tau_i^{-1}\big(0_{\mathsf{T}_x B}, \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} g \cdot \exp^{\mathrm{G}}(t \triangleright t_A)\big) \\
= \quad & \underline{\mathcal{A}}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} \tau_i^{-1}\big(x, g\cdot \exp^{\mathrm{G}}(t \triangleright t_A)\big)\big) = \underline{\mathcal{A}}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} r_{\exp^{\mathrm{G}}(t\triangleright t_A)}\big(\tau_i^{-1}(x,g)\big)\big) = \underline{\mathcal{A}}\big(\mathcal{K}^{(r)}_{t_A}\big(\tau_i^{-1}(x,g)\big)\big) \\
= \quad & \underline{\mathcal{A}} \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{\tau_i^{-1}(x,g)}(t_A) = \mathrm{pr}_2\big(\tau_i^{-1}(x,g), t_A\big) = t_A\,.
\end{aligned}$$

Wnioskujemy na tej podstawie, że

$$\vartheta_i(g;x) \equiv \theta_{\mathrm{L}}(g)\,.$$

W następnej kolejności w miejsce wektora pionowego wstawiamy $(v, 0_{\mathsf{T}_g \mathrm{G}})$ i wykorzystujemy tożsamość

$$\begin{aligned}
&\mathsf{T}_{(x,g)}\tau_i^{-1}(v, 0_{\mathsf{T}_g \mathrm{G}}) = \mathsf{T}_{(x,g)}\tau_i^{-1} \circ \mathsf{T}_{(x,e)}(\mathrm{id}_B \times \wp_g)(v, 0_{\mathsf{T}_e \mathrm{G}}) = \mathsf{T}_{(x,e)}\big(\tau_i^{-1} \circ (\mathrm{id}_B \times \wp_g)\big)(v, 0_{\mathsf{T}_e \mathrm{G}}) \\
= \quad & \mathsf{T}_{(x,e)}\big(r_g \circ \tau_i^{-1}\big)(v, 0_{\mathsf{T}_e \mathrm{G}}) = \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,e)} r_g \circ \mathsf{T}_{(x,g)}\tau_i^{-1}(v, 0_{\mathsf{T}_e \mathrm{G}}) \equiv \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,e)} r_g \circ \mathsf{T}_{(x,g)}\tau_i^{-1} \circ \mathsf{T}_x(\cdot, e)(v) \\
= \quad & \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,e)} r_g \circ \mathsf{T}_x\big(\tau_i^{-1} \circ (\cdot, e)\big)(v) \equiv \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,e)} r_g \circ \mathsf{T}_x s_{(i)}(v)
\end{aligned}$$

która pozwala (dzięki Równ. (8)) zastosować bezpośrednio definicję (13) potencjału lokalnego powiązania głównego i tym sposobem otrzymać

$$\begin{aligned}
&v \lrcorner\, a_i(x;g) = (v, 0_{\mathsf{T}_g \mathrm{G}}) \lrcorner\, \big(a_i(x;g) + \vartheta_i(g;x)\big) = \underline{\mathcal{A}} \circ \mathsf{T}_{(x,g)}\tau_i^{-1}(v, 0_{\mathsf{T}_g \mathrm{G}}) \\
= \quad & \underline{\mathcal{A}} \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,e)} r_g \circ \mathsf{T}_x s_{(i)}(v) = \mathrm{pr}_2 \circ \big(r_g \times \mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big) \circ \mathcal{A} \circ \mathsf{T}_x s_{(i)}(v) = \mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \underline{\mathcal{A}} \circ \mathsf{T}_x s_{(i)}(v) \\
\equiv \quad & \mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \big(v \lrcorner\, \mathsf{A}_i(x)\big)\,,
\end{aligned}$$

więc też – wobec dowolności v –

$$a_i(x;g) = \mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \mathsf{A}_i(x)\,.$$

Ostatecznie zatem odtwarzamy postulowaną prezentację lokalną formy powiązania głównego. □

Tym sposobem docieramy do podstawowego rezultatu naszej analizy, jakim jest uogólnienie twierdzenia o rekonstrukcji wiązki (głównej) na podstawie jej danych lokalnych na przypadek wiązki głównej z powiązaniem uzgodnionym.

