PRYNCYPIALNOŚĆ WIĄZEK – CNOTA UŻYTECZNA
(MAWF '22/23 2.V & 2.VI [RRS])

Spis treści

Na ostatnim wykładzie zetknęliśmy się z konstrukcją wiązki włóknistej kanonicznie stowarzyszonej z dowolną rozmaitością klasy C^1, jaką jest wiązka styczna nad tą rozmaitością. Wiązka ta okazała się być wyposażoną w naturalną i intuicyjnie antycypowaną strukturę liniową we włóknie, z której wyabstrahowaliśmy pojęcie wiązki wektorowej, czyli geometryzacji algebraicznej struktury przestrzeni wektorowej. Kanoniczność konstrukcji wiązki wektorowej stycznej (tj. brak jakichkolwiek obstrukcji topologicznych dla jej realizacji) dowodzi naturalności tego pojęcia w kategorii rozmaitości różniczkowalnych. Miast badać geometryzowalność rozmaitych naturalnych operacji z kategorii liniowej (jak suma prosta, produkt, iloczyn tensorowy, algebra tensorowa i zewnętrzna, wyznacznik *etc.*), do czego doskonale nadaje się Twierdzenie o rekonstrukcji, podążymy dalej tropem konstrukcji kanonicznych wprost ku celowi naszych dociekań, jaki stanowią wiązki stowarzyszone Clifforda i spinorowe. Rozważymy zatem kolejny przykład kanonicznej geometryzacji prostej struktury algebraicznej, aby następnie wyabstrahować z naszych rozważań definicję nowej klasy wiązek włóknistych.

1. Wstęp

Jedną z naturalnych konstrukcji na przestrzeni wektorowej jest wybór bazy $\{e_i\}_{i\in\overline{1,D}}$, $D = \dim_{\mathbb{K}} V$, tj. wybór izomorfizmu

$$V \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^{\times D} \;:\; v = v^i\, e_i \longmapsto (v^1, v^2, \ldots, v^D)\,.$$

Konstrukcja ta ma swój nader istotny odpowiednik w teorii wiązek wektorowych, który teraz omówimy.

Definicja 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ będzie wiązką wektorową rzędu $n \in \mathbb{N}^\times$, o trywializacjach lokalnych $\tau_i \;:\; \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}$ stowarzyszonych z pokryciem otwartym $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ bazy B. **Wiązka reperów** (zwana też **wiązką baz**) **wiązki wektorowej** $\mathbb{V}$ to wiązka włóknista

$$\big(\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}, B, {\rm GL}(n;\mathbb{K}), \pi_{\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}}\big)$$

o składowych

- przestrzeń totalna
$$\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V} := \bigsqcup_{x\in B} {\rm Iso}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x\big)$$
o strukturze rozmaitości różniczkowalnej klasy C^∞ indukowanej przez trywializacje $\{\tau_i\}_{i\in I}$ i o włóknie $(\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V})_x \equiv {\rm Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x)$ nad dowolnym punktem $x \in B$ będącym zbiorem baz $\beta_x \;:\; \mathbb{K}^{\times n} \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}_x$ włókna $\mathbb{V}_x$;
- włókno typowe ${\rm GL}(n;\mathbb{K}) \equiv {\rm Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n})$;
- rzut na bazę $\pi_{\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}} \;:\; \mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V} \longrightarrow B \;:\; (\beta_x, x) \longmapsto x$.

Przy tym bijekcje $\mathsf{F}\tau_i$ odwrotne do

$$\mathsf{F}\tau_i^{-1} \;:\; \mathcal{O}_i \times \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \xrightarrow{\cong} \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \;:\; (x,\chi) \longmapsto \big(\tau_i^{-1}\big(x,\chi(\cdot)\big), x\big)$$

indukują na $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ mocną topologię cofnięciową z topologii produktowej (podprzestrzeni) na zbiorach $\mathcal{O}_i \times \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ (gdzie topologia na $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ to topologia podprzestrzeni topologicznej przestrzeni wektorowej $\mathbb{K}(n) \cong \mathbb{K}^{\times n^2}$), tj. taką, w której podzbiór $\mathcal{U} \subset \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek

$$\forall_{i\in I} \;:\; \mathsf{F}\tau_i\big(\mathcal{U} \cap \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)\big) \in \mathscr{T}\big(\mathcal{O}_i \times \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\big).$$

W tej topologii odwzorowania $\mathsf{F}\tau_i$ są homeomorficznymi trywializacjami lokalnymi o odwzorowaniach przejścia klasy C^∞:

$$\begin{aligned} g_{ij}^{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}} \equiv \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n}, g_{ij}(\cdot)\big) \quad &: \quad \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\big) \\ &: \quad x \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n}, g_{ij}(x)\big), \end{aligned}$$

gdzie

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n}, g_{ij}(x)\big) \;:\; \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \circlearrowleft \;:\; \chi \longmapsto g_{ij}(x) \circ \chi\,.$$

Struktura rozmaitości różniczkowej klasy C^∞ jest indukowana wzdłuż homeomorfizmów $\mathsf{F}\tau_i$ ze struktury produktowej na lokalnym modelu $\mathcal{O}_i \times \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$, trywialnej (klasy C^∞) w drugim czynniku i wyznaczanej przez przecięcie z atlasem $\widehat{\mathscr{A}_B}$ na rozmaitości B w czynniku pierwszym. Względem tak określonej struktury różniczkowalnej trywializacje lokalne $\mathsf{F}\tau_i$ są tautologicznie gładkie klasy C^∞, podobnie jak rzut kanoniczny na bazę, $\pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}} \equiv \mathrm{pr}_1 \circ \mathsf{F}\tau_i^{-1}$.

