

ACTION DIRECTE GRUPY LIEGO
(MAWF '22/23 2.VII & 2.VIII [RRS])



Rzetelna dyskusja wiązek głównych i stowarzyszonych, których potrzebujemy w konstrukcji wiązek Clifforda i odnośnych wiązek spinorowych, wymaga wprowadzenia do teorii działania grup Liego na różniczkowalnych. Zaczynamy od pojęcia podstawowego¹

Definicja 1. Grupa topologiczna to grupa

$$(G, m \equiv \cdot, \text{Inv} \equiv (\cdot)^{-1}, \bullet \mapsto e),$$

której nośnik G jest przestrzenią topologiczną, a odwzorowania strukturalne m i Inv są ciągłe. **Podgrupa topologiczna** grupy topologicznej $(G, m, \text{Inv}, \bullet \mapsto e)$ to grupa topologiczna $(H, m|_{H \times H}, \text{Inv}|_H, \bullet \mapsto e)$, której nośnik H jest podprzestrzenią topologiczną przestrzeni G . **Homomorfizm topologiczny** między grupami topologicznymi $(G_1, m_1, \text{Inv}_1, \bullet_1 \mapsto e_1)$ i $(G_2, m_2, \text{Inv}_2, \bullet_2 \mapsto e_2)$ to homomorfizm grup ciągły względem topologii dziedziny i przeciwdziedziny.

Grupa Liego to grupa

$$(G, m \equiv \cdot, \text{Inv} \equiv (\cdot)^{-1}, \bullet \mapsto e),$$

której nośnik jest różniczkowalną, a odwzorowania strukturalne m i Inv są klasy C^∞ . **Podgrupa Liego** grupy Liego $(G, m, \text{Inv}, \bullet \mapsto e)$ to grupa Liego $(H, m|_{H \times H}, \text{Inv}|_H, \bullet \mapsto e)$, której nośnik H jest podróżniczkowalną różniczkowalności C^∞ różniczkowalności G . **Homomorfizm grup Liego** to homomorfizm grup gładki względem struktury różniczkowej dziedziny i przeciwdziedziny.

Bogatym źródłem przykładów grup Liego jest poniższe twierdzenie, które podajemy bez dowodu (dowód jest prezentowany na kursie Teorii Grup II).

Twierdzenie 1 (Cartana o podgrupie domkniętej). Każda podgrupa domknięta grupy Liego jest tej ostatniej podróżniczkowalnością i grupą Liego (a zatem w sumie podgrupą Liego). I odwrotnie, każda podgrupa grupy Liego będąca jej podróżniczkowalnością jest domkniętą podgrupą Liego tejże grupy.

Przykłady 1.

¹W interesujących nas zastosowaniach będziemy mieć zawsze do czynienia ze strukturą różniczkowalną zarówno na grupie, jak i na zbiorze, na którym ta działa, jednakowoż dla zachowania pełnej kontroli nad założeniami, których przyjęcie jest niezbędnym w różnych rozpatrywanych przez nas okolicznościach, warto wprowadzić pojemniejsze pojęcie grupy i jej działania w kategorii topologicznej, co też czynimy poniżej.

- (1) dowolna $V \in \text{Obj Vect}_{\mathbb{K}}^{(<\infty)}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ jest przemienną grupą Liego z $(m, \text{Inv}, e) = (+_V, P_V, \mathbf{0}_V)$;
- (2) dla V z poprzedniego przykładu $\text{GL}(V; \mathbb{K}) = \{ \chi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V) \mid \exists \chi^{-1} \}$ jako otwarty podzbiór przestrzeni wektorowej $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ jest grupą Liego (z superpozycją endomorfizmów jako mnożeniem) zwaną **grupą główną liniową** V – jest ona izomorficzna z **grupą główną liniową** $\text{GL}(n; \mathbb{K}) = \{ A \in \mathbb{K}(n) \mid \det_{(n)} A \neq 0 \}$ dziedziczącą topologię i strukturę różniczkową z przestrzeni wektorowej $\mathbb{K}(n) \equiv \mathbb{K}^{n^2}$, w której jest zanurzona jako podzbiór otwarty $\det_{(n)}^{-1}(\mathbb{K}^{\times})$ (wszak $\det_{(n)} : \mathbb{K}(n) \rightarrow \mathbb{K}$ jest odwzorowaniem wielomianowo zależnym od wyrazów macierzy, więc ciągłym);
- (3) wszechobecne w fizyce „małe” grupy Liego $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \equiv \text{U}(1) \cong \mathbb{S}^1$ i $\text{SU}(2) \cong \mathbb{S}^3$ oraz **grupa Poincarégo** $\text{ISO}(3, 1) = \mathbb{R}^4 \rtimes \text{SO}(3, 1)$ o topologii będącej pochodną (złożonej) topologii **grupy Lorentza** $\text{SO}(3, 1) = \{ L \in \text{GL}(4; \mathbb{R}) \mid L^T \cdot \eta \cdot L = \eta \}$ odwzorowań zachowujących metrykę Minkowskiego $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ (ich naturalne działanie na \mathbb{R}^4 określa iloczyn półprosty w definicji $\text{ISO}(3, 1)$);
- (4) **grupa specjalna liniowa** $\text{SL}(n; \mathbb{K}) = \{ A \in \text{GL}(n; \mathbb{K}) \mid \det_{(n)} A = 1 \}$;
- (5) **grupa ortogonalna** $\text{O}(n; \mathbb{K}) = \{ A \in \text{GL}(n; \mathbb{K}) \mid A^T \cdot A = \mathbf{1}_n \}$;
- (6) **grupa specjalna ortogonalna** $\text{SO}(n; \mathbb{K}) = \text{O}(n; \mathbb{K}) \cap \text{SL}(n; \mathbb{K})$;
- (7) **grupa unitarna** $\text{U}(n) = \{ A \in \text{GL}(n; \mathbb{C}) \mid A^\dagger \cdot A = \mathbf{1}_n \}$;
- (8) **grupa specjalna unitarna** $\text{SU}(n) = \text{U}(n) \cap \text{SL}(n; \mathbb{C})$;
- (9) **grupa symplektyczna** $\text{Sp}(n; \mathbb{K}) = \{ A \in \text{SL}(2n; \mathbb{K}) \mid A^T \cdot J_n \cdot A = J_n \}$ odwzorowań zachowujących „strukturę symplektyczną”

$$J_n = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix}.$$

Uzgodnienie struktury różniczkowej i algebraicznej na zbiorze G ma daleko idące konsekwencje, których szczegółowe studium jest przedmiotem odrębnego kursu (Teoria Grup II – zapraszam w tym semestrze!) i z których część przyjdzie nam jeszcze omawiać w kontekście konstrukcji powiązania na wiązkach głównych. Tymczasem jednak przejdziemy bezpośrednio do dyskusji kompleksu zagadnień związanych z działaniem grup Liego na różnorodnościach różniczkowalnych, które odgrywają kluczową rolę w konstrukcji wiązek stowarzyszonych (takich jak wiązki Clifforda i spinorowe właśnie). Zacniemy, jak zazwyczaj, od pojęcia podstawowego.

Definicja 2. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj G będzie grupą² i niech X będzie zbiorem o grupie symetrycznej³. Homomorfizm grup

$$\lambda : G \rightarrow \mathfrak{S}(X) : g \mapsto \lambda_g$$

określamy mianem **działania lewostronnego grupy G na zbiorze X** , na którym jest określone działanie grupy G , a który nazywamy **zbiorem z działaniem lewostronnym grupy G** . Antyhomomorfizm

$$\varrho : G \rightarrow \mathfrak{S}(X) : g \mapsto \varrho_g$$

nazywamy **działaniem prawostronnym grupy G na zbiorze X** , a zbiór w nie wyposażony – **zbiorem z działaniem prawostronnym grupy G** . Lekko przeciążając notację, realizację podgrupy $\lambda_G \subset \mathfrak{S}(X)$ będziemy zapisywać jako

$$\lambda : G \times X \rightarrow X : (g, x) \mapsto \lambda_g(x) \equiv g \triangleright x \equiv \lambda(g, x),$$

a podgrupy $\varrho_G \subset \mathfrak{S}(X)$ – jako

$$\varrho : X \times G \rightarrow X : (x, g) \mapsto \varrho_g(x) \equiv x \triangleleft g \equiv \varrho(x, g).$$

Niechaj X_A , $A \in \{1, 2\}$ będą zbiorami z działaniami lewostronnymi λ^A grupy G i niech $f : X_1 \rightarrow X_2$ będzie odwzorowaniem pomiędzy nimi. Powiemy, że f jest **odwzorowaniem**

²Dla skrótu odwołujemy się do grupy poprzez jej nośnik.

