POWIĄZANIE SPINOROWE

(METODY BEZ CYRYLA)

2022/23

<u>MAMY:</u> $\left(\mathbb{V}, \overset{2^{\mathbb{R}}}{g}, O\right)$, np. $(TM, g) \longrightarrow (M, O)$

$\operatorname{sign}(g) = (p,q)$ $\quad sw_1(\mathbb{V}) = 0$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R}) \longrightarrow\!\!\!\!\to SO(p,q;\mathbb{R})$$

$$\mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R}) \circlearrowright F_{\mathrm{Spin}}\mathbb{V} \xrightarrow{\ \Xi\ } F_{SO}\mathbb{V} \circlearrowleft SO(p,q;\mathbb{R}), \quad \text{np. } F_{\mathrm{Spin}}TM \longrightarrow\!\!\!\!\to F_{SO}TM$$

$sw_2(\mathbb{V}) = 0$

$$\Downarrow$$

$$F_{\mathrm{Spin}}\mathbb{V} \times_{\sigma} S \cong \mathcal{S}(\mathbb{V}, g) \quad \& \quad F_{SO}\mathbb{V} \times_{\text{Cliff-rep def}} Cl(\mathbb{R}^{p,q}) \cong Cl(\mathbb{V}, g)$$

CHCEMY: POCHODNE KOWARIANTNE NA

WYINDUKOWANE via $F_{SO}\mathbb{V}$ $\Big\{$ $\to \mathcal{C}\ell(\mathbb{V},g) : \nabla^{\mathcal{C}\ell}$

Z POWIĄZANIA NA $\mathbb{V}$ $\uparrow$ $\to \mathcal{S}(\mathbb{V},g) : \nabla^{\mathcal{S}}$

„UZGODNIONEGO" Z g $\quad F_{Spin}\mathbb{V}$

„UZGODNIONE" Z $\Gamma(\mathcal{C}\ell(\mathbb{V},g)) \circlearrowright \mathcal{S}(\mathbb{V},g)$

!

I POMOCNICZO: NAJPIERW MUSIMY ZROZUMIEĆ SPECYFIKĘ RÓŻNICZKOWANIA KOWARIANTNEGO NA WIĄZCE WEKTOROWEJ

(CELEM UZGODNIENIA Z g) $\quad$ (BO TAKĄ JEST $\mathbb{V}$)...

MAMY CAŁKOWICIE NATURALNA

3

$TW = VW \oplus_{W,\mathbb{R}} HW$

Def.: POWIĄZANIE EHRESMANNA NA $(W, B, \mathbb{K}^{\times r}, \pi_W)$ $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

NAZYWAMY ZGODNYM ZE STRUKTURĄ $\mathbb{K}$-LINIOWĄ (LUB PO PROSTU $\mathbb{K}$-LINIOWYM), GDY

$$\forall_{\substack{\lambda \in \mathbb{K}^\times \\ v \in W}} : T_v \mathbb{L}_\lambda (H_v W) = H_{\mathbb{L}_\lambda(v)} W .$$

TO JEDNAK NIE JEST DEFINICJA NAJWYGODNIEJSZA, GDY PRZYCHODZI DO UZGADNIANIA POWIĄZANIA ZE STRUKTURĄ METRYCZNĄ ...

W ANALOGII DO WIĄZEK GŁÓWNYCH MOŻEMY WYKORZYSTAĆ

$$\mathrm{Vert}_v : \mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)} \xrightarrow[C^\infty]{\cong} V_v\mathbb{V} : w \longmapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(v + \mathbb{L}_t(w)\right),$$

ABY WYSŁOWIĆ

Def.: FORMA POWIĄZANIA $\mathbb{K}$-LINIOWEGO NA $\mathbb{V}$

EPIMORFIZM WIĄZEK WEKTOROWYCH NAD $\mathbb{R}$ $\quad (\mathcal{A}, \pi_{\mathbb{V}}) : T\mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$

O WŁASNOŚCIACH: (FPV1) $\forall v \in \mathbb{V} : \mathcal{A} \circ \mathrm{Vert}_v = \mathrm{id}_{\mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}}$

(FPV2) $\forall \lambda \in \mathbb{K} : \mathcal{A} \circ T\mathbb{L}_\lambda = \mathbb{L}_\lambda \circ \mathcal{A}$

BEZ TRUDU DOWODZIMY <u>Stw.</u> FORMA POWIĄZANIA $\mathbb{K}$-LINIOWEGO INDUKUJE $\mathbb{K}$-LINIOWE POWIĄZANIE E.

OD FORMY POWIĄZANIA K-LINIOWEGO JUŻ TYLKO KROK DO 5

Def.: POCHODNA KOSZULA (ALBO POWIĄZANIE KOSZULA) NA $\mathbb{V}$ TO ODWZOROWANIE

$$\nabla^K : \Gamma(\mathbb{V}) \xrightarrow[\mathbb{R}\text{-lin}]{} \Gamma(T^*B \otimes_{B,\mathbb{R}} \mathbb{V})$$

SPEŁNIAJĄCE REGUŁĘ LEIBNIZA:

$$\forall f \in C^\infty(B,\mathbb{R}),\ v \in \Gamma(\mathbb{V}) : \nabla^K\left(\mathbb{L}_{f(\cdot)} v(\cdot)\right) = df \otimes v + \mathbb{L}_{f(\cdot)}(\nabla^K_v) \quad \text{(RL)}$$

ŁATWO SPRAWDZAMY, ŻE

TW. NA DOWOLNEJ WIĄZCE WEKTOROWEJ ISTNIEJE ∇^K.

CO ISTOTNE, MAMY TAKŻE ⑥

STW. FORMA POWIĄZANIA $\mathbb{K}$-LINIOWEGO KANONICZNIE INDUKUJE POWIĄZANIE KOSZULA.

D: NA PODSTAWIE INTUICJI WYWIEDZIONEJ Z (21-22.11) POSTULUJEMY:

$$\nabla^{\mathbb{K}}{}_{v} := \mathcal{A} \circ Tv \quad (\overset{!!!}{=} v^{*}\mathcal{A})$$

I SPRAWDZAMY – DLA $\dot{\gamma}(0) \in T_x B$ NA $\gamma \in C^{\infty}(]-\varepsilon, \varepsilon[, B)$ –

$$\nabla^{\mathbb{K}}_{\dot{\gamma}}(\mathbb{L}_f(v))(x) \overset{(\text{DOW.!})}{\equiv} \mathcal{A} \circ T\Big(\mathbb{L}_{f(\cdot)}(v(\cdot))\Big)(\dot{\gamma}(0))$$

$$= \mathcal{A}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathbb{L}_{f\circ\gamma(\cdot)}(v\circ\gamma(\cdot))\right)$$

7

$$= \mathcal{A}\Big(T_{v(x)} \mathbb{L}_{f(x)} \circ T_x v(\dot{\gamma}(0))$$

$$+ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathbb{L}_{f(x)+t \triangleright T_x f(\dot{\gamma}(0))}(v(x)) \Big)$$

$$= \mathcal{A}\Big(T_{v(x)} \mathbb{L}_{f(x)} \circ T_x v(\dot{\gamma}(0))$$

$$+ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \big(\mathbb{L}_{f(x)}(v(x)) + \mathbb{L}_t \circ \mathbb{L}_{T_x f(\dot{\gamma}(0))}(v(x)) \big) \Big)$$

$$= \mathbb{L}_{f(x)} \circ \mathcal{A} \circ T_x v(\dot{\gamma}(0)) + \mathcal{A} \circ \mathrm{Vert}_{\mathbb{L}_{f(x)}(v(x))}\big(\mathbb{L}_{T_x f(\dot{\gamma}(0))}(v(x)) \big)$$

$$= \mathbb{L}_{f(x)}\big(\nabla_{\dot{\gamma}} v(x) \big) + \mathbb{L}_{\dot{\gamma}(0) \lrcorner df(x)}(v(x)) ,$$

CO JEST WYNIKIEM POŻĄDANYM! II

LOKALNIE PEŁNĄ INFORMACJĘ O POWIĄZANIU KOSZULA KODUJĄ

Def.: NIECHAJ $\{ e^{(i)}_a : \mathcal{O}_i \longrightarrow \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \ , \ a \in \overline{1,r} \}$ BĘDĄ CIĘCIAMI BAZOWYMI, O KTÓRYCH MOWA W TW. 2-3-4.3, I NIECH $(x^\mu) : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{R}^{\times \dim B}$ BĘDZIE LOKALNYM UKŁADEM WSPÓŁRZĘDNYCH NA $\mathcal{O}_i$: WSPÓŁCZYNNIKI CHRISTOFFELA POWIĄZANIA KOSZULA NA $\mathbb{V}$ STOWARZYSZONE Z BAZAMI: $\{ e^{(i)}_a \}$ W $\Gamma(\mathbb{V} \restriction \mathcal{O}_i)$ I $\{ \partial_\mu \}$ W $\Gamma(TB \restriction \mathcal{O}_i)$ TO RODZINA ODWZOROWAŃ GŁADKICH $\{ \Gamma^{(i)}_{\mu a b} : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{K} \}$ WYZNACZONYCH

PRZEZ RELACJE: $\mathbb{L}_{\Gamma^{(i)}_{\mu ab}(y)}\left(e^{(i)}_b(y)\right) := \nabla^K_{\partial_\mu} e^{(i)}_a(y),\ y \in \mathcal{O}_i$: (9)

W ODNIESIENIU DO KTÓRYCH ZAKŁADAMY **WSPÓŁZMIENNICZOŚĆ WZGLĘDEM AUTOMORFIZMÓW** $\mathbb{V}$ (W OBRAZIE LOKALNYM).