Powyższa definicja wymaga kilku słów komentarza. W pierwszej kolejności odnotujmy istnienie naturalnego prawego działania – włókno po włóknie – grupy $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ na przestrzeni totalnej $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ danego w postaci

$$r \;:\; \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V} \times \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \longrightarrow \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V} \;:\; \big((\beta_x, x), \chi\big) \longmapsto (\beta_x \circ \chi, x) \equiv (\beta_x, x) \triangleleft \chi\,.$$

Działanie to jest w jawny sposób wolne (wobec odwracalności elementów włókna $\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x)$), a nadto przechodnie nad dowolnym punktem $x \in B$ – wszak dla dowolnej pary $\beta_{x\,1}, \beta_{x\,2} \in \mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x\big)$ spełniona jest tożsamość

$$\beta_{x\,2} \equiv \beta_{x\,1} \circ \big(\beta_{x\,1}^{-1} \circ \beta_{x\,2}\big),$$

a ponieważ $\beta_{x\,1}^{-1} \circ \beta_{x\,2} \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n})$ jest odwzorowaniem o odwrotności $\beta_{x\,2}^{-1} \circ \beta_{x\,1}$, przeto możemy zapisać

$$(\beta_{x\,2}, x) = (\beta_{x\,1}, x) \triangleleft \big(\beta_{x\,1}^{-1} \circ \beta_{x\,2}\big),$$

konstatując przy tym, że $\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x)$ jest torsorem grupy $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$. Wybór dowolnego elementu $\beta_{x\,*} \in \mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x)$ zadaje *niekanoniczny* ($\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$-ekwiwariantny) izomorfizm

$$\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x\big) \xrightarrow{\cong} \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \;:\; \beta_x \longmapsto \beta_{x\,*}^{-1} \circ \beta_x\,.$$

Wobec powyższego bez trudu stwierdzamy, że odwzorowania $\mathsf{F}\tau_i^{-1}$ są bijektywne, oto bowiem przyporządkowują w sposób jawnie injektywny elementom zbioru $\{x\} \times \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$, $x \in \mathcal{O}_i$ elementy zbioru $\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x) \times \{x\}$. Są więc odwracalne, a konkretnie

$$\mathsf{F}\tau_i \;:\; \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \;:\; (\beta_x, x) \longmapsto \big(x, \mathrm{pr}_2 \circ \tau_i \beta_x\big),$$

co pozwala użyć ich do zaindukowania topologii na $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ według opisanego schematu. Ich identyfikacja jako trywializacji lokalnych zasadza się na bezpośrednim rachunku:

$$\begin{aligned} \mathsf{F}\tau_i \circ \mathsf{F}\tau_j^{-1} \quad &: \quad \mathcal{O}_{ij} \times \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \circlearrowleft \\ &: \quad (x,\chi) \longmapsto \mathsf{F}\tau_i\big(\tau_j^{-1}\big(x,\chi(\cdot)\big), x\big) \equiv \mathsf{F}\tau_i\big(\tau_i^{-1} \circ \tau_i \circ \tau_j^{-1}\big(x,\chi(\cdot)\big), x\big) \\ &\qquad = \mathsf{F}\tau_i\big(\tau_i^{-1}\big(x, g_{ij}(x) \circ \chi(\cdot)\big), x\big) \equiv \mathsf{F}\tau_i \circ \mathsf{F}\tau_i^{-1}\big(x, g_{ij}(x) \circ \chi(\cdot)\big) \end{aligned}$$

$$= \big(x, g_{ij}(x) \circ \chi(\cdot)\big)\,,$$

w którym $g_{ij} \in C^\infty(\mathcal{O}_{ij}, \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}))$ są odwzorowaniami przejścia wiązki $\mathbb{V}$, a który ukazuje gładki charakter odwzorowań $\mathsf{F}\tau_i \circ \mathsf{F}\tau_j^{-1}$.

Na koniec zauważmy, że odwzorowania $\mathsf{F}\tau_i^{-1}$ (więc także trywializacje lokalne $\mathsf{F}\tau_i$) są ekwiwariantne względem prawostronnego działania grupy $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$: regularnego $\wp$ na drugim czynniku kartezjańskim ich dziedziny oraz opisanego powyżej r na przeciwdziedzinie. Istotnie, obliczamy wprost – dla dowolnego elementu $\gamma \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ –

$$\begin{aligned}\mathsf{F}\tau_i^{-1} \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{O}_i} \times \wp_\gamma)(x,\chi) &= \mathsf{F}\tau_i^{-1}(x, \chi\circ\gamma) = \big(\tau_i^{-1}\big(x, \chi\circ\gamma(\cdot)\big), x\big) \equiv \big(\tau_i^{-1}\big(x,\chi(\cdot)\big)\circ\gamma(\cdot), x\big) \\ &\equiv \big(\tau_i^{-1}\big(x,\chi(\cdot)\big), x\big) \triangleleft \gamma \equiv r_\gamma \circ \mathsf{F}\tau_i^{-1}(x,\chi)\,.\end{aligned}$$

Trywializacje lokalne są zatem zgodne z zaobserwowaną wcześniej strukturą torsora grupy $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ na włóknie wiązki reperów.

Abstrakcja pojęcia wiązki głównej z powyższej konstrukcji kanonicznej wymaga[1] mariażu algebraicznej struktury grupy i struktury topologicznej oraz różniczkowej, który opisuje

Definicja 2. **Grupa topologiczna** to grupa

$$\big(\mathrm{G}, m \equiv \cdot, \mathrm{Inv} \equiv (\cdot)^{-1}, \bullet \longmapsto e\big)\,,$$

której nośnik G jest przestrzenią topologiczną, a odwzorowania strukturalne m i Inv są ciągłe. **Podgrupa topologiczna** grupy topologicznej $(\mathrm{G}, m, \mathrm{Inv}, \bullet \longmapsto e)$ to grupa topologiczna $(\mathrm{H}, m\restriction_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}}, \mathrm{Inv}\restriction_{\mathrm{H}}, \bullet \longmapsto e)$, której nośnik H jest podprzestrzenią topologiczną przestrzeni G. **Homomorfizm topologiczny** między grupami topologicznymi $(\mathrm{G}_1, m_1, \mathrm{Inv}_1, \bullet_1 \longmapsto e_1)$ i $(\mathrm{G}_2, m_2, \mathrm{Inv}_2, \bullet_2 \longmapsto e_2)$ to homomorfizm grup ciągły względem topologii dziedziny i przeciwdziedziny.

