PRAWO O STOWARZYSZENIACH
(MAWF '22/23 2.IX, 2.X & 2.XI [RRS])

Spis treści

Konstrukcja rozmaitości ilorazowej stanowi jeden z kluczowych elementów geometryzacji rozmaitych bytów algebraicznych, w szczególności zaś: algebr Clifforda, modułów spinorowych i działania tych pierwszych na tych drugich. Jej zastosowanie w interesującym nas kontekście wymaga wprowadzenia procedury zwanej stowarzyszaniem rozmaitości wyposażonej w działanie grupy Liego z wiązką główną o grupie strukturalnej tożsamej z tą grupą. Procedura ta jest naturalnym teoriopolowym awatarem uniwersalnej konstrukcji homotopijnej przestrzeni ilorazowej (z jęz. ang. "homotopy quotient") odgrywającej pierwszoplanową rolę w kontekście modelowania geometrii różniczkowej przestrzeni orbit działania grup topologicznych – w tej swojej wersji została ona po raz pierwszy pomyślana przez Cartana [Car50], a potem podchwycona i rozwinęta przez Borela, skąd nazwa: model Cartana–Borela, *cp.* [Tu20]. A że spektrum zastosowań fizykalnych rzeczonej procedury wykracza daleko poza kontekst cliffordowski (i obejmuje tak istotne zagadnienia jak cechowanie, czyli ulokalnianie symetrii globalnych w teoriach pola (w którym to kontekście wprowadza w naturalny sposób obrazek defektowy), oraz modelowanie różnorodnych zjawisk w teoriach z symetrią wycechowaną, jak choćby efekt Higgsa, którym poświęcony jest wykład monograficzny Autora pt. „Zastosowania teorii wiązek włóknistych w fizyce"), przeto omówimy ją ze szczegółami.

1. Motywacja

Okazuje się, że wiązkę wektorową $\mathbb{V}$ można odtworzyć (z dokładnością do izomorfizmu) z odnośnej wiązki reperów $\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}$ przez pewną sprytną konstrukcję, którą przedstawiamy poniżej. Jak wynika wprost z definicji $\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}$, jest dobrze określone odwzorowanie (punktowej) ewaluacji

$$\widehat{\rm ev} \; : \; \mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times n} \longrightarrow \mathbb{V} \; : \; \big((\beta_x, x), v\big) \longmapsto \beta_x(v)\,.$$

Odwzorowanie to jest stałe na orbitach działania

$$\begin{aligned} \widetilde{\rm ev} \quad &: \quad {\rm GL}(n;\mathbb{K}) \times \big(\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times n}\big) \longrightarrow \mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times n} \\ &: \quad \big(\chi, \big((\beta_x, x), v\big)\big) \longmapsto \big(\big(\beta_x \circ \chi^{-1}, x\big), \chi(v)\big)\,, \end{aligned}$$

zapisanego w terminach naturalnego (definiującego) działania grupy ${\rm GL}(n;\mathbb{K})$ na $\mathbb{K}^{\times n}$,

$${\rm ev} \; : \; {\rm GL}(n;\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^{\times n} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times n} \; : \; (\chi, v) \longmapsto \chi(v)\,.$$

To oznacza, że $\widehat{\rm ev}$ zstępuje na rozmaitość ilorazową $(\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times n})/{\rm GL}(n;\mathbb{K})$ zdefiniowaną w odniesieniu do działania $\widetilde{\rm ev}$, której istnienie zapewnia Cor. 7-8.1 (na gruncie Tw. 7-8.3). Innymi słowy, $\widehat{\rm ev}$ zadaje odwzorowanie

$$\begin{aligned} [\widehat{\rm ev}] \quad &: \quad (\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times n})/{\rm GL}(n;\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{V} \\ &: \quad \big[\big((\beta_x, x), v\big)\big] \longmapsto \widehat{\rm ev}\big((\beta_x, x), v\big) \equiv \beta_x(v) \end{aligned} \tag{2}$$

które domyka diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{V} \\ \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n} \arrow[urr, "\widehat{\mathrm{ev}}"] \arrow[rr, "\pi_{(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})}"'] & & (\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \arrow[u, "{[\widehat{\mathrm{ev}}]}"'] \end{tikzcd} .$$