³Grupa symetryczna zbioru to grupa permutacji jego elementów. (przyp.)

lewostronnie G-ekwiwariantnym, jeśli spełniony jest warunek opisany przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} G \times X_1 & \xrightarrow{\lambda^1} & X_1 \\ \text{id}_G \times f \downarrow & & \downarrow f \\ G \times X_2 & \xrightarrow{\lambda^2} & X_2 \end{array} .$$

Analogicznie w przypadku działań prawostronnych ϱ^A , $A \in \{1, 2\}$ na tych zbiorach odwzorowanie $f : X_1 \rightarrow X_2$ spełniające warunek wyrażony przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times G & \xrightarrow{\varrho^1} & X_1 \\ f \times \text{id}_G \downarrow & & \downarrow f \\ X_2 \times G & \xrightarrow{\varrho^2} & X_2 \end{array}$$

nazwiemy **odwzorowaniem prawostronnie G-ekwiwariantnym**.

Parę $((X, \mathcal{T}(X)), \lambda)$ złożoną z przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}(X))$ oraz działania lewostronnego grupy topologicznej G na X nazywamy **przestrzenią z działaniem topologicznym lewostronnym grupy G** (albo **G-przestrzenią topologiczną lewostronną**), jeśli λ jest odwzorowaniem ciągłym. Analogicznie definiujemy **przestrzeń z działaniem topologicznym prawostronnym** (albo **G-przestrzeń topologiczną prawostronną**) G . Ciągłe odwzorowanie lewostronnie (wzgl. prawostronnie) G-ekwiwariantne między przestrzeniami z działaniem topologicznym lewostronnym (wzgl. prawostronnym) nosi miano **odwzorowania lewostronnie (wzgl. prawostronnie) topologicznie G-ekwiwariantnego**.

Parę $((M, \mathcal{A}), \lambda)$ złożoną z rozmaitości różniczkowalnej (M, \mathcal{A}) oraz działania lewostronnego grupy Liego G na M nazywamy **rozmaitością z działaniem gładkim lewostronnym grupy G** (albo **G-rozmaitością gładką lewostronną**), jeśli λ jest odwzorowaniem gładkim klasy C^∞ . Analogicznie definiujemy **rozmaitość z działaniem gładkim prawostronnym** (albo **G-rozmaitość gładką prawostronną**) G . Gładkie odwzorowanie lewostronnie (wzgl. prawostronnie) G-ekwiwariantne klasy C^∞ między rozmaitościami z działaniem gładkim lewostronnym (wzgl. prawostronnym) nosi miano **odwzorowania lewostronnie (wzgl. prawostronnie) gładko G-ekwiwariantnego**. Zbiór odwzorowań G-ekwiwariantnych między ustalonymi dwiema rozmaitościami M_A , $A \in \{1, 2\}$ z działaniem grupy G będziemy oznaczać symbolem

$$\text{Hom}_G(M_1, M_2).$$

Przykłady 2.

- (1) Kanonicznym przykładem G-przestrzeni jest sama grupa Liego G , przy czym jako działanie gładkie możemy wybrać dowolne złożenie dwóch działań elementarnych: **lewego działania regularnego**

$$\ell : G \times G \rightarrow G : (h, g) \mapsto m(h, g) \equiv \ell_h(g)$$

i **prawego działania regularnego**

$$\wp : G \times G \rightarrow G : (g, h) \mapsto m(g, h) \equiv \wp_h(g),$$

e.g., **działanie dołączone**

$$\text{Ad} : G \times G \rightarrow G : (h, g) \mapsto h \cdot g \cdot h^{-1} \equiv \ell_h \circ \wp_{h^{-1}}(g) \equiv \text{Ad}_h(g).$$

W następnej kolejności dowodzimy pomocniczego (dla dowodu zasadniczego Tw. 3)

Twierdzenie 2 (O rzędzie odwzorowania ekwiwariantnego). Przyjmijmy zapis Def. 2 (i wcześniej-szy). Niechaj $((M_A, \widetilde{\mathcal{T}}_A), \lambda^A)$, $A \in \{1, 2\}$ będą rozmaitościami z odnośnymi działaniami gładkimi (lewostronnymi) grupy Liego G , przy czym zakładamy dodatkowo, że λ^1 jest przechodnie, tj.,

$$\forall_{x, y \in M_1} \exists_{g \in G} : y = \lambda^1(g, x),$$

i niech $F : M_1 \rightarrow M_2$ będzie odwzorowaniem gładko (lewostronnie) G -ekwiwariantnym. Wówczas F ma stały rząd, w szczególności zaś przeciwobrazy punktów w M_2 względem F są domkniętymi podrozmaitościami włożonymi w M_1 .

Dowód: Wobec przechodniości działania G na rozmaitości M_1 , dla każdej pary punktów $x_1, x_2 \in M_1$ istnieje element $g_{21} \in G$ o własności $x_2 = \lambda_{g_{21}}^1(x_1)$, przy czym z racji G -ekwiwariantności F zachodzi tożsamość funkcjonalna

$$F \circ \lambda_{g_{21}}^1 = \lambda_{g_{21}}^2 \circ F,$$

a zatem także tożsamość

$$\mathbb{T}_{x_1}(F \circ \lambda_{g_{21}}^1) = \mathbb{T}_{x_1}(\lambda_{g_{21}}^2 \circ F),$$

którą możemy przepisać w postaci

$$\mathbb{T}_{x_2}F \circ \mathbb{T}_{x_1}\lambda_{g_{21}}^1 = \mathbb{T}_{F(x_1)}\lambda_{g_{21}}^2 \circ \mathbb{T}_{x_1}F.$$

Z racji dyfeomorficznego charakteru odwzorowań $\lambda_{g_{21}}^A$, $A \in \{1, 2\}$ (przesądzającego o odwracalności odwzorowań do nich stycznych) z powyższej tożsamości wywodzimy wniosek o tożsamości rzędów:

$$\text{rk } \mathbb{T}_{m_2}F = \text{rk } \mathbb{T}_{m_1}F,$$

który w konsekwencji przechodniości λ^1 możemy rozciągnąć na całą dziedzinę F . Końcowa część tezy wynika wprost z twierdzenia o rzędzie (odwzorowania). \square

Kluczową z punktu widzenia zastosowań w konstrukcji wiązek stowarzyszonych własność działania grupy Liego (ogólniej: topologicznej) na rozmaitości (ogólniej: przestrzeni topologicznej) wprowadzamy w poniższej

Definicja 3. Przyjmijmy zapis Def. 2. Działanie $\lambda : G \times X \rightarrow X$ grupy topologicznej G na przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}(X))$ nazywamy **właściwym**, ilekroć odwzorowanie

$$(1) \quad \Lambda := (\lambda, \text{pr}_2) : G \times X \rightarrow X \times X : (g, x) \mapsto (g \triangleright x, x)$$

jest właściwe, tj. ilekroć przeciwobrazy zbiorów zwartych względem Λ są zwarte.

Warunek właściwości działania można przeformułować jak poniżej.

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 3. Działanie $\lambda : G \times X \rightarrow X$ grupy topologicznej G na przestrzeni Hausdorffa $(X, \mathcal{T}(X))$ jest właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego podzbioru zwartego $\mathcal{K} \subset X$ podzbiór

$$G(\mathcal{K}) := \{ g \in G \mid \lambda_g(\mathcal{K}) \cap \mathcal{K} \neq \emptyset \}$$

jest zwarty.

Dowód: Załóżmy najpierw, że działanie λ jest właściwe, tj. przeciwobraz dowolnego podzbioru zwartego w $X \times X$ względem odwzorowania Λ (z Def. 3) jest zwarty. Niechaj $\mathcal{K} \subset X$ będzie wybranym (dowolnie) podzbiorem zwartym, a wtedy podzbiór

$$\begin{aligned} G(\mathcal{K}) &\equiv \{ g \in G \mid \exists_{x \in \mathcal{K}} : g \triangleright x \in \mathcal{K} \} \equiv \{ g \in G \mid \exists_{x \in X} : \Lambda(g, x) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \} \\ &= \text{pr}_1(\Lambda^{-1}(\mathcal{K} \times \mathcal{K})) \end{aligned}$$

jest zwarty jako ciągły obraz (rzut kanoniczny pr_1 jest odwzorowaniem ciągłym) przeciwobrazu kwadratu kartezjańskiego zbioru zwartego (czyli zbioru zwartego w topologii produktowej) względem odwzorowania właściwego Λ .