Grupa Liego to grupa

$$\big(\mathrm{G}, m \equiv \cdot, \mathrm{Inv} \equiv (\cdot)^{-1}, \bullet \longmapsto e\big)\,,$$

której nośnik jest rozmaitością gładką, a odwzorowania strukturalne m i Inv są klasy C^∞. **Podgrupa Liego** grupy Liego $(\mathrm{G}, m, \mathrm{Inv}, \bullet \longmapsto e)$ to grupa Liego $(\mathrm{H}, m\restriction_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}}, \mathrm{Inv}\restriction_{\mathrm{H}}, \bullet \longmapsto e)$, której nośnik H jest podrozmaitością klasy C^∞ rozmaitości G. **Homomorfizm grup Liego** to homomorfizm grup gładki względem struktury różniczkowej dziedziny i przeciwdziedziny.

Bogatym źródłem przykładów grup Liego jest poniższe twierdzenie, które podajemy bez dowodu (dowód jest prezentowany na kursie Teorii Grup II).

Twierdzenie 1 (Cartana o podgrupie domkniętej)**.** Każda podgrupa domknięta grupy Liego jest tej ostatniej podrozmaitością i grupą Liego (a zatem w sumie podgrupą Liego). I odwrotnie, każda podgrupa grupy Liego będąca jej podrozmaitością jest domkniętą podgrupą Liego tejże grupy.

Przykłady 1.

(1) dowolna $V \in \mathrm{Obj}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{(<\infty)}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ jest przemienną grupą Liego z $(m, \mathrm{Inv}, e) = (+_V, \mathsf{P}_V, \mathbf{0}_V)$;

(2) dla V z poprzedniego przykładu $\mathrm{GL}(V;\mathbb{K}) = \{\ \chi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \ \mid\ \exists\ \chi^{-1}\ \}$ jako otwarty podzbiór przestrzeni wektorowej $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ jest grupą Liego (z superpozycją endomorfizmów jako mnożeniem) zwaną **grupą główną liniową** V – jest ona izomorficzna z **grupą główną liniową** $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) = \{\ A \in \mathbb{K}(n) \ \mid\ \det_{(n)} A \neq 0\ \}$ dziedziczącą topologię i strukturę różniczkową z przestrzeni wektorowej $\mathbb{K}(n) \equiv \mathbb{K}^{\times n^2}$, w której jest zanurzona jako podzbiór otwarty $\det_{(n)}^{-1}(\mathbb{K}^\times)$ (wszak $\det_{(n)} : \mathbb{K}(n) \longrightarrow \mathbb{K}$ jest odwzorowaniem wielomianowo zależnym od wyrazów macierzy, więc ciągłym);

[1] W interesujących nas zastosowaniach będziemy mieć zawsze do czynienia ze strukturą różniczkowalną zarówno na grupie, jak i na zbiorze, na którym ta działa, jednakowoż dla zachowania pełnej kontroli nad założeniami, których przyjęcie jest niezbędnym w rozmaitych rozpatrywanych przez nas okolicznościach, warto wprowadzić pojemniejsze pojęcie grupy i jej działania w kategorii topologicznej, co też czynimy poniżej.

(3) wszechobecne w fizyce „małe" grupy Liego $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \equiv \mathrm{U}(1) \cong \mathbb{S}^1$ i $\mathrm{SU}(2) \cong \mathbb{S}^3$ oraz **grupa Poincarégo** $\mathrm{ISO}(3,1) = \mathbb{R}^4 \rtimes \mathrm{SO}(3,1)$ o topologii będącej pochodną (złożonej) topologii **grupy Lorentza** $\mathrm{SO}(3,1) = \{ L \in \mathrm{GL}(4;\mathbb{R}) \quad | \quad L^{\mathrm{T}} \cdot \eta \cdot L = \eta \}$ odwzorowań zachowujących metrykę Minkowskiego $\eta = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ (ich naturalne działanie na $\mathbb{R}^4$ określa iloczyn półprosty w definicji $\mathrm{ISO}(3,1)$);
(4) **grupa specjalna liniowa** $\mathrm{SL}(n;\mathbb{K}) = \{ A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \quad | \quad \det_{(n)} A = 1 \}$;
(5) **grupa ortogonalna** $\mathrm{O}(n;\mathbb{K}) = \{ A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \quad | \quad A^{\mathrm{T}} \cdot A = \mathbf{1}_n \}$;
(6) **grupa specjalna ortogonalna** $\mathrm{SO}(n;\mathbb{K}) = \mathrm{O}(n;\mathbb{K}) \cap \mathrm{SL}(n;\mathbb{K})$;
(7) **grupa unitarna** $\mathrm{U}(n) = \{ A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{C}) \quad | \quad A^{\dagger} \cdot A = \mathbf{1}_n \}$;
(8) **grupa specjalna unitarna** $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n;\mathbb{C})$;
(9) **grupa symplektyczna** $\mathrm{Sp}(n;\mathbb{K}) = \{ A \in \mathrm{SL}(2n;\mathbb{K}) \quad | \quad A^{\mathrm{T}} \cdot J_n \cdot A = J_n \}$ odwzorowań zachowujących „strukturę symplektyczną"

$$J_n = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix}.$$

Uzgodninie struktury różniczkowej i algebraicznej na zbiorze G ma daleko idące konsekwencje, których szczegółowe studium jest przedmiotem odrębnego kursu (Teoria Grup II – zapraszam w tym semestrze!) i z których część przyjdzie nam jeszcze omawiać w kontekście konstrukcji powiązania na wiązkach głównych. Tymczasem jednak przejdziemy bezpośrednio do dyskusji zagadnień związanych z działaniem grup Liego na rozmaitościach różniczkowalnych, które odgrywają kluczową rolę w konstrukcji wiązek stowarzyszonych (takich jak wiązki Clifforda i spinorowe właśnie). Zaczniemy, jak zazwyczaj, od pojęcia podstawowego.