Twierdzenie 3 (O rekonstrukcji wiązki głównej z powiązaniem)**.** Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Każda wiązka główna $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ z formą powiązania głównego wyznacza nad swym pokryciem trywializującym $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$

- rodzinę $\{g_{ij}\}_{(i,j)\in\langle I^{\times 2}\rangle_{\mathcal{O}}}$ odwzorowań lokalnie gładkich
$$g_{ij} \ : \ \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{G}$$
spełniających warunek 1-kocyklu (2-3-4.1);

- rodzinę $\{\mathsf{A}_i\}_{i\in I}$ lokalnie gładkich 1-form o wartościach w algebrze Liego $\mathfrak{g}$ grupy Liego G

$$\mathsf{A}_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$$

  spełniających warunki

$$\forall_{(i,j)\in\langle I^{\times 2}\rangle_{\mathscr{O}},\ x\in\mathcal{O}_{ij}} \ :\ \mathsf{A}_j(x) = \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)} \circ \mathsf{A}_i(x) + (g_{ij}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_L(x)\,.$$

I odwrotnie, niechaj $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ będzie pokryciem otwartym rozmaitości gładkiej B. Dowolna stowarzyszona z $\mathscr{O}$ para rodzin odwzorowań lokalnie gładkich

$$\big(\{g_{ij}\}_{(i,j)\in\langle I^{\times 2}\rangle_{\mathscr{O}}}, \{\mathsf{A}_k\}_{k\in I}\big)$$

spełniających powyższe warunki określa – zgodnie z (konstruktywnym dowodem) Tw. 2-3-4.2 – wiązkę główną $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} = \big(\bigsqcup_{i\in I}(\mathcal{O}_i\times\mathrm{G})\big)/_{g_{\cdot\cdot}}$ o grupie strukturalnej G i o odwzorowaniach przejścia stowarzyszonych z $\mathcal{O}_{ij}$ tożsamych z g_{ij}, $(i,j)\in\big\langle I^{\times 2}\big\rangle_{\mathscr{O}}$ oraz formie powiązania głównego zadawanej formułą

$$\mathcal{A}(v,V) \coloneqq \big(x, g, \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \mathsf{A}_i(x)(v) + V \lrcorner\, \theta_L(g)\big)\,, \qquad (x,g)\in\mathcal{O}_i\times\mathrm{G}\,, \tag{15}$$

zapisaną dla dowolnego wektora $(v,V)\in\mathsf{T}_x\mathcal{O}_i\oplus\mathsf{T}_g\mathrm{G}\equiv\mathsf{T}_{(x,g)}(\mathcal{O}_i\times\mathrm{G})$. Ilekroć odwzorowania te są danymi lokalnymi pewnej wiązki głównej nad B o włóknie typowym G, ta ostatnia wiązka jest izomorficzna z wiązką określaną przez g_{ij} i A_i.

<u>*Dowód:*</u> Pierwsza część tezy wynika wprost z wcześniejszej analizy oraz z Tw. 2-3-4.2. Trzeba jeszcze tylko określić stosowne działanie grupy strukturalnej G na włóknach wiązki zrekonstruowanej według schematu przedstawionego w dowodzie Tw. 2-3-4.2,

$$\mathsf{P}_{\mathrm{G}} = \Big(\bigsqcup_{i\in I}(\mathcal{O}_i\times\mathrm{G})\Big)/_{g_{\cdot\cdot}}\,.$$