— x —

KORZYSTAJĄC Z (RL) i UŻYWAJĄC DUALNYCH CIĘĆ BAZOWYCH $\varphi^{(i)}_a \in \Gamma(\mathbb{V}^*|_{\mathcal{O}_i})$ BEZ TRUDU WYPROWADZAMY PRAWA ZSZYCIA NA $\mathcal{O}_{ij}$ i PRAWA TRANSFORMACYJNE WZGL. AUTOMORFIZMÓW $\mathbb{V}$ (NAD id_B) DLA $\{{}^{(i)}\Gamma_{\mu a}{}^b\}$: (W OBU PRZYPADKACH TRANSFORMACJE α SĄ IMPLEMENTOWANE PRZEZ AUTOMORFIZMY) WYKŁ. 19-20

→ DLA

$${}^h e^{(i)}_{a'} \equiv \chi \circ S_{(i)}(e_{a'}) = \tau_{h_i}(S_{(i)})(e_{a'}) \equiv S_{(i)} \circ h_i(e_{a'})$$

$$= S_{(i)}(h_{ia'b} \triangleright e_b) = \mathbb{L}_{h_{ia'b}}(S_{(i)}(e_b)) \equiv \mathbb{L}_{h_{ia'b}}(e^{(i)}_b)$$

$${}^{h}\Gamma^{(i)}_{\mu a'b'} = \partial_\mu h_{i a' c}\, h^{-1}_{i c b'} + h_{i a' b}\, \Gamma^{(i)}_{\mu bc}\, h^{-1}_{i c b'} \quad ; \qquad (10)$$

$$\longrightarrow \quad e^{(j)}_a = s^{(j)}(e_a) = r_{g_{ij}}(s^{(i)})(e_a) \equiv s^{(i)} \circ g_{ij}(e_a) = s^{(i)}(g_{ij\,ab} \triangleright e_b)$$

$$= \mathbb{L}_{g_{ij\,ab}}(s^{(i)}(e_b)) \equiv \mathbb{L}_{g_{ij\,ab}}(e^{(i)}_b) \quad :$$

$$\Gamma^{(j)}_{\mu ab} = \partial_\mu g_{ij\,ac}\, g^{-1}_{ij\,cb} + g_{ij\,ac}\, \Gamma^{(i)}_{\mu cd}\, g^{-1}_{ij\,db} \quad ,$$

KTÓRE W ZAPISIE MACIERZOWYM PRZYJMUJĄ ZWARTĄ POSTAĆ WYNIKAJĄCĄ Z BEZPOŚREDNIEGO RACHUNKU (np.):

$$\partial_\mu g_{ij\,ac}\, g^{-1}_{ij\,cb}\, \varphi^a \otimes e_b + g_{ij\,ac}\, \Gamma^{(i)}_{\mu cd}\, g^{-1}_{ij\,db}\, \varphi^a \otimes e_b$$

$$\equiv \partial_\mu g_{ij\,ac}\, g^{-1}_{ij\,db}\, \varphi^d(e_c)\, \varphi^a \otimes e_b + g_{ij\,ac}\, \Gamma^{(i)}_{\mu de}\, g^{-1}_{ij\,fb}\, \varphi^d(e_c)\, \varphi^f(e_e)\, \varphi^a \otimes e_b$$

$$\equiv (g^{-1}_{ij\,db}\, \varphi^d \otimes e_b) \circ (\partial_\mu g_{ij\,ac}\, \varphi^a \otimes e_c) + (g^{-1}_{ij\,fb}\, \varphi^f \otimes e_b) \circ (\Gamma^{(i)}_{\mu de}\, \varphi^d \otimes e_e) \circ (g_{ij\,ac}\, \varphi^a \otimes e_c) \,,$$

tj.

$$\begin{cases} {}^{h}\Gamma^{(i)} = h_i^{-1}\cdot dh_i + \mathrm{Ad}_{h_i^{-1}}\left(\Gamma^{(i)}\right) \\ \Gamma^{(j)} = g_{ij}^{-1}\cdot dg_{ij}^{-1} + \mathrm{Ad}_{g_{ij}^{-1}}\left(\Gamma^{(i)}\right) \end{cases}$$

, gdzie $\Gamma^{(i)} \equiv dx^\mu \otimes {}^{(i)}\Gamma^{(i)}_\mu \overset{L}{\equiv} \left(\langle \varphi^{(i)}_b \,,\, e^{(i)*}_a \mathcal{A}\rangle\right)$

1-FORMY CHRISTOFFELA

ZBIÓR CIĘĆ BAZOWYCH $\{e^{(i)}_a\}$ STANOWI – W ŚWIETLE TW. 2-3-4.3 – ANALOGON PŁASKIEGO CIĘCIA UNITALNEGO $s_{(i)}$ WIĄZKI GŁÓWNEJ Z Def. 21-22.5. ISTOTNIE, GENERUJE ON (LOKALNIE) PRZESTRZEŃ CIĘĆ $\Gamma(\mathbb{V})$. ROZUMUJĄC PRZETO JAK W KONSTRUKTYWNYM DOWODZIE TW. 2-3-4, DOWODZIMY

TW. ZBIÓR $\left(\{\Gamma^{(i)}\}_{i\in I}, \{g_{ij}\}_{(i,j)\in I^{\times 2}_{\emptyset}}\right)$ ZŁOŻONY Z 1-FORM CHRISTOFFELA I ODWZOROWAŃ PRZEJŚCIA STOWARZYSZONYCH Z POKRYCIEM $\{O_i\}_{i\in I}$ BAZY B OKREŚLA JEDNOZNACZNIE KLASĘ IZOMORFIZMU WIĄZKI WEKTOROWEJ

3 FORMĄ POWIĄZANIA $\mathbb{K}$-LINIOWEGO. (12)

D : PROSTE ĆWICZENIE ODTWÓRCZE.

— x —

WPROWADZENIE POCHODNEJ KOSZULA DO GRY POZWALA PROSTO SFORMUŁOWAĆ WARUNEK ZGODNOŚCI POWIĄZANIA ZE STRUKTURĄ METRYCZNĄ NA $\mathbb{V}$.

Def.: POWIĄZANIE $\mathbb{K}$-LINIOWE NA WIĄZCE WEKTOROWEJ $\mathbb{V}$ ZE STRUKTURĄ METRYCZNĄ g W ROZUMIENIU Def. 12-13-14.2 NAZYWAMY METRYCZNYM, ILEKROĆ INDUKOWANA PRZEZEŃ POCHODNA KOSZULA SPEŁNIA WARUNEK

$$\forall\, V_1, V_2 \in \Gamma(\mathbb{V}),\ \mathcal{X} \in \Gamma(T\mathbb{B}) :\quad \mathcal{X}\big(g(V_1, V_2)\big) = g\big(\nabla^{\mathcal{K}}_{\mathcal{X}} V_1, V_2\big) + g\big(V_1, \nabla^{\mathcal{K}}_{\mathcal{X}} V_2\big). \tag{PM}$$

NA WYKŁADACH 12-13-14 USTALILIŚMY WZAJEM JEDNOZNACZNĄ RELACJĘ (13)
STRUKTURAMI METRYCZNYMI NA $\mathbb{V}$ i REDUKCJAMI $F_{GL}\mathbb{V} \searrow F_0\mathbb{V}$.
WPROWADZONE POWYŻEJ POJĘCIE POZWALA PODNIEŚĆ TĘ RELACJĘ DO KATEGORII WIĄZEK WEKTOROWYCH Z POWIĄZANIEM.
ŻEBY OSIĄGNĄĆ TEN CEL, POTRZEBUJEMY WSZAKŻE UZYSKAĆ WGLĄD W STRUKTURĘ ALGEBRY LIEGO $\mathfrak{so}(p,q)$ GRUPY LIEGO $SO(p,q;\mathbb{R})$. ANTYCYPUJĄC DALSZE ROZWAŻANIA, USTALIMY PRZY TEJ OKAZJI RELACJĘ POMIĘDZY ALGEBRAMI LIEGO $\mathfrak{so}(p,q)$ i $\mathfrak{spin}(p,q)$.

