**BUSHIDŌ**
**(MAWF '22/23 2.XXIII [RRS])**

Spis treści


1. Via Vulgata 1
2. Pejzaż lokalny z polem cechowania w roli genius loci 5
3. Via Culminis, czyli Bushidō 7

Literatura 12


Zgodnie z logiką dotychczasowego studium teorii wiązek włóknistych, jak w również w obliczu jego nadrzędnego celu, którym pozostaje wyprowadzenie sensownej definicji pochodnej kowariantnej na przestrzeni cięć wiązki spinorowej, stajemy obecnie przed zadaniem skonstruowania powiązania na wiązce stowarzyszonej z wiązką główną wyposażoną w formę powiązania głównego, którego rozwiązanie powinno odzwierciedlać w jakiś naturalny sposób obecność cartanowskiego mechanizmu stowarzyszania.

## 1. Via Vulgata

W obecnych okolicznościach warto powrócić do pierwotnego zagadnienia, jakie doprowadziło nas do rozważań nad powiązaniem w ogólności. Oto abstrakcyjnym naszym celem, umotywowanym naturalną potrzebą fizykalną, było zdefiniowanie takiego różniczkowania cięć (lokalnych) wiązki włóknistej $E$ (o włóknie typowym $F$) wzdłuż pól wektorowych na bazie $B$ tejże wiązki, które przyjmowałoby wartości w podwiązce pionowej $\mathsf{V}E \subset \mathsf{T}E$ i tym samym, poprzez stosowny dyfeomorfizm strukturalny $\mathsf{V}E\restriction_{E_x} \cong \mathsf{T}F$ nad dowolnym punktem $x \in B$, pozwalałoby przetransportować funktorialnie (za pośrednictwem funktora stycznego $\mathsf{T}$) dowolną istotną (np. fizykalnie) strukturę z przestrzeni cięć $\Gamma(E)$ (na której jest ona indukowaną z włókna typowego $F$) na przestrzeń ich określonych przez to różniczkowanie pochodnych kierunkowych. W kontekście konstrukcji wiązki stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$, o włóknie typowym $M$, tą strukturą jest struktura rozmaitości z działaniem $\lambda \,:\, \mathrm{G} \times M \longrightarrow M$ grupy $\mathrm{G}$, przy czym ta ostatnia występuje tu w roli grupy strukturalnej wiązki głównej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ i zarazem w roli włókna typowego wiązki grup $\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$, o grupie cięć globalnych $\Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ realizującej się na $\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$ w sposób lokalnie modelowany na $\lambda$. Nasze poszukiwania różniczkowania na $\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$ ekwiwariantnego względem działania grupy $\Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ komplikuje nieoczywisty charakter realizacji tejże grupy na $\mathsf{V}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$. Miast przemyśliwać nad abstrakcyjną konstrukcją wygodnego modelu wiązki $\mathsf{V}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$ (rozumianego jako wybór reprezentanta jej klasy izomorfizmu) na podobieństwo $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathfrak{g} \cong \mathsf{VP}_{\mathrm{G}}$ ze Stw. 21-22.1, który byłby przestrzenią naturalnego takiego działania, wykorzystamy raczej dotychczasowe rezultaty w celu skonstruowania różniczkowania przyjmującego wartości *wprost* w rozmaitości $\mathsf{T}M$, co ma tę oczywistą zaletę, że pozwoli nam zapostulować naturalną postać gładkiego działania:

$$\text{(1)} \qquad \mathsf{T}_2\lambda. \,:\, \mathrm{G} \times \mathsf{T}M \longrightarrow \mathsf{T}M \,:\, (g,v) \longmapsto \mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{T}M}(v)}\lambda_g(v)$$

grupy strukturalnej $\mathrm{G}$ na otrzymanym tą drogą obiekcie – splecenie tegoż działania z $\lambda$ ma w zamyśle realizować, w obrazie trywializacji lokalnej, poszukiwana przez nas pochodna kowariantna na $\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$. Łatwość, z jaką zidentyfikowaliśmy działanie na przestrzeni modelowej przeciwdziedziny tejże pochodnej, ma swoją cenę: jest nią nieoczywisty charakter nieodzownego przejścia – o naturze różniczkowej – od cięć wiązki stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$ do odwzorowań liniowych pomiędzy wiązkami stycznymi $\mathsf{T}B$ i $\mathsf{T}M$. Instrumentalnymi w jego zrozumieniu okazują się obserwacje dotyczące schematów prezentacji cięć poczynione w kontekście dyskusji strukturalnej wiązek stowarzyszonych, a konkretnie Stw. 9-10-11.5, które pozwala nam wypisać dwie istotne dla naszych rozważań bijekcje:

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda \quad &: \quad \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, M)\,, \\ \Phi_{\mathsf{T}_2\lambda} \quad &: \quad \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\mathsf{T}_2\lambda} \mathsf{T}M) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathsf{T}M)\,. \end{aligned}$$

Te w połączeniu z konstrukcją powiązania (głównego) na wiązce głównej z Def. 21-22.2 i 21-22.3, w szczególności zaś – z konstrukcją podniesienia poziomego

$$\mathrm{Hor.} \,:\, \mathsf{T}B \rightarrowtail \mathsf{TP}_{\mathrm{G}}\,, \qquad\qquad \mathrm{Hor.}(\mathsf{T}B) = \mathsf{H.P}_{\mathrm{G}}$$

ze Stw. 19-20.2, pozwala nam przeformułować zagadnienie różniczkowania cięcia $\phi \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$ wiązki stowarzyszonej wzdłuż pola wektorowego $\mathcal{X} \in \Gamma(\mathsf{T}B)$ nad jej bazą w terminach różniczkowania odnośnego odwzorowania G-ekwiwariantnego $\Phi_\lambda[\phi] \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, M)$ wzdłuż pola wektorowego $\mathrm{Hor.}(\mathcal{X}) \in \Gamma(\mathsf{TP}_{\mathrm{G}})$ nad przestrzenią totalną wiązki głównej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$. Taki zabieg formalny jest o tyle wygodny, że pozwala prosto narzucić warunek $\Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$-ekwiwariantności, oto bowiem jeśli oznaczymy poszukiwaną pochodną symbolem

$$\mathscr{D}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}\Phi_\lambda[\phi] \,:\, \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{T}M\,,$$

to możemy zażądać, iżby dla dowolnego cięcia globalnego $\gamma \in \Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ była spełniona tożsamość

$$\mathscr{D}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}\Phi_\lambda\big[\Gamma\big[\Gamma[\widetilde{r}]\big]_\gamma(\phi)\big](\cdot) = \mathsf{T}_2\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](\cdot)}\big(\mathscr{D}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\big)(\cdot)\,,$$

a jeśli wyprowadzone na podstawie takiego żądania odwzorowanie okaże się G-ekwiwariantnym,

$$\forall_{g \in \mathrm{G}} \,:\, \mathscr{D}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ r_g = \mathsf{T}_2\lambda_{g^{-1}} \circ \mathscr{D}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\,,$$

to wówczas – raz jeszcze w odwołaniu do Stw. 9-10-11.5 – będziemy mogli zdefiniować pochodną kowariantną

$$\nabla_{\mathcal{X}}\phi \coloneqq \Phi^{-1}_{\mathsf{T}_2\lambda}\big[\mathscr{D}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}\Phi_\lambda[\phi]\big] \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\mathsf{T}_2\lambda} \mathsf{T}M)\,,$$

która wprost na mocy swej definicji będzie miała pożądaną własność

$$\begin{aligned} &\nabla_{\mathcal{X}}\big(\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_\gamma(\phi)\big) \equiv \Phi^{-1}_{\mathsf{T}_2\lambda}\big[\mathscr{D}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}\Phi_\lambda\big[\Gamma\big[\Gamma[\widetilde{r}]\big]^\lambda_\gamma(\phi)\big]\big] = \Phi^{-1}_{\mathsf{T}_2\lambda}\big[\mathsf{T}_2\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]}\big(\mathscr{D}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\big)\big] \\ \equiv\;& \Phi^{-1}_{\mathsf{T}_2\lambda}\big[[\Phi_{\mathrm{Ad}}\mathsf{T}_2\lambda]_\gamma\big(\mathscr{D}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\big)\big] = \Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^{\mathsf{T}_2\lambda}_\gamma\big(\Phi^{-1}_{\mathsf{T}_2\lambda}\big[\mathscr{D}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}\Phi_\lambda[\phi]\big]\big) \equiv \Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^{\mathsf{T}_2\lambda}_\gamma\big(\nabla_{\mathcal{X}}\phi\big)\,, \end{aligned}$$

wyprowadzoną na gruncie (i w zapisie) Stw. 9-10-11.7. Po tych wyjaśnieniach możemy przystąpić do bezpośredniej konstrukcji pochodnej $\mathscr{D}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}$.