Definiujemy odwzorowanie

$$r_\cdot \quad : \quad \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{G}\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\ :\ \big([(x,g,i)],h\big)\longmapsto[(x,g\cdot h,i)]\,,$$

którego gładkość jest konsekwencją surjektywnej submersywności odwzorowania $\pi_\sim$ zadanego analogicznie jak to z dowodu Tw. 2-3-4.2 oraz Stw. Niezb.r-g.29 – istotnie, $r_\cdot$ jest (jedynym) odwzorowaniem domykającym diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} & & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \\ \bigsqcup_{i\in I}(\mathcal{O}_i\times\mathrm{G})\times\mathrm{G} \arrow[urr, "\pi_\sim\circ\widetilde{R}_\cdot"] \arrow[rr, two heads, "\pi_\sim\times\mathrm{id}_{\mathrm{G}}"'] & & \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{G} \arrow[u, "r_\cdot"'] \end{tikzcd}\ ,\ ,$$

w którym

$$\widetilde{R}_\cdot\ :\ \bigsqcup_{i\in I}(\mathcal{O}_i\times\mathrm{G})\times\mathrm{G}\longrightarrow\bigsqcup_{i\in I}(\mathcal{O}_i\times\mathrm{G})\ :\ \big((x,g,i),h\big)\longmapsto\big(x,g\cdot h,i\big)$$

jest jawnie gładkie i cechę tę ma także (tautologicznie) $\pi_\sim$.

Na obecnym etapie pozostaje jedynie upewnić się, że zrekonstruowana z danych lokalnych forma powiązania jest obiektem globalnie gładkim (klasy C^∞) o własnościach opisanych w Def. 3. Zasadniczo wniosek taki daje się prosto wyprowadzić ze Stw. 5, niemniej jednak my mozolnie sprawdzimy wszystkie własności. Mamy zatem do porównania, w dowolnym punkcie $x\in\mathcal{O}_{ij}$, wynik ewaluacji na dowolnym wektorze $(v,V)\in\mathsf{T}_x\mathcal{O}_i\oplus\mathsf{T}_g\mathrm{G}$ 1-formy $\mathcal{A}$ wyrażonej w terminach potencjału lokalnego A_i z wynikiem ewaluacji na obrazie tegoż wektora względem odwzorowania stycznego do transformacji przejścia (patrz: dyskusja otwierająca Wykłady 19-20)

$$\begin{aligned} G_{ij}\equiv\big(\mathrm{id}_{\mathcal{O}_{ij}}\times\mathrm{m}\big)\circ\big(\mathrm{pr}_1,g_{ij}\times\mathrm{id}_{\mathrm{G}}\big) \quad &: \quad \mathcal{O}_{ij}\times\mathrm{G}\longrightarrow\mathcal{O}_{ij}\times\mathrm{G}^{\times 2}\longrightarrow\mathcal{O}_{ij}\times\mathrm{G} \\ &: \quad (x,g)\longmapsto\big(x,g_{ji}(x),g\big)\longmapsto\big(x,g_{ji}(x)\cdot g\big) \end{aligned}$$