NASZE STUDIUM ROZPOCZNIEMY OD USTALENIA NATURALNEJ BAZY ALGEBRY $\mathfrak{so}(p,q)$ NA PODSTAWIE ANALIZY WARUNKÓW

DEFINIUJĄCYCH GRUPĘ MACIERZOWĄ

$$SO(p,q;\mathbb{R}) = \{ M \in \mathbb{R}(p+q) \ | \ M \, \delta_{p,q} \, M^T = \delta_{p,q} \ \wedge \ \det_{(p+q)} M = 1 \},$$

w których zapisie $\delta_{p,q} \equiv \mathrm{diag}(\underbrace{+1,+1,\ldots,+1}_{p},\underbrace{-1,-1,\ldots,-1}_{q})$.

ROZWAŻMY $M_t \equiv \exp(t \triangleright X)$, $X \in \mathfrak{so}(p,q)$, $t \in \mathbb{R}$ i OBLICZMY:

(EKSPONENS MACIERZOWY!)

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t \triangleright X) \, \delta_{p,q} \, \exp(t \triangleright X^T) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \delta_{p,q} = 0$$

$\Downarrow$ $X \delta_{p,q} + \delta_{p,q} X^T$ ORAZ

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} 1 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det_{(p+q)} \exp(t \triangleright X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{\operatorname{tr}(t \triangleright X)}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{t \triangleright \operatorname{tr} X} = \operatorname{tr} X .$$

PIERWSZY Z TYCH WARUNKÓW PRZEPISUJEMY JAKO

$$X^T = -\delta_{p,q}^{-1} X \delta_{p,q} \equiv -\delta_{p,q} X \delta_{p,q} ,$$

CZYLI PO ROZPISANIU W BAZIE:

$$X_{ba} = X^T_{ab} = -\varepsilon_a \delta_{ac} X_{cd} \varepsilon_d \delta_{db}$$

$$= -\varepsilon_a X_{ab} \varepsilon_b ,$$ SKĄD AUTOMATYCZNIE

$$\operatorname{tr} X = \sum_a X_{aa} = -\sum_a \varepsilon_a X_{aa} \varepsilon_a = -\sum_a X_{aa} = 0 .$$

NA TEJ PODSTAWIE ZAPISUJEMY (DLA $\delta_E^{(p,q)}(e_a, e_b) = \varepsilon_a \delta_{ab}$) 16

$e_a^*(e_b) = \delta_{ab}$

$$so(p,q) \ni X \equiv \sum_{a,b} X_{ab}\, e_a^* \otimes e_b$$

$$= \sum_{a<b} X_{ab}\, e_a^* \otimes e_b + \sum_{a<b} X_{ba}\, e_b^* \otimes e_a$$

$$= \sum_{a<b} X_{ab}\, e_a^* \otimes e_b - \sum_{a<b} \varepsilon_a X_{ab} \varepsilon_b\, e_b^* \otimes e_a$$

$$\equiv \sum_{a<b} \varepsilon_a X_{ab} \left(\varepsilon_a e_a^* \otimes e_b - \varepsilon_b e_b^* \otimes e_a \right)$$

CO PROWADZI DO WNIOSKU

$$so(p,q) = \bigoplus_{a<b=1}^{r} \langle \varepsilon_a e_a^* \otimes e_b - \varepsilon_b e_b^* \otimes e_a \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\equiv \bigoplus_{a<b=1}^{r} \left\langle \delta_E^{(p,q)}(e_a,\cdot)\otimes e_b - \delta_E^{(p,q)}(e_b,\cdot)\otimes e_a \equiv e_a \wedge e_b \right\rangle_{\mathbb{R}} .$$ 17

CELEM ODCIĄŻENIA NOTACJI BĘDZIEMY ODTĄD PISAĆ

$$\delta_E^{(p,q)}(\cdot,\cdot) \equiv (\cdot|\cdot) .$$

W NASTĘPNEJ KOLEJNOŚCI WYZNACZAMY STYCZNOŚCIOWĄ ALGEBRĘ LIEGO GRUPY LIEGO $\mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R}) \subset Cl_{p,q}^{\mathbb{R}}$.

ROZWAŻMY NAJPIERW – DLA $1 \leq \underline{a} < \underline{b} \leq p$ Z $\varepsilon_{\underline{a}} = +1 = \varepsilon_{\underline{b}}$ – ŚCIEŻKI

$$u^{\pm}_{\underline{a}\,\underline{b}} : \left]-\varepsilon,\varepsilon\right[\longrightarrow g_{\mathbb{R}^{p+q}}(\mathbb{R}^{p+q}), \quad \varepsilon>0$$

$$: t \longmapsto \cos t \triangleright e_{\underline{a}} \pm \sin t \triangleright e_{\underline{b}}$$

O WŁASNOŚCI $u^{\pm}_{\underline{a}\,\underline{b}}(t)^2 = (\cos^2 t\, \varepsilon_{\underline{a}} + \sin^2 t\, \varepsilon_{\underline{b}}) \triangleright e^c = e^c$,

KTÓRA WARUNKUJE

$$\gamma_{\underline{a}\underline{b}} : \,]-\varepsilon,\varepsilon[\, \longrightarrow \mathrm{Spin}(p,q) : t \longmapsto u^{+}_{\underline{a}\underline{b}}(t)\cdot u^{-}_{\underline{a}\underline{b}}(t)$$
$$= \cos 2t \rhd e^{c} - \sin 2t \rhd e_{\underline{a}}\, e_{\underline{b}}.$$

ŚCIEŻKA TA PRZECHODZI PRZEZ $\gamma_{\underline{a}\underline{b}}(0) = e^{c}$, ZATEM

$$\mathrm{spin}(p,q) \ni \dot{\gamma}_{\underline{a}\underline{b}}(0) = -2 e_{\underline{a}}\, e_{\underline{b}}.$$

NASTĘPNIE – DLA $p+1 \leq \bar{a} < \bar{b} \leq p+q$ Z $\varepsilon_{\bar{a}} = -1 = \varepsilon_{\bar{b}}$ – TWORZYMY ŚCIEŻKI

$$v^{\pm}_{\bar{a}\bar{b}} : \,]-\varepsilon,\varepsilon[\, \longrightarrow J_{\mathbb{R}^{p+q}}(\mathbb{R}^{p+q}) : t \longmapsto \pm \cos t \rhd e_{\bar{a}} + \sin t \rhd e_{\bar{b}}$$

O WŁASNOŚCI $v^{\pm}_{\bar{a}\bar{b}}(t)^{2} = (\cos^{2} t\, \varepsilon_{\bar{a}} + \sin^{2} t\, \varepsilon_{\bar{b}}) \rhd e^{c} = -e^{c}$,

KTÓRA IMPLIKUJE

$$\gamma_{\bar a \bar b} :]-\varepsilon,\varepsilon[\longrightarrow \mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R}) : t \longmapsto v^{+}_{\bar a \bar b}(t)\cdot v^{-}_{\bar a \bar b}(t) \qquad (19)$$

$$= \cos 2t \triangleright e^{c} + \sin 2t \triangleright e_{\bar a} e_{\bar b}.$$

ŚCIEŻKA PRZECHODZI PRZEZ $\gamma_{\bar a \bar b}(0) = e^{c}$, STĄD

$$\mathrm{spin}(p,q) \ni \dot\gamma_{\bar a \bar b}(0) = 2 e_{\bar a} e_{\bar b}.$$

WRESZCIE – DLA $\underline{a} \in \overline{1,p}$ i $\bar b \in \overline{p+1,p+q}$ z $\varepsilon_{\underline a} = +1 = -\varepsilon_{\bar b}$ – DEFINIUJEMY ŚCIEŻKI

$$w^{\pm}_{\underline a \bar b} :]-\varepsilon,\varepsilon[\longrightarrow \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{p+q}}(\mathbb{R}^{p+q}) : t \mapsto \frac{1}{\cos t} \triangleright \left(e_{\underline a} \pm \sin t \triangleright e_{\bar b}\right)$$

O WŁASNOŚCI $\quad w^{\pm}_{\underline a \bar b}(t)^2 = \dfrac{1}{\cos^2 t}\left(\varepsilon_{\underline a} + \sin^2 t\, \varepsilon_{\bar b}\right) \triangleright e^{c} = e^{c}$

PRZESĄDZAJĄCEJ O

$$\gamma_{\underline{a}\bar{b}} : \left]-\varepsilon,\varepsilon\right[\longrightarrow \mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R}) : t \longmapsto w^{+}_{\underline{a}\bar{b}}(t)\cdot w^{-}_{\underline{a}\bar{b}}(t)$$

$$= \frac{2-\cos^2 t}{\cos^2 t} \triangleright e^{c} - \frac{2\sin t}{\cos^2 t} \triangleright e_{\underline{a}} e_{\bar{b}}$$

ŚCIEŻKA PRZECHODZI PRZEZ $\gamma_{\underline{a}\bar{b}}(0) = e^{c}$, PRZETO

$$\mathfrak{spin}(p,q) \ni \dot{\gamma}_{\underline{a}\bar{b}}(0) = -2\, e_{\underline{a}} e_{\bar{b}} .$$

OSTATECZNIE WIĘC $\forall\, a<b \in \overline{1,p+q} : e_{ab} \equiv e_a e_b \in \mathfrak{spin}(p,q)$,

ALE TEŻ $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{spin}(p,q) \equiv \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{so}(p,q) = \dfrac{(p+q)(p+q-1)}{2}$,