Punktem wyjścia do ustalenia poprawki do zwykłej pochodnej kierunkowej, $\mathscr{D}. - \mathsf{T}$, jaką wymuszają narzucone przez nas więzy ekwiariantności operatora $\mathscr{D}.$, jest analiza własności transformacyjnych tejże pochodnej względem transformacji cechowania $\gamma \in \Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ różniczkowanego cięcia $\phi \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$, w odwołaniu do Stw. 9-10-11.7, wyprowadzenia równości (19-20.3) oraz Stw. 19-20.1,

$$\mathsf{T}\big(\Phi_\lambda\big[\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_\gamma(\phi)\big]\big) = \mathsf{T}\big(\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\big)$$

$$= \quad \mathsf{T}_{\Phi_\lambda[\phi](\cdot)}\big(\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](\cdot)}\big) \circ \mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) + \mathcal{K}^{(\lambda)}\big(\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](\cdot)}\big(\Phi_\lambda[\phi](\cdot)\big)\big) \circ \big(\mathrm{Inv} \circ \Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]\big)^*\theta_{\mathrm{L}}\,,$$

przy czym $t_A,\ A \in \overline{1, \dim \mathrm{G}}$ jest tutaj bazą algebry Liego $\mathfrak{g}$ grupy Liego G. Z drugiej strony, uwzględniwszy formułę (21-22.12) (w obrazie współrzędniowym, tj. przy wyborze współrzędnych lokalnych na $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$: $\{y^\alpha\}_{\mu \in \overline{1, \dim \mathsf{P}_{\mathrm{G}}}}$ w otoczeniu $p \triangleleft \Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)^{-1}$ oraz $\{x^\mu\}_{\mu \in \overline{1, \dim \mathsf{P}_{\mathrm{G}}}}$ w otoczeniu $p$) G-ekwiwariantność potencjału powiązania głównego $\underline{\mathcal{A}} \equiv \underline{\mathcal{A}}^A \otimes t_A \in \Omega^1(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ na $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ (wprowadzonego w Def. 21-22.3), liczymy wprost

$$
\begin{aligned}
&{}^\gamma\underline{\mathcal{A}}(p) \equiv \big(r\big(\cdot, \mathrm{Inv} \circ \Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](\cdot)\big)\big)^* \mathsf{d}y^\alpha(p) \otimes \underline{\mathcal{A}}_\alpha\big(p \triangleleft \Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)^{-1}\big) \\
= \quad & \big(\mathsf{T}_p r_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)^{-1}}\big)^\alpha_{\ \mu} \triangleright \big(\mathsf{d}x^\mu(p) + \big(\mathrm{Inv} \circ \Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]\big)^*\theta^A_{\mathrm{R}}(p)\,\mathcal{K}^{(r)\,\mu}_{t_A}(p)\big) \otimes \underline{\mathcal{A}}_\alpha\big(p \triangleleft \Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)^{-1}\big) \\
\equiv \quad & \underline{\mathcal{A}}\big(p \triangleleft \Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)^{-1}\big) \circ \mathsf{T}_p r_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)^{-1}} + \big(\mathrm{Inv} \circ \Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]\big)^*\theta^A_{\mathrm{R}}(p) \otimes \underline{\mathcal{A}}\big(p \triangleleft \Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)^{-1}\big) \circ \mathsf{T}_p r_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)^{-1}}\big(\mathcal{K}^{(r)}_{t_A}(p)\big) \\
= \quad & \underline{\mathcal{A}}\big(p \triangleleft \Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)^{-1}\big) \circ \mathsf{T}_p r_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)^{-1}} + \big(\mathrm{Inv} \circ \Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]\big)^*\theta^A_{\mathrm{R}}(p) \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)} \circ \underline{\mathcal{A}}(p)\big(\mathcal{K}^{(r)}_{t_A}(p)\big) \\
= \quad & \underline{\mathcal{A}}\big(p \triangleleft \Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)^{-1}\big) \circ \mathsf{T}_p r_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)^{-1}} + \big(\mathrm{Inv} \circ \Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]\big)^*\theta^A_{\mathrm{R}}(p) \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)}(t_A) \\
= \quad & \underline{\mathcal{A}}\big(p \triangleleft \Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)^{-1}\big) \circ \mathsf{T}_p r_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)^{-1}} + \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)} \circ \big(\mathrm{Inv} \circ \Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]\big)^*\theta_{\mathrm{R}}(p) \\
= \quad & \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)} \circ \underline{\mathcal{A}}(p) + \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)} \circ \big(\mathrm{Inv} \circ \Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]\big)^*\theta_{\mathrm{R}}(p) \\
= \quad & \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)} \circ \underline{\mathcal{A}}(p) + \big(\mathrm{Inv} \circ \Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]\big)^*\theta_{\mathrm{L}}(p)\,,
\end{aligned}
$$

odwołując się przy ostatnim przejściu do Równ. (Niezb.cart.10). Z połączenia powyższych rachunków wywodzimy równość

$$\mathsf{T}\big(\Phi_\lambda\big[\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_\gamma(\phi)\big]\big)$$

$$= \quad \mathsf{T}_{\Phi_\lambda[\phi](\cdot)}\big(\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](\cdot)}\big) \circ \mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) + \mathcal{K}^{(\lambda)}\big(\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](\cdot)}\big(\Phi_\lambda[\phi](\cdot)\big)\big) \circ \big({}^\gamma\underline{\mathcal{A}} - \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](\cdot)} \circ \underline{\mathcal{A}}\big)\,,$$

która w wygodnym zapisie ${}^\gamma\phi \equiv \Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_\gamma(\phi)$ tłumaczy się, po przywołaniu Stw. 19-20.1, na strukturalną tożsamość:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[{}^\gamma\phi]\big) - \mathcal{K}^{(\lambda)}\big(\Phi_\Lambda[{}^\gamma\phi]\big) \circ {}^\gamma\underline{\mathcal{A}} \quad &= \quad \mathsf{T}_{\Phi_\lambda[\phi](\cdot)}\big(\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](\cdot)}\big) \circ \big(\mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) - \mathcal{K}^{(\lambda)}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \underline{\mathcal{A}}\big) \\
&\equiv \quad \mathsf{T}_2\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](\cdot)} \circ \big(\mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) - \mathcal{K}^{(\lambda)}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \underline{\mathcal{A}}\big)\,,
\end{aligned}
$$

a ponieważ dla dowolnego elementu $g \in \mathrm{G}$ mamy też tożsamość

$$\big(\mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) - \mathcal{K}^{(\lambda)}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \underline{\mathcal{A}}\big) \circ \mathsf{T}r_g = \mathsf{T}_2\lambda_{g^{-1}} \circ \big(\mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) - \mathcal{K}^{(\lambda)}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \underline{\mathcal{A}}\big)\,,$$

wynikającą trywialnie z G-ekwiwariantności: $\Phi_\lambda[\phi]$, potencjału powiązania głównego i fundamentalnego pola wektorowego dla $\lambda$, przeto z powyższych dociekań ekstrahujemy

**Definicja 1.** Przyjmijmy dotychczasowy zapis i niechaj G będzie grupą Liego o algebrze Liego $\mathfrak{g}$, w której wybrano bazę $\{t_A\}_{A \in \overline{1, \dim \mathrm{G}}}$, a $M$ – rozmaitością z gładkim działaniem $\lambda. : \mathrm{G} \times M \longrightarrow M$ grupy G, indukującym działanie (1), i niech $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ będzie wiązką główną nad bazą $B$, o potencjale powiązania głównego $\underline{\mathcal{A}} \equiv \underline{\mathcal{A}}^A \otimes t_A \in \Omega^1(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ jak w Def. 21-22.3. Dla dowolnego cięcia (globalnego) $\phi \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$ określamy jego **pochodną $\Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$-kowariantną**

$$\nabla^{\underline{\mathcal{A}}}\phi := \mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) - \mathcal{K}^{(\lambda)}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \underline{\mathcal{A}} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{T}\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathsf{T}M)\,.$$

Mamy kluczowe (z fizykalnego punktu widzenia)

**Stwierdzenie 1.** Przyjmijmy dotychczasowy zapis i niechaj $(\phi, \gamma) \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M) \times \Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$, a dalej oznaczmy **$\gamma$-transformaty**: potencjału powiązania głównego $\underline{\mathcal{A}}$ oraz cięcia $\phi$ jako, odpowiednio,

$${}^\gamma\underline{\mathcal{A}}(\cdot) := \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](\cdot)} \circ \big(\underline{\mathcal{A}} - \Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]^*\theta_{\mathrm{L}}\big)(\cdot)$$

oraz

$${}^\gamma\phi := \Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_\gamma(\phi)\,.$$

Zachodzi tożsamość

$$\nabla^{{}^\gamma\underline{\mathcal{A}}}\,{}^\gamma\phi = \mathsf{T}_2\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](\cdot)}\big(\nabla^{\underline{\mathcal{A}}}\phi\big)\,.$$