1-formy $\mathcal{A}$ wyrażonej w terminach potencjału lokalnego A_j. Przy tym zamiast pchać (v,V) wzdłuż odwzorowania przejścia, moglibyśmy równoważnie cofnąć wzdłuż tegoż odwzorowania 1-formę A_j, a następnie obliczyć ją na (v,V). Wystarczy zatem porównać wynik cofnięcia 1-formy $\mathcal{A}$ zapisanej przy użyciu potencjału A_j z tą samą 1-formą wyrażoną w terminach potencjału A_i, co czyniąc w odwołaniu do Stw. 4 oraz do Stw. Niezb.cart.17 oraz Niezb.cart.13, otrzymujemy pożądany wynik:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{(g_{ji}(x)\cdot g)^{-1}}\circ\mathsf{A}_j(x)+\big((\mathrm{m}\circ(g_{ji}\times\mathrm{id}_{\mathrm{G}}))^*\otimes\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\big)\theta_{\mathrm{L}}(x,g)\\
=\;&\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\circ\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)^{-1}}\circ\big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)}\circ\mathsf{A}_i(x)+(g_{ij}^*\otimes\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}}(x)\big)+\theta_{\mathrm{L}}(g)+\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\circ(g_{ji}^*\otimes\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}}(x)\\
=\;&\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\circ\mathsf{A}_i(x)+\theta_{\mathrm{L}}(g)+\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\circ(g_{ji}^*\otimes\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}}(x)+\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\circ\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)^{-1}}\circ(g_{ji}^*\otimes\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\circ(\mathrm{Inv}^*\otimes\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_L(x)\\
=\;&\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\circ\mathsf{A}_i(x)+\theta_{\mathrm{L}}(g)+\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\circ(g_{ji}^*\otimes\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}}(x)-\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\circ\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)^{-1}}\circ(g_{ji}^*\otimes\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{R}}(x)\\
=\;&\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\circ\mathsf{A}_i(x)+\theta_{\mathrm{L}}(g)+\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\circ(g_{ji}^*\otimes\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}}(x)-\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\circ\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)^{-1}}\circ\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)}\circ(g_{ji}^*\otimes\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\circ\theta_{\mathrm{L}}(x)\\
=\;&\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\circ\mathsf{A}_i(x)+\theta_{\mathrm{L}}(g)\,.
\end{aligned}$$

Drugą z oczekiwanych własności, Równ. (7), sprawdzamy w bezpośrednim odwołaniu do Równ. (6), zauważając na wstępie, że postać (włókna) wiązki odtworzonej z danych lokalnych w konstruktywnym dowodzie Tw. 2-3-4.2 prowadzi do utożsamienia $\mathcal{K}_X(x,g)\equiv\big(0_{\mathsf{T}_xB},L_X(g)\big)$ w dziedzinie $\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i)\ni(x,g)$ trywializacji lokalnej wiązki zrekonstruowanej P_{G}. W obrazie tejże trywializacji otrzymujemy więc – dla dowolnego wektora $X\in\mathfrak{g}$ – równość

$$\mathcal{A}\circ\widetilde{\mathrm{Vert}}_{(x,g)}(X)\equiv\mathcal{A}\big(0_{\mathsf{T}_xB},L_X(g)\big)=\big(x,g,L_X\lrcorner\,\theta_L(g)\big)\equiv(x,g,X)\,.$$

Na koniec wreszcie upewniamy się o G-ekwiwariantności zapostulowanej formy powiązania głównego. W równości

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\circ\mathsf{T}_{(x,g)}(\mathrm{id}_B\times\wp_h)(v,V)&=\mathcal{A}\circ\big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}_xB}\oplus\mathsf{T}_g\wp_h\big)(v,V)\\
&=\big(x,g\cdot h,\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{(g\cdot h)^{-1}}\circ\mathsf{A}_i(x)(v)+\mathsf{T}_g\wp_h(V)\lrcorner\,\theta_L(g\cdot h)\big)\,,
\end{aligned}$$

uwzględniamy więc raz jeszcze Stw. Niezb.cart.13, które pozwala przepisać

$$\mathsf{T}_g\wp_h(V)\lrcorner\,\theta_L(g\cdot h)=V\lrcorner\,(\wp_h^*\otimes\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}}(g)=\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h^{-1}}\circ\theta_{\mathrm{L}}(g)(V)\,,$$

a zatem także

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}\circ\mathsf{T}_{(x,g)}(\mathrm{id}_B\times\wp_h)(v,V)=\big((\mathrm{id}_B\times\wp_h)\times\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h^{-1}}\big)\big(x,g,\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\circ\mathsf{A}_i(x)(v)+V\lrcorner\,\theta_L(g)\big)\\
\equiv\;&\big((\mathrm{id}_B\times\wp_h)\times\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h^{-1}}\big)\circ\mathcal{A}(v,V)\,.
\end{aligned}$$

□

Ten sam schemat kodowania struktury w danych lokalnych możemy następnie zrealizować w odniesieniu do stosownych morfizmów.