I odwrotnie, niechaj podzbiór $G(\mathcal{K})$ będzie zwarty dla dowolnego podzbioru zwartego $\mathcal{K} \subset X$. Rozważmy dowolny podzbiór zwarty $\tilde{\mathcal{K}} \subset X \times X$. Jego ciągle obrazy $\text{pr}_A(\tilde{\mathcal{K}}) \subset X$, $A \in \{1, 2\}$ są zwarte, przeto własność tę ma także ich suma mnogościowa, $\mathcal{K}_{12} \equiv \text{pr}_1(\tilde{\mathcal{K}}) \cup \text{pr}_2(\tilde{\mathcal{K}}) \subset X$. Przy tym oczywiście ilekroć $(g, x) \in G \times X$ spełnia warunek $\Lambda(g, x) \in \tilde{\mathcal{K}}$, to tym bardziej para ta spełnia warunek $\Lambda(g, x) \in \mathcal{K}_{12} \times \mathcal{K}_{12}$, oto bowiem relacja $(x_1, x_2) \in \tilde{\mathcal{K}}$ implikuje relacje $x_1 \in \text{pr}_1(\tilde{\mathcal{K}}) \subset \mathcal{K}_{12}$ oraz $x_2 \in \text{pr}_2(\tilde{\mathcal{K}}) \subset \mathcal{K}_{12}$, więc też $(x_1, x_2) \in \mathcal{K}_{12} \times \mathcal{K}_{12}$, zatem ostatecznie

$$\Lambda^{-1}(\tilde{\mathcal{K}}) \subset \Lambda^{-1}(\mathcal{K}_{12} \times \mathcal{K}_{12}) \equiv \{ (g, x) \in G \times \mathcal{K}_{12} \mid g \triangleright x \in \mathcal{K}_{12} \} \subset G(\mathcal{K}_{12}) \times \mathcal{K}_{12},$$

co w świetle twierdzenia o zwartości podzbiorów domkniętych przestrzeni topologicznej przesądza o zwartości $\Lambda^{-1}(\tilde{\mathcal{K}})$. Istotnie, podzbiór ten jest domknięty jako ciągły przeciwobraz zwartego, więc – na mocy twierdzenia o domkniętości podzbiorów zwartych przestrzeni Hausdorffa, a wobec hausdorffowości X , która jest dziedziczona przez $X \times X$ – domkniętego podzbioru $\tilde{\mathcal{K}}$, a ponieważ – jak pokazaliśmy – jest podzbiorem (pod)przestrzeni zwartej $G(\mathcal{K}_{12}) \times \mathcal{K}_{12}$ (iloczynu kartezjańskiego zbiorów zwartych), przeto jest – znów na mocy pierwszego z przywoływanych twierdzeń – także zwarty. \square

Nierzadko wygodniejszym okazuje się opis działania właściwego zawarty w

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 3. Działanie $\lambda : G \times X \rightarrow X$ grupy topologicznej G na lokalnie prezwartej⁴ przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}(X))$ jest właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy ze zbieżności dowolnego ciągu punktów

$$\lambda(g., x.) : \mathbb{N} \rightarrow M : n \mapsto g_n \triangleright x_n,$$

określonego dla dowolnego zbieżnego ciągu punktów $x. : \mathbb{N} \rightarrow X$ oraz dowolnego ciągu elementów $g. : \mathbb{N} \rightarrow G$, wynika zbieżność pewnego podciągu ciągu $g.$

Dowód: Załóżmy najpierw, że odwzorowanie Λ jest właściwe i niechaj $x. : \mathbb{N} \rightarrow X$ oraz $g. : \mathbb{N} \rightarrow G$ będą ciągami o własnościach

$$x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X, \quad y := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \triangleright x_n \in X.$$

Korzystając z założenia o lokalnej prezwartości X , wybierzmy dowolne zbiory prezwarte $\mathcal{U} \ni x$ oraz $\mathcal{V} \ni y$ zawierające punkty x i – odpowiednio – y wraz z pewnymi ich otoczeniami (otwartymi). Zbieżność $x.$ do x (wzgl. $\lambda(g., x.)$ do y) oznacza, że prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są zawarte w \mathcal{U} (wzgl. \mathcal{V}), więc tym bardziej w zwartym zbiorze $\bar{\mathcal{U}}$ (wzgl. $\bar{\mathcal{V}}$), to jednak oznacza, że prawie wszystkie wyrazy ciągu $\Lambda(g., x.) : \mathbb{N} \rightarrow X \times X : n \mapsto (g_n \triangleright x_n, x_n)$ są zawarte w zwartym podzbiorku $\bar{\mathcal{U}} \times \bar{\mathcal{V}}$, a zatem prawie wszystkie wyrazy ciągu $(g., x.) : \mathbb{N} \rightarrow G \times X : n \mapsto (g_n, x_n)$ są zawarte w podzbiorku $\Lambda^{-1}(\bar{\mathcal{U}} \times \bar{\mathcal{V}})$, który wobec właściwego charakteru Λ jest zwarty. Ta cecha $\Lambda^{-1}(\bar{\mathcal{U}} \times \bar{\mathcal{V}})$ przesądza o istnieniu podciągu zbieżnego ciągu $(g., x.)$, co w szczególności implikuje zbieżność odnośnego podciągu ciągu $g.$

I odwrotnie, załóżmy, że spełniona jest implikacja z końca tezy dowodzonego stwierdzenia. Ustalmy podzbiór zwarty $\mathcal{K} \subset X \times X$ i wybierzmy dowolny ciąg $(g., x.)$ punktów w zbiorze $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$. Jego obraz w $X \times X$ względem Λ jest zwarty w zwartym podzbiorku \mathcal{K} , można zeń przeto wybrać podciąg zbieżny, którego przeciwobraz przecina się z ciągiem wyjściowym $(g., x.)$ definiując (pod)ciąg, o którym mowa we wspomnianej wcześniej implikacji. Tym sposobem otrzymujemy podciąg $(g., x.)$ w $\Lambda^{-1}(\mathcal{K}) \subset G \times X$ zbieżny w $G \times X$ w topologii produktowej, a ponieważ zbiór $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$ jest domknięty jako ciągły przeciwobraz zwartego, więc też domkniętego (j/w) podzbiorku \mathcal{K} , przeto granica tego zbieżnego podciągu leży w $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$, co ostatecznie dowodzi zwartości $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$ i tym samym przekonuje, że Λ jest odwzorowaniem właściwym. \square

Przykładu bezpośredniego zastosowania powyższego rezultatu jest

Stwierdzenie 3. Działanie topologiczne zwartej grupy topologicznej na dowolnej rozmaitości różniczkowalnej jest właściwe.

⁴Przestrzeń topologiczną nazywamy **lokalnie prezwartą**, jeśli każdy jej punkt zawiera się w pewnym zbiorze prezwartym (tj. takim, którego domknięcie jest zwarte) zawierającym pewne otoczenie (otwarte) tego punktu.

Dowód: Każdy ciąg elementów grupy ma podciąg zbieżny z racji zwartości grupy, teza wynika zatem wprost ze Stw. 2. \square

Mamy także

Stwierdzenie 4. Działanie dowolnej podgrupy domkniętej dowolnej grupy Liego stanowiące ograniczenie do podgrupy działania regularnego prawego (wzgl. lewego) grupy na sobie jest właściwe.

Dowód: Zastosujemy kryterium ze Stw.2. Niechaj $g. : \mathbb{N} \rightarrow G$ będzie ciągiem zbieżnym, $h. : \mathbb{N} \rightarrow H$ zaś – takim, dla którego ciąg $g. \cdot h. : \mathbb{N} \rightarrow G : n \mapsto g_n \cdot h_n$ jest zbieżny. Wobec ciągłości operacji grupowych w G zbieżnym jest wówczas także ciąg $(\text{Inv} \circ g.) \cdot (g. \cdot h.) = h..$ \square

I wreszcie kluczowe dla naszych dalszych rozważań

Stwierdzenie 5. Działanie definiujące grupy strukturalnej na przestrzeni totalnej wiązki głównej jest właściwe.