*Dowód:* Patrz: wyżej. □

Ceną za naturalność postulatów, na podstawie których wyprowadziliśmy powyższą postać różniczkowania cięć wiązki stowarzyszonej, jest strukturalna złożoność i nieoczywistość rezultatu. Godzi się też zauważyć, że wynik nie do końca realizuje nasze zamierzenie, oto bowiem powyższe odwzorowanie jest określone na wiązce stycznej nad $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ i nie daje nam wprost cięcia wiązki stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\mathsf{T}_2\lambda} \mathsf{T}M$. Podchodząc do zagadnienia od drugiej strony, możemy zamiast tego zapostulować postać takiego różniczkowania naturalną *z geometrycznego punktu widzenia*, co czynimy w

**Definicja 2.** Przyjmijmy zapis Def. 1. **Pochodna Crittendena na wiązce stowarzyszonej** $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$ nad $B$ to odwzorowanie

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathrm{C}} \quad &: \quad \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M) \times \Gamma(\mathsf{T}B) \longrightarrow \Gamma\big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\mathsf{T}_2\lambda} \mathsf{T}M\big) \\ &: \quad (\phi, \mathcal{X}) \longmapsto \Phi^{-1}_{\mathsf{T}_2\lambda}\Big(\mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \mathrm{Hor.}\big(\mathcal{X}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\cdot)\big)\big)\Big) \equiv \nabla^{\mathrm{C}}_{\mathcal{X}}\phi\,. \end{aligned}$$

**Uwaga 1.** Definicja powyższa ma sens, gdyż

$$\begin{aligned} &\mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \mathrm{Hor.}\big(\mathcal{X}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\cdot)\big)\big(r_g(p)\big) \equiv \mathsf{T}_{r_g(p)}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \mathrm{Hor}_{r_g(p)}\big(\mathcal{X}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ r_g(p)\big)\big) \\ = \;& \mathsf{T}_{r_g(p)}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \mathrm{Hor}_{r_g(p)}\big(\mathcal{X}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big)\big) = \mathsf{T}_{r_g(p)}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \mathsf{T}_p r_g \circ \mathrm{Hor}_p\big(\mathcal{X}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big)\big) \\ = \;& \mathsf{T}_p\big(\Phi_\lambda[\phi] \circ r_g\big) \circ \mathrm{Hor}_p\big(\mathcal{X}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big)\big) = \mathsf{T}_p\big(\lambda_{g^{-1}} \circ \Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \mathrm{Hor}_p\big(\mathcal{X}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big)\big) \\ = \;& \mathsf{T}_{\Phi_\lambda[\phi](p)}\lambda_{g^{-1}} \circ \mathsf{T}_p\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \mathrm{Hor}_p\big(\mathcal{X}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big)\big) \equiv \mathsf{T}_2\lambda_{g^{-1}}\Big(\mathsf{T}_p\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \mathrm{Hor}_p\big(\mathcal{X}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big)\big)\Big)\,, \end{aligned}$$

zatem – w istocie – $\mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \mathrm{Hor.}(\mathcal{X}(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\cdot)))$ należy do przeciwdziedziny bijekcji $\Phi_{\mathsf{T}_2\lambda}$.

Opis prostej relacji pomiędzy obiema konstrukcjami, a zarazem dowód *a posteriori* zasadności tej ostatniej jako definicji pochodnej $\Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$-kowariantnej zawiera

**Stwierdzenie 2.** Przyjmijmy zapis Def. 2. Dla dowolnego cięcia (globalnego) $\phi \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$ i dowolnego pola wektorowego $\mathcal{X} \in \Gamma(\mathsf{T}B)$ zachodzi tożsamość

$$\Phi_{\mathsf{T}_2\lambda}\big[\nabla^{\mathrm{C}}_{\mathcal{X}}\phi\big] = \nabla^{\underline{\mathcal{A}}}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X}(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\cdot)))}\phi\,.$$

*Dowód:* Równość obu wyrażeń, w których pojawia się pole wektorowe $\mathcal{X}$ na bazie wiązki głównej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ (i stowarzyszonej z nią $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$), wynika wprost z definicji $\mathsf{H}\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \equiv \mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}, \mathrm{id}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$, oto bowiem ta ostatnia implikuje redukcję wyrażenia na pochodną $\Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$-kowariantną:

$$\nabla^{\underline{\mathcal{A}}}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}\phi \quad \equiv \quad \big(\mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) - \mathcal{K}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \underline{\mathcal{A}}\big)\big(\mathrm{Hor.}\big(\mathcal{X}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\cdot)\big)\big)\big) = \mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \mathrm{Hor.}\big(\mathcal{X}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\cdot)\big)\big)$$

$$\equiv \quad \Phi_{\mathsf{T}_2\lambda}\big[\nabla^{\mathrm{C}}_{\mathcal{X}}\phi(\cdot)\big]\,.$$

□

Cel pragmatyczny, jakim była konstrukcja naturalnego różniczkowania cięć wiązki głównej o prostych własnościach transformacyjnych względem automorfizmów (wertykalnych, tj. pokrywających identyczność na bazie wiązki) $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$, możemy uznać za zrealizowany. Zaproponowane rozwiązanie stawia nas przed dwoma nader istotnymi pytaniami:

(1) Czy istnieje *prosta* prezentacja pochodnej $\Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$-ekwiwariantnej wyrażająca się poprzez potencjały lokalne powiązania głównego z Def. 21-22.5?

(2) Czy istnieje *prosta i bezpośrednia geometryczna* interpretacja konstrukcji pochodnej $\Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$-ekwiwariantnej w terminach wyróżnionego powiązania Ehresmanna na wiązce stowarzyszonej?

Odpowiedzi na oba pytania, które wyprowadzimy poniżej, dadzą nam sposobność istotnego pogłębienia naszego dotychczasowego zrozumienia mechanizmu indukcji powiązania na wiązce stowarzyszonej z powiązania głównego obecnego na wyjściowej wiązce głównej, a przy tym – co być może zaskakujące, a z pewnością przydatne – przerzucą pomost wprost ku konstrukcjom napotykanym w modelowaniu oddziaływań fundamentalnych.

## 2. Pejzaż lokalny z polem cechowania w roli genius loci

Struktury globalne obecne w opisie wiązki głównej i wiązek z nią stowarzyszonych mają swoje lokalne prezentacje: wszelka (niekanoniczna, czyli swoista) informacja o formie powiązania głównego jest niesiona przez potencjały lokalne $\mathrm{A}_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i)\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}$ stowarzyszone z lokalnymi trywializacjami $\tau_{s_{(i)}} : \pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i\times\mathrm{G}$ wiązki głównej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ indukowanymi (w rozumieniu Stw. 5-6.3) przez płaskie cięcia unitalne $s_{(i)}$ z Def. 21-22.5, globalne zaś cięcia wiązki z nią stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M$ zyskują za pośrednictwem tychże lokalnych cięć „intuicyjną" interpretację (indeksowanych przez $I$ rodzin) lokalnie gładkich odwzorowań

$$f_i := s^*_{(i)}\Phi_\lambda[\phi] \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow M\,,\quad i\in I\,,$$

podlegających oczywistym prawom zszycia:

$$f_i(y) \equiv \Phi_\lambda[\phi]\circ s_{(i)}(y) = \Phi_\lambda[\phi]\circ r_{g_{ji}(y)}\big(s_{(j)}(y)\big) = \lambda_{g_{ji}(y)^{-1}}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big(s_{(j)}(y)\big)\big) = \lambda_{g_{ij}(y)}\big(f_j(y)\big)$$

nad $\mathcal{O}_{ij}\ni y$, patrz: dowód Stw. 21-22.4. Pojawia się naturalne pytanie, uszczegóławiające wobec (1), o istnienie prostej prezentacji lokalnej pochodnej $\nabla\phi$ w terminach odwzorowania $f_i$ i 1-form wektorowych $\mathrm{A}_i$ w obrazie lokalnej trywializacji $\tau_{s_{(i)}}$. Formalizację tego pytania umożliwia

**Definicja 3.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy, w szczególności zaś – Def. 2. **Prezentacja lokalna pochodnej kowariantnej pola** $\phi\in\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)$ **w *cechowaniu*** $s_{(i)} : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ to odwzorowanie

$$\mathscr{D}^{s_{(i)}}_{\cdot}\phi \;:\; \Gamma\big(\mathsf{T}B\!\restriction_{\mathcal{O}_i}\big) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{O}_i,\mathsf{T}M) \;:\; \mathcal{X}\longmapsto \Phi_{\mathsf{T}_2\lambda}[\nabla^{\mathrm{C}}_{\mathcal{X}}\phi]\circ s_{(i)} \equiv \mathscr{D}^{s_{(i)}}_{\mathcal{X}}\phi\,.$$