Twierdzenie 4. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i niechaj $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^\alpha,B,\mathrm{G},\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^\alpha})$, $\alpha\in\{1,2\}$ będą dwiema wiązkami głównymi (o wspólnej grupie strukturalnej G) z formą powiązania głównego nad wspólną bazą B, o odnośnych trywializacjach lokalnych $\tau_i^\alpha\,:\,\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i)\xrightarrow{\cong}\mathcal{O}_i\times\mathrm{G}$ stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\mathscr{O}=\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$, przy czym wprowadzamy dwie rodziny cięć lokalnych:

$$s_{(i)}^\alpha:=\tau_i^{\alpha\,-1}(\cdot,e)\;:\;\mathcal{O}_i\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^\alpha\,,\qquad\alpha\in\{1,2\}\,,$$

a wraz z nimi – odwzorowania przejścia $g_{ij}^\alpha\,:\,\mathcal{O}_{ij}\longrightarrow\mathrm{G}$, $\alpha\in\{1,2\}$ oraz 1-formy $\mathsf{A}_i^\alpha\in\Omega^1(\mathcal{O}_i)\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}$, $\alpha\in\{1,2\}$ o wartościach w algebrze Liego $\mathfrak{g}$ grupy Liego G. Dowolny morfizm wiązek głównych zachowujący formę powiązania głownego,

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}^1_{\mathrm{G}} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_{\mathsf{P}^1_{\mathrm{G}}}"'] & \mathsf{P}^2_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\pi_{\mathsf{P}^2_{\mathrm{G}}}"] \\ B \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_B"'] & B \end{tikzcd},$$

zadaje rodzinę $\{h_i\}_{i\in I}$ odwzorowań (lokalnie) klasy C^∞

$$h_i \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{G}\,, \quad i\in I$$

spełniających warunki: (5-6.2) oraz

$$\forall_{x\in\mathcal{O}_i} \;:\; \mathsf{A}_i^2(x) = \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h_i(x)}\circ\mathsf{A}_i^1(x) + \big((\mathrm{Inv}\circ h_i)^*\otimes\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\big)\theta_{\mathrm{L}}(x)\,. \tag{16}$$

I odwrotnie, każda taka rodzina wyznacza jedyny morfizm opisanego typu.

<u>*Dowód:*</u> Po uwzględnieniu Tw. 5-6.2 pozostaje zweryfikować zapostulowaną formułę transformacyjną dla potencjału powiązania. W tym celu przywołujemy warunek (PFCM3’) z Def. 4 i podstawiamy go do definicji (13) tegoż potencjału, wykorzystując prostą zależność

$$\tau_i^{2\,-1}\big(x,h_i(x)\big) = \Phi\big(\tau_i^{1\,-1}(x,e)\big)\,,$$

którą przepisujemy w obecnej notacji jako

$$\Phi\circ s^1_{(i)}(x) = r_{h_i(x)}\big(s^2_{(i)}(x)\big)\,.$$

Otrzymujemy tym sposobem z jednej strony równość

$$\underline{\mathcal{A}}_2\circ\mathsf{T}_{s^1_{(i)}(x)}\Phi\circ\mathsf{T}_x s^1_{(i)} = \mathrm{pr}_2\circ(\Phi\times\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\circ\mathcal{A}_1\circ\mathsf{T}_x s^1_{(i)} = \underline{\mathcal{A}}_1\circ\mathsf{T}_x s^1_{(i)} \equiv \mathsf{A}_i^1(x)\,,$$

z drugiej zaś – w świetle (12) i szczegółowych rachunków w treści Uwagi 1 –

$$\underline{\mathcal{A}}_2\circ\mathsf{T}_{s^1_{(i)}(x)}\Phi\circ\mathsf{T}_x s^1_{(i)} = \underline{\mathcal{A}}_2\circ\mathsf{T}_x\Big(r_{h_i(\cdot)}\big(s^2_{(i)}(\cdot)\big)\Big) = \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h_i(x)^{-1}}\circ\mathsf{A}_i^2(x) + (h_i^*\otimes\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}}(x)\,.$$