Definicja 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj G będzie grupą[2] i niech X będzie zbiorem o grupie symetrycznej[3]. Homomorfizm grup

$$\lambda. \;:\; \mathrm{G} \longrightarrow \mathfrak{S}(X) \;:\; g \longmapsto \lambda_g$$

określamy mianem **działania lewostronnego grupy** G **na zbiorze** X, na którym jest określone działanie grupy G, a który nazywamy **zbiorem z działaniem lewostronnym grupy** G. Antyhomomorfizm

$$\varrho. \;:\; \mathrm{G} \longrightarrow \mathfrak{S}(X) \;:\; g \longmapsto \rho_g$$

nazywamy **działaniem prawostronnym grupy** G **na zbiorze** X, a zbiór w nie wyposażony – **zbiorem z działaniem prawostronnym grupy** G. Lekko przeciążając notację, realizację podgrupy $\lambda_{\mathrm{G}} \subset \mathfrak{S}(X)$ będziemy zapisywać jako

$$\lambda \;:\; \mathrm{G} \times X \longrightarrow X \;:\; (g,x) \longmapsto \lambda_g(x) \equiv g \triangleright x \equiv \lambda(g,x)\,,$$

a podgrupy $\varrho_{\mathrm{G}} \subset \mathfrak{S}(X)$ – jako

$$\varrho \;:\; X \times \mathrm{G} \longrightarrow X \;:\; (x,g) \longmapsto \varrho_g(x) \equiv x \triangleleft g \equiv \varrho(x,g)\,.$$

Niechaj $X_A,\ A \in \{1,2\}$ będą zbiorami z działaniami lewostronnymi λ^A grupy G i niech $f \;:\; X_1 \longrightarrow X_2$ będzie odwzorowaniem pomiędzy nimi. Powiemy, że f jest **odwzorowaniem lewostronnie** G**-ekwiwariantnym**, jeśli spełniony jest warunek opisany przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \times X_1 \arrow[r, "\lambda^1"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times f"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{G} \times X_2 \arrow[r, "\lambda^2"'] & X_2 \end{tikzcd}.$$

[2]Dla skrótu odwołujemy się do grupy poprzez jej nośnik.
[3]Grupa symetryczna zbioru to grupa permutacji jego elementów. (przyp.)

Analogicznie w przypadku działań prawostronnych $\varrho^A,\ A \in \{1,2\}$ na tych zbiorach odwzorowanie $f\ :\ X_1 \longrightarrow X_2$ spełniające warunek wyrażony przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} X_1 \times \mathrm{G} \arrow[r, "\varrho^1"] \arrow[d, "f\times\mathrm{id}_{\mathrm{G}}"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ X_2 \times \mathrm{G} \arrow[r, "\varrho^2"'] & X_2 \end{tikzcd}$$

nazwiemy **odwzorowaniem prawostronnie** G**-ekwiwariantnym**.

Parę $((X, \mathscr{T}(X)), \lambda)$ złożoną z przestrzeni topologicznej $(X, \mathscr{T}(X))$ oraz działania lewostronnego grupy topologicznej G na X nazywamy **przestrzenią z działaniem topologicznym lewostronnym grupy** G (albo G**-przestrzenią topologiczną lewostronną**), jeśli λ jest odwzorowaniem ciągłym. Analogicznie definiujemy **przestrzeń z działaniem topologicznym prawostronnym** (albo G**-przestrzeń topologiczną prawostronną**) G. Ciągłe odwzorowanie lewostronnie (wzgl. prawostronnie) G-ekwiwariantne między przestrzeniami z działaniem topologicznym lewostronnym (wzgl. prawostronnym) nosi miano **odwzorowania lewostronnie** (wzgl. **prawostronnie**) topologicznie G**-ekwiwariantnego**.

Parę $((M, \widehat{\mathscr{A}}), \lambda)$ złożoną z rozmaitości różniczkowalnej $(M, \widehat{\mathscr{A}})$ oraz działania lewostronnego grupy Liego G na M nazywamy **rozmaitością z działaniem gładkim lewostronnym grupy** G (albo G**-rozmaitością gładką lewostronną**), jeśli λ jest odwzorowaniem gładkim klasy C^∞. Analogicznie definiujemy **rozmaitość z działaniem gładkim prawostronnym** (albo G**-rozmaitość gładką prawostronną**) G. Gładkie odwzorowanie lewostronnie (wzgl. prawostronnie) G-ekwiwariantne klasy C^∞ między rozmaitościami z działaniem gładkim lewostronnym (wzgl. prawostronnym) nosi miano **odwzorowania lewostronnie** (wzgl. **prawostronnie**) **gładko** G**-ekwiwariantnego**. Zbiór odwzorowań G-ekwiwariantnych między ustalonymi dwiema rozmaitościami $M_A,\ A \in \{1,2\}$ z działaniem grupy G będziemy oznaczać symbolem

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(M_1, M_2)\,.$$

Przykłady 2.

(1) Kanonicznym przykładem G-przestrzeni jest sama grupa Liego G, przy czym jako działanie gładkie możemy wybrać dowolne złożenie dwóch działań elementarnych: **lewego działania regularnego**

$$\ell\ :\ \mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}\ :\ (h,g) \longmapsto m(h,g) \equiv \ell_h(g)$$

i **prawego działania regularnego**

$$\wp\ :\ \mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}\ :\ (g,h) \longmapsto m(g,h) \equiv \wp_h(g)\,,$$

e.g., **działanie dołączone**

$$\mathrm{Ad}\ :\ \mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}\ :\ (h,g) \longmapsto h \cdot g \cdot h^{-1} \equiv \ell_h \circ \wp_{h^{-1}}(g) \equiv \mathrm{Ad}_h(g)\,.$$

Tak przygotowani formalnie, możemy już przejść do stosownej abstrakcji struktury z Def. 1.

2. Wiązki główne z grupą strukturalną

Powyższa rekapitulacja rudymentarnych pojęć teorii grup Liego i G-przestrzeni[4] daje nam do ręki intuicje i narzędzia formalne nieodzowne do sprawnego i konstruktywnego poruszania się w środowisku struktur geometrycznych kluczowych dla geometryzacji modułów spinorowych, a także – dla modelowania symetrii lokalnych (a ściślej: ulokalnionych symetrii globalnych) w mechanice klasycznej i teorii pola. Wracamy teraz do ich szczegółowej dyskusji.

[4] Więcej o nich można dowiedzieć się z mojego wykładu krypto-monograficznego „Teoria grup II". Uzupełnienie nader istotne z punktu widzenia naszych przyszłych dociekań przyniesie także następny wykład.