(POKRYCIE $\mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R}) \twoheadrightarrow SO(p,q;\mathbb{R})$
JEST DYSKRETNE)

WIĘC

$$\mathfrak{spin}(p,q) = \bigoplus_{a<b=1}^{p+q} \langle e_{ab} \rangle_{\mathbb{R}} .$$

NA ZAKOŃCZENIE OBECNEJ CZĘŚCI NASZEJ DYSKUSJI

WYZNACZAMY W JAWNEJ POSTACI IZOMORFIZM

$$
\begin{array}{ccc}
\mathfrak{spin}(p,q) & \xrightarrow[\cong]{T_e\xi} & \mathfrak{so}(p,q) \\
\Big\uparrow \exp^{\mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R})} & & \Big\uparrow \exp \\
\mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R}) & \xrightarrow[\xi \,\equiv\, \mathrm{Ad}\restriction_{\mathrm{Im}\, j_{\mathbb{R}^{p,q}}}]{} & \mathrm{SO}(p,q;\mathbb{R})
\end{array}
$$

ROZWAŻMY NAJPIERW ŚCIEŻKI

$$\tilde{\gamma}_{\underline{a}\underline{b}} : \,]-\varepsilon,\varepsilon[\, \longrightarrow \mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R}) : t \longmapsto u^{-}_{\underline{a}\underline{b}}(t) \cdot e_{\underline{a}}$$

PRZEZ $\tilde{\gamma}_{\underline{a}\underline{b}}(0) = \varepsilon_{\underline{a}} \cdot e^c = e^c$, O WEKTORZE STYCZNYM

$$\dot{\tilde{\gamma}}_{\underline{a}\underline{b}}(0) = -e_{\underline{b}}\, e_{\underline{a}} = e_{\underline{a}\underline{b}} .$$

LICZYMY – DLA $c \in \overline{1, p+q}$ –

$$T_e\xi(e_{\underline{a}\underline{b}})(e_c) \equiv \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \xi\big(\tilde{\gamma}_{\underline{a}\underline{b}}(t)\big)(e_c)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tilde{\gamma}_{\underline{a}\underline{b}}(t)\cdot e_c \cdot \tilde{\gamma}_{\underline{a}\underline{b}}(t)^{-1}$$

$$\equiv \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} u^{-}_{\underline{a}\underline{b}}(t)\cdot e_{\underline{a}} \cdot e_c \cdot e_{\underline{a}} \cdot u^{-}_{\underline{a}\underline{b}}(t)$$

$$= -e_{\underline{b}}\, e_{\underline{a}}\, e_c\, e_{\underline{a}}\, e_{\underline{a}} + e_{\underline{a}}\, e_{\underline{a}}\, e_c\, e_{\underline{a}}\,(-e_{\underline{b}})$$

$$= [e_{\underline{a}\underline{b}}, e_c] = \begin{cases} 0, & \text{GDY } c \notin \{\underline{a}, \underline{b}\} \\ -2e_{\underline{b}}, & \text{GDY } c = \underline{a} \\ 2e_{\underline{a}}, & \text{GDY } c = \underline{b} \end{cases},$$

$$\equiv \mathrm{ad}_{\underline{a}\underline{b}}(e_c)$$

SKĄD WNIOSEK $T_e\xi(e_{\underline{a}\underline{b}}) \equiv -2e_{\underline{a}} \wedge e_{\underline{b}}$.

ANALOGICZNIE ROZPATRUJEMY ŚCIEŻKI

$$\tilde{\gamma}_{\bar{a}\bar{b}} : \,]-\varepsilon,\varepsilon[\, \longrightarrow \mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R}) : t \longmapsto -v^{+}_{\bar{a}\bar{b}}(t)\cdot e_{\bar{a}}$$

PRZEZ $\tilde{\gamma}_{\bar{a}\bar{b}}(0) = -\varepsilon_{\bar{\varepsilon}} \triangleright e^{c} = e^{c}$, O WEKTORZE STYCZNYM $\dot{\tilde{\gamma}}_{\bar{a}\bar{b}}(0) = e_{\bar{a}\bar{b}}$. OTRZYMUJEMY WYNIK

$$T_e\xi\,(e_{\bar{a}\bar{b}})(e_c) = [e_{\bar{a}\bar{b}}, e_c] = \begin{cases} 0, & \text{GDY } c \notin \{\bar{a},\bar{b}\} \\ 2e_{\bar{b}}, & \text{GDY } c = \bar{a} \\ -2e_{\bar{a}}, & \text{GDY } c = \bar{b} \end{cases},$$

KTÓRY POZWALA ZAPISAĆ $T_e\xi\,(e_{\bar{a}\bar{b}}) \equiv -2e_{\bar{a}}\wedge e_{\bar{b}}$.

WRESZCIE TEŻ DLA ŚCIEŻEK

$$\tilde{\gamma}_{\underline{a}\bar{b}} : \,]-\varepsilon,\varepsilon[\, \longrightarrow \mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R}) : t \longmapsto w^{-}_{\underline{a}\bar{b}}(t)\cdot e_{\underline{a}}$$

PRZEZ $\tilde{\gamma}_{\underline{a}\bar{b}}(0) = \varepsilon_{\underline{a}} \triangleright e^c = e^c$, O WEKTORZE STYCZNYM

$\dot{\tilde{\gamma}}_{\underline{a}\bar{b}}(0) = e_{\underline{a}\bar{b}}$, OTRZYMUJEMY WYNIK

$$T_e\xi(e_{\underline{a}\bar{b}})(e_c) = [e_{\underline{a}\bar{b}}, e_c] = \begin{cases} 0, & \text{gdy } c \notin \{\underline{a}, \bar{b}\} \\ -2e_{\bar{b}}, & \text{gdy } c = \underline{a} \\ -2e_{\underline{a}}, & \text{gdy } c = \bar{b} \end{cases},$$

A STĄD $T_e\xi(e_{\underline{a}\bar{b}}) = -2e_{\underline{a}} \wedge e_{\bar{b}}$.

OSTATECZNIE ZATEM $T_e\xi(e_{ab}) = -2e_a \wedge e_b$,

CZYLI TEŻ $(T_e\xi)^{-1}(v \wedge w) = -\frac{1}{4}[v, w]$.

ISTOTNIE,

$$(T_e\xi)^{-1}(e_a \wedge e_b) = -\tfrac{1}{2}\, e_{ab} \equiv -\tfrac{1}{4}\,[e_a, e_b], \qquad (25)$$

PRZETO $\quad (T_e\xi)^{-1}(v \wedge w) = v^a w^b \left(-\tfrac{1}{4}\,[e_a, e_b]\right) = -\tfrac{1}{4}\,[v, w].$

MOŻEMY JUŻ TERAZ WRÓCIĆ DO BADANIA RELACJI MIĘDZY POMIĘDZY POWIĄZANIAMI METRYCZNYMI NA $(\mathbb{V}, g)$ I FORMAMI POWIĄZANIA GŁÓWNEGO NA ODNOŚNYCH $F_{SO}\mathbb{V}$. CELEM WYPRACOWANIA NIEODZOWNYCH INTUICJI PRZYWOŁAJMY KONSTRUKCJĘ Z DOWODU Stw. 12-13-14.1 (POPROWADZONĄ W ODWOŁANIU DO DYSKUSJI Z Rozdz. 9-10-11.1), I POTRAKTUJMY LOKALNĄ BAZĘ PSEUDOORTONORMALNĄ $\{e^{(i)}_a\}$ $C^\infty(B, \mathbb{R})$-MODUŁU

$\Gamma(\mathbb{V})$ JAKO WYNIK EWALUACJI

$$\mathcal{E}_{(i)} := \left(e^{(i)}_a\right) \equiv S_{(i)}$$

(LOKALNEGO) PŁASKIEGO CIĘCIA UNITALNEGO

$$S_{(i)}(\cdot) = F\tau_i^{-1}(\cdot,1) \in \Gamma\left(F_{SO}\mathbb{V}\restriction_{\mathcal{O}_i}\right),$$

DLA STOWARZYSZONEJ Z $S_{(i)}$ TRYWIALIZACJI (WG STW. 5-6.3),

TJ. MAMY

$$e^{(i)}_a(\cdot) \equiv S_{(i)}(\cdot)(e_a) \equiv \mathcal{E}_{(i)}(\cdot)(e_a).$$
$$\equiv [\widehat{ev}]\left((S_{(i)}(\cdot),\cdot),e_a\right)$$