Zapisany na nim rzut kanoniczny $\pi_{(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})}$ na przestrzeń orbit jest – w świetle Twierdzenia 7-8.3 o rozmaitości ilorazowej – gładką submersją, przeto wprost na mocy Twierdzenia o kwazi-uniwersalnej własności submersji (z Niezbędnika różniczkowo-geometrycznego – Stw. 29) gładkość odwzorowania indukowanego $[\widehat{\mathrm{ev}}]$ jest implikowana przez gładkość odwzorowania $\widehat{\mathrm{ev}}$. Przy tym bez trudu przekonujemy się, że w ograniczeniu do dowolnego włókna $(\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n},\mathbb{V}_x)\times\mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}),\ x\in B$ odwzorowanie to jest bijekcją. Istotnie, wybierzmy dowolną bazę $\beta_x^*\in\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n},\mathbb{V}_x)$ i rozważmy zbiór $S:=\{\ ((\beta_x^*,x),v)\quad|\quad v\in\mathbb{K}^{\times n}\ \}$. Orbity dwóch dowolnych jego elementów, $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\triangleright((\beta_x^*,x),v_1)$ i $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\triangleright((\beta_x^*,x),v_2)$, albo pokrywają się ze sobą, albo też są rozłączne (jako klasy abstrakcji relacji równoważności). Pierwsza z tych ewentualności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned} &\big((\beta_x^*,x),v_2\big)\in\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\triangleright\big((\beta_x^*,x),v_1\big)\\ \Longleftrightarrow\qquad &\exists_{\chi\in\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})}\ :\ \big((\beta_x^*,x),v_2\big)=\big((\beta_x^*\circ\chi^{-1},x),\chi(v_1)\big)\\ \Longleftrightarrow\qquad &(\ \chi=\mathrm{id}_{\mathbb{K}^{\times n}}\quad\wedge\quad v_2=v_1\ )\,, \end{aligned}$$

zatem nietożsame elementy zbioru S należą do rozłącznych orbit. Moc włókna $(\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n},\mathbb{V}_x)\times\mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ jest więc nie mniejsza niż moc włókna $\mathbb{V}_x$. Pozostaje sprawdzić injektywność $[\widehat{\mathrm{ev}}]$. W tym celu rozważmy konsekwencje równości

$$\beta_x^1(v_1)\equiv[\widehat{\mathrm{ev}}]\big(\big[\big((\beta_x^1,x),v_1\big)\big]\big)=[\widehat{\mathrm{ev}}]\big(\big[\big((\beta_x^2,x),v_2\big)\big]\big)\equiv\beta_x^2(v_2)\,.$$

Ta jest równoważna równości

$$v_2=\beta_x^{2\,-1}\circ\beta_x^1(v_1)\,,$$

która implikuje relację

$$v_2\in\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\triangleright v_1\,,$$

a dalej także

$$\big((\beta_x^2,x),v_2\big)=\big((\beta_x^1\circ\big(\beta_x^{2\,-1}\circ\beta_x^1\big)^{-1},x),\beta_x^{2\,-1}\circ\beta_x^1(v_1)\big)\in\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\triangleright\big((\beta_x^1,x),v_1\big)\,.$$

Na tej podstawie wyciągamy wniosek o równości argumentów,

$$\big[\big((\beta_x^1,x),v_1\big)\big]=\big[\big((\beta_x^2,x),v_2\big)\big]\,,$$

która przesądza o injektywności $[\widehat{\mathrm{ev}}]$. Mamy zatem do czynienia z gładką bijekcją. Skonstruujemy jej gładką odwrotność. W tym celu użyjemy lokalnych trywializacji $\tau_i\ :\ \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)\xrightarrow{\cong}\mathcal{O}_i\times\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}),\ i\in I$ wiązki reperów stowarzyszonych z pokryciem $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$, które w odwołaniu do tezy Stw. 5-6.3 pozwalają nam skonstruować lokalnie gładkie cięcia

$$\sigma_i\ :\ \mathcal{O}_i\longrightarrow\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\ :\ x\longmapsto\tau_i^{-1}(x,e)\equiv\big(\beta_i(x),x\big)\in\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n},\mathbb{V}_x)\times\{x\}\,,$$

przy czym pole baz β_i zależy (lokalnie) gładko od punktu w $\mathcal{O}_i\subset B$. Łatwo przekonujemy się, że odwzorowanie zadane lokalnie (nad $\mathcal{O}_i\ni x$) w postaci

$$\Sigma_i\restriction_{\mathbb{V}_x}\ :\ \mathbb{V}_x\longrightarrow(\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n},\mathbb{V}_x)\times\mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\ :\ \nu\longmapsto\big[\big((\beta_i(x),x),\beta_i(x)^{-1}(\nu)\big)\big]$$