Dowód: Rozważmy ciągi $p. : \mathbb{N} \rightarrow P_G$ i $g. : \mathbb{N} \rightarrow G$ o własnościach

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (p_n \triangleleft g_n) = \tilde{p}.$$

Wobec ciągłości rzutu kanonicznego na bazę oraz charakteru działania grupy strukturalnej (we włóknie) otrzymujemy równość

$$\begin{aligned} \pi_{P_G}(\tilde{p}) &\equiv \pi_{P_G}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n \triangleleft g_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{P_G}(p_n \triangleleft g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{P_G}(p_n) \\ &= \pi_{P_G}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n\right) = \pi_{P_G}(p), \end{aligned}$$

która w świetle Def. 5-6.5 pozwala zapisać

$$\tilde{p} = p \triangleleft \phi_{P_G}(p, \tilde{p}).$$

Niechaj $\pi_{P_G}(p) \in \mathcal{O}_i$, gdzie \mathcal{O}_i jest elementem pokrycia trywializującego P_G . Istnieje indeks $N \in \mathbb{N}$ o własności

$$\forall n \geq N : p_n, p_n \triangleleft g_n \in \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i),$$

możemy zatem rozpatrywać podciągi p_{N+} i $p_{N+} \triangleleft g_{N+}$ w obrazie trywializacji $\tau_i : \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times G$, w którym

$$\tau_i(p_n) =: (x_n, \gamma_n), \quad \tau_i(p) =: (x, \gamma),$$

czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, \gamma_n) = (x, \gamma),$$

więc też

$$\tau_i(p_n \triangleleft g_n) = \tau_i(p_n) \triangleleft g_n = (x_n, \gamma_n) \triangleleft g_n = (x_n, \gamma_n \cdot g_n)$$

oraz

$$\tau_i(\tilde{p}) = \tau_i(p \triangleleft \phi_{P_G}(p, \tilde{p})) = \tau_i(p) \triangleleft \phi_{P_G}(p, \tilde{p}) = (x, \gamma) \triangleleft \phi_{P_G}(p, \tilde{p}) = (x, \gamma \cdot \phi_{P_G}(p, \tilde{p})),$$

czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_n \cdot g_n) = \gamma \cdot \phi_{P_G}(p, \tilde{p}).$$

Wobec ciągłości operacji grupowych wyprowadzamy stąd wniosek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_n^{-1} \cdot (\gamma_n \cdot g_n)) = \gamma^{-1} \cdot (\gamma \cdot \phi_{P_G}(p, \tilde{p})) = \phi_{P_G}(p, \tilde{p}),$$

który przesądza o słuszności dowodzonej tezy. \square

Idąc tym tropem dalej w kierunku fizykalnych zastosowań

Corollarium 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj (P_G, B, G, π_{P_G}) będzie wiązką główną, M zaś – rozmaiłością z działaniem (lewostronnym) $\lambda : G \times M \rightarrow M$ grupy G . Rozważmy rozmaiłość produktową $P_G \times M$. Działanie grupy G dane wzorem

$$(2) \quad \tilde{\lambda} : G \times (P_G \times M) \rightarrow P_G \times M : (g, (p, x)) \mapsto (r(p, g^{-1}), \lambda(g, m))$$

jest wolne i właściwe.

Dowód: Oczywisty. \square

Tytułem przygotowania gruntu pod wynik wieńczący nasze rozważania wysłowimy jeszcze

Lemat 1. Przyjmijmy zapis Def. 2 i niechaj $((X, \mathcal{T}(X)), \lambda)$ będzie przestrzenią z działaniem topologicznym grupy topologicznej G . Rzut kanoniczny

$$\pi_{X/G} : X \rightarrow X/G$$

na przestrzeń orbit

$$X/G := \{ G \triangleright x \mid x \in X \}$$

jest odwzorowaniem otwartym⁵ względem topologii ilorazowej na X/G .

Dowód: Rozważmy zbiór otwarty $\mathcal{O} \subset X$. Jego obraz $\pi_{X/G}(\mathcal{O})$ jest – wprost na mocy definicji topologii ilorazowej – otwarty w X/G , jeśli przeciwobraz tego ostatniego,

$$\pi_{X/G}^{-1}(\pi_{X/G}(\mathcal{O})) = \{ \lambda(g, x) \mid (g, x) \in G \times \mathcal{O} \} \equiv G \triangleright \mathcal{O}$$

jest otwarty w X . Tak jednak jest w istocie, oto bowiem zbiór ten jest sumą mnogościową

$$G \triangleright \mathcal{O} = \bigcup_{g \in G} \lambda_g(\mathcal{O})$$

obrazów zbioru otwartego \mathcal{O} względem automorfizmów λ_g przestrzeni X , czyli zbiorów otwartych. \square

Możemy już sformułować fundamentalne

Twierdzenie 3 (O rozmaiłości ilorazowej). Przyjmijmy notację Def. 3 oraz Lematu 1 (i wcześniejszą). Ilekroć działanie grupy Liego G na rozmaiłości (M, \mathcal{A}) jest gładkie, swobodne i właściwe, przestrzeń orbit M/G jest rozmaiłością topologiczną wymiaru $\dim M - \dim G$ i istnieje na niej jedyna struktura gładka, względem której rzut kanoniczny $\pi_{M/G}$ jest gładką submersją. Przestrzeń orbit z ową wyróżnioną strukturą rozmaiłości nosi miano **rozmaiłości ilorazowej**.

Dowód: Zaczniemy od zidentyfikowania struktury rozmaiłości topologicznej na zbiorze orbit M/G . Topologia M/G jest topologią ilorazową indukowaną z M : zbiór $\mathcal{O} \subset M/G$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jego przeciwobraz $\pi_{M/G}^{-1}(\mathcal{O})$ jest otwarty w M . Jest to topologia Hausdorffa. Istotnie, wykorzystajmy relację równoważności \mathcal{R}_λ na M , jaką jest przynależność do tej samej orbity działania G ,

$$\mathcal{R}_\lambda = \Lambda(G \times M) \subset M \times M,$$

gdzie Λ jest odwzorowaniem zdefiniowanym w Równ. 1. Relacja ta zadaje rozkład M na wzajem rozłączne orbity działania grupy G . Niechaj x i y będą punktami w M , których obrazy $\pi_{M/G}(x)$ i $\pi_{M/G}(y)$ są dwoma różnymi punktami w przestrzeni orbit, tj. $\pi_{M/G}(x) \neq \pi_{M/G}(y)$, a wtedy

⁵**Odwzorowanie otwarte** między przestrzeniami topologicznymi to takie, które przeprowadza podzbiory otwarte dziedziny w podzbiory otwarte przeciwdziedziny.

$(x_1, x_2) \notin \mathcal{R}_\lambda$, a ponieważ podzbiór $\mathcal{R}_\lambda \subset M \times M$ jest w świetle twierdzenia o domkniętości odwzorowania właściwego o przewartej przeciwdziedzinie domknięty w topologii produktowej na $M \times M$ jako ciągły obraz zbioru domkniętego $G \times M$ względem odwzorowania właściwego λ , przeto istnieje otoczenie otwarte $\mathcal{O}_{(x_1, x_2)} \ni (x_1, x_2)$ o własności $\mathcal{O}_{(x_1, x_2)} \cap \mathcal{R}_\lambda = \emptyset$. Wprost na mocy definicji topologii produktowej otoczenie takie jest sumą mnogościową pewnej rodziny iloczynów kartezjańskich podzbiorów otwartych w M , wybierając zatem dowolny z nich – powiedzmy $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}(M)$ – otrzymujemy relacje $\mathcal{O}_\alpha \ni x_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ oraz $(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) \cap \mathcal{R}_\lambda = \emptyset$, a zatem także $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_\alpha) \ni \pi_{M/G}(x_\alpha)$, przy czym koniecznie $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_1) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_2) = \emptyset$, w przeciwnym bowiem razie istniałyby punkty $y_\alpha \in \mathcal{O}_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ należące do wspólnej orbity działania G , a zatem także $(y_1, y_2) \in \mathcal{R}_\lambda \cap (\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$, co przeczyłoby rozłączności $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ i \mathcal{R}_λ . W konsekwencji Lematu 1 zbiory $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_\alpha)$ są otwartymi otoczeniami punktów $\pi_{M/G}(x_\alpha)$ w przestrzeni orbit.