NIECHAJ $\omega \equiv \sum_{a<b} \omega^{ab} \otimes e_a \wedge e_b \in \Omega^1(F_{SO}\mathbb{V}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{so}(p,q)$ BĘDZIE FORMĄ POWIĄZANIA GŁÓWNEGO NA $F_{SO}\mathbb{V}$. W ŚWIETLE STW. 21-22.3 TA JEST W PEŁNI OKREŚLONA PRZEZ POTENCJAŁY LOKALNE

$$\omega_i := \varepsilon_{(i)}^* \omega \equiv \varepsilon_{(i)}^* \omega_{ab} \otimes e_e \wedge e_b =: \omega^{(i)}_{ab} \otimes e_a \wedge e_b ,$$ 27

$$\omega^{(i)}_{ab} = \omega^{(i)}_{[ab]}$$

KTÓRE MOŻEMY NASTĘPNIE OBLICZAĆ NA BAZIE $\{e_c\}$:

$$ev_{e_a} \circ \omega_i = \tfrac{1}{2}\,\omega^{(i)}_{bc} \otimes e_b \wedge e_c(e_a) = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_a \left(\omega^{(i)}_{ab} - \omega^{(i)}_{ba}\right) \otimes e_b = \varepsilon_a \omega^{(i)}_{ab} \otimes e_b$$

(PEŁEN ZAKRES b, c)

$$\underline{\llcorner}\; ev_{e_a} \circ \omega \circ T\varepsilon_{(i)} \equiv \omega \circ T\left(\varepsilon_{(i)}(\cdot)(e_a)\right)$$

$$= \omega \circ Te^{(i)}_a : TB \longrightarrow \mathbb{V} .$$

W OBECNOŚCI POWIĄZANIA KOSZULA NA $\mathbb{V}$ NATURALNIE JEST ZATEM ZAŁOŻYĆ

$$\omega \circ Te^{(i)}_a \equiv \nabla^K e^{(i)}_a ,$$

CO PROWADZI DO UTOŻSAMIENIA

$$\varepsilon_a \omega^{(i)}_{ab} = \langle \varphi^{(i)}_b , e^{(i)*}_a A \rangle \equiv \Gamma^{(i)}_{ab} .$$

WARUNKIEM JEGO SENSOWNOŚCI JEST TOŻSAMOŚĆ

$$\Gamma^{(i)}_{ba} = \varepsilon_b \omega^{(i)}_{ba} = - \varepsilon_b \omega^{(i)}_{ab} = - \varepsilon_a \Gamma^{(i)}_{ab} \varepsilon_b ,$$

KTÓRĄ PRZEPISUJEMY W SUGESTYWNEJ POSTACI

$$0 = \Gamma^{(i)}_{ab} \varepsilon_b + \Gamma^{(i)}_{ba} \varepsilon_a \equiv g\left(\nabla^k e^{(i)}_a , e^{(i)}_b \right) + g\left(e^{(i)}_a , \nabla^k e^{(i)}_b \right),$$

$(*)$

POR.: Def. 35 STR. 11 .

NASZ POSTULAT ⊛ JEST DODATKOWO PODBUDOWANY OBSERWACJĄ:

POWIĄZANIE ω INDUKUJE NA $F_{SO}\mathbb{V}\times_{\rho_{\det}}\mathbb{R}^{\times p+q}\simeq\mathbb{V}$ (ROZDZ. 9-10-11.1) POCHODNĄ KOWARIANTNĄ, KTÓRA W OBRAZIE LOKALNEJ TRYWIALIZACJI $F\tau_i$ OBLICZA SIĘ NA ODNOŚNEJ BAZIE $e_a^{(i)}$ PRZESTRZENI CIĘĆ WEDLE FORMUŁY (23.3) (POR. TAKŻE: (23.5))

$$D^{s(i)} e_a = T e_a - \mathcal{K}^{(\rho_{\det})}\circ\omega_i(e_a) = -\mathcal{K}^{(\rho_{\det})}\circ\omega_i(e_a)$$

$$= -\frac{1}{2}\,\omega^{(i)}_{bc}\otimes\mathcal{K}^{(\rho_{\det})}_{e_b\wedge e_c}(e_a) \equiv -\frac{1}{2}\,\omega^{(i)}_{bc}\otimes\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp(-t\triangleright e_a\wedge e_b)(e_a)$$

$$= \frac{1}{2}\,\omega^{(i)}_{bc}\otimes e_a\wedge e_b(e_a) = \varepsilon_a\,\omega^{(i)}_{ab}\otimes e_b \quad \dots$$

ROZUMOWANIE POWYŻSZE PROWADZI DO

<u>Tw.</u> ISTNIEJE WZAJEM JEDNOZNACZNA ODPOWIEDNIOŚĆ POMIĘDZY POWIĄZANIAMI METRYCZNYMI NA $(\mathbb{V}, g)$ A FORMAMI POWIĄZANIA GŁÓWNEGO NA $F_{SO}\mathbb{V}$.

<u>D</u>: W ŚWIETLE WCZEŚNIEJSZYCH USTALEŃ W OBECNOŚCI FORMY POWIĄZANIA GŁÓWNEGO ω NA $F_{SO}\mathbb{V}$ O POTENCJAŁACH LOKALNYCH ω_i JAK NA STR. 26 MOŻEMY ZADAĆ POCHODNĄ KOSZULA NA (LOKALNEJ) BAZIE

$$\nabla^{K} e_a^{(i)} := \varepsilon_a \, \omega_{ab}^{(i)} \otimes e_b^{(i)} ,$$

A NASTĘPNIE ROZSZERZYĆ DO $\Gamma(\mathbb{V})$ POPRZEZ (RL).

NA GRUNCIE TW. O REKONSTRUKCJI ZE STR. 9-11 WYSTARCZY OBECNIE POKAZAĆ, ŻE ZAPOSTULOWANE TU 1-FORMY CHRISTOFFELA PODLEGAJĄ STOSOWNYM PRZEKSZTAŁCENIOM WZGLĘDEM AUTOMORFIZMÓW $\mathbb{V}$ (W OBRAZIE LOKALNYM), PATRZ: STR. 11. W TYM CELU PRZEPISUJEMY

POR.: STR. 21-22.4

$$\Gamma^{(i)} \equiv \Gamma^{(i)}_{ab} \otimes \left(e^*_a \otimes e_b\right) \equiv \varepsilon_a \omega^{(i)}_{ab} \otimes \left(e^*_a \otimes e^b\right)$$

$$\equiv \omega^{(i)}_{ab} \otimes \left(\left(e_a | \cdot\right) \otimes e_b\right) = \frac{1}{2}\, \omega^{(i)}_{ab} \otimes e_a \wedge e_b \equiv \omega_i \,,$$

(PEŁNY ZAKRES a, b!)

WYKORZYSTUJĄC PO DRODZE SKOŚNĄ SYMETRIĘ $\omega^{(i)}_{ab}$. REGUŁY TRANSFORMACYJNE DLA $\Gamma^{(i)}$ WYNIKAJĄ WPROST ZE STRUKTURALNIE IDENTYCZNYCH REGUŁ TRANSFORMACYJNYCH DLA POTENCJAŁÓW LOKALNYCH ω_i.

METRYCZNOŚĆ TAK ZADANEGO POWIĄZANIA NA $\mathbb{V}$ ZOSTAŁA (32) WYKAZANA NA STR. (28).

I ODWROTNIE, REGUŁY TRANSFORMACYJNE DLA $\Gamma^{(i)}$ ZE STR. (11) W POŁĄCZENIU Z TOŻSAMOŚCIĄ ⊛ ZE STR. (28) CZYNIĄ Z $\omega_i := \varepsilon_a \Gamma^{(i)}_{ab} \otimes e_a \wedge e_b$ POTENCJAŁ LOKALNY POWIĄZANIA GŁÓWNEGO NA $F_{SO}\mathbb{V}$, WIĘC TEZA WYNIKA Z TW. 21-22.3. □

W SZCZEGÓLNYM PRZYPADKU $\mathbb{V} = TM$, W KTÓRYM POLA WEKTOROWE NA BAZIE $\mathbb{V}$ TO $\Gamma(TM) \equiv \Gamma(\mathbb{V})$, WPROWADZAMY

DEF.: POWIĄZANIE NA WIĄZCE STYCZNEJ TM NAD ROZMAITOŚCIĄ GŁADKĄ M OKREŚLAMY MIANEM **BEZTORSYJNEGO**, ILEKROĆ **TENSOR TORSJI**

$$T : \Gamma(TM)^{\times 2} \to \Gamma(TM)$$

$$: (X, Y) \longmapsto \nabla^K_X Y - \nabla^K_Y X - [X, Y]_{\Gamma(TM)}$$

DLA ODNOŚNEJ POCHODNEJ KOSZULA ∇^K ZNIKA.

O WYJĄTKOWOŚCI POWYŻSZEJ CECHY PRZEKONUJE NAS...

WARIANT NA POTRZEBY WYKŁADU!

TW. [PODSTAWOWE GEOMETRII RIEMANNOWSKIEJ]

$\forall (M,g)$ ROZMAITOŚĆ METRYCZNA : $SW_1(M) = 0 \Rightarrow \exists\, \nabla^K / \Gamma(TM)$ METRYCZNA

JEŚLI TO POWIĄZANIE JEST BEZTORSYJNE, TO JEST ONO DANE JEDNOZNACZNIE.