jest (lokalną) odwrotnością $[\widehat{\mathrm{ev}}]$, oto bowiem

$$\begin{aligned} &\Sigma_i\circ[\widehat{\mathrm{ev}}]\big(\big[\big((\beta_x,x),v\big)\big]\big)=\Sigma_i\circ\beta_x(v)=\big[\big((\beta_i(x),x),\beta_i(x)^{-1}\circ\beta_x(v)\big)\big]\\ \equiv\quad&\big[\big((\beta_x\circ\big(\beta_i(x)^{-1}\circ\beta_x\big)^{-1},x),\beta_i(x)^{-1}\circ\beta_x(v)\big)\big]=\big[\big((\beta_x,x),v\big)\big] \end{aligned}$$

a nadto – dla $\nu \in \mathbb{V}_x$ –

$$[\widehat{\mathrm{ev}}] \circ \Sigma_i(\nu) = [\widehat{\mathrm{ev}}]\big(\big[\big((\beta_i(x), x), \beta_i(x)^{-1}(\nu)\big)\big]\big) = \beta_i(x)\big(\beta_i(x)^{-1}(\nu)\big) = \nu\,.$$

I wreszcie na koniec upewniamy się, że odwzorowania lokalne Σ_i stanowią ograniczenia (do odnośnych elementów $\pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)$ pokrycia przestrzeni totalnej $\mathbb{V}$) odwzorowania globalnie gładkiego. W tym celu musimy najpierw ustalić regułę transformacyjną dla lokalnych wyborów bazy β_i. Niechaj $g_{ij} \,:\, \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ będą odwzorowaniami przejścia dla wybranych wcześniej trywializacji lokalnych $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$, tj. – dla dowolnych $x \in \mathcal{O}_{ij}$ oraz $\chi \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ –

$$\tau_i \circ \tau_j^{-1}(x,\chi) = \big(x, g_{ij}(x) \circ \chi\big)\,.$$

Obliczamy wówczas

$$\begin{aligned}\big(\beta_j(x), x\big) &\equiv \tau_j^{-1}(x, \mathrm{id}_{\mathbb{K}^{\times n}}) = \tau_i^{-1}\big(x, g_{ij}(x)\big) = \tau_i^{-1}(x, \mathrm{id}_{\mathbb{K}^{\times n}}) \triangleleft g_{ij}(x) \\ &= \big(\beta_i(x), x\big) \triangleleft g_{ij}(x) \equiv \big(\beta_i(x) \circ g_{ij}(x), x\big)\,,\end{aligned}$$

czyli

$$\beta_j(x) = \beta_i(x) \circ g_{ij}(x)\,,$$

a stąd już łatwo wyprowadzamy – dla dowolnego punktu $\nu \in \mathbb{V}_x,\ x \in \mathcal{O}_{ij}$ – pożądaną tożsamość

$$\begin{aligned}\Sigma_j(\nu) &= \big[\big((\beta_j(x), x), \beta_j(x)^{-1}(\nu)\big)\big] = \big[\big((\beta_i(x) \circ g_{ij}(x), x), g_{ij}(x)^{-1} \circ \beta_i(x)^{-1}(\nu)\big)\big] \\ &= \big[\big((\beta_i(x), x), \beta_i(x)^{-1}(\nu)\big)\big] \equiv \Sigma_i(\nu)\,.\end{aligned}$$

Dotychczasowe nasze rozważania pozwalają nam wypisać wprost trywializacje lokalne

$$[\tau_i] \,:\, \big(\pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times \mathbb{K}^{\times n}\big)/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} \,:\, \big[\big((\beta_x, x), v\big)\big] \longmapsto \big(x, \beta_i(x)^{-1} \circ \beta_x(v)\big)$$

o odwrotnościach

$$[\tau_i]^{-1} \,:\, \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} \xrightarrow{\cong} \big(\pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times \mathbb{K}^{\times n}\big)/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \,:\, (x, v) \longmapsto \big[\big((\beta_i(x), x), v\big)\big]$$

i tym samym zidentyfikować strukturę wiązki włóknistej na rozmaitości ilorazowej $(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$, przy czym jest jasne, że jest to wiązka wektorowa nad B o ciele bazowym $\mathbb{K}$. Odnotujmy na marginesie, że odwzorowania przejścia dla wypisanych tu trywializacji przyjmują – w dowolnym punkcie $(x, v) \in \mathcal{O}_{ij} \times \mathbb{K}^{\times n}$ – postać

$$[\tau_i] \circ [\tau_j]^{-1}(x, v) = [\tau_i]\big(\big[\big((\beta_j(x), x), v\big)\big]\big) = \big(x, \beta_i(x)^{-1} \circ \beta_j(x)(v)\big) = \big(x, g_{ij}(x)(v)\big)\,,$$

identyczną jak w przypadku $\mathbb{V}$. Wobec swojej oczywistej $\mathbb{K}$-liniowości odwzorowanie $[\widehat{\mathrm{ev}}]$ jawi się nam jako izomorfizm wiązek wektorowych

$$[\widehat{\mathrm{ev}}] \,:\, (\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}\,.$$