Na pierwszy rzut oka ta całkowicie naturalna definicja nie dostarcza nam twierdzącej odpowiedzi na pytanie, którym ją wywołaliśmy, oto bowiem $\mathscr{D}^{s_{(i)}}_{\cdot}\phi$ wydaje się nie zawierać potencjałów lokalnych $\mathrm{A}_i$. O tym, że to powierzchowne wrażenie jest w istocie *mylne*, przekonuje nas następujące sprytne rozumowanie: Dokonajmy inteligentnego „odwrócenia" rozumowanie przedstawionego w dowodzie Stw. 2, które przeprowadziło nas od pochodnej $\Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$-kowariantnej cięcia wiązki stowarzyszonej wzdłuż (podniesienia poziomego) pola wektorowego na bazie tejże wiązki do cięcia tego pochodnej Crittendena. Rozważmy w tym celu pole wektorowe $\widetilde{\mathcal{X}}_i\in\Gamma(\mathsf{T}\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\!\restriction_{\pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i)})$, na początek zupełnie dowolne, o składowej poziomej danej przez (ograniczenie do $\pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i)$) $\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})$, gdzie $\mathcal{X}\in\Gamma(\mathsf{T}B)$ jest zadanym polem na bazie, i o składowej pionowej $\mathcal{V}_i\in\Gamma(\mathsf{V}\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\!\restriction_{\pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i)})$,

$$\widetilde{\mathcal{X}}_i = \mathrm{Hor.}(\mathcal{X})\!\restriction_{\pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i)} + \mathcal{V}_i \in \Gamma\big((\mathsf{H}\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\oplus_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\mathbb{R}}\mathsf{V}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\!\restriction_{\pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i)}\big) \equiv \Gamma\big(\mathsf{T}\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\!\restriction_{\pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i)}\big)\,,$$

czyli – innymi słowy – zupełnie dowolne gładkie podniesienie pola wektorowego $\mathcal{X}$ z bazy wiązki głównej do jej przestrzeni totalnej. Przy tym w świetle Stw. 21-22.1 mamy rozkład

$$\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_i^A \triangleright \mathcal{K}_{t_A}^{(r)} \restriction_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i)}, \qquad \mathcal{V}_i^A \in C^\infty\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i), \mathbb{R}\big)$$

obliczamy zatem – w odwołaniu do G-ekwiwariantności odwzorowania $\Phi_\lambda[\phi]$ –

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathsf{T}_2\lambda}[\nabla^{\mathrm{C}}_{\mathcal{X}}\phi]\restriction_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i)} &\equiv \mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \mathrm{Hor.}\big(\mathcal{X}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\cdot)\big)\big)\restriction_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \big(\widetilde{\mathcal{X}}_i - \mathcal{V}_i\big)(\cdot) \\
&= \mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \widetilde{\mathcal{X}}_i(\cdot) - \mathcal{V}_i^{\mathrm{A}}(\cdot) \triangleright \mathsf{T}.\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(r_{\exp^{\mathrm{G}}(t\triangleright t_A)}(\cdot)\big)\big) \\
&= \mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \widetilde{\mathcal{X}}_i(\cdot) - \mathcal{V}_i^{\mathrm{A}}(\cdot) \triangleright \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\Phi_\lambda[\phi] \circ r_{\exp^{\mathrm{G}}(t\triangleright t_A)}(\cdot) \\
&= \mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \widetilde{\mathcal{X}}_i(\cdot) - \mathcal{V}_i^{\mathrm{A}}(\cdot) \triangleright \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\lambda_{\exp^{\mathrm{G}}(-t\triangleright t_A)} \circ \Phi_\lambda[\phi](\cdot) \\
&\equiv \mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \widetilde{\mathcal{X}}_i(\cdot) - \mathcal{V}_i^{\mathrm{A}}(\cdot) \triangleright \mathcal{K}_{t_A}^{(\lambda)}\big(\Phi_\lambda[\phi](\cdot)\big) \\
&\equiv \mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \widetilde{\mathcal{X}}_i(\cdot) + \mathcal{V}_i^{\mathrm{A}}(\cdot) \triangleright \mathsf{T}_{(e,\Phi_\lambda[\phi](\cdot))}\lambda\big(t_A, \mathbf{0}_{\mathsf{T}_{\Phi_\lambda[\phi](\cdot)}M}\big) \\
&\equiv \mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \widetilde{\mathcal{X}}_i(\cdot) + \mathcal{V}_i^{\mathrm{A}}(\cdot) \triangleright \mathsf{T}_{(e,\Phi_\lambda[\phi](\cdot))}\lambda\big(\underline{\mathcal{A}}\big(\mathcal{K}_{t_A}^{(r)}(\cdot)\big), \mathbf{0}_{\mathsf{T}_{\Phi_\lambda[\phi](\cdot)}M}\big) \\
&= \mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \widetilde{\mathcal{X}}_i(\cdot) + \mathsf{T}_{(e,\Phi_\lambda[\phi](\cdot))}\lambda\big(\underline{\mathcal{A}}\big(\mathcal{V}_i(\cdot)\big), \mathbf{0}_{\mathsf{T}_{\Phi_\lambda[\phi](\cdot)}M}\big) \\
&\equiv \mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \widetilde{\mathcal{X}}_i(\cdot) + \mathsf{T}_{(e,\Phi_\lambda[\phi](\cdot))}\lambda\big(\underline{\mathcal{A}}\big(\widetilde{\mathcal{X}}_i(\cdot)\big), \mathbf{0}_{\mathsf{T}_{\Phi_\lambda[\phi](\cdot)}M}\big) \\
&\equiv \big(\mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) + \mathsf{T}_{(e,\Phi_\lambda[\phi])}\lambda \circ \big(\underline{\mathcal{A}}, 0\big)\big)\big(\widetilde{\mathcal{X}}_i(\cdot)\big).
\end{aligned}$$

Widzimy przeto, że swoboda dopełnienia podniesienia poziomego pola wektorowego $\mathcal{X}$ z bazy wiązki otwiera przed nami możliwość uwzględnienia formy powiązania głównego. Kończącego nasze poszukiwania *coup de grâce* okazuje się dostarczać... powtórne przemyślenie wniosków z dyskusji otwierającej Wykłady 19-20: Wszak z dowolnym polem wektorowym $\mathcal{X}$ na bazie możemy stowarzyszyć – w sposób absolutnie naturalny z punktu widzenia obecnej dyskusji – lokalnie gładkie pole na $\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i)$ za pośrednictwem... odwzorowania stycznego do płaskiego cięcia unitalnego $s_{(i)}$, co daje nam

$$\widetilde{\mathcal{X}}_i \equiv \mathsf{T}s_{(i)}(\mathcal{X}).$$

Jest to wybór spójny z naszymi dotychczasowymi rozważaniami, gdyż składowa pozioma pola to

$$\mathrm{Hor.} \circ \mathsf{T}\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\widetilde{\mathcal{X}}_i\big) \equiv \mathrm{Hor.} \circ \mathsf{T}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ s_{(i)}\big)(\mathcal{X}) = \mathrm{Hor.}(\mathcal{X}).$$

Dla tak przemyślnie skonstruowanego podniesienia pola $\mathcal{X}$ do przestrzeni totalnej wiązki wyznaczamy

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_{\mathcal{X}}^{s_{(i)}}\phi &= \big(\mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) + \mathsf{T}_{(e,\Phi_\lambda[\phi])}\lambda \circ \big(\underline{\mathcal{A}}, 0\big)\big) \circ \mathsf{T}s_{(i)}\big(\mathcal{X}(\cdot)\big) \\
&= \big(\mathsf{T}.\big(\Phi_\lambda[\phi] \circ s_{(i)}\big) + \mathsf{T}_{(e,\Phi_\lambda[\phi]\circ s_{(i)}(\cdot))}\lambda \circ \big(\underline{\mathcal{A}} \circ \mathsf{T}.s_{(i)}, 0\big)\big)\big(\mathcal{X}(\cdot)\big) \\
&\equiv \big(\mathsf{T}f_i + \mathsf{T}_{(e,f_i(\cdot))}\lambda \circ \big(\mathrm{A}_i, 0\big)\big)\big(\mathcal{X}(\cdot)\big),
\end{aligned}$$

czyli ostatecznie prezentacja lokalna pochodnej kowariantnej w cechowaniu $s_{(i)}$ przybiera piękną, bo przecie bardzo prostą postać

$$\mathscr{D}_{\cdot}^{s_{(i)}}\phi = \mathsf{T}f_i - \mathcal{K}^{(\lambda)}(f_i) \circ \mathrm{A}_i. \tag{3}$$

To w tej właśnie postaci – o ile w ogóle! – pochodna kowariantna objawia się zazwyczaj w literaturze fizycznej, przy czym w tym kontekście potencjał lokalny powiązania głównego zyskuje miano (**lokalnego**) **pola cechowania** (**w cechowaniu** $s_{(i)}$), zastąpienie zaś zwykłej pochodnej $\mathsf{T}f_i$ (**lokalnego**) **pola materii** $f_i$ powyższym wyrażeniem $\mathscr{D}_{\cdot}^{s_{(i)}}\phi$, w którym pojawia się **sprzężenie pola cechowania z polem materii** jest zwyczajowo nazywane **sprzężeniem minimalnym** (z jęz. ang. "minimal coupling"). W świetle Tw. 5-6.3 jest całkowicie jasne, że taka prezentacja pochodnej $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$-kowariantnej jest w ogólności możliwa *wyłącznie*[1] *lokalnie*.