W następnej kolejności dokonamy rozkładu rozmaitości M na włożone weń gładko orbity działania grupy G , po czym stowarzyszymy z tym rozkładem stosowne lokalne mapy, w których współrzędne kartografujące kierunki transwersalne do (bliskich sobie) orbit zostaną ostatecznie wykorzystane w konstrukcji atlasu przestrzeni orbit. Punktem wyjścia do tak zakreślonej taktyki jest upewnienie się, że orbity działania grupy są w istocie podrozzmaitościami gładko włożonymi w M . W tym celu rozważymy odwzorowanie gładkie, określone dla dowolnego (ustalonego) punktu $x \in M$,

$$\Omega_x \equiv \lambda(\cdot, x) : G \longrightarrow M : g \longmapsto \lambda(g, x),$$

o oczywistej własności

$$\Omega_x(G) = G \triangleright x.$$

Odwzorowanie to jest jawnie G -ekwiwariantne,

$$\forall_{g \in G} : \Omega_x \circ \ell_g = \lambda_g \circ \Omega_x,$$

tj. splata ze sobą działania G : lewe regularne na sobie oraz λ na M , a ponieważ pierwsze z tych działań jest przechodnie, przeto możemy odnieść do Ω_x tezę Tw. 2, wnosząc o stałości rzędu tego odwzorowania. Ponadto jest ono injekcją, oto bowiem równość

$$g_2 \triangleright x = \Omega_x(g_2) = \Omega_x(g_1) = g_1 \triangleright x \iff (g_2^{-1} \cdot g_1) \triangleright x = x$$

oznacza – wobec założenia dotyczącego charakteru działania λ – równość

$$g_2^{-1} \cdot g_1 = e \iff g_2 = g_1.$$

To jednak w połączeniu z wcześniejszą konkluzją, a w odwołaniu do twierdzenia o immersywności gładkiej injekcji o stałym rzędzie (wynikającego wprost z twierdzenia o stałym rzędzie), pozwala stwierdzić, że Ω_x jest immersją. Przy tym ilekroć $\mathcal{K} \subset M$ jest zwarty, więc też (wobec hausdorffowości M) domknięty, jego przeciwobraz $\Omega_x^{-1}(\mathcal{K})$ jest domknięty w G wobec ciągłości Ω_x , a ponieważ dla dowolnego należącego doń elementu g zachodzi relacja $g \triangleright x \in \mathcal{K}$, czyli też

$$(g \triangleright (\mathcal{K} \cup \{x\})) \cap (\mathcal{K} \cup \{x\}) = (g \triangleright \mathcal{K} \cup \{g \triangleright x\}) \cap (\mathcal{K} \cup \{x\}) \supset \{g \triangleright x\} \neq \emptyset,$$

co implikuje jego zawieranie się

$$\Omega_x^{-1}(\mathcal{K}) \subset G(\mathcal{K} \cup \{x\})$$

w zbiorze $G(\mathcal{K} \cup \{x\})$, który jest zwarty na mocy Stw. 1, przeto $\Omega_x^{-1}(\mathcal{K})$ jest zwarty. To zaś oznacza, że Ω_x jest odwzorowaniem właściwym, a zatem ostatecznie – w konsekwencji poprzednich ustaleń – gładkim włożeniem (jest nim każda injektywna immersja będąca odwzorowaniem właściwym – patrz: Niezbędnik Rozmaitości).

Wybierzmy (dowolnie) punkt $x \in M$, a wraz z nim jego przeciwobraz $e \in G$ względem Ω_x , i lokalne mapy: $\kappa_e : \mathcal{O}_e \longrightarrow \mathbb{R}^{\times D}$, $D = \dim G$ na pewnym otoczeniu otwartym \mathcal{O}_e elementu neutralnego e w G oraz $\kappa_x : \mathcal{O}_x \longrightarrow \mathbb{R}^{\times N}$, $N = \dim M$ na pewnym otoczeniu otwartym \mathcal{O}_x punktu x w M , w których lokalna prezentacja włożenia Ω_x przybiera postać kanoniczną (jako immersja), czyli

$$G \triangleright \{x\} \cap \mathcal{O}_x = \kappa_x^{-1}(\mathcal{U}_x \times \{\mathbf{0}_n\}),$$

gdzie $\mathcal{U}_x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{\times D})$ jest homeomorficznym obrazem fragmentu orbity x zawartego w \mathcal{O}_x . Niechaj

$$\Delta_x := \kappa_x^{-1}(\{\mathbf{0}_D\} \times \mathbb{R}^{\times N})$$

będzie podrozmaitością \mathcal{O}_x transwersalną do (fragmentu) rzeczonyj orbity $G \triangleright \{x\}$, wyznaczającą rozkład przestrzeni stycznej

$$\mathbb{T}_x M = \mathbb{T}_x(G \triangleright \{x\}) \oplus \mathbb{T}_x \Delta_x,$$

w którym wobec immersywności Ω_x identyfikujemy

$$(3) \quad \mathbb{T}_e \Omega_x(\mathbb{T}_e G) \equiv \mathbb{T}_x(G \triangleright \{x\}) \subset \mathbb{T}_x M.$$

Oznaczmy dalej

$$\delta_x := \lambda \upharpoonright_{G \times \Delta_x} : G \times \Delta_x \longrightarrow M.$$

Wykażemy, że δ_x jest dyfeomorfizmem na pewnym otoczeniu punktu $(e, x) \in G \times \Delta_x$. W tym celu wykorzystamy gładkie włożenie

$$\iota_x : G \longrightarrow G \times \Delta_x : g \longmapsto (g, x)$$

do rozłożenia odwzorowania Ω_x wedle schematu

$$\Omega_x = \delta_x \circ \iota_x,$$

a zatem także – stycznego do niego:

$$\mathbb{T}_e \Omega_x = \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x \circ \mathbb{T}_e \iota_x.$$

Zważywszy Równ. (3), konstatujemy prawdziwość relacji

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_{(e,x)}(G \times \Delta_x)) &\equiv \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_e G \oplus \mathbb{T}_x \Delta_x) \supset \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_e G \oplus \{0_{\mathbb{T}_x \Delta_x}\}) \\ &\equiv \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x \circ \mathbb{T}_e \iota_x(\mathbb{T}_e G) = \mathbb{T}_e \Omega_x(\mathbb{T}_e G) = \mathbb{T}_x(G \triangleright \{x\}). \end{aligned}$$

Wprowadźmy dalej gładkie włożenie

$$\iota_e : \Delta_x \longrightarrow G \times \Delta_x : y \longmapsto (e, y)$$

podrozmaitości transwersalnej do (lokalnego fragmentu) orbity $G \triangleright \{x\}$, aby móc rozłożyć gładkie włożenie $J_{\Delta_x} : \Delta_x \longrightarrow M$ w postaci

$$J_{\Delta_x} = \delta_x \circ \iota_e$$

i – co za tym idzie – styczne do niego:

$$\mathbb{T}_y J_{\Delta_x} = \mathbb{T}_{(e,y)} \delta_x \circ \mathbb{T}_y \iota_e.$$

Wobec oczywistej równości

$$\mathbb{T}_x \iota_e(\mathbb{T}_x \Delta_x) = \{0_{\mathbb{T}_e G}\} \oplus \mathbb{T}_x \Delta_x$$

otrzymujemy tym razem relację

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_{(e,x)}(G \times \Delta_x)) &\supset \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\{0_{\mathbb{T}_e G}\} \oplus \mathbb{T}_x \Delta_x) \equiv \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x \circ \mathbb{T}_x \iota_e(\mathbb{T}_x \Delta_x) \\ &= \mathbb{T}_x J_{\Delta_x}(\mathbb{T}_x \Delta_x) \equiv \mathbb{T}_x \Delta_x \subset \mathbb{T}_x M, \end{aligned}$$

ostatecznie zatem stwierdzamy, że

$$\mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_{(e,x)}(G \times \Delta_x)) \supset \mathbb{T}_x(G \triangleright \{x\}) \oplus \mathbb{T}_x \Delta_x \equiv \mathbb{T}_x M,$$

skoro zaś zarazem

$$\mathbb{T}_x M \supset \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_{(e,x)}(G \times \Delta_x)),$$

to nieuchronnie

$$\mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_{(e,x)}(G \times \Delta_x)) = \mathbb{T}_x M,$$

co dowodzi surjektywności $\mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x$, a ponieważ jest też – wobec ustalonej wcześniej immersywności Ω_x –