Na gruncie powyższych i wcześniejszych rozważań możemy wyartykułować proste, acz strukturalne

Stwierdzenie 1. Istnieje wzajem jednoznaczna odpowiedniość między cięciami lokalnymi (a zatem także trywializacjami lokalnymi) wiązki reperów wiązki wektorowej i trywializacjami lokalnymi wiązki wektorowej.

Dowód: Dowolne cięcie lokalne $\sigma \,:\, \mathcal{O} \longrightarrow \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \subset \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V},\ \mathcal{O} \in \mathscr{T}(B)$ pozwala zdefiniować odwzorowanie

$$\tau_\sigma \,:\, \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O} \times \mathbb{K}^{\times n} \,:\, v \longmapsto \big(\pi_{\mathbb{V}}(v), (\sigma \circ \pi_{\mathbb{V}})(v)^{-1}(v)\big)\,,$$

jawnie $\mathbb{K}$-liniowe i gładkie, o oczywistej odwrotności

$$\tau_\sigma^{-1} \,:\, \mathcal{O} \times \mathbb{K}^{\times n} \longrightarrow \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \,:\, (x, V) \longmapsto \sigma(x)(V)\,,$$

także gładkiej (i $\mathbb{K}$-liniowej). Własności te pozwalają zidentyfikować τ_σ jako trywializację lokalną wiązki $\mathbb{V}$ stowarzyszoną z cięciem lokalnym σ wiązki reperów.

Odwracając powyższe rozumowanie, dowolnej trywilizacji lokalnej $\tau\ :\ \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}\times\mathbb{K}^{\times n}$ przyporządkowujemy cięcie (lokalne)

$$\sigma_\tau\ :\ \mathcal{O}\longrightarrow \pi_{\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O})\ :\ x\longmapsto \tau^{-1}(x,\cdot)\,.$$

Bez trudu przekonujemy się, że skonstruowane tu przyporządkowania są wzajem odwrotne. Istotnie, stwierdzamy równość

$$\forall_{(x,V)\in\mathcal{O}\times\mathbb{K}^{\times n}}\ :\ \sigma_{\tau_\sigma}(x)(V)=\tau_\sigma^{-1}(x,V)=\sigma(x)(V)\,,$$

a z niej wyprowadzamy tożsamość

$$\sigma_{\tau_\sigma}=\sigma\,.$$

Ponadto

$$\begin{aligned}\forall_{v\in\pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O})}\ :\ \tau_{\sigma_\tau}(v) &= \big(\pi_{\mathbb{V}}(v),(\sigma_\tau\circ\pi_{\mathbb{V}})(v)^{-1}(v)\big)=\big(\pi_{\mathbb{V}}(v),\tau^{-1}\big(\pi_{\mathbb{V}}(v),\cdot\big)^{-1}(v)\big)\\ &\equiv \tau\circ\tau^{-1}\big(\pi_{\mathbb{V}}(v),\tau^{-1}\big(\pi_{\mathbb{V}}(v),\cdot\big)^{-1}(v)\big)=\tau(v)\,,\end{aligned}$$

przeto

$$\tau_{\sigma_\tau}=\tau\,.$$

□

oraz

Stwierdzenie 2. Dowolna rodzina trywializacji lokalnych wiązki reperów wiązki wektorowej indukuje rodzinę trywializacji lokalnych wiązki wektorowej (stowarzyszonych z tą samą rodziną podzbiorów otwartych ich wspólnej bazy) o tych samych odwzorowaniach przejścia.