D: W ŚWIETLE STW. 12-13-14.1 i TW. 12-13-14.4 (ORAZ WNIOSKÓW 12-13-14.1) ISTNIENIE NA TM STRUKTURY METRYCZNEJ i ZNIKANIE ODNOŚNEJ 1. KLASY STIEFFELA-WHITNEYA IMPLIKUJE REDUKCJĘ

$$F_{GL}TM \searrow F_{O(\mathrm{sygn}\, g)}TM \searrow F_{SO(\mathrm{sygn}\, g)}TM.$$

FORMA POWIĄZANIA GŁÓWNEGO NA TEJ OSTATNIEJ WIĄZCE, (35)
KTÓREJ ISTNIENIE GWARANTUJE TW. 21-22.2 INDUKUJE NA TM
POWIĄZANIE METRYCZNE NA MOCY TW. ZE STR. (30).
POZOSTAJE PRZEKONAĆ SIĘ, ŻE NARZUCENIE WARUNKU
BEZTORSYJNOŚCI UJEDNOZNACZNIA JEGO WYBÓR.

METRYCZNOŚĆ ∇^K POZWALA NAM ZAPISAĆ – DLA DOWOLNYCH $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ –

$$\begin{cases} X \lrcorner\, dg(Y,Z) = g(\nabla^K_X Y, Z) + g(Y, \nabla^K_X Z) \\ Y \lrcorner\, dg(Z,X) = g(\nabla^K_Y Z, X) + g(Z, \nabla^K_Y X) = g(\nabla^K_Y Z, X) + g(Z, \nabla^K_X Y) + g(Z, [X,Y]) \\ Z \lrcorner\, dg(X,Y) = g(\nabla^K_Z X, Y) + g(X, \nabla^K_Z Y) \end{cases}$$

BEZTORSYJNOŚĆ!!

NA TEJ PODSTAWIE OBLICZAMY TOŻSAMOŚĆ (KOSZULA)

$$X \lrcorner dg(Y,Z) + Y \lrcorner dg(Z,X) - Z \lrcorner dg(X,Y)$$

$$= 2g(\nabla^K_X Y, Z) + g(Y, \nabla^K_X Z - \nabla^K_Z X) + g(X, \nabla^K_Y Z - \nabla^K_Z Y) + g(Z,[X,Y])$$

$$= 2g(\nabla^K_X Y, Z) + g(Y,[X,Z]) + g(X,[Y,Z]) + g(Z,[X,Y]),$$

KTÓRA POZWALA WYZNACZYĆ ∇^K JEDNOZNACZNIE

(1-FORMY CHRISTOFFELA WYRAŻAJĄ SIĘ PRZEZ g i dg). $\square$

PO DOTYCHCZASOWYCH PRZYGOTOWANIACH...

POLONEZA CZAS ZACZĄĆ!

PRZYPOMNIJMY SOBIE NASZ STAN POSIADANIA ZE STR. 1 ... 37

JAKO, ŻE PROLONGACJA $F_{Spin}\mathbb{V} \xrightarrow{\Xi} F_{SO}\mathbb{V}$ (KTÓREJ ISTNIENIE ZAKŁADAMY) JEST W.P.W. NAKRYCIEM DYSKRETNYM MODELOWANYM NA $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R}) \xrightarrow{\Xi} SO(p,q;\mathbb{R})$

DOWOLNA FORMA POWIĄZANIA GŁÓWNEGO ω NA $F_{SO}\mathbb{V}$ (CZYLI – W ŚWIETLE TW. ZE STR. 30 – DOWOLNE POWIĄZANIE METRYCZNE NA $(\mathbb{V}, g)$) INDUKUJE

$$\omega^S := \left(T_e\xi\right)^{-1} \circ \Xi^* \omega \in \Omega^1(F_{Spin}\mathbb{V}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{spin}(p,q)$$

BEZ TRUDU PRZEKONUJEMY SIĘ, ŻE

Stw. ω^s JEST FORMĄ POWIĄZANIA GŁÓWNEGO (38)
NA WIĄZCE BAZ SPINOWYCH $F_{spin}\mathbb{V}$ WIĄZKI $\mathbb{V}$.
OKREŚLAMY JĄ MIANEM FORMY POWIĄZANIA SPINOWEGO.

D: ROZWAŻMY

$$\widetilde{Vert} : F_{SO}\mathbb{V} \times \mathfrak{so}(p,q) \longrightarrow VF_{SO}\mathbb{V}$$
$$: (E, X) \longmapsto \mathcal{K}_X^{(r)}(E) \equiv T_{(\cdot,e)}r(0_{T.F_{SO}\mathbb{V}}, X)$$

ORAZ

$$\widetilde{Vert}^s : F_{spin}\mathbb{V} \times \mathfrak{spin}(p,q) \longrightarrow VF_{spin}\mathbb{V}$$
$$: (\Sigma, \gamma) \longmapsto \mathcal{K}_\gamma^{(r^s)}(\Sigma) \equiv T_{(\cdot,e)}r^s(0_{T.F_{spin}\mathbb{V}}, \gamma).$$

Заходзі

$$\omega^s \circ \widetilde{Vert}^s(\gamma) = (T_e\xi)^{-1} \circ \omega \circ T\Xi \circ T_{(\cdot,e)} r' (0_{TF_{spin}V}, \gamma)$$

$$= (T_e\xi)^{-1} \circ \omega \circ T_{(\cdot,e)} (\Xi \circ r') (0_{TF_{spin}V}, \gamma)$$

$$= (T_e\xi)^{-1} \circ \omega \circ T_{(\cdot,e)} (r \circ (\Xi \times \xi)) (0_{TF_{spin}V}, \gamma)$$

$$= (T_e\xi)^{-1} \circ \omega \circ Tr \left(0_{TF_{SO}V}, T_e\xi(\gamma)\right)$$

$$= (T_e\xi)^{-1} \circ \omega \left(h_{T_e\xi(\gamma)}\right) = (T_e\xi)^{-1}(T_e\xi(\gamma))$$

$$= \gamma = id_{spin(p,q)}(\gamma),$$ ugyu $$\omega^s \circ \widetilde{Vert}^s = id_{F_{spin}V \times spin(p,q)'}$$

A NADTO – DLA DOWOLNEGO $M \in \mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R})$ – (40)

$$\omega^s \circ T r^s_M \equiv (T_e \xi)^{-1} \circ \omega \circ T\left(\Xi \circ r^s(\cdot, M)\right)$$

$$= (T_e \xi)^{-1} \circ \omega \circ T\left(r \circ (\Xi(\cdot), \xi(M))\right)$$

$$= (T_e \xi)^{-1} \circ \omega \circ T_{\Xi(\cdot)} r_{\xi(M)} \circ T\Xi$$

$$= (T_e \xi)^{-1} \circ T_e \mathrm{Ad}_{\xi(M)^{-1}} \circ \omega \circ T\Xi \,,$$

ALE TEŻ $\underset{\forall \gamma \in \mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R})}{}$ $\xi(\mathrm{Ad}_M(\gamma)) = \xi(M \overset{\mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R})}{\gamma} M^{-1}) \equiv \mathrm{Ad}(M\gamma M^{-1})\big|_{\mathbb{R}^{p+q}}$

$$= \mathrm{Ad}_M \circ \mathrm{Ad}_\gamma \circ \mathrm{Ad}_{M^{-1}}\big|_{\mathbb{R}^{p+q}} \equiv \mathrm{Ad}_M\big|_{\mathbb{R}^{p+q}} \circ \mathrm{Ad}_\gamma\big|_{\mathbb{R}^{p+q}} \circ \mathrm{Ad}_M^{-1}\big|_{\mathbb{R}^{p+q}}$$

$$\equiv \xi(M)\circ\xi(\gamma)\circ\xi(M)^{-1} \equiv \mathrm{Ad}_{\xi(M)}\big(\xi(\gamma)\big), \qquad (41)$$

A STĄD $$T_e\left(\xi\circ \mathrm{Ad}_M\right) = T_e\left(\mathrm{Ad}_{\xi(M)}\circ\xi\right),$$

PRZETO $\omega^s \circ \mathrm{Tr}^s_M = T_e \mathrm{Ad}_M \circ (T_e\xi)^{-1}\circ\omega\circ T\Xi = T_e\mathrm{Ad}_M\circ\omega^s,$

CO W SUMIE OZNACZA, ŻE ω^s JEST FORMĄ POWIĄZANIA GŁÓWNEGO. $\square$

MOŻEMY PROSTO POWIĄZAĆ POTENCJAŁY LOKALNE FORMY POWIĄZANIA SPINOWEGO Z 1-FORMAMI CHRISTOFFELA INDUKUJĄCEGO JĄ POWIĄZANIA KOSZULA...