Definicja 4. Niechaj G będzie grupą Liego. **Wiązka główna** o **grupie strukturalnej** G to wiązka włóknista

$$(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$$

o składowych:

- przestrzeń totalna P_{G} z wolnym działaniem prawostronnym $r.$ grupy strukturalnej G, które jest przechodnie we włóknie nad (dowolnym) punktem bazy, co opisuje diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"] \\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[r, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"'] & B \end{tikzcd} ;$$

- lokalne trywializacje

$$\tau_i \ : \ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}\,, \quad i \in I$$

  stowarzyszone z pokryciem otwartym $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ bazy B i G-ekwiwariantne względem działań prawostronnych: r na dziedzinie oraz regularnego $\wp$ na drugim czynniku kartezjańskim przeciwdziedziny,

$$\widetilde{\wp}^i \equiv \mathrm{id}_{\mathcal{O}_i} \times \wp \ : \ (\mathcal{O}_i \times \mathrm{G}) \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \ : \ \big((x,g),h\big) \longmapsto (x, g\cdot h)\,,$$

  tj. spełniające warunki

$$\tau_i \circ r_g = \widetilde{\wp}^i_g \circ \tau_i\,, \qquad i \in I\,.$$

Podwiązka główna o grupie strukturalnej H wiązki głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ to podwiązka $(\mathsf{P}_{\mathrm{H}}, B, \mathrm{H}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\restriction_{\mathsf{P}_{\mathrm{H}}})$ tejże wiązki (włóknistej) o grupie strukturalnej będącej podgrupą Liego $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$.

Morfizm wiązek głównych $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}_\alpha}, B_\alpha, \mathrm{G}_\alpha, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_\alpha}})$, $\alpha \in \{1,2\}$ o działaniach odnośnych grup strukturalnych r^α to trójka (Φ, f, φ) złożona z morfizmu wiązek włóknistych

$$(\Phi, f) \ : \ (\mathsf{P}_{\mathrm{G}_1}, B_1, \mathrm{G}_1, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_1}}) \longrightarrow (\mathsf{P}_{\mathrm{G}_2}, B_2, \mathrm{G}_2, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_2}})$$

oraz homomorfizmu grup topologicznych (wzgl. Liego) pozostających w relacji wyrażanej przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}_{\mathrm{G}_1} \times \mathrm{G}_1 \arrow[r, "r^1"] \arrow[d, "\Phi\times\varphi"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}_1} \arrow[r, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_1}}"] \arrow[d, "\Phi"] & B_1 \arrow[d, "f"] \\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}_2} \times \mathrm{G}_2 \arrow[r, "r^2"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}_2} \arrow[r, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_2}}"'] & B_2 \end{tikzcd} . \tag{1}$$

Przykłady 3.

(1) Trywialna wiązka główna nad B o grupie strukturalnej G, czyli

$$(B \times \mathrm{G}, B, \mathrm{G}, \mathrm{pr}_1)\,.$$

(2) Wiązka reperów wiązki wektorowej $\mathbb{V}$ modelowanej na $\mathbb{K}^{\times n}$, czyli

$$\big(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}, B, \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}), \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}\big)\,,$$

w szczególności zaś – **wiązka reperów nad rozmaitością** (albo **wiązka baz nad rozmaitością**) M wymiaru n, czyli

$$\big(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathsf{T}M, M, \mathrm{GL}(\mathsf{T}M) \cong \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}), \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathsf{T}M}\big)\,.$$

(3) **Rozwłóknienie Hopfa** (jeszcze raz, tym razem jako. . .)

$$\big(\mathrm{SU}(2) \equiv \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2, \mathrm{U}(1), \pi_{\mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1)}\big)\,,$$

w którym rzut na bazę przyjmuje postać

$$\pi_{\mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1)} \;:\; \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^{\times 3} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R} \;:\; \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix} \longmapsto \big(2z_1 \cdot \overline{z}_2, |z_1|^2 - |z_2|^2\big)\,,$$

a działanie definiujące grupy strukturalnej $\mathrm{U}(1)$ jest dane wzorem

$$\begin{aligned} r. \quad &: \quad \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1) \longrightarrow \mathrm{SU}(2) \\ &: \quad \left(\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix}, u\right) \longmapsto \begin{pmatrix} z_1 \cdot u & z_2 \cdot u^{-1} \\ -\overline{z}_2 \cdot u & \overline{z}_1 \cdot u^{-1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \overline{u} \end{pmatrix}\,, \end{aligned}$$

w którego ostatniej części $\mathrm{U}(1)$ traktujemy jako podgrupę Liego macierzowej grupy Liego $\mathrm{SU}(2)$.

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Def. 4 i niechaj

$$\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \coloneqq \{\ (p_1, p_2) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \quad | \quad \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1) = \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2)\ \}$$

będzie produktem włóknistym. **Odwzorowanie ilorazowe** na wiązce głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ to odwzorowanie

$$\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \;:\; \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{G}$$

określone przez warunek

$$\forall_{(p_1,p_2) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \;:\; p_2 = p_1 \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1, p_2)\,.$$

Uwaga 1. O postulowanej gładkości odwzorowania ilorazowego najłatwiej jest przekonać się przy użyciu trywializacji lokalnych. Istotnie, niechaj $p_1, p_2 \in (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_x$, $x \in \mathcal{O}_i$, $i \in I$, przy czym $p_\alpha = \tau_i^{-1}(x, g_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ dla pewnych elementów $g_\alpha \in \mathrm{G}$, a wtedy wobec równości

$$p_2 = \tau_i^{-1}(x, g_2) \equiv \tau_i^{-1}\big(x, g_1 \cdot \big(g_1^{-1} \cdot g_2\big)\big) = \tau_i^{-1}(x, g_1) \triangleleft \big(g_1^{-1} \cdot g_2\big) \equiv p_1 \triangleleft \big(g_1^{-1} \cdot g_2\big)$$

otrzymujemy reprezentację lokalną odwzorowania ilorazowego:

$$\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1, p_2) \equiv g_1^{-1} \cdot g_2 = \mathrm{m}\big(\mathrm{Inv} \circ \mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p_1), \mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p_2)\big)\,,$$

daną w postaci superpozycji odwzorowań gładkich (m jest operacją binarną w G), więc gładką.