<u>*Dowód:*</u> Niechaj $(\mathbb{V},B,\mathbb{K}^{\times n},\pi_{\mathbb{V}})$ będzie wiązką wektorową (nad ciałem $\mathbb{K}$), $(\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V},\,B,{\rm GL}(n;\mathbb{K}),\,\pi_{\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}})$ zaś – wiązką jej reperów i niech $\tau_i\ :\ \pi_{\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)\xrightarrow{\cong}\mathcal{O}_i\times{\rm GL}(n;\mathbb{K}),\ \mathcal{O}_i\in\mathscr{T}(B),\ i\in\{1,2\}$ będą dwiema trywializacjami lokalnymi drugiej z nich, o niepustym przecięciu dziedzin, $\mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2$, nad którym są określone odwzorowania przejścia $g_{12}\ :\ \mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2\longrightarrow{\rm GL}(n;\mathbb{K})$. Z każdą z trywializacji stowarzyszamy cięcie lokalne wedle formuły podanej w dowodzie Stw. 5-6.3,

$$\sigma_i\ :\ \mathcal{O}_i\longrightarrow\pi_{\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)\subset\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}\ :\ y\longmapsto\tau_i^{-1}(y,\mathbf{1}_n)\,,$$

a następnie używamy ich do skonstruowania odnośnych gładkich trywializacji lokalnych wiązki $\mathbb{V}$ zgodnie z przepisem sformułowanym w dowodzie Stw. 1,

$$\tau_{\sigma_i}\ :\ \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)\xrightarrow{\cong}\mathcal{O}_i\times\mathbb{K}^{\times n}\ :\ v\longmapsto\big(\pi_{\mathbb{V}}(v),(\sigma_i\circ\pi_{\mathbb{V}})(v)^{-1}(v)\big)\,,\quad i\in\{1,2\}\,.$$

O tym, że są to trywializacje o postulowanych odwzorowaniach przejścia, przekonujemy się w bezpośrednim rachunku, przeprowadzonym dla dowolnych $(y,V)\in\mathcal{O}_{12}\times\mathbb{K}^{\times n}$,

$$\tau_{\sigma_1}\circ\tau_{\sigma_2}^{-1}(y,V)=\tau_{\sigma_1}\big(\sigma_2(y)(V)\big)=\big(\pi_{\mathbb{V}}\big(\sigma_2(y)(V)\big),(\sigma_1\circ\pi_{\mathbb{V}})\big(\sigma_2(y)(V)\big)^{-1}\big(\sigma_2(y)(V)\big)\big)$$

$$=\ \big(y,\sigma_1(y)^{-1}\circ\sigma_2(y)(V)\big)\,,$$

który po uwzględnieniu ciągu równości

$$\sigma_2(y)\ \equiv\ \tau_2^{-1}(y,\mathbf{1}_n)=\tau_1^{-1}\big(y,g_{12}(y)\big)=\tau_1^{-1}(y,\mathbf{1}_n)\triangleleft g_{12}(y)\equiv\tau_1^{-1}(y,\mathbf{1}_n)\circ g_{12}(y)\equiv\sigma_1(y)\circ g_{12}(y)$$

odtwarza pożądany wynik

$$\tau_{\sigma_1}\circ\tau_{\sigma_2}^{-1}(y,V)=\big(y,\sigma_1(y)^{-1}\circ\sigma_1(y)\circ g_{12}(y)(V)\big)\equiv\big(y,g_{12}(y)(V)\big)\,.$$

□

2. Abstrakcja

Z przedstawionego w poprzednim rozdziale studium (kanonicznego) przypadku możemy wyabstrahować strukturalne własności konstrukcji będącej jego przedmiotem, kluczowe dla konstrukcji tej powodzenia. Mamy zatem do czynienia z konstrukcją wiązki włóknistej „stowarzyszonej" z daną wiązką główną poprzez działanie grupy strukturalnej tej ostatniej na ustalonej rozmaitości różniczkowalnej, przy czym owa rozmaitość jest promowana do rangi włókna typowego konstruowanej wiązki, a dane lokalne (trywializacje lokalne i odpowiadające im odwzorowania przejścia) wyjściowej wiązki głównej indukują odnośne dane lokalne tejże. Stosownej formalizacji tych naszych spostrzeżeń dostarcza

Definicja 1. Niechaj $(\mathsf{P}_{\rm G}, B, {\rm G}, \pi_{\mathsf{P}_{\rm G}})$ będzie wiązką główną, M zaś – rozmaitością z gładkim działaniem (lewostronnym) $\lambda : {\rm G} \times M \longrightarrow M$ grupy Liego G. **Wiązka stowarzyszona z $\mathsf{P}_{\rm G}$ poprzez λ** to wiązka włóknista

$$\big(\mathsf{P}_{\rm G} \times_\lambda M, B, M, \pi_{\mathsf{P}_{\rm G}\times_\lambda M}\big)$$

o składowych:

- przestrzeń totalna $\mathsf{P}_{\rm G} \times_\lambda M \equiv (\mathsf{P}_{\rm G} \times M)/{\rm G}$ będąca rozmaitością ilorazową określoną – według schematu opisanego w Cor. 5.2 (na gruncie Tw. 4.2) i w użytym tam zapisie – przez działanie z Równ. (5.2);
- rzut na bazę

$$\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}\times_\lambda M} \; : \; \mathsf{P}_{\rm G} \times_\lambda M \longrightarrow B \; : \; [(p,m)] \longmapsto \pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)\,.$$

Przy tym trywializacje lokalne $\tau_i : \pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times {\rm G},\ i \in I$ wiązki głównej $\mathsf{P}_{\rm G}$ stowarzyszone z pokryciem $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ bazy B indukują trywializacje lokalne

$$\widetilde{\tau}_i \; : \; \pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\rm G}\times_\lambda M}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times M \; : \; [(p,m)] \longmapsto \big(\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p), \lambda_{{\rm pr}_2\circ\tau_i(p)}(m)\big)\,,$$

o odwzorowaniach przejścia (indukowanych z tych dla $\mathsf{P}_{\rm G}$)

$$\widetilde{\tau}_i \circ \widetilde{\tau}_j^{-1} \; : \; \mathcal{O}_{ij} \times M \circlearrowleft \; : \; (x,m) \longmapsto \big(x, \lambda_{g_{ij}(x)}(m)\big)\,.$$

Ustaliwszy (dowolnie) punkt $x \in B$, wybierzmy (także dowolnie) $p_* \in (\mathsf{P}_{\rm G})_x$. Dyfeomorfizmy

$$[p_*]_\lambda \; : \; M \xrightarrow{\cong} (\mathsf{P}_{\rm G} \times_\lambda M)_x \; : \; m \longmapsto [(p_*,m)]\,,$$

o odwrotnościach

$$[p_*]_\lambda^{-1} \; : \; (\mathsf{P}_{\rm G} \times_\lambda M)_x \xrightarrow{\cong} M \; : \; [(p,m)] \longmapsto \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p_*,p)}(m)$$

i oczywistej własności

$$\forall_{g\in{\rm G}} \; : \; [p_* \triangleleft g]_\lambda = [p_*]_\lambda \circ \lambda_g\,, \tag{3}$$

noszą miano **izomorfizmów modelujących włókna**. Indukują one **izomorfizmy transportu włókna**

$$\begin{aligned}
[p_2,p_1]_\lambda \equiv [p_2]_\lambda \circ [p_1]_\lambda^{-1} \quad &: \quad (\mathsf{P}_{\rm G} \times_\lambda M)_{\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p_1)} \xrightarrow{\cong} (\mathsf{P}_{\rm G} \times_\lambda M)_{\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p_2)} \\
&: \quad [(p,m)] \longmapsto \big[\big(p_2, \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p_1,p)}(m)\big)\big]\,,
\end{aligned}$$

określone dla dowolnej pary $(p_1,p_2) \in \mathsf{P}_{\rm G}$.

Dla dowolnej pary $(\mathsf{P}_{\rm G} \times_{\lambda_\alpha} M_\alpha, B, M_\alpha, \pi_{\mathsf{P}_{\rm G}\times_{\lambda_\alpha} M_\alpha}),\ \alpha \in \{1,2\}$ wiązek stowarzyszonych z tą samą wiązką główną $(\mathsf{P}_{\rm G}, B, {\rm G}, \pi_{\mathsf{P}_{\rm G}})$ określamy także **niezmiennik wiązek stowarzyszonych** jako morfizm wiązek włóknistych

$$(\Phi, {\rm id}_B) \; : \; \mathsf{P}_{\rm G} \times_{\lambda_1} M_1 \longrightarrow \mathsf{P}_{\rm G} \times_{\lambda_2} M_2$$

o własności wyrażonej przez diagram przemienny, wypisany dla dowolnej pary punktów $p_1, p_2 \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$,

$$\begin{tikzcd} \big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1\big)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1)} \arrow[r, "{[p_2,p_1]_{\lambda_1}}"] \arrow[d, "\Phi\restriction_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_1} M_1)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1)}}"'] & \big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1\big)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2)} \arrow[d, "\Phi\restriction_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_1} M_1)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2)}}"] \\ \big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_2} M_2\big)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1)} \arrow[r, "{[p_2,p_1]_{\lambda_2}}"'] & \big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_2} M_2\big)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2)} \end{tikzcd} .$$