## 3. Via Culminis, czyli Bushidō

W ogólnej dyskusji pojęcia powiązania na wiązce włóknistej przedstawionej podczas wprowadzających Wykładów 19-20 przeplatają się ze sobą konstruktywnie bardzo różne punkty widzenia na istotę powiązania, a zaspokojenie wyjściowej ambicji pozyskania praktycznej definicji strukturalnego różniczkowania cięć wiązki staje się ostatecznie niejako produktem ubocznym głębszej konstrukcji geometrycznej. W ostatnich dwóch rozdziałach ten porządek epistemologiczny i logiczny został przewrócony do góry nogami, a aspekt geometryczny został zmarginalizowany w stopniu, który czyni go w istocie niewidocznym. Taki stan rzeczy broni się na gruncie świadomości natury *zastosowań* dyskutowanych struktur geometrycznych w modelowaniu fizykalnym, która dyktuje strukturę naszego dyskursu, niemniej jednak w ostatniej części niniejszego wykładu spróbujemy przywrócić matematycznie uzasadniony porządek rzeczy *na przekór* powszechnym praktykom i przyjrzymy się drobiazgowo mechanizmowi indukcji powiązania Ehresmanna na wiązce stowarzyszonej z takiegoż powiązania głównego na odnośnej wiązce głównej. W toku naszych dociekań ustalimy bezpośredni związek pomiędzy otrzymaną tą drogą gładką dystrybucją operatorów rzutowych na $\mathsf{T}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$ a wcześniejszą konstrukcją pochodnej $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$-kowariantnej z Def. 1, z uwzględnieniem podstawowej implikacji Tw. 21-22.3. W rezultacie uzyskamy istotnie nowy wgląd w naturę i sens umotywowanej pragmatycznie konstrukcji z dwóch poprzednich rozdziałów, a nadto – naturalny punkt wyjścia do jej przyszłych uogólnień.

Podstawą naszych obecnych rozważań jest definicja powiązania głównego Ehresmanna na wiązce głównej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ (patrz: Def. 21-22.2). Zidentyfikowaną w jej treści $r$-niezmienniczą wiązkę poziomą $\mathsf{HP}_{\mathrm{G}}$ nad $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ potraktujemy jako podwiązkę w (pierwszym składniku prostym) $\mathrm{pr}_1^*\mathsf{TP}_{\mathrm{G}} \oplus_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M,\mathbb{R}} \mathrm{pr}_2^*\mathsf{T}M \equiv \mathsf{T}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M)$, po czym „sprowadzimy" ją – w sposób opisany poniżej – nad rozmaitość ilorazową $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M \equiv (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M)/\mathrm{G}$ wzdłuż surjektywnej submersji $\pi_\sim : \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$, korzystając z jej G-niezmienniczości. Oto więc, wybrawszy (dowolnie) reprezentanta $(p,m)$ orbity $[(p,m)] \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$, a wraz z nim – odwzorowanie (gładkie)

$$[(\cdot,m)] \,:\, \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M \,:\, p \longmapsto [(p,m)]\,, \tag{4}$$

definiujemy

$$\mathsf{H}_{[(p,m)]}\big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M\big) = \mathsf{T}_p[(\cdot,m)]\big(\mathsf{H}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\big)\,.$$

Niezależność wyniku od wyboru reprezentanta $(p,m)$ sprawdzamy w bezpośrednim rachunku: Dla reprezentanta $(r_g(p), \lambda_{g^{-1}}(m)) \in [(p,m)]$ określonego przez dowolny element $g \in \mathrm{G}$, stwierdzamy – na gruncie Równ. (21-22.3) – pożądaną równość

$$\begin{aligned}\mathsf{T}_{r_g(p)}[(\cdot,\lambda_{g^{-1}}(m))]\big(\mathsf{H}_{r_g(p)}\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\big) &= \mathsf{T}_{r_g(p)}[(\cdot,\lambda_{g^{-1}}(m))] \circ \mathsf{T}_p r_g\big(\mathsf{H}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\big) \\ &= \mathsf{T}_p[(r_g(\cdot),\lambda_{g^{-1}}(m))]\big(\mathsf{H}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\big) = \mathsf{T}_p[(\cdot,m)]\big(\mathsf{H}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\big)\,.\end{aligned}$$

W celu wywiedzenia z powyższej definicji dystrybucji poziomej formuły na 1-formę powiązania dystrybucję tę anihilującą, przejdziemy do obrazu trywializacji lokalnej $\tau_i : \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}$ wiązki głównej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ oraz takiejże trywializacji $\widetilde{\tau}_i : \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times M : [(p,m)] \longmapsto (\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}, t_i)([(p,m)])$ z $t_i : \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow M : [(p,m)] \longmapsto \lambda_{\mathrm{pr}_2\circ\tau_i(p)}(m)$ wiązki stowarzyszonej,

[1] Nie wyklucza to nader atrakcyjnej możliwości zdefiniowania lagranżowskiej teorii pola z symetrią cechowania modelowaną na działaniu **grupy cechowania** $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ na **polach materii** $\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$ w terminach obiektów lokalnych $\mathscr{D}^{S(i)}\phi$ oraz $f_i$ (i – ostatecznie – $\mathrm{A}_i$, dla których bez trudu można wypisać niezmienniki określające dynamikę), to jednak wymaga porzucenia paradygmatu, w którym pole fizyczne jest *globalnie* gładkiem odwzorowaniem czasoprzestrzeni w przestrzeń wewnętrznych stopni swobody (tutaj: $M$). Tym sposobem wkraczamy w fascynujący świat lagranżowskiej teorii pola z **defektami**, która znajduje szalenie istotne zastosowanie w wielu dziedzinach fizyki matematycznej, patrz: np. [RS09]. To jednak jest temat na zupełnie inny wykład...

indukowanej z $\tau_i$ wedle schematu opisanego w Def. 9-10-11.1. Trywializacje te pozwalają nam przedstawić odwzorowanie (4) w prostej postaci:

$$\psi_i^m \equiv \widetilde{\tau}_i \circ [(\cdot, m)] \circ \tau_i^{-1} \; : \; \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathcal{O}_i \times M \; : \; (x, g) \longmapsto \big(x, \lambda_g(m)\big) .$$

Niechaj teraz $(v, \xi \equiv \mathsf{T}_e \ell_g(X)) \in \mathsf{T}_x \mathcal{O}_i \oplus \mathsf{T}_g \mathrm{G} \equiv \mathsf{T}_{(x,g)}(\mathcal{O}_i \times \mathrm{G})$ dla pewnego wektora $X \in \mathfrak{g}$, a wtedy – w świetle Stw. 19-20.1 –

$$\begin{aligned}
\mathsf{T}_{(x,g)} \psi_i^m(v, \xi) &= \big(v, \mathsf{T}_g \psi_i^m(x, \cdot) \circ \mathsf{T}_e \ell_g(X)\big) = \big(v, \mathsf{T}_g \psi_i^m(x, \cdot) \circ \mathsf{T}_e \ell_g\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\!\upharpoonright_{t=0} \exp_{\mathrm{G}}(t \triangleright X)\big)\big) \\
&= \big(v, \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\!\upharpoonright_{t=0} \psi_i^m\big(x, g \cdot \exp_{\mathrm{G}}(t \triangleright X)\big)\big) \equiv \big(v, \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\!\upharpoonright_{t=0}\big(x, \lambda_{g \cdot \exp_{\mathrm{G}}(t \triangleright X)}(m)\big)\big) \\
&= \big(v, \mathsf{T}_m \lambda_g\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\!\upharpoonright_{t=0} \lambda_{\exp_{\mathrm{G}}(t \triangleright X)}(m)\big)\big) \equiv \big(v, -\mathsf{T}_m \lambda_g\big(\mathcal{K}_X^{(\lambda)}(m)\big)\big) \\
&= \big(v, -\mathcal{K}^{(\lambda)}_{\mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_g(X)}\big(\lambda_g(m)\big)\big) = \big(v, -\mathcal{K}^{(\lambda)}_{\mathsf{T}_g \wp_{g^{-1}}(\xi)}\big(\lambda_g(m)\big)\big) .
\end{aligned}$$