Zestawiwszy powyższe wyniki, uzyskujemy – w odwołaniu do Stw. Niezb.cart.13 – oczekiwaną tożsamość,

$$\begin{aligned}\mathsf{A}_i^2(x) &= \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h_i(x)}\circ\mathsf{A}_i^1(x) - \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h_i(x)}\circ(h_i^*\otimes\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}}(x) = \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h_i(x)}\circ\mathsf{A}_i^1(x) - (h_i^*\otimes\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{R}}(x) \\ &= \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h_i(x)}\circ\mathsf{A}_i^1(x) + \big((\mathrm{Inv}\circ h_i)^*\otimes\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\big)\theta_{\mathrm{L}}(x)\,.\end{aligned}$$

I odwrotnie, mając rodzinę $h_i\;:\;\mathcal{O}_i\longrightarrow\mathrm{G}$, $i\in I$ odwzorowań z treści dowodzonego stwierdzenia, określamy odwzorowania lokalne

$$\Phi_i \quad:\quad \pi^{-1}_{\mathsf{P}^1_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i)\longrightarrow\pi^{-1}_{\mathsf{P}^2_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i) \;:\; \tau_i^{1\,-1}(x,g)\longmapsto\tau_i^{2\,-1}\big(x,h_i(x)\cdot g\big)\,, \quad i\in I\,.$$

Łatwo przekonujemy się, że są to w istocie ograniczenia odwzorowania globalnie gładkiego $\Phi\;:\;\mathsf{P}^1_{\mathrm{G}}\longrightarrow\mathsf{P}^2_{\mathrm{G}}$ do poszczególnych elementów pokrycia trywializującego, $\Phi\restriction_{\pi^{-1}_{\mathsf{P}^1_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i$, oto bowiem w dowolnym punkcie $x\in\mathcal{O}_{ij}$ zachodzi równość

$$\begin{aligned}\Phi_j\circ s^1_{(i)}(x) &= \Phi_j\circ\tau_j^{1\,-1}\big(x,g^1_{ji}(x)\big) = \tau_j^{2\,-1}\big(x,h_j(x)\cdot g^1_{ji}(x)\big) = \tau_j^{2\,-1}\big(x,g^2_{ji}(x)\cdot h_i(x)\big) \\ &= \tau_i^{1\,-1}\big(x,h_i(x)\big)\equiv\Phi_i\circ s^1_{(i)}(x)\,,\end{aligned}$$

a nadto odwzorowania Φ_i są G-ekwiwariantne, co sprawdzamy dla dowolnych $x\in\mathcal{O}_i$ oraz $g,h\in\mathrm{G}$,

$$\begin{aligned}\Phi_i\circ r^1_h\circ\tau_i^{1\,-1}(x,g) &= \Phi_i\circ\tau_i^{1\,-1}(x,g\cdot h) = \tau_i^{2\,-1}\big(x,h_i(x)\cdot g\cdot h\big) = r^2_h\Big(\tau_i^{2\,-1}\big(x,h_i(x)\cdot g\big)\Big) \\ &\equiv r^2_h\circ\Phi_i\circ\tau_i^{1\,-1}(x,g)\,.\end{aligned}$$

Na zakończenie dowodu sprawdzamy warunek (PFCM3') z Def. 4. Czynimy to w obrazie trywializacji lokalnej τ_i^1, posiłkując się przy tym Stw. 5. Oto więc stwierdzamy równość