Uwaga 1. Istnienie struktury rozmaitości na przestrzeni orbit $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$ działania $\widetilde{\lambda}$ jest bezpośrednią konsekwencją Tw. 7-8.3, na którego przywołanie w powyższym kontekście pozwala Cor. 7-8.1. Przy tym gładkość rzutu na bazę $\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}$ wynika tu wprost ze Stw. Niezb-29, kiedy zauważyć, że rzut ten domyka diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} & B \\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M \arrow[ur, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \mathrm{pr}_1"] \arrow[r, "\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M)/\mathrm{G}}"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M \arrow[u, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}"'] \end{tikzcd} ,$$

w którym $\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M)/\mathrm{G}}$ jest surjektywną submersją (na mocy tegoż Tw. 7-8.3), a $\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \mathrm{pr}_1$ jest jawnie gładkie. Jako że to ostatnie odwzorowanie także jest submersją, przeto własność tę ma $\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}$, o czym przekonuje tożsamość uzyskana w obrazie powyższego diagramu względem funktora stycznego.

Przejdziemy do zbadania trywializacji lokalnych, zaczynając od sprawdzenia sensowności ich definicji. Musimy w tym celu pokazać, że wartość przyjmowana przez odwozrowanie $\widetilde{\tau}_i$ na klasie $[(p,m)]$ nie zależy od wyboru reprezentanta tej ostatniej. Obliczamy przeto

$$\begin{aligned} \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p \triangleleft g), \lambda\big(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p \triangleleft g), \lambda\big(g^{-1}, m\big)\big)\big) &= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \lambda\big(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p) \cdot g, \lambda\big(g^{-1}, m\big)\big)\big) \\ &= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \lambda\big(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p) \cdot g \cdot g^{-1}, m\big)\big) = \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \lambda\big(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p), m\big)\big) . \end{aligned}$$

Ponadto ponieważ odwzorowania

$$\underline{\tau}_i \ : \ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times M \longrightarrow \mathcal{O}_i \times M \ : \ (p,m) \longmapsto \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \lambda_{\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p)}(m)\big) , \quad i \in \{1,2\}$$

są jawnie gładkie, a przy tym pozostają z $\widetilde{\tau}_i$ w relacji opisywanej przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}_i \times M \\ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times M \arrow[ur, "\underline{\tau}_i"] \arrow[r, "\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M)/\mathrm{G}}"'] & \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[u, "\widetilde{\tau}_i"'] \end{tikzcd} ,$$

w którym rzut kanoniczny $\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M)/\mathrm{G}}$ jest – wprost na mocy Tw. 7-8.3 i Cor. 7-8.1 – gładki, przeto w świetle Stw. Niezb-29 także odwzorowania $\widetilde{\tau}_i$ są gładkie. Gładkość (także lokalna) ich odwrotności

$$\widetilde{\tau}_i^{-1} \ : \ \mathcal{O}_i \times M \longrightarrow \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \ : \ (x,m) \longmapsto \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e), m\big)\big]$$

nie budzi wątpliwości. We wszystkich dotychczasowych rozważaniach zakładamy *implicite* sensowność definicji odwzorowań $\widetilde{\tau}_i$ i $\widetilde{\tau}_i^{-1}$, która wymaga odrębnej weryfikacji – ta usprawiedliwia *a posteriori* dokonaną przez nas identyfikację włókna typowego

$$\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}^{-1}\big(\big\{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}([(p,m)])\big\}\big) \cong M , \quad [(p,m)] \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$$

rekonstruowanej tu wiązki włóknistej. Bez trudu dowodzimy pożądanych tożsamości: oto więc dla $(x,m) \in \mathcal{O}_i \times M$ zachodzi

$$\begin{aligned}\widetilde{\tau}_i \circ \widetilde{\tau}_i^{-1}(x,m) &= \widetilde{\tau}_i\big(\big[\big(\tau_i^{-1}(x,e),m\big)\big]\big) = \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \tau_i^{-1}(x,e), \lambda\big(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i \circ \tau_i^{-1}(x,e),m\big)\big) \\ &= \big(x,\lambda(e,m)\big) = (x,m)\,,\end{aligned}$$

a dla $[(p,m)] \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M,\ p = \tau_i^{-1}(x,g)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\widetilde{\tau}_i^{-1} \circ \widetilde{\tau}_i\big([(p,m)]\big) &= \widetilde{\tau}_i^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \lambda\big(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p),m\big)\big) = \big[\big(\tau_i^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),e\big), \lambda\big(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p),m\big)\big)\big] \\ &= \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e),\lambda(g,m)\big)\big] = \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e) \triangleleft g, m\big)\big] = \big[\big(\tau_i^{-1}(x,g),m\big)\big] \equiv [(p,m)]\,.\end{aligned}$$