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_{(e,x)}(G \times \Delta_x) \equiv \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_e G + \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x \Delta_x$$

$$= \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x(\mathbb{G} \triangleright \{x\}) + \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x \Delta_x \equiv \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x M,$$

przeto $\mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x$ jawi się bijekcją. Na tym etapie możemy już odwołać się do twierdzenia o lokalnej odwracalności odwzorowań, aby orzec istnienie pewnego otoczenia otwartego \mathcal{V}_x punktu $(e, x) \in \mathbb{G} \times \Delta_x$ odwzorowywanego dyfeomorficznie przez (ograniczenie) δ_x w pewne otoczenie otwarte $\tilde{\mathcal{O}}_x$ punktu $x \in M$. Biorąc pod uwagę naturę topologii (produktowej) na $\mathbb{G} \times \Delta_x$ (według schematu myślowego wyłożonego na początku niniejszego dowodu w uzasadnieniu hausdorffowskości topologii ilorazowej na przestrzeni orbit), upewniamy się, że pierwsze z tych otoczeń można wybrać w postaci produktowej $\mathcal{V}_x = \mathcal{W}_e \times \mathcal{W}_x$, przy czym z każdego z otoczeń: \mathcal{W}_a , $a \in \{e, x\}$ można wyjąć przewarto przeciwobrazy pewnych kul otwartych $B^D(\tilde{\kappa}_e(e) = \mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \equiv \tilde{\kappa}_e(\tilde{\mathcal{W}}_e)$, $\varepsilon_e > 0$ oraz – odpowiednio – $B^{N-D}(\tilde{\kappa}_x(x) = \mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \equiv \tilde{\kappa}_x(\tilde{\mathcal{W}}_x)$, $\varepsilon_x > 0$ względem lokalnych map $\tilde{\kappa}_e : \mathcal{W}_e \rightarrow \mathbb{R}^D$ oraz – odpowiednio – $\tilde{\kappa}_x : \mathcal{W}_x \rightarrow \mathbb{R}^{N-D}$. W dalszej części naszej analizy skupimy uwagę na otoczeniu produktowym $\tilde{\mathcal{V}}_x \equiv \tilde{\mathcal{W}}_e \times \tilde{\mathcal{W}}_x$.

W następnej kolejności pokażemy, że otoczenie $\tilde{\mathcal{W}}_x \subset \Delta_x$ można wybrać na tyle małym, ażeby każda orbita działania \mathbb{G} przecinała je w co najwyżej jednym punkcie. Załóżmy przeciwnie i rozważmy przeliczalną bazę otoczeń x w $\tilde{\mathcal{W}}_x$ złożoną z przeciwobrazów względem $\tilde{\kappa}_x$ rodziny kul otwartych $B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; r_n)$, $r_n := \frac{1}{E(\varepsilon_x^{-1})+n}$, $n \in \mathbb{N}$. W każdym z przeciwobrazów $\mathcal{B}_n \equiv \tilde{\kappa}_x^{-1}(B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; r_n))$ tkwi para punktów x_n oraz $y_n \neq x_n$ należących do tej samej orbity, tj. spełniających warunek $y_n = g_n \triangleright x_n$ dla pewnego elementu $g_n \in \mathbb{G}$. Przy tym wobec założonej postaci bazy otoczeń oba ciągi punktów w (przewartym) $\tilde{\mathcal{W}}_x$ zbiegają do x ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = \lim_{n \rightarrow \infty} (g_n \triangleright x_n),$$

a zatem – w świetle Stw. 2, a z racji właściwego charakteru λ – ciąg g zdefiniowany przez parę ciągów (x_n, y_n) zawiera podciąg g_n zbieżny do pewnego elementu $g \in \mathbb{G}$. Ciągłość działania λ pozwala nam zatem zapisać ciąg równości

$$g \triangleright x \equiv \lambda\left(\lim_{k \rightarrow \infty} (g_{n_k}, x_{n_k})\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(g_{n_k}, x_{n_k}) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = x,$$

a ponieważ mamy do czynienia z działaniem wolnym, przeto nieodzownie $g = e$. Jednakowoż dla dostatecznie dużych wartości $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $g_{n_k} \in \tilde{\mathcal{W}}_e$, przy czym $g_{n_k} \neq e$ (wszak $y_{n_k} \neq x_{n_k}$) więc też

$$\lambda(g_{n_k}, x_{n_k}) = y_{n_k} = \lambda(e, y_{n_k}),$$

co z racji iniektywności $\delta_x \upharpoonright_{\tilde{\mathcal{W}}_e \times \tilde{\mathcal{W}}_x} \equiv \lambda \upharpoonright_{\tilde{\mathcal{W}}_e \times \tilde{\mathcal{W}}_x}$ implikuje równość

$$(g_{n_k}, x_{n_k}) = (e, y_{n_k}),$$

prowadzącą do jawnej sprzeczności. Otoczenie $\tilde{\mathcal{W}}_x$ o postulowanej cesze zawsze zatem istnieje.

Rozważmy teraz złożenie homeomorfizmów

$$\phi_x := (\tilde{\kappa}_e \times \tilde{\kappa}_x) \circ (\delta_x \upharpoonright_{\tilde{\mathcal{V}}_x})^{-1} : \tilde{\mathcal{O}}_x \xrightarrow{\cong} \tilde{\mathcal{V}}_x \equiv \tilde{\mathcal{W}}_e \times \tilde{\mathcal{W}}_x \xrightarrow{\cong} B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x).$$

Pokażemy, że określa ono lokalną mapę zgodną z działaniem grupy \mathbb{G} w tym naturalnym sensie, że orbity tegoż działania są w tej mapie hiperpłaszczyznami parametryzowanymi przez pierwszych D współrzędnych. Zaczniemy od tego, że wobec otwartości zarówno swojej dziedziny, jak i przeciwdziedziny homeomorfizm ϕ_x dopuszcza postulowaną interpretację, pozostaje więc jedynie upewnić się co do słuszności naszych oczekiwań dotyczących opisu fragmentów orbit zawartych w jego dziedzinie. Mamy

$$\begin{aligned} \phi_x^{-1} : & \quad B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}_x \\ & : \quad (\xi, \zeta) \longmapsto \delta_x(\tilde{\kappa}_e^{-1}(\xi), \tilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta)) \equiv \lambda(\tilde{\kappa}_e^{-1}(\xi), \tilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta)), \end{aligned}$$

bez trudu przeto stwierdzamy, że dowolna hiperpowierzchnia $\zeta = \zeta_* = \text{const}$ jest zawarta w pojedynczej orbicie, oto bowiem jej homeomorficzny przeciwobraz w M względem ϕ_x spełnia relację

$$\phi_x^{-1}(B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times \{\zeta_*\}) \equiv \lambda(\tilde{\mathcal{W}}_e \times \{\tilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta_*)\}) \subset \lambda(\mathbb{G} \times \{\tilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta_*)\}) \equiv \mathbb{G} \triangleright \{\tilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta_*)\}.$$

Rozumowanie to pokazuje, że dowolna orbita $G \triangleright \{y\}$, $y \in M$ przecina $\tilde{\mathcal{O}}_x$ wzdłuż sumy mnogościowej (fragmentów) hiperpowierzchni o opisie współrzędnym $\zeta = \zeta_i = \text{const}$, $i \in I_y$ dla pewnego zbioru indeksów I_y . Otoczenie $\tilde{\mathcal{W}}_x$ zostało jednak wybrane tak, iżby dowolna orbita przecinała je w *co najwyżej jednym* punkcie, wobec czego $|I_y| \leq 1$. Lokalna mapa ϕ_x jest zatem – w istocie – zgodna z działaniem G w określonym wyżej znaczeniu i może być wykorzystana w kartografowaniu przestrzeni orbit na otoczeniu punktu $\pi_{M/G}(x) \equiv [x]$.

Skonstruujemy teraz lokalną mapę na otoczeniu $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x)$ punktu $[x]$, pamiętając, że otwartość zbioru $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x) \ni [x]$ w topologii ilorazowej jest zapewniona przez otwartość rzutu kanonicznego $\pi_{M/G}$, stwierdzoną w Lemacie 1. Oznaczmy lokalne cięcie przez x w poprzek orbit zawartych w $\tilde{\mathcal{O}}_x$ symbolem

$$\tilde{\Delta}_x := \phi_x^{-1}(\{\mathbf{0}_D\} \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x))$$

i zauważmy, że ograniczenie rzutu kanonicznego

$$\pi_{M/G} \upharpoonright_{\tilde{\Delta}_x} : \tilde{\Delta}_x \longrightarrow \pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x)$$

jest bijekcją w świetle założeń poczynionych w odniesieniu do charakteru przecięć orbit działania G z $\tilde{\mathcal{O}}_x$ oraz z racji potwierdzonej zgodności mapy ϕ_x z tymże działaniem. Przy tym ilekroć $\mathcal{W} \subset \tilde{\Delta}_x$ jest podzbiorem otwartym, jego obraz w przestrzeni orbit