Podstawowe własności strukturalne odwzorowania ilorazowego, z których przyjdzie nam korzystać niebawem, opisuje

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 5. Odwzorowanie ilorazowe spełnia warunki wyrażone przez następujące diagramy przemienne:

(DM1) skośna symetria

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[r, "\tau_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"] \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"] \\ \mathrm{G} \arrow[r, "\mathrm{Inv}"'] & \mathrm{G} \end{tikzcd}\,,$$

gdzie $\tau_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \;:\; \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \circlearrowleft \;:\; (p_1, p_2) \longmapsto (p_2, p_1)$ jest (obciętą do produktu włóknistego) transpozycją kanoniczną, czyli

$$\forall_{(p_1,p_2) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \;:\; \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2, p_1) = \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1, p_2)^{-1}\,;$$

(DM2) warunek 1-kocyklu

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[r, "(\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \mathrm{pr}_{1,2}, \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \mathrm{pr}_{2,3})"] \arrow[dr, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \mathrm{pr}_{1,3}"'] & \mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[d, "M"] \\ & \mathrm{G} \end{tikzcd},$$

gdzie $\mathrm{pr}_{i,j} \ : \ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \ : \ (p_1, p_2, p_3) \longmapsto (p_i, p_j), \ (i,j) \in \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$ jest (obciętym do produktu włóknistego) rzutem kanonicznym, czyli

$$\forall_{(p_1,p_2,p_3) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \ : \ \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2, p_3) \circ \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1, p_3)^{-1} \circ \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1, p_2) = e\,;$$

(DM3) G-ekwiwariantność

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"'] & (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \times \mathrm{G} \arrow[l, "(r \circ \mathrm{pr}_{1,3}, \mathrm{pr}_2)"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \times r"] \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}}"] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"] \\ \mathrm{G} & \mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[l, "\ell \circ (\mathrm{Inv} \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}}) \circ \tau_{\mathrm{G},\mathrm{G}}"] \arrow[r, "\wp"'] & \mathrm{G} \end{tikzcd},$$

czyli

$$\forall_{(p_1,p_2) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \ g_1, g_2 \in \mathrm{G}} \ : \ \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1 \triangleleft g_1, p_2 \triangleleft g_2) = g_1^{-1} \cdot \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1, p_2) \cdot g_2\,.$$

Dowód: Oczywisty. □

Nie zawsze mamy do czynienia z pełnym „pakietem" obiektów wymienionych w definicji wiązki głównej. Warto zatem zastanowić się, które z jej elementów mają naturę *konstytutywną*, tj. determinują istnienie struktury wiązki głównej na rozmaitości. Odpowiedzi na tak postawione pytanie przynosi

Stwierdzenie 2. Niechaj P, B będą rozmaitościami i niech G będzie grupą Liego. Zakładamy też, że jest określona surjektywna submersja $\pi \ : \ \mathsf{P} \longrightarrow B$ oraz gładkie działanie prawostronne $r. \ : \ \mathsf{P} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathsf{P}$ grupy G na P. Jeśli działanie $r.$ jest swobodne, jego orbity pokrywają się z poziomicami π, a odwzorowanie $\phi_{\mathsf{P}} \ : \ \mathsf{P} \times_B \mathsf{P} \longrightarrow \mathrm{G}$ określone (jednoznacznie) przez warunek

$$\forall_{(p_1,p_2) \in \mathsf{P} \times_B \mathsf{P}} \ : \ p_2 = r_{\phi_{\mathsf{P}}(p_1,p_2)}(p_1)$$

jest gładkie, to wówczas czwórka

$$(\mathsf{P}, B, \mathrm{G}, \pi)$$

jest wiązką główną.

Dowód: Na podstawie Tw. 2 z wykładu I (str. 14) o istnieniu cięć lokalnych surjektywnej submersji stwierdzamy istnienie pokrycia otwartego $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ rozmaitości B, na którego elementach określone są gładkie cięcia lokalne $\sigma_i \ : \ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathsf{P}$ submersji π, możemy zatem zdefiniować jawnie gładkie odwzorowania

$$\tau_i^{-1} \ : \ \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{O}_i) \ : \ (x, g) \longmapsto r_g\big(\sigma_i(x)\big)\,.$$

Wykorzystując odwzorowanie ϕ_{P}, bez trudu znajdujemy ich (gładkie) odwrotności:

$$\tau_i \ : \ \pi^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \ : \ p \longmapsto \big(\pi(p), \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i \circ \pi(p), p\big)\big)\,.$$

Są one dobrze określone, gdyż

$$\pi\big(\sigma_i \circ \pi(p)\big) = (\pi \circ \sigma_i) \circ \pi(p) = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_i} \circ \pi(p) = \pi(p)\,,$$

i – istotnie – spełniają postulowane tożsamości:

$$\tau_i^{-1} \circ \tau_i(p) = \tau_i^{-1}\big(\pi(p), \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i \circ \pi(p), p\big)\big) = r_{\phi_{\mathsf{P}}(\sigma_i \circ \pi(p), p)}\big(\sigma_i \circ \pi(p)\big) \equiv p\,,$$

$$\begin{aligned}
\tau_i \circ \tau_i^{-1}(x,g) &= \tau_i\big(r_g\big(\sigma_i(x)\big)\big) = \big(\pi \circ r_g \circ \sigma_i(x), \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i \circ \pi \circ r_g \circ \sigma_i(x), r_g \circ \sigma_i(x)\big)\big) \\
&= \big(\pi \circ \sigma_i(x), \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i \circ \pi \circ \sigma_i(x), r_g \circ \sigma_i(x)\big)\big) \\
&= \big(x, \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i(x), r_g \circ \sigma_i(x)\big)\big) = (x,g)\,,
\end{aligned}$$

z których druga wynika stąd, że działanie G odwzorowuje poziomicę π w siebie, a do tego nieuchronnie

$$\forall_{(p_1,p_2,g)\in \mathsf{P}^{\times 2}\times \mathrm{G}} \ :\ \phi_{\mathsf{P}}\big(p_1, r_g(p_2)\big) = \phi_{\mathsf{P}}(p_1,p_2)\cdot g\,.$$

Są one także stosownie G-ekwiwariantne, oto bowiem[5]

$$\tau_i^{-1}\big((x,g) \triangleleft h\big) \equiv \tau_i^{-1}(x, g\cdot h) = r_{g\cdot h}\big(\sigma_i(x)\big) = r_h \circ r_g\big(\sigma_i(x)\big) = r_h\big(r_g \circ \sigma_i(x)\big) \equiv r_h \circ \tau_i^{-1}(x,g)\,.$$