Celem pozyskania jawnego opisu dystrybucji poziomej indukowanej w powyższy sposób, możemy następnie nałożyć na $(v, \xi)$ więzy horyzontalności, w czym instrumentalną rolę odgrywa prezentacja formy powiązania głównego w obrazie lokalnej trywializacji $\tau_i$ podana w Stw. 21-22.5. Stwierdzamy zatem, że

$$\begin{aligned}
& (v, \xi) \in \mathrm{Ker}\big(\tau_i^{-1\,*} \underline{\mathcal{A}}(x, g)\big) \equiv \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i\big(\mathsf{H}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\big) \\
\Longleftrightarrow \quad & v \lrcorner \mathrm{A}_i(x) = -\mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_g\big(\theta_{\mathrm{L}}(g)(\xi)\big) = -\mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_g(X) \equiv -\mathsf{T}_g \wp_{g^{-1}}(\xi) ,
\end{aligned}$$

i dla takiego wektora poziomego obliczamy

$$\mathsf{T}_{(x,g)} \psi_i^m(v, \xi) = \big(v, \mathcal{K}^{(\lambda)}\big(\lambda_g(m)\big) \circ \mathrm{A}_i(x)(v)\big) .$$

Na tej podstawie możemy już dokonać jednoznacznego rozbicia *dowolnego* wektora stycznego $(v, w) \in \mathsf{T}_{(x,m)}(\mathcal{O}_i \times M)$ na składowe

$$(v, w) = \big(v, \mathcal{K}^{(\lambda)}(m) \circ \mathrm{A}_i(x)(v)\big) + \big(0, w - \mathcal{K}^{(\lambda)}(m) \circ \mathrm{A}_i(x)(v)\big)$$

poziomą i pionową. Wybierzmy lokalne współrzędne $\{\xi^a\}^{a \in \overline{1,D}}$, $D = \dim M$ na pewnym otoczeniu $\mathcal{U}$ punktu $m$, po czym zdefiniujmy lokalnie gładką dystrybucję endomorfizmów stycznej do włókna:

$$\mathsf{d}\xi^a(m) \otimes \partial_a(m) \equiv \mathsf{d}\xi^a(m) \otimes \tfrac{\partial}{\partial \xi^a}(m) \in \mathsf{T}_m^* \mathcal{U} \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_m \mathcal{U}$$

i oznaczmy

$$\varpi_i(x, m) := -\mathcal{K}^{(\lambda)}(m) \circ \mathrm{A}_i(x) \in \mathsf{T}_x^* \mathcal{O}_i \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_m \mathcal{U} . \tag{5}$$

Powyższe dwa operatory składają się na odwzorowanie

$$\alpha_i(x, m) := \mathsf{d}\xi^a(m) \otimes \partial_a(m) + \varpi_i(x, m) \in \mathsf{T}^*_{(x,m)}\big(\mathcal{O}_i \times \mathcal{U}\big) \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_m \mathcal{U} , \tag{6}$$

której definicja pozwala nam zapisać, dla dowolnego punktu $(x, m) \in \mathcal{O}_i \times \mathcal{U}$,

$$\mathsf{H}_{(x,m)}\big(\mathcal{O}_i \times \mathcal{U}\big) = \mathrm{Ker}\big(\alpha_i(x, m)\big) .$$

W dalszej części przekonamy się, że lokalne obiekty $\alpha_i$ pochodzą od globalnie gładkiego obiektu na $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$.

Godzi się podkreślić, że 1-forma $\alpha_i$ jest obiektem lokalnym w dwójnasób: w jej definicji pojawiają się współrzędne lokalne na włóknie, zatem jest to obiekt lokalny w kierunkach włókna, ale też definicja ta odwołuje się do lokalnej trywializacji, przeto są one lokalne także w kierunkach bazy. „Lokalność" pierwszego rodzaju jest w oczywisty sposób pozorna, oto bowiem człon $\mathsf{d}\xi^a \otimes \partial_a$ w definicji $\alpha_i$ jest niezmienniczy względem transformacji współrzędniowych (jest to lokalna reprezentacja globalnego obiektu $\mathrm{id}_{\mathsf{T}M}$), drugi zaś człon w tejże definicji wyraża się przez globalnie gładkie (fundamentalne) pole wektorowe na $M$. Potencjalnie nietrywialny charakter ma zatem tylko „lokalność" w kierunkach bazy. Rozważmy parę 1-form o wartościach w $\mathsf{T}M$: $\alpha_i$ oraz $\alpha_j$ na $\mathcal{O}_{ij} \times M$. Drugą z nich cofamy z punktu $(x, \lambda_{g_{ji}(x)}(m)) \in \widetilde{\tau}_j(\pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M}(\mathcal{O}_{ij}))$ (w którym mamy lokalny układ współrzędnych $\{\widetilde{\xi}^a\}^{a \in \overline{1,D}}$, określony na otoczeniu $\mathcal{V}$ punktu $\lambda_{g_{ji}(x)}(m)$, więc też współrzędniową bazę $\widetilde{\partial}_a \equiv \frac{\partial}{\partial \widetilde{y}^a}$ stycznej do włókna) do punktu $(x, m) \in$

$\widetilde{\tau}_j(\pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}(\mathcal{O}_{ij}))$ (w którym mamy wcześniej wprowadzone współrzędne lokalne $\{y^a\}^{a\in\overline{1,D}}$ z otoczenia $m$) utożsamianego z $(x,\lambda_{g_{ji}(x)}(m))$ przy zszywaniu trywializacji lokalnych za pośrednictwem odwzorowań przejścia $g_{ij}$ wiązki $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M$. Wynik cofnięcia porównujemy z wartością przyjmowaną w tym punkcie przez pierwszą z 1-form. Dokonawszy adaptacji wyprowadzenia ze str. 3 $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$-transformaty formy powiązania i uwzględniając przy tym funkcjonalną zależność od (zmiennego) $m$, otrzymujemy – w odwołaniu do Uwagi Niezb.cart.5 oraz Stw. Niezb.cart.13 i 19-20.1 –

$$\begin{aligned}
&\big(\lambda\circ\big(g_{ji}\times\mathrm{id}_M\big)\big)^*\mathsf{d}\widetilde{\xi}^a(x,m)\otimes\widetilde{\partial}_a\big(\lambda_{g_{ji}(x)}(m)\big)-\mathcal{K}^{(\lambda)}\big(\lambda_{g_{ji}(x)}(m)\big)\circ\mathrm{A}_j(x)\\
=\ &\big(\mathsf{T}_m\lambda_{g_{ji}(x)}\big)^a{}_b\,\mathsf{d}\xi^b(m)\otimes\widetilde{\partial}_a\big(\lambda_{g_{ji}(x)}(m)\big)+g_{ji}^*\theta_{\mathrm{L}}^A(x)\otimes\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(\lambda_{g_{ji}(x)\cdot\exp_{\mathrm{G}}(t\,t_A)}(m)\big)\\
&-\mathcal{K}^{(\lambda)}\big(\lambda_{g_{ji}(x)}(m)\big)\circ\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)}\circ\mathrm{A}_i(x)-\mathcal{K}^{(\lambda)}\big(\lambda_{g_{ji}(x)}(m)\big)\circ g_{ij}^*\theta_{\mathrm{L}}(x)\\
=\ &\big(\mathsf{T}_m\lambda_{g_{ji}(x)}\big)^a{}_b\,\mathsf{d}\xi^b(m)\otimes\widetilde{\partial}_a\big(\lambda_{g_{ji}(x)}(m)\big)-g_{ji}^*\theta_{\mathrm{L}}^A(x)\otimes\mathsf{T}_m\lambda_{g_{ji}(x)}\big(\mathcal{K}^{(\lambda)}_{t_A}(m)\big)\\
&-\mathcal{K}^{(\lambda)}\big(\lambda_{g_{ji}(x)}(m)\big)\circ\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)}\circ\mathrm{A}_i(x)+\mathcal{K}^{(\lambda)}\big(\lambda_{g_{ji}(x)}(m)\big)\circ\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)}\circ g_{ji}^*\theta_{\mathrm{L}}(x)\\
\equiv\ &\mathsf{d}\xi^a(m)\otimes\mathsf{T}_m\lambda_{g_{ji}(x)}\big(\partial_a(m)\big)-\mathsf{T}_m\lambda_{g_{ji}(x)}\big(\mathcal{K}^{(\lambda)}(m)\big)\circ g_{ji}^*\theta_{\mathrm{L}}(x)\\
&-\mathcal{K}^{(\lambda)}\big(\lambda_{g_{ji}(x)}(m)\big)\circ\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)}\circ\mathrm{A}_i(x)+\mathcal{K}^{(\lambda)}\big(\lambda_{g_{ji}(x)}(m)\big)\circ\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)}\circ g_{ji}^*\theta_{\mathrm{L}}(x)\\
=\ &\mathsf{d}\xi^a(m)\otimes\mathsf{T}_m\lambda_{g_{ji}(x)}\big(\partial_a(m)\big)-\mathcal{K}^{(\lambda)}\big(\lambda_{g_{ji}(x)}(m)\big)\circ\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)}\circ\mathrm{A}_i(x)\\
=\ &\mathsf{T}_m\lambda_{g_{ji}(x)}\circ\big(\mathsf{d}\xi^a(m)\otimes\partial_a(m)-\mathcal{K}^{(\lambda)}(m)\circ\mathrm{A}_i(x)\big)\equiv\mathsf{T}_m\lambda_{g_{ji}(x)}\circ\alpha_i(x,m)\,.
\end{aligned}$$