$$\begin{aligned} \pi_{M/G}(\mathcal{W}) &\equiv \pi_{M/G} \circ \phi_x^{-1}(\{\mathbf{0}_D\} \times \text{pr}_2 \circ \phi_x(\mathcal{W})) \\ &= \pi_{M/G} \circ \phi_x^{-1}(B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times \text{pr}_2 \circ \phi_x(\mathcal{W})) \end{aligned}$$

jest w oczywisty sposób otwarty jako obraz względem złożenia odwzorowań otwartych zbioru $B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times \text{pr}_2 \circ \phi_x(\mathcal{W})$ otwartego w topologii produktowej – wszak ϕ_x jest homeomorfizmem, więc też odwzorowaniem otwartym, a rzut na drugą składową zadanego przezeń zbioru $\phi_x(\mathcal{W})$ otwartego w topologii produktowej, czyli będącego sumą mnogościową iloczynów kartezjańskich zbiorów otwartych, jest także sumą rzutów tychże iloczynów na drugą składową, więc także zbiorem otwartym w \mathbb{R}^{N-D} . Koniec końców odwzorowanie ograniczone $\pi_{M/G} \upharpoonright_{\tilde{\Delta}_x}$ jest zatem homeomorfizmem, którego ciągłą odwrotność będziemy oznaczać symbolem

$$\sigma_{[x]} := (\pi_{M/G} \upharpoonright_{\tilde{\Delta}_x})^{-1} : \pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x) \xrightarrow{\cong} \tilde{\Delta}_x.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\psi_{[x]} := \text{pr}_2 \circ \phi_x \circ \sigma_{[x]} : \pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x) \xrightarrow{\cong} \tilde{\Delta}_x \xrightarrow{\cong} \{\mathbf{0}_D\} \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \longrightarrow B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x),$$

które – jak łatwo widać – jest homeomorfizmem otoczenia otwartego $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x)$ na kulę otwartą $B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \subset \mathbb{R}^{N-D}$, czyli – innymi słowy – lokalną mapą klasy C^0 . Należy przy tym podkreślić, że lokalna prezentacja rzutu kanonicznego określona przez lokalną mapę ϕ_x na $\tilde{\mathcal{O}}_x$ oraz stowarzyszoną z nią lokalną mapę $\psi_{[x]}$ na $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x)$ przyjmuje prostą postać

$$\psi_{[x]} \circ \pi_{M/G} \circ \phi_x^{-1} : B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \rightarrow B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x),$$

o jawnie submersywnym charakterze. Odwzorowanie $\sigma_{[x]}$ ma zatem naturalną interpretację ciecica lokalnego submersji $\pi_{M/G}$. Jeśli więc zaindukujemy strukturę rozmaitości na M/G z tej na rozmaitości M (j/w) przy użyciu podatlasu na M utworzonego przez wszystkie możliwe mapy lokalne na M zgodne z działaniem G i wszystkie cięcia lokalne rzutu kanonicznego nad obrazami – względem tegoż ciecica – ich dziedzin, to dla zakończenia dowodu twierdzenia pozostanie nam jedynie wykazać gładkość odwzorowań przejścia między mapami określonymi na przecinających się niepusto otoczeniach w przestrzeni orbit, a na koniec – jednoznacznie tak otrzymanej struktury gładkiej.

Niechaj zatem $\psi_{[x_A]} : \pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_A}) \xrightarrow{\cong} B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_{x_A})$, $A \in \{1, 2\}$ będą dwiema lokalnymi mapami spełniającymi warunek $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_1}) \cap \pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2}) \neq \emptyset$, a stowarzyszonymi z lokalnymi mapami $\phi_{x_A} : \tilde{\mathcal{O}}_{x_A} \xrightarrow{\cong} B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_{e;A}) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_n; \varepsilon_{x_A})$. Przecinanie się rzutów $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_A})$ otoczeń $\tilde{\mathcal{O}}_{x_A}$ odnośnych punktów x_A oznacza, że są w tych otoczeniach punkty $y_A \in \tilde{\mathcal{O}}_{x_A}$ należące do tej samej orbity, tj. $y_2 = g_{21} \triangleright y_1$ dla pewnego elementu $g_{21} \in G$, możemy zatem bez straty

ogólności (dokonawszy – jeśli trzeba – trywialnego przesunięcia w przeciwdziedzinach obu map ϕ_{x_A}) przyjąć, że $y_A = x_A$ i jest spełniony warunek

$$x_2 = g_{21} \triangleright x_1.$$

Założmy najpierw, że $g_{21} = e$, a wtedy możemy wprost rozpatrzyć odwzorowanie przejścia między mapami $\phi_{x_1} = (\xi_1, \zeta_1)$ i $\phi_{x_2} = (\xi_2, \zeta_2)$ na zbiorze $\mathcal{O}_{12} := \tilde{\mathcal{O}}_{x_1} \cap \tilde{\mathcal{O}}_{x_2}$. Jako że przecięcia dowolnej orbity z każdym z otoczeń odpowiadają stałej i jedynej wartości ζ_1 oraz takiejż wartości ζ_2 , przeto gładkie (wprost na mocy konstrukcji – wszak ϕ_{x_A} są mapami na gładkiej rozmaitości M) odwzorowanie przejścia między obiema mapami jest postaci

$$\begin{aligned} \phi_{x_2} \circ (\phi_{x_1} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{12}})^{-1} &: \phi_{x_1}(\mathcal{O}_{12}) \xrightarrow{\cong} \phi_{x_2}(\mathcal{O}_{12}) \\ &: (\xi_1(y), \zeta_1(y)) \mapsto (F_1 \circ (\xi_1, \zeta_1), F_2 \circ \zeta_1)(y), \end{aligned}$$

gdzie F_1 i F_2 są pewnymi odwzorowaniami gładkimi. W szczególności więc otrzymujemy relację

$$\zeta_2(y) = F_2 \circ \zeta_1(y), \quad y \in \mathcal{O}_{12},$$

z której odczytujemy jawnie gładką postać odwzorowania przejścia między mapami indukowanymi:

$$\begin{aligned} &\psi_{[x_2]} \circ (\psi_{[x_1]} \upharpoonright_{\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{12})})^{-1} \\ &: \psi_{[x_1]} \circ \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{12}) \xrightarrow{\cong} \psi_{[x_2]} \circ \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{12}) \\ &: \text{pr}_2 \circ \phi_{x_1} \circ (\pi_{M/G} \upharpoonright_{\tilde{\Delta}_{x_1}})^{-1}(\pi_{M/G}(y)) \equiv \zeta_1(y) \mapsto \zeta_2(y) = F_2(\zeta_1(y)). \end{aligned}$$

W przypadku $g_{21} \neq e$ nie możemy wprawdzie *a priori* rozważać odwzorowań przejścia między mapami ϕ_{x_1} i ϕ_{x_2} na \mathcal{O}_{12} (zbiór ten może być w szczególności pusty), ale możemy zastąpić mapę lokalną ϕ_{x_2} oraz cięcie lokalne $\sigma_{[x_2]}$ użyte w definicji mapy lokalnej $\psi_{[x_2]}$ na $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{x_2})$ innymi z tego samego podatlasu na M i – odpowiednio – zbioru cięć lokalnych rzutu kanonicznego, indukujących mapy lokalne na przestrzeni orbit, które wspólnie wyznaczają *tę samą* mapę lokalną $\psi_{[x_2]}$ na $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{x_2})$, ale jednocześnie przeprowadzając punkt z jej dziedziny przez zbiór otwarty w nakryciu M przecinający się z \mathcal{O}_{x_1} w pewnym otoczeniu otwartym x_1 , co sprowadza nas do poprzednio zryfikowanego przypadku. Otóż więc użyjmy automorfizmu $\lambda_{g_{21}}$, aby zdefiniować odwzorowanie

$$\phi_{x_1}^{21} := \phi_{x_2} \circ \lambda_{g_{21}} : \lambda_{g_{21}}^{-1}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2}) \xrightarrow{\cong} B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_{e;2}) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_{x_2})$$

na otwartym (wprost z konstrukcji) otoczeniu $\lambda_{g_{21}}^{-1}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2})$ punktu x_1 . Jako że automorfizm $\lambda_{g_{21}}$ przeprowadza orbity na orbity, $\phi_{x_1}^{21}$ jest mapą lokalną zgodną z działaniem G . Definicję tę uzupełniamy stosowną definicją lokalnego cięcia rzutu kanonicznego nad $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2})$,

$$\sigma_{[x_2]}^{21} := \lambda_{g_{21}}^{-1} \circ \sigma_{[x_2]}.$$

Ta ostatnia ma sens, gdyż

$$\pi_{M/G} \circ \sigma_{[x_2]}^{21} = \pi_{M/G} \circ \sigma_{[x_2]} = \text{id}_{\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2})},$$

a przy tym zgodnie z zapowiedzią odtwarza, w połączeniu z nową mapą lokalną, wyjściową mapę lokalną na $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2})$, o czym przekonuje bezpośredni rachunek:

$$\psi_{[x_2]}^{21} := \text{pr}_2 \circ \phi_{x_1}^{21} \circ \sigma_{[x_2]}^{21} = \text{pr}_2 \circ \phi_{x_1} \circ \lambda_{g_{21}} \circ \lambda_{g_{21}}^{-1} \circ \sigma_{[x_2]}^{21} = \text{pr}_2 \circ \phi_{x_1} \circ \sigma_{[x_2]}^{21} \equiv \psi_{[x_2]}.$$

To kończy dowód istnienia struktury gładkiej, o której jest mowa w tezie twierdzenia. Należy jeszcze wykazać struktury tej jedyność.