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{A}}_2 \circ \mathsf{T}\Phi \circ \mathsf{T}_{(x,g)}\tau_i^{1\,-1} &\equiv \big(\underline{\mathcal{A}}_2 \circ \mathsf{T}_{(x,h_i(x)\cdot g)}\tau_i^{2\,-1}\big) \circ \mathsf{T}_{(x,g)}\big(\tau_i^2 \circ \Phi \circ \tau_i^{1\,-1}\big) \\ &\equiv \big(\tau_i^2 \circ \Phi \circ \tau_i^{1\,-1}\big)^*\big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{\mathrm{Inv}\circ\mathrm{pr}_2(\cdot)} \circ \mathrm{pr}_1^*\mathsf{A}_i^2 + \mathrm{pr}_2^*\theta_{\mathrm{L}}\big)(x,g) \\ &= \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{(h_i(x)\cdot g)^{-1}} \circ \mathsf{A}_i^2(x) + \big(\mathrm{m} \circ (h_i \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}})\big)^*\theta_{\mathrm{L}}(x,g)\,,\end{aligned}$$

którą w świetle przyjętych założeń oraz Stw. Niezb.cart.17 możemy przepisać w oczekiwanej postaci

$$\begin{aligned}&\mathrm{pr}_2 \circ \mathcal{A}_2 \circ \mathsf{T}\Phi \circ \mathsf{T}_{(x,g)}\tau_i^{1\,-1} \\ =\ &\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \big(\mathsf{A}_i^1(x) - (h_i^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}}(x)\big) + \theta_{\mathrm{L}}(g) + \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ (h_i^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}}(x) \\ =\ &\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \mathsf{A}_i^1(x) + \theta_{\mathrm{L}}(g) \equiv \underline{\mathcal{A}}_1 \circ \mathsf{T}_{(x,g)}\tau_i^{1\,-1} = \mathrm{pr}_2 \circ (\Phi \times \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) \circ \mathcal{A}_1 \circ \mathsf{T}_{(x,g)}\tau_i^{1\,-1}\end{aligned}$$

□

Tytułem uzupełnienia dyskusji zasadniczej, istotnego z punktu widzenia zastosowań teoriopolowych rozwijanego tu formalizmu i rozszerzonej dyskusji informacji geometrycznej zapisanej w powiązaniu spinorowym, podamy jeszcze

Definicja 6. Przyjmijmy zapis Def. 5. Potencjały powiązania głównego A_i na wiązce głównej P_{G} zadają rodzinę lokalnie gładkich 2-form na bazie o wartościach w algebrze Liego $\mathfrak{g}$

$$\mathsf{F}_i := \mathsf{d}\mathsf{A}_i + \mathsf{A}_i \wedge \mathsf{A}_i\,, \quad i \in I$$

spełniających warunki

$$\forall_{(i,j)\in\langle I^{\times 2}\rangle_{\mathscr{O}},\ x\in\mathcal{O}_{ij}}\ :\ \mathsf{F}_j(x) = \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}} \circ \mathsf{F}_i(x)\,.$$

Są one nazywane **lokalnymi 2-formami krzywizny powiązania głównego na wiązce** P_{G}. **Powiązanie główne płaskie** to takie, którego lokalne 2-formy krzywizny są równe zeru.

Wykład zamyka elementarna konstatacja własności transformacyjnych krzywizny.

Stwierdzenie 6. Przyjmijmy zapis Def. 6 i niechaj $\{\mathsf{F}_{\mathcal{O}}^{\alpha}\}_{i\in I}$, $\alpha \in \{1,2\}$ będą lokalnymi 2-formami krzywizny powiązania głównego na wiązkach głównych nad ustaloną bazą B, stowarzyszonymi ze wspólnym pokryciem trywializującym $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$, przy czym zakładamy, że między wiązkami tymi istnieje izomorfizm wiązek głównych z powiązaniem pokrywający identyczność na bazie, o danych lokalnych $\{h_i\}_{i\in I}$ zdefiniowanych w treści Tw. 4. Wówczas zachodzą tożsamości

$$\mathsf{F}_i^2 = \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h_i} \circ \mathsf{F}_i^1\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Prosty rachunek. □