Transformacja liniowa $\mathsf{T}_m\lambda_{g_{ji}(x)}$ w przeciwdziedzinie 1-formy *wektorowej* $\alpha_i(x,m)$ to ograniczenie do stycznej do włókna $\mathsf{T}_mM$ podniesienia stycznego dyskutowanego wcześniej utożsamienia, realizowanego przez odwzorowanie

$$\begin{aligned}
\gamma_{ji}\quad &:\quad \mathcal{O}_{ij}\times M\xrightarrow{(\mathrm{id}_B,g_{ji})\times\mathrm{id}_M}\mathcal{O}_{ij}\times\mathrm{G}\times M\xrightarrow{\mathrm{id}_B\times\lambda}\mathcal{O}_{ij}\times M\\
&:\quad (x,m)\longmapsto\big(x,g_{ji}(x),m\big)\longmapsto\big(x,\lambda_{g_{ji}(x)}(m)\big)
\end{aligned}$$

na bazie stycznej (ograniczenia) $i$-tej trywializacji $\mathcal{O}_{ij}\times M\subset\mathcal{O}_i\times M$. Transformacja ta jest nieodzowna dla zstąpienia rodziny $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ na wiązkę zrekonstruowaną z trywializacji lokalnych poprzez opisane utożsamienia (według schematu z dowodu Tw. 2-3-4.2), czyli też – dla istnienia 1-formy wektorowej na $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M$ o wartościach w $\mathsf{V}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)$ reprezentowanej lokalnie przez 1-formy $\alpha_i$. Ten ostatni obiekt, którego istnienie zostało dowiedzione powyżej na podstawie afinicznego prawa zszycia dla potencjału lokalnego powiązania głównego ze Stw. 21-22.4, będziemy oznaczać (cokolwiek pedantycznie określając jego naturę) jako

$$\varpi\in\Gamma\big(\mathsf{T}^*(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)\otimes_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M,\mathbb{R}}\jmath_{\mathsf{V}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)}\big(\mathsf{V}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)\big)\big)\,.$$

Powyższa analiza jest źródłem istotnej nauki ogólnej: Jako cięcia tensorowych wiązek wektorowych $\mathsf{T}^*(\mathcal{O}_i\times M)\otimes_{\mathcal{O}_i\times M,\mathbb{R}}\mathrm{pr}_2^*\mathsf{T}M$ 1-formy wektorowe $\alpha_i$ o wartościach w $\mathsf{T}M$ są w naturalny sposób transportowane wzdłuż *dyfeomorfizmów* przez sprzężone transformacje cofnięcia i odwrotnego pchnięcia w rodzaju tych napotkanych powyżej:

$$\alpha_j\longmapsto\mathsf{T}_2\lambda_{g_{ji}}^{-1}\circ\gamma_{ji}^*\alpha_j\big(\equiv\alpha_i\big)\,.$$

Jest to przykład ogólniejszej prawidłowości, którą opisujemy w

**Definicja 4.** Niechaj $(\mathbb{V}_A,B_A,\mathbb{R}^{\times r},\pi_{\mathbb{V}_A})$, $A\in\{1,2\}$ będą dwiema (rzeczywistymi) wiązkami wektorowymi rzędu $r$, i niech $f:B_1\longrightarrow B_2$ będzie odwzorowaniem gładkim. Ilekroć z $f$ stowarzyszony jest izomorfizm wiązek wektorowych $\widehat{f}:\mathbb{V}_1\xrightarrow{\cong}f^*\mathbb{V}_2$, w którego zapisie $f^*\mathbb{V}_2=B_1\times_{B_2}\mathbb{V}_2$ jest standardowym modelem wiązki cofniętej z Przykł. (2-3-4.1.4), mówimy, że wiązki $\mathbb{V}_A$ **są w**

$f$**-relacji** i określamy operację **cofnięcia rozwłóknionego nad bazą** daną w postaci (zapisanej dla dowolnego $p \in \mathbb{N}$)

$$f^{\circledast} \;:\; \Gamma\big(\bigwedge{}^p \mathsf{T}^* B_2 \otimes_{B_2,\mathbb{R}} \mathbb{V}_2\big) \longrightarrow \Gamma\big(\bigwedge{}^p \mathsf{T}^* B_1 \otimes_{B_1,\mathbb{R}} \mathbb{V}_1\big) \;:\; \omega \longmapsto \widehat{f}^{-1} \circ f^* \omega\,.$$

W rozpatrywanym wcześniej przypadku odwzorowanie $\gamma_{ji}$ indukuje automorfizm wiązki wektorowej $\mathsf{T}_2 \lambda_{g_{ji}(x)} : \mathsf{T}M \circlearrowleft$ nad dowolnym punktem $x \in \mathcal{O}_{ij}$, przeto oznaczywszy zadawany przezeń izomorfizm wiązek wektorowych $\mathrm{pr}_2^* \mathsf{T}M \upharpoonright_{\mathcal{O}_i \times M} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij} \times M} \longrightarrow \mathrm{pr}_2^* \mathsf{T}M \upharpoonright_{\mathcal{O}_j \times M} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij} \times M}$ tym samym symbolem $\mathsf{T}_2 \lambda_{g_{ji}}$ (co stanowi dopuszczalne nadużycie notacyjne), otrzymujemy

$$\mathsf{T}_2 \lambda_{g_{ji}}^{-1} \circ \gamma_{ji}^* \alpha_j = \gamma_{ji}^{\circledast} \alpha_j\,.$$

Analogiczne rozważania można poprowadzić w odniesieniu do odwzorowania $\widetilde{\tau}_i \equiv (\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M}, t_i)$ (patrz: str. 7) dla wiązek w $\widetilde{\tau}_i$-relacji: $\mathsf{V}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M) \upharpoonright_{\pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M}(\mathcal{O}_i)}$ i $\mathrm{pr}_2^* \mathsf{T}M \upharpoonright_{\mathcal{O}_i \times M}$ (przy czym izomorfizm indukowany to tutaj $\widehat{\widetilde{\tau}_i} \equiv \mathsf{T}t_i \upharpoonright_{\mathsf{V}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M) \upharpoonright_{\pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M}(\mathcal{O}_i)}}$), a wówczas relacja między $\varpi$ i $\alpha_i$ przyjmie prostą postać

$$\alpha_i = \widetilde{\tau}_i^{-1\circledast} \varpi\,. \tag{7}$$

Przejdziemy obecnie do zbadania własności strukturalnych 1-form $\alpha_i$, które są w naturalny sposób dziedziczone przez $\varpi$ jako jej własności *definiujące*.

Pierwsza obserwacja dotyczy zachowania 1-formy $\alpha_i$ pod wpływem przekształceń

$$\begin{aligned} \gamma_i \quad &: \quad \mathcal{O}_i \times M \xrightarrow{(\mathrm{id}_B, h_i) \times \mathrm{id}_M} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \times M \xrightarrow{\mathrm{id}_B \times \lambda} \mathcal{O}_i \times M \\ &: \quad (x,m) \longmapsto \big(x, h_i(x), m\big) \longmapsto \big(x, \lambda_{h_i(x)}(m)\big)\,, \end{aligned}$$

modelujących w obrazie lokalnej trywializacji działanie (poniżej $p \in \pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i)$)

$$\begin{aligned} [\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda \quad &: \quad \Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \times \big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M\big) \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M \\ &: \quad \big(\gamma \equiv [(s_{(\cdot)}, h_\cdot)], [(p,m)]\big) \longmapsto [(r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, s_{(i)} \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}(h_i \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}(p), m)] \equiv [\lambda]_{\gamma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\big([(p,m)]\big)\,, \end{aligned}$$

grupy $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ na $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$ zrekonstruowane w dowodzie Stw. 9-10-11.4, które bez trudu przepisujemy w terminach wprowadzonych w Def. 21-22.5 płaskich cięć unitalnych indukowanych przez $\tau_i$:

$$[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_{[(s_{(\cdot)}, h_\cdot)]}\big([s_{(i)}(x), m]\big) = [(s_{(i)}(x), \lambda_{h_i(x)}(m))]\,. \tag{8}$$