W tym celu rozważmy dowolne dwie takie struktury na tej samej przestrzeni orbit M/G , oznaczając odnośnie jej kopie indeksem: $(M/G)_A$, $A \in \{1, 2\}$ dla wygodnego odróżnienia. Wprost na mocy poczynionego założenia rzut kanoniczny $\pi_{M/G} : M \rightarrow (M/G)_A$, $A \in \{1, 2\}$ jest w obu

przypadkach gładką surjektywną submersją, można zatem odnieść do niego tezę Stw.2.1 (o kwazi-uniwiersalnej własności submersji), i to na dwa sposoby: możemy oto zapisać diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc}
 & (M/G)_2 & \\
 \nearrow \pi_{M/G} & \uparrow \text{id}_{M/G} & \\
 M & \xrightarrow{\pi_{M/G}} & (M/G)_1
 \end{array}$$

w którym traktujemy $\pi_{M/G} : M \rightarrow (M/G)_1$ jako submersję, $\pi_{M/G} : M \rightarrow (M/G)_2$ zaś (to samo odwzorowanie) – jako odwzorowanie referencyjne, którego gładkość przesądza o gładkości $\text{id}_{M/G}$; możemy też zamienić miejscami (i rolami) $(M/G)_1$ i $(M/G)_2$, co prowadzi do wniosku, że także wtedy, gdy traktujemy $\text{id}_{M/G}$ jako odwzorowanie z $(M/G)_2$ w $(M/G)_1$, jest ono gładkie, co jest równoznaczne z równoważnością obu struktur różniczkowych. \square

Uwaga 1. Często przyjmuje się, że nośnik struktury rozmierności topologicznej powinien spełniać drugi aksjomat przeliczalności. Bez trudu przekonujemy się, że przestrzeń orbit M/G ma tę cechę, oto bowiem obraz dowolnej skończonej lub przeliczalnie nieskończonej bazy $\mathcal{O} := \{\mathcal{O}_n\}_{n \in I \subseteq \mathbb{N}}$ topologii M względem rzutu kanonicznego na przestrzeń orbit, $\pi_{M/G}(\mathcal{O}) = \{\pi_{M/G}(\mathcal{O}_n)\}_{n \in I \subseteq \mathbb{N}}$, jest – w świetle Lematu 1 – odpowiednią bazą topologii (ilorazowej) M/G . Istotnie, $\pi_{M/G}(\mathcal{O})$ jest pokryciem otwartym M/G , a ponadto dla dowolnej pary $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}), \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2}), n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ elementów tej rodziny o niepustym przecięciu $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2}) \ni G \triangleright x, x \in M$ istnieje element $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_{12}}) \subset \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2})$ o własności $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_{12}}) \ni G \triangleright x$. W rzeczy samej, z relacji $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2}) \ni G \triangleright x$ wynika istnienie punktów $x_A \in \mathcal{O}_{n_A}, A \in \{1, 2\}$ oraz elementu grupy $g_{21} \in G$ spełniającego relację $x_2 = g_{21} \triangleright x_1$, wobec czego zbiór $\lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1})$ ma niepuste przecięcie z \mathcal{O}_{n_2} , a ponieważ jest otwarty (jako homeomorficzny obraz zbioru otwartego), przeto jest sumą mnogościową pewnej rodziny elementów bazy \mathcal{O} . Przynajmniej jeden element tej rodziny – oznaczmy go $\mathcal{O}_{n_{12}}$ – przecina się niepusto z \mathcal{O}_{n_2} , a zatem – wprost na mocy definicji bazy topologii – istnieje element $\mathcal{O}_{n_{122}} \in \mathcal{O}$ spełniający warunek

$$\mathcal{O}_{n_{122}} \subset \mathcal{O}_{n_{12}} \cap \mathcal{O}_{n_2} \subset \lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \mathcal{O}_{n_2},$$

z którego wynika już pożądaný warunek

$$\begin{aligned}
 \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_{122}}) &\subset \pi_{M/G}(\lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \mathcal{O}_{n_2}) \subset \pi_{M/G}(\lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1})) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2}) \\
 &= \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2}).
 \end{aligned}$$

Wreszcie na koniec zauważmy, że dla dowolnego zbioru otwartego $\mathcal{O} \subset M/G$ zachodzi – wprost na mocy definicji topologii ilorazowej oraz wobec bazowego charakteru \mathcal{O} – tożsamość

$$\pi_{M/G}^{-1}(\mathcal{O}) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_{n_i},$$

w której $I \subset \mathbb{N}$ jest pewnym zbiorem indeksów. Wobec powyższego otrzymujemy równość

$$\pi_{M/G}(\pi_{M/G}^{-1}(\mathcal{O})) = \pi_{M/G}\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_{n_i}\right) = \bigcup_{i \in I} \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_i}),$$

która przesądza o bazowym charakterze $\pi_{M/G}(\mathcal{O})$.

Na zakończenie tej części wykładu wypowiemy stwierdzenie istotne z punktu widzenia zastosowań teorii grup Liego w opisie nieliniowych realizacji symetrii w teorii pola (w szczególności w modelowaniu efektywnej teorii pola „małych” wzbudzeń klasycznej jej próżni), a mianowicie

Twierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Lematu 1 i niechaj G będzie grupą Liego, $H \subseteq G$ zaś – jej podgrupą domkniętą. Istnieje dokładnie jedna struktura rozmierności gładkiej na przestrzeni

ilorazowej G/H z topologią ilorazową zaindukowaną z G , względem której rzut kanoniczny $\pi_{G/H} : G \rightarrow G/H$ jest surjektywną submersją. Naturalne lewe działanie

$$(4) \quad [\ell] : G \times (G/H) \rightarrow G/H : (\tilde{g}, gH) \mapsto (\tilde{g} \cdot g)H$$

jest gładkie względem tej struktury. Gładka rozmaitość G/H z działaniem grupy G określona tym sposobem nosi miano **gładkiej przestrzeni jednorodnej** G .

Dowód: Rozważmy działanie $\varphi : G \times H \rightarrow G : (g, h) \mapsto g \cdot h$ podgrupy $H \subset G$ na grupie G otrzymane w wyniku ograniczenia do tejże podgrupy prawego działania regularnego G na sobie. Jest ono jawnie swobodne, a przy tym możemy je zapisać jako superpozycję

$$\varphi = m \circ (\text{id}_G \times \jmath_H)$$

odwzorowań gładkich (przy czym gładkość kanonicznego włożenia $\jmath_H : H \rightarrow G$ wynika wprost z twierdzenia Cartana o podgrupie domkniętej grupy Liego), zatem jest też gładkie. W świetle Stw. 4 jest ono również właściwe, możemy więc odnieść do pary (G, H) tezę Tw. 3, konstatując prawdziwość pierwszej części tezy twierdzenia dowodzonego. Pozostaje zatem wykazać gładkość działania $[\lambda]$. Zauważmy, że działanie to domyka diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & & G/H \\ & \nearrow \pi_{G/H} \circ m & \uparrow [\lambda] \\ G \times G & \xrightarrow{\text{id}_G \times \pi_{G/H}} & G \times G/H \end{array} ,$$

w którym $\text{id}_G \times \pi_{G/H}$ jest submersją, co pozwala zastosować Twierdzenie o kwazi-universalnej własności submersji (Stw. 0.29 z Niezbędnika różniczkowo-geometrycznego), aby wywnioskować gładkość $[\lambda]$ z gładkości odwzorowania $\pi_{G/H} \circ m$, wynikającej ze stwierdzonej wcześniej gładkości $\pi_{G/H}$ i założonej gładkości m . \square