ROZWAŻMY LOKALNĄ BAZĘ SPINOWĄ $\Sigma_{(i)} \in \Gamma(F_{spin}\mathbb{V}|_{\mathcal{O}_i})$

BĘDĄCĄ PRZECIWOBRAZEM BAZY PSEUDOORTONORMALNEJ $\mathcal{E}_{(i)} \in \Gamma(F_{SO}\mathbb{V}|_{\mathcal{O}_i})$, TJ. $\mathcal{E}_{(i)} = \Xi \circ \Sigma_{(i)}$, A WÓWCZAS W ŚWIETLE FORMUŁY ZE STR. (24):

$$\Sigma_{(i)}^* \omega^S \equiv \omega^S \circ T\Sigma_{(i)} \equiv (T_e \Xi)^{-1} \circ \omega \circ T\Xi \circ T\Sigma_{(i)}$$

$$\equiv (T_e \Xi)^{-1} \circ \omega \circ T\mathcal{E}_{(i)} = (T_e \Xi)^{-1}\left(\varepsilon_a \Gamma^{(i)}_{ab} \otimes e_a \wedge e_b\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\, \varepsilon_a \Gamma^{(i)}_{ab} \otimes [e_a, e_b] = -\frac{1}{2}\, \varepsilon_a \Gamma^{(i)}_{ab} \otimes e_a e_b \, .$$

Z TAK OKREŚLONYCH O POWIĄZANIA NA WIĄZKACH GŁÓWNYCH: $F_{SO}\mathbb{V}$ i $F_{spin}\mathbb{V}$ MOŻEMY TERAZ INDUKOWAĆ POCHODNE KOWARIANTNE

NA WIĄZKACH STOWARZYSZONYCH :

$$\mathcal{C}\ell(\mathbb{V},g) = F_{SO}\mathbb{V} \times_{\mathrm{Ad}^{\mathbb{R}} \circ \rho_{\det}} Cl^{\mathbb{R}}_{p,q} \quad (\lambda_c \equiv \mathrm{Ad}^{\mathbb{R}} \circ \rho_{\det})$$

i

$$\mathcal{S}(\mathbb{V},g) = F_{Spin}\mathbb{V} \times_{\sigma} S \,,$$

WG SCHEMATU OPISANEGO NA WYKŁADZIE 23.

NA POCZĄTKU PRZYJRZYMY SIĘ FUNDAMENTALNYM POLOM WEKTOROWYM

$$(\lambda_c : SO(p,q;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Inn}(Cl^{\mathbb{R}}_{p,q}))$$

$$\mathcal{K}^{(\lambda_c)} : \mathfrak{so}(p,q) \xrightarrow{\Downarrow} T_{\mathrm{id}}\,\mathrm{Inn}(Cl^{\mathbb{R}}_{p,q})$$

$$\mathrm{Der}(Cl^{\mathbb{R}}_{p,q})$$

INDUKOWANA POCHODNA KOWARIANTNA BĘDZIE RÓŻNICZKOWANIEM ALGEBRY $\Gamma(\mathcal{C}\ell(\mathbb{V},g))$ $\Longleftarrow$

i

$$(\sigma : \mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R}) \longrightarrow GL(S))$$

$$\mathcal{K}^{(\sigma)} : \mathfrak{spin}(p,q) \longrightarrow \mathfrak{gl}(S) \equiv \mathrm{End}(S) \,.$$

A KONKRETNIE

Stw. $\forall_{\substack{1\leq a<b\leq p+q \\ \gamma\in Cl^{\mathbb{R}}_{p,q},\ v\in S}}$: $\mathcal{K}^{(\mathrm{Ad})}_{e_a \wedge e_b}(\gamma) = \frac{1}{2}[e_{ab}, \gamma]$

$\mathcal{K}^{(\sigma)}_{e_{ab}}(v) = -\sigma(e_{ab})(v)$.

WOBEC TEGO ODNOŚNE POCHODNE $\nabla^{Cl}\gamma$ i $\nabla^{S}\sigma$

CIĘĆ $\gamma \equiv [(\varepsilon_{(i)}, \gamma_i)] \in \Gamma(Cl(\mathbb{V}, g))$ i $\sigma \equiv [(\Sigma_{(i)}, \sigma_i)] \in \Gamma(S(\mathbb{V}, g))$

W PREZENTACJACH LOKALNYCH STOWARZYSZONYCH Z CIĘCIAMI

$\Sigma_{(i)} \in \Gamma(F_{Spin}\mathbb{V}|_{\Theta_i})$ i $\varepsilon_{(i)} \in \Gamma(F_{SO}\mathbb{V}|_{\Theta_i})$ TO

$$\mathcal{D}^{\varepsilon_{(i)}}\gamma_i = T\gamma_i - \omega^{(i)}_{ab} \otimes \frac{1}{2}[e_{ab}, \gamma_i] \equiv T\gamma_i - \varepsilon_a \Gamma^{(i)}_{ab} \otimes \frac{1}{2}[e_{ab}, \gamma_i].$$

$$\mathcal{D}^{\Sigma_{(i)}}\sigma_i = T\sigma_i + \omega^{s}_{i\,ab} \otimes \sigma(e_{ab})(\sigma_i) \equiv T\sigma_i - \frac{1}{2}\varepsilon_a \Gamma^{(i)}_{ab} \otimes \sigma(e_{ab})(\sigma_i).$$

D: WOBEC WCZEŚNIEJSZYCH USTALEŃ MUSIMY JEDYNIE ZWERYFIKOWAĆ POSTAĆ OBU FUNDAMENTALNYCH PÓL WEKTOROWYCH, CO CZYNIMY W BEZPOŚREDNIM RACHUNKU. (45)

PO PIERWSZE Z RACJI NATURALNOŚCI exp,

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R}) \arrow[rr, "\xi", "\doteq \mathrm{Ad}"'] & & SO(p,q;\mathbb{R}) \\
\mathrm{spin}(p,q) \arrow[u, "\exp^{\mathrm{Spin}}"] & & \mathfrak{so}(p,q) \arrow[u, "\exp^{SO}"'] \arrow[ll, "(T_e\xi)^{-1}"']
\end{tikzcd}
,
$$

ZACHODZI: $\exp^{SO}(X)(v)$ REALIZOWANE W $Cl^{\mathbb{R}}_{p,q}$ JAKO

$$\xi\left(\exp^{\mathrm{Spin}}\circ(T_e\xi)^{-1}(X)\right)(\underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{Im}\,\jmath_{\mathbb{R}^{p,q}}}}{v}) \equiv \mathrm{Ad}_{\exp^{\mathrm{Spin}}((T_e\xi)^{-1}(X))}(v),$$

ZATEM $\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\det}(\exp^{so}(X))(\gamma) = \mathrm{Ad}_{\exp^{spin}((T_e\xi)^{-1}(X))}(\gamma)$, (46)

A WOBEC TEGO – NA MOCY WYNIKU ZE STR. (24) –

$$\mathcal{K}^{(\lambda_c)}_{e_a \wedge e_b}(\gamma) \equiv \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Ad}_{\exp^{spin}((T_e\xi)^{-1}(-t \triangleright e_a \wedge e_b))}(\gamma)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp^{spin}\left(\tfrac{1}{2} t \triangleright e_{ab}\right) \cdot \gamma \cdot \exp^{spin}\left(-\tfrac{1}{2} t \triangleright e_{ab}\right)$$

$$= \frac{1}{2}[e_{ab}, \gamma].$$

$a < b$!

ANALOGICZNIE OBLICZAMY

$$\mathcal{K}^{(\sigma)}_{e_{ab}}(v) \equiv \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \sigma\left(\exp^{spin}(-t \triangleright e_{ab})\right)(v) = -\sigma(e_{ab})(v).$$

$a < b$

$\square$

NA PODSTAWIE POWYŻSZEGO BEZ TRUDU WYKAZUJEMY:

<u>Stw.</u> ∇^{Cl} JEST RÓŻNICZKOWANIEM ALGEBRY $\Gamma(\mathrm{Cl}(\mathbb{V},g))$ (O STRUKTURZE INDUKOWANEJ Z TEJ NA $\mathrm{Cl}(\mathbb{V},g)$, OPISANEJ NA WYKŁADACH 17-18).

<u>D</u>: W ŚWIETLE Stw. ZE STR. 44 JEST – DLA $\gamma_1,\gamma_2 \in \mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}_{p,q}$ -

$$\underset{a<b}{\underset{\uparrow}{\mathcal{K}^{(\lambda_c)}_{e_a\wedge e_b}}}(\gamma_1\cdot\gamma_2) = \tfrac{1}{2}[e_{ab},\gamma_1\gamma_2] \equiv \tfrac{1}{2}(e_{ab}\gamma_1\gamma_2 - \gamma_1\gamma_2 e_{ab})$$

$$= \tfrac{1}{2}(e_{ab}\gamma_1\gamma_2 - \gamma_1 e_{ab}\gamma_2 + \gamma_1 e_{ab}\gamma_2 - \gamma_1\gamma_2 e_{ab})$$

$$\equiv \tfrac{1}{2}[e_{ab},\gamma_1]\gamma_2 + \gamma_1\left(\tfrac{1}{2}[e_{ab},\gamma_2]\right)$$

$$\equiv \mathcal{K}^{(\lambda_c)}_{e_a\wedge e_b}(\gamma_1)\cdot\gamma_2 + \gamma_1\cdot\mathcal{K}^{(\lambda_c)}_{e_a\wedge e_b}(\gamma_2),$$