Rozumując analogicznie jak przy wyprowadzaniu relacji między $\alpha_i$ i $\alpha_j$ nad $\mathcal{O}_{ij}$, otrzymujemy tożsamość

$$\gamma_i^* \alpha_i(x,m) = \mathsf{T}_m \lambda_{h_i(x)} \circ \alpha_i(x,m)$$

lub – równoważnie –

$$\gamma_i^{\circledast} \alpha_i = \alpha_i\,. \tag{9}$$

Na tej podstawie wnioskujemy, że 1-forma wektorowa $\varpi$ jest $\Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$-*niezmiennicza*. Istotnie, formuła (8) daje nam – dla $\gamma \equiv [(s_{(\cdot)}, h_\cdot)] \in \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ jak wyżej –

$$\widetilde{\tau}_i \circ [\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_\gamma = \gamma_i \circ \widetilde{\tau}_i\,,$$

a nadto

$$\mathsf{T}_2[\lambda]_{\gamma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\big(\mathsf{V}_{[(p,m)]}\big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M\big)\big) = \mathsf{V}_{[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_\gamma([(p,m)])}\big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M\big)$$

(działanie $[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda$ zachowuje włókna). W świetle definicji (7), tożsamość (9) implikuje[2]

$$\widetilde{\tau}_i^{-1\circledast} [\Gamma[\widetilde{r}]]^{\lambda\circledast}_\gamma \varpi = \big([\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_\gamma \circ \widetilde{\tau}_i^{-1}\big)^{\circledast} \varpi = \big(\widetilde{\tau}_i^{-1} \circ \gamma_i\big)^{\circledast} \varpi = \gamma_i^{\circledast} \widetilde{\tau}_i^{-1\circledast} \varpi \equiv \gamma_i^{\circledast} \alpha_i = \alpha_i \equiv \widetilde{\tau}_i^{-1\circledast} \varpi\,,$$

a zatem – wobec odwracalności $\widetilde{\tau}_i$ –

$$\Gamma[\widetilde{r}]]^{\lambda\circledast}_\gamma \varpi = \varpi\,. \tag{10}$$

To pierwsza fundamentalna własność $\varpi$ godna odnotowania.

[2]Jest oczywiste, że $\circledast$ ma charakter *kontra*wariantny.

Druga wynika wprost z wypowiedzianej wcześniej identyfikacji składowej $\mathsf{T}_m M \longrightarrow \mathsf{T}_m M$ lokalnej prezentacji $\alpha_i$ obiektu $\varpi$ jako endomorfizmu identycznościowego. Jej następstwem jest tożsamość

$$\varpi\restriction_{\mathsf{V}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)} = \mathrm{id}_{\mathsf{V}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)}\,, \tag{11}$$

która pociąga za sobą idempotentny charakter $\varpi$,

$$\varpi\circ\varpi = \varpi\,,$$

a zatem pozwala nam myśleć o $\varpi$ jako o gładko indeksowanej przez $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M$ dystrybucji operatorów rzutowych (na podwiązkę pionową wzdłuż podwiązki poziomej $\mathrm{Ker}\,\varpi$) na wiązce stowarzyszonej.

Chwila zastanowienia prowadzi nas do wniosku, że powyższe dwie własności są, w istocie, *definiujące*[3] dla $\varpi$, co znajduje odzwierciedlenie w

**Definicja 5.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy. **Forma sprzężenia minimalnego** na $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M$ to dowolna $\Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$-niezmiennicza 1-forma wektorowa o wartościach w podwiązce pionowej $\mathsf{V}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)$ nad $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M$ o identycznościowym ograniczeniu do $\mathsf{V}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)$, tj. dowolne cięcie $\varpi\in\Gamma\big(\mathsf{T}^*(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)\otimes_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M,\mathbb{R}}\mathcal{J}_{\mathsf{V}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)}(\mathsf{V}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M))\big)$ o własnościach (11) i (10).

Na zakończenie obecnej dyskusji przerzucimy niespodziewany a wygodny pomost pomiędzy oboma wypracowanymi w tym wykładzie podejściami do powiązania na wiązce stowarzyszonej: pragmatycznym (różniczkowym) z Rozdz. 1 i abstrakcyjnym (geometrycznym) z rozdziału bieżącego. W tym celu przepiszemy prezentację lokalną pochodnej kowariantnej w cechowaniu $s_{(i)}$ przy użyciu $\varpi$ jako

$$\mathscr{D}^{s_{(i)}}_{\mathcal{X}} f_i(x) = \big(\mathsf{T}_x f_i + \varpi_i\big(x,f_i(x)\big)\big)\big(\mathcal{X}(x)\big)\equiv\mathcal{X}\lrcorner\,(\mathrm{id}_B,f_i)^*\alpha_i(x)\,,$$

czyli po prostu (co przyjemne) jako

$$\mathscr{D}^{s_{(i)}}_{\mathcal{X}}\big(\mathrm{pr}_2\circ\phi_i\big) = \mathcal{X}\lrcorner\,\phi_i^*\alpha_i\,,\qquad\qquad \phi_i\equiv\widetilde{\tau}_i\circ\phi\,. \tag{12}$$

Należy podkreślić, że operator cofnięcia po prawej stronie powyższej formuły występuje w wariancie standardowym, a *nie* rozwłóknionym nad bazą – to odróżnia w sposób istotny geometryczny transport 1-formy wektorowej rozpatrywany poprzednio od kowariantnego różniczkowania cięcia. To rzekłszy, możemy następnie przepisać powyższe wyrażenie w równie zwartej postaci przy użyciu obiektu globalnego:

$$\mathscr{D}^{s_{(i)}}_{\mathcal{X}}\underline{\phi}_i = \mathcal{X}\lrcorner\,\phi_i^*\widetilde{\tau}_i^{-1\circledast}\varpi\equiv\mathcal{D}^{\varpi}_{\mathcal{X}}\underline{\phi}_i\,,\qquad\qquad \underline{\phi}_i\equiv t_i\circ\phi\equiv f_i\,. \tag{13}$$

Jego kowariantność jawi się teraz jako prosta konsekwencja $\Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$-niezmienniczości formy sprzężenia minimalnego,

$$\mathcal{D}^{\varpi}{}^{\gamma}\underline{\phi}_i\equiv\big(\gamma_i\circ\phi_i\big)^*\widetilde{\tau}_i^{-1\circledast}\varpi\equiv\mathsf{T}_2\lambda_{h_i}\circ\phi_i^*\gamma_i^{\circledast}\widetilde{\tau}_i^{-1\circledast}\varpi=\mathsf{T}_2\lambda_{h_i}\circ\phi_i^*\big(\widetilde{\tau}_i^{-1}\circ\gamma_i\big)^{\circledast}\varpi$$

$$=\quad\mathsf{T}_2\lambda_{h_i}\circ\phi_i^*\big([\Gamma[\widetilde{r}]]^{\lambda}_{\gamma}\circ\widetilde{\tau}_i^{-1}\big)^{\circledast}\varpi=\mathsf{T}_2\lambda_{h_i}\circ\phi_i^*\widetilde{\tau}_i^{-1\circledast}[\Gamma[\widetilde{r}]]^{\lambda\circledast}_{\gamma}\varpi=\mathsf{T}_2\lambda_{h_i}\circ\phi_i^*\widetilde{\tau}_i^{-1\circledast}\varpi\equiv\mathsf{T}_2\lambda_{h_i}\circ\mathcal{D}^{\varpi}_{\mathcal{X}}\underline{\phi}_i\,.$$

Na koniec zauważmy, że wyrażenie (13) daje się przepisać w zwartej formie

$$\mathcal{D}^{\varpi}_{\mathcal{X}}\big(t_i\circ\phi\big)=\big(\mathsf{T}t_i\circ\phi^*\varpi\big)(\mathcal{X})\,,$$

z której destylujemy

**Definicja 6.** Przyjmijmy notację Def. 5. **Pochodna kowariantna** pola $\phi\in\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)$ **względem formy sprzężenia minimalnego** $\varpi\in\Gamma\big(\mathsf{T}^*(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)\otimes_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M,\mathbb{R}}\mathsf{V}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)\big)$ to cięcie (globalne)

$$\phi^*\varpi\in\Gamma\big(\mathsf{T}^*B\otimes_{B,\mathbb{R}}\phi^*\mathsf{V}\big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M\big)\big)\,.$$

[3]Mamy przez to na myśli, że każda *taka* 1-forma wektorowa o wartościach w $\mathsf{V}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)$ na $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M$ ma prezentacje lokalne postaci (6). W rzeczy samej, jej identycznościowe ograniczenie do podwiązki pionowej przesądza o obecności pierwszego członu w takowej prezentacji, struktura zaś członu drugiego jest określona przez zachowanie tegoż kanonicznego członu pierwszego pod wpływem lokalnych (tj. zależnych od punktu w bazie $B$) automorfizmów włókna o działaniu modelowanym na $\lambda$, które w miejscu potencjałów lokalnych $\mathrm{A}_i$ stawiają obiekty $\Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$-afinicznie tensorowe, czyli potencjały lokalne pewnego powiązania głównego (patrz: Tw. 21-22.3).

Definicja ta jest doskonałym zwieńczeniem dyskusji otwartej przez strukturalny postulat (19-20.1).

## Literatura

[RS09] I. Runkel and R. R. Suszek, *“Gerbe-holonomy for surfaces with defect networks”*, Adv. Theor. Math. Phys. **13** (2009), 1137–1219.