Skonstruowane powyżej trywializacje lokalne spełniają w punktach $x \in \mathcal{O}_{ij},\ i,j \in I$ warunki

$$\begin{aligned}
\tau_i \circ \tau_j^{-1}(x,g) &= \tau_i\big(r_g \circ \sigma_j(x)\big) = \big(\pi \circ r_g \circ \sigma_j(x), \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i \circ \pi \circ r_g \circ \sigma_j(x), r_g \circ \sigma_j(x)\big)\big) \\
&= \big(x, \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i(x), r_g \circ \sigma_j(x)\big)\big) = \big(x, \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i(x), \sigma_j(x)\big)\cdot g\big)\,,
\end{aligned}$$

z których odczytujemy postać odwzorowań przejścia:

$$g_{ij} \ :\ \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{G} \ :\ x \longmapsto \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i(x), \sigma_j(x)\big)\,,$$

zamykając tym samym procedurę identyfikacji postulowanej struktury wiązki głównej o grupie strukturalnej G. □

W następnej kolejności przedstawimy wygodne kryterium trywializowalności wiązki głównej.

Stwierdzenie 3. Istnieje wzajem jednoznaczna odpowiedniość między cięciami lokalnymi klasy C^∞ wiązki głównej i jej trywializacjami lokalnymi. W szczególności wiązka główna jest (globalnie) trywialna wtedy i tylko wtedy, gdy ma globalne cięcie.

Dowód: Cięciu lokalnemu $\sigma \ :\ \mathcal{O} \longrightarrow \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}) \subset \mathsf{P}_{\mathrm{G}},\ \mathcal{O} \in \mathscr{T}(B)$ przyporządkowujemy trywializację (lokalną)

$$\tau_\sigma \ :\ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O} \times \mathrm{G} \ :\ p \longmapsto \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), p\big)\big)$$

o pożądanych własnościach, a więc odwracalną,

$$\tau_\sigma^{-1} \ :\ \mathcal{O} \times \mathrm{G} \longrightarrow \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}) \ :\ (x,g) \longmapsto \sigma(x) \triangleleft g\,,$$

i G-ekwiwariantną,

$$\begin{aligned}
\tau_\sigma(p \triangleleft g) &\equiv \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p \triangleleft g), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p \triangleleft g), p \triangleleft g\big)\big) \\
&= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), p \triangleleft g\big)\big) \\
&= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), p\big)\cdot g\big) \\
&= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), p\big)\big) \triangleleft g \equiv \tau_\sigma(p) \triangleleft g\,.
\end{aligned}$$

I odwrotnie, dowolnej trywilizacji lokalnej $\tau \ :\ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O} \times \mathrm{G}$ przypisujemy cięcie (lokalne)

$$\sigma_\tau \ :\ \mathcal{O} \longrightarrow \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}) \ :\ x \longmapsto \tau^{-1}(x,e)\,.$$

[5] Odwrotność G-ekwiwariantnej bijekcji jest odwzorowaniem G-ekwiwariantnym.

Powyższe przyporządkowania są przy tym wzajem odwrotne, oto bowiem – z jednej strony –

$$\forall_{x\in\mathcal{O}}\ :\ \sigma_{\tau_\sigma}(x) = \tau_\sigma^{-1}(x,e) = \sigma(x) \triangleleft e = \sigma(x)\,,$$

oraz – z drugiej strony –

$$\begin{aligned}\forall_{p\in\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O})}\ :\ \tau_{\sigma_\tau}(p) &= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma_\tau\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), p\big)\big)\\ &= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), e\big), p\big)\big)\,,\end{aligned}$$

a ponieważ

$$p \equiv \tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), e\big) \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), e\big), p\big)\,,$$

czyli

$$\begin{aligned}\tau(p) &= \tau\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), e\big) \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), e\big), p\big)\big)\\ &= \tau\circ\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), e\big) \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), e\big), p\big)\\ &= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), e\big) \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), e\big), p\big)\\ &= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), e\big), p\big)\big)\,,\end{aligned}$$

przeto

$$\tau_{\sigma_\tau}(p) = \tau(p)\,.$$

□

Uwaga 2. Należy podkreślić, że ostatnia część tezy powyższego stwierdzenia nie stosuje się do wiązek włóknistych w ogólności. Ażeby się o tym przekonać, wystarczy zauważyć, że każda wiązka wektorowa ma globalne cięcie zerowe $\mathbf{0}_{\mathbb{V}}$ (a nie każda taka wiązka jest globalnie trywializowalna).

Na zakończenie naszego trawersu przez elementarz teorii wiązek głównych zajmiemy się wyznaczeniem wygodnego opisu lokalnego morfizmów wiązek głównych pokrywających dyfeomorfizm identycznościowy na bazie (pośród których z czasem rozpoznamy tzw. „transformacje symetrii cechowania”).

Twierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 4. Dowolny morfizm $(\Phi,\ \mathrm{id}_B, \mathrm{id}_{\mathrm{G}})$ wiązek głównych $(\mathsf{P}^\alpha_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}^\alpha_{\mathrm{G}}})$, $\alpha\in\{1,2\}$ o odnośnych trywializacjach lokalnych $\tau_i^\alpha\ :\ \pi^{-1}_{\mathsf{P}^\alpha_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i\times\mathrm{G}$ (stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$) i odwzorowaniach przejścia $g^\alpha_{ij}\ :\ \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{G}$), opisany przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}^1_{\mathrm{G}} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_{\mathsf{P}^1_{\mathrm{G}}}"'] & \mathsf{P}^2_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\pi_{\mathsf{P}^2_{\mathrm{G}}}"] \\ B \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_B"'] & B \end{tikzcd}\ ,$$

zadaje rodzinę $\{h_i\}_{i\in I}$ odwzorowań (lokalnie) klasy C^∞

$$h_i\ :\ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{G}\,,\quad i\in I$$

o własności

$$\forall_{x\in\mathcal{O}_{ij}}\ :\ g^2_{ij}(x) = h_i(x)\cdot g^1_{ij}(x)\cdot h_j(x)^{-1}\,. \tag{2}$$

I odwrotnie, każda taka rodzina wyznacza jedyny morfizm opisanego typu.