ZATEM – DLA $\gamma_i^1, \gamma_i^2 : \mathcal{O}_i \longrightarrow Cl_{p,q}^{\mathbb{R}}$ Z $\gamma^1, \gamma^2 \in \Gamma(Cl(\mathcal{V}, g))$ 48

JAK WYŻEJ –

$$\mathcal{D}^{\varepsilon(i)}\big(m\circ(\gamma^1,\gamma^2)\big)\Big| = T\left(\gamma_i^1\cdot\gamma_i^2\right) - \varepsilon_a \Gamma_{ab}^{(i)} \otimes \tfrac{1}{2}\left[e_{ab}, \gamma_i^1\cdot\gamma_i^2\right]$$

$$= \left(T\gamma_i^1\right)\cdot\gamma_i^2 - \varepsilon_a \Gamma_{ab}^{(i)} \otimes \tfrac{1}{2}\left[e_{ab}, \gamma_i^1\right]\cdot\gamma_i^2$$

$$+ \gamma_i^1\cdot T\gamma_i^2 - \varepsilon_a \Gamma_{ab}^{(i)} \otimes \gamma_i^1\left(\tfrac{1}{2}\left[e_{ab}, \gamma_i^2\right]\right)$$

$$\equiv m\circ\left(\mathcal{D}^{\varepsilon(i)}\gamma^1, \gamma_i^2\right) + m\circ\left(\gamma_i^1, \mathcal{D}^{\varepsilon(i)}\gamma^2\right),$$

GDZIE WYKORZYSTALIŚMY TO, ŻE STYCZNA DO PRZESTRZENI WEKTOROWEJ W JEJ DOWOLNYM PUNKCIE JEST KANONICZNIE IZOMORFICZNA Z TĄ PRZESTRZENIĄ. □

WŁASNOŚĆ POWYŻSZĄ WPISUJEMY W

Def: POCHODNA KOWARIANTNA NA $\mathcal{Cl}(V,g)$ O WŁASNOŚCI JAK W STW. ZE STR. 47 NOSI MIANO POCHODNEJ CLIFFORDA.

MAMY TEŻ Z DAWNA OCZEKIWANE

Stw. ∇^{S} JEST UZGODNIONE ZE STRUKTURĄ $\Gamma(\mathcal{Cl}(V,g))$-MODUŁU NA $\Gamma(S(V,g))$ W SENSIE OKREŚLONYM PRZEZ TOŻSAMOŚĆ

$$\forall (\gamma,\psi)\in\Gamma(\mathcal{Cl}(V,g))\times\Gamma(S(V,g)) :$$

$$\nabla^{S}(\gamma \triangleright_{\sigma} \psi) = \nabla^{\mathcal{Cl}}\gamma \triangleright_{\sigma} \psi + \gamma \triangleright \nabla^{S}\psi .$$

<u>D</u>: JAK POPRZEDNIO, SPRAWDZAMY TOŻSAMOŚĆ W OBRAZIE LOKALNYM (DLA $\gamma_i : \Theta_i \to Cl^{R}_{p,q}$, $\psi_i : \Theta_i \to S$ STOWARZYSZONYCH Z γ I – ODPOWIEDNIO – ψ PRZEZ $\Sigma_{(i)}$ I – ODPOWIEDNIO – $\Sigma_{(i)}$)

$\equiv \Xi \circ \Sigma_{(i)}$

$$D^{\Sigma_{(i)}}\big(\sigma(\gamma_i)(\psi_i)\big) = T\big(\sigma(\gamma_i)(\psi_i)\big) - \frac{1}{2}\,\varepsilon_a\,\Gamma^{(i)}_{ab} \otimes \sigma(e_{ab})\big(\sigma(\gamma_i)(\psi_i)\big)$$

$$= \sigma(T\gamma_i)(\psi_i) + \sigma(\gamma_i)(T\psi_i) - \frac{1}{2}\,\varepsilon_a\,\Gamma^{(i)}_{ab} \otimes \sigma(e_{ab}\,\gamma_i)(\psi_i)$$

$$\equiv \sigma(T\gamma_i)(\psi_i) - \varepsilon_a\,\Gamma^{(i)}_{ab} \otimes \sigma\big(\tfrac{1}{2}[e_{ab},\gamma_i]\big)(\psi_i)$$

$$+ \sigma(\gamma_i)\Big(T\psi_i - \frac{1}{2}\,\varepsilon_a\,\Gamma^{(i)}_{ab} \otimes \sigma(e_{ab})(\psi_i)\Big)$$

$$\equiv \sigma\big(D^{\Sigma_{(i)}}\gamma\big)(\psi_i) + \sigma(\gamma_i)\big(D^{\Sigma_{(i)}}\psi\big). \qquad \square$$

UKORONOWANIEM NASZYCH WIELOMIESIĘCZNYCH DOCIEKAŃ JEST

Def.: OPERATOR DIRACA NA $\mathcal{S}(M,g)$

TO OPERATOR RÓŻNICZKOWY

$$\not{D} : \Gamma(\mathcal{S}(M,g)) \circlearrowleft : \psi \longmapsto \varepsilon_a\, \sigma \circ \jmath_{TM}\big(e_a^{(i)}\big) \triangleright \nabla^{\mathcal{S}}_{e_a^{(i)}} \psi ,$$

W KTÓREGO ZAPISIE UŻYLIŚMY — LOKALNIE — DOWOLNEJ BAZY PSEUDO-ORTONORMALNEJ $\{e_a^{(i)}\}$ $C^\infty(\mathcal{O}_i,\mathbb{R})$-MODUŁU $\Gamma\big(\mathcal{S}(M,g)\restriction_{\mathcal{O}_i\subset M}\big)$.

Stw. $\not{D}$ JEST DOBRZE OKREŚLONY. (52)

D: SPRAWDZAMY NAJPIERW NIEZALEŻNOŚĆ DEFINICJI OD WYBORU BAZY $\{e_a^{(i)}\}$: DOWOLNA INNA BAZA PSEUDO-ORTONORMALNA $\{f_a^{(i)}\}$ JEST Z POWYŻSZĄ POWIĄZANA (ZALEŻNĄ OD PUNKTU W RAZIE) TRANSFORMACJĄ ORTOGONALNĄ $f_a^{(i)} = \mathbb{L}_{h_i ab} \circ e_b^{(i)}$, WIĘC WOBEC $C^\infty(M,\mathbb{R})$-LINIOWOŚCI ∇^S W ARGUMENCIE $e_a^{(i)}$ OTRZYMUJEMY

$$\varepsilon_a \sigma \circ d\mathrm{TM}(f_a^{(i)}) \triangleright \nabla^S_{f_a^{(i)}} \psi = \varepsilon_a \mathbb{L}_{h_i ab}\, h_{iac} \left(\sigma \circ d\mathrm{TM}(e_b^{(i)}) \triangleright \nabla^S_{e_c^{(i)}} \psi\right)$$

$$\equiv \varepsilon_b \mathbb{L}_{\varepsilon_a h_{iab} \varepsilon_b h_{iac}} \left(\sigma \circ j_{TM}(e_b^{(i)}) \triangleright \nabla_{e_c^{(i)}} \psi\right)$$

$$= \varepsilon_b \mathbb{L}_{h^{-1}_{iba} h_{iac}} \left(\sigma \circ j_{TM}(e_b^{(i)}) \triangleright \nabla_{e_c^{(i)}} \psi\right)$$

$$= \varepsilon_b \, \sigma \circ j_{TM}(e_b^{(i)}) \triangleright \nabla_{e_b^{(i)}} \psi \, .$$

DOWÓD GLOBALNEJ OKREŚLONOŚCI $\not{D}$ PRZEBIEGA PODOBNIE: OTO NA PRZECIĘCIU DZIEDZIN BAZ LOKALNYCH $\{e_a^{(i)}\}$ ORAZ $\{e_a^{(j)}\}$ MAMY $e_a^{(j)} = \mathbb{L}_{g_{ijab}}(e_b^{(i)})$ (PATRZ: STR. 10), PRZETO

$$\varepsilon_a \sigma \circ j_{TM}(e_a^{(j)}) \triangleright \nabla_{e_a^{(j)}} \psi = \varepsilon_a \mathbb{L}_{g_{ijab} g_{ijac}} \left(\sigma \circ j_{TM}(e_b^{(i)}) \triangleright \nabla^{j}_{e_c^{(i)}} \psi\right)$$

$$= \varepsilon_b \, \mathbb{L}_{\varepsilon_a g_{ij\,ab} \varepsilon_b g_{ij\,ac}} \left(\sigma \circ J_{TM}(e_b^{(i)}) \triangleright \nabla_{e_c^{(i)}} \psi\right)$$

$$= \varepsilon_b \, \mathbb{L}_{g_{ij}^{-1}{}_{ba}\, g_{ij\,ac}} \left(\sigma \circ J_{TM}(e_b^{(i)}) \triangleright \nabla_{e_c^{(i)}} \psi\right)$$

$$= \varepsilon_b \left(\sigma \circ J_{TM}(e_b^{(i)}) \triangleright \nabla_{e_c^{(i)}} \psi\right) . \qquad \square$$

CECI (N')EST (PAS) LA FIN.

x