<u>*Dowód:*</u> Rozumując analogicznie jak w dowodzie Tw. 3 z notatek do Wykładów 2., 3. i 4., upewniamy się, że odwzorowanie Φ jest jednoznacznie zadane przez wartości przyjmowane na lokalnie płaskich cięciach $\sigma_i^1 \equiv \sigma_{\tau_i^1}$, $i \in I$ stowarzyszonych z lokalnymi trywializacjami swej dziedziny. Istotnie, dowolny punkt z włókna $\mathsf{P}^1_{\mathrm{G}\,x}$ możemy wobec założonej G-ekwiwariantności trywializacji zapisać w postaci

$$\tau_i^{1\,-1}(x,g) = \sigma_i^1(x) \triangleleft g\,,$$

a zatem wobec G-ekwiwariantności Φ zachodzi

$$\Phi\big(\tau_i^{1\,-1}(x,g)\big) = \Phi\big(\sigma_i^1(x) \triangleleft g\big) = \Phi\big(\sigma_i^1(x)\big) \triangleleft g\,.$$

Definiujemy jawnie gładkie odwzorowania

$$h_i := \mathrm{pr}_2 \circ \tau_i^2 \circ \Phi \circ \sigma_i^1 \ :\ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{G}$$

i sprawdzamy: z jednej strony

$$\tau_j^{2\,-1}\big(x,h_j(x)\big) = \tau_i^{2\,-1}\big(x,g_{ij}^2(x)\cdot h_j(x)\big)\,,$$

a z drugiej

$$\begin{aligned}\tau_j^{2\,-1}\big(x,h_j(x)\big) &= \Phi\circ\sigma_j^1(x) \equiv \Phi\big(\tau_j^{1\,-1}(x,e)\big) = \Phi\big(\tau_i^{1\,-1}\big(x,g_{ij}^1(x)\big)\big) = \Phi\big(\tau_i^{1\,-1}(x,e)\big) \triangleleft g_{ij}^1(x)\\ &\equiv \Phi\circ\sigma_i^1(x) \triangleleft g_{ij}^1(x) = \tau_j^{2\,-1}\big(x,h_i(x)\big) \triangleleft g_{ij}^1(x) = \tau_j^{2\,-1}\big(x,h_i(x)\cdot g_{ij}^1(x)\big)\,,\end{aligned}$$

co w sumie odtwarza postulowaną relację w konsekwencji bijektywności trywializacji lokalnych.

Niechaj teraz $(\mathsf{P}^\alpha_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}^\alpha_{\mathrm{G}}})$, $\alpha \in \{1,2\}$ będą wiązkami głównymi o trywializacjach lokalnych $\tau_i^\alpha \ :\ \pi^{-1}_{\mathsf{P}^\alpha_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}$ i odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^\alpha \ :\ \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{G}$. Mając dowolną rodzinę odwzorowań $h_i \ :\ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{G}$ opisanych w tezie dowodzonego twierdzenia, definiujemy nad elementami pokrycia współtrywializującego odwzorowania lokalnie gładkie

$$\Phi_i \ :\ \pi^{-1}_{\mathsf{P}^1_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \pi^{-1}_{\mathsf{P}^2_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i) \ :\ \tau_i^{1\,-1}(x,g) \longmapsto \tau_i^{2\,-1}\big(x,h_i(x)\cdot g\big)\,,$$

dla których liczymy – w dowolnym punkcie $(x,g) \in \mathcal{O}_{ij} \times \mathrm{G}$ –

$$\begin{aligned}\Phi_j\big(\tau_i^{1\,-1}(x,g)\big) &= \Phi_j\big(\tau_j^{1\,-1}\big(x,g_{ji}^1(x)\cdot g\big)\big) = \tau_j^{2\,-1}\big(x,h_j(x)\cdot g_{ji}^1(x)\cdot g\big)\\ &= \tau_i^{2\,-1}\big(x,g_{ij}^2(x)\cdot h_j(x)\cdot g_{ji}^1(x)\cdot g\big) = \tau_i^{2\,-1}\big(x,h_i(x)\cdot g\big)\\ &\equiv \Phi_i\big(\tau_i^{1\,-1}(x,g)\big)\,.\end{aligned}$$

Na tej podstawie wnioskujemy, że Φ_i, $i \in I$ są ograniczeniami odwzorowania globalnie gładkiego

$$\Phi \ :\ \mathsf{P}^1_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{P}^2_{\mathrm{G}}\,, \qquad \Phi\restriction_{\pi^{-1}_{\mathsf{P}^1_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i\,,$$

działającego z zachowaniem włókien i jawnie G-ekwiwariantnego (dzięki przemienności lewego i prawego działania regularnego G na sobie oraz założonej G-ekwiwariantności trywializacji). □

Nasz tour d'horizon teorii wiązek głównych wieńczy poniższe stwierdzenie, będące prostą konsekwencją (konstruktywnego dowodu) powyższego Twierdzenia.

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def. 4. Podkategoria

$$\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B\,|\,\mathrm{id}_B)$$

kategorii $\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)$ wiązek głównych nad bazą B o grupie strukturalnej G o tej samej klasie obiektów co $\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)$ i o morfizmach o identycznościowej składowej na bazie, $f = \mathrm{id}_B$ (i na grupie strukturalnej, $\varphi = \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$) jest grupoidem.

Dowód: W świetle Tw. 2 wystarczy poprowadzić rozważania w opisie lokalnym, w którym dowolny morfizm $\Phi : \mathsf{P}^1_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{P}^2_{\mathrm{G}}$ pokrywający identyczność na bazie B jest reprezentowany przez rodzinę odwzorowań $h_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{G}$, $i \in I$. Na mocy tego samego stwierdzenia rodzina odwzorowań $\{\widetilde{h}_i := \mathrm{Inv} \circ h_i\}_{i \in I}$ określa morfizm $\mathsf{P}^2_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{P}^1_{\mathrm{G}}$, który w oczywisty sposób jest odwrotnością Φ. □

Do dyskusji istotnych konstrukcji z udziałem wiązek głównych (takich jak redukcja wiązki głównej wzdłuż włożenia podgrupy właściwej jej grupy strukturalnej (np. na wiązce baz wiązki stycznej nad rozmaitością w obecności struktury metrycznej) i jej prolongacja wzdłuż rozszerzenia centralnego tejże)) jeszcze wrócimy, a tymczasem kontynuujemy nasz trawers cwałem przez geometryzacje struktur algebraicznych. . .