Wreszcie też na koniec obliczamy

$$\begin{aligned}\widetilde{\tau}_i \circ \widetilde{\tau}_j^{-1}(x,m) &\equiv \widetilde{\tau}_i \circ \widetilde{\tau}_j^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \tau_j^{-1}(x,e), \lambda\big(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_j(\tau_j^{-1}(x,e)),m\big)\big) = \widetilde{\tau}_i\big(\big[\tau_j^{-1}(x,e),m\big]\big) \\ &= \big(x,\lambda\big(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i \circ \tau_j^{-1}(x,e),m\big)\big) = \big(x,\lambda\big(\mathrm{pr}_2(x,g_{ij}(x)),m\big)\big) \equiv \big(x,\lambda\big(g_{ij}(x),m\big)\big)\,.\end{aligned}$$

Konstrukcja wiązki stowarzyszonej jest zatem dobrze określona.

Rozważmy następnie odwzorowanie

$$[p_*]_\lambda^{-1}\ :\ (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)_x \longrightarrow M\ :\ [(p,m)] \longmapsto \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p)}(m)\,,\quad p_* \in (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_x\,.$$

Jest ono dobrze określone, gdyż dla dowolnego reprezentanta $(\widetilde{p},\widetilde{m}) \in [(p,m)]$ obliczamy

$$\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,\widetilde{p})}(\widetilde{m}) = \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p)} \circ \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p})}(\widetilde{m}) = \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p)}(m)\,.$$

Ponadto jest ono bijekcją, albowiem prawdziwą jest implikacja

$$\begin{aligned}&[p_*]_\lambda^{-1}\big([(p_2,m_2)]\big) = [p_*]_\lambda^{-1}\big([(p_1,m_1)]\big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad m_2 = \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)}(m_1) \\ \Longrightarrow \qquad &[(p_2,m_2)] = \big[\big(p_2,\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)}(m_1)\big)\big] = \big[\big(p_2 \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1),m_1\big)\big] = [(p_1,m_1)]\,,\end{aligned}$$

dowodząca injektywności $[p_*]_\lambda^{-1}$, a do tego dowolny punkt $m \in M$ możemy zapisać w postaci

$$m = [p_*]_\lambda^{-1}\big([(p_*,m)]\big)\,,$$

co zaświadcza o surjektywności tego odwzorowania, wskazując w jawny sposób jego odwrotność

$$[p_*]_\lambda\ :\ M \longrightarrow (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)_x\ :\ m \longmapsto [(p_*,m)]\,.$$

Istotnie, odwzorowanie $[p_*]_\lambda$ spełnia tożsamości

$$\begin{aligned}[p_*]_\lambda^{-1} \circ [p_*]_\lambda(m) &= \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_*)}(m) = \lambda_e(m) = m\,, \\ [p_*]_\lambda \circ [p_*]_\lambda^{-1}\big([(p,m)]\big) &= \big[\big(p_*,\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p)}(m)\big)\big] \equiv \big[\big(p_* \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p),m\big)\big] = [(p,m)]\,.\end{aligned}$$

Jest ono jawnie gładkie jako superpozycja włożenia $(p_*,\mathrm{id}_M)\ :\ M \longrightarrow \{p_*\}\times M \subset (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*)}\times M$ i surjektywnej submersji $\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M)/\mathrm{G}}\ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M \longrightarrow (\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M)/\mathrm{G}$. Gładkość $[p_*]_\lambda^{-1}$ wynika natomiast z tezy Stw. Niezb-29 odniesionej do diagramu przemiennego

$$\begin{tikzcd} & M \\ (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_x \times M \arrow[ur, "\lambda(\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,\mathrm{pr}_1),\mathrm{pr}_2)"] \arrow[r, "\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{G})/\mathrm{G}}\restriction_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_x\times M}"'] & (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)_x \arrow[u, "{[p_*]_\lambda^{-1}}"'] \end{tikzcd}$$

o submersywnej surjekcji na krawędzi poziomej. Konstrukcja dyfeomorfizmu $[p_*]_\lambda^{-1}$ stanowi zatem niezależny (od wcześniejszej konstrukcji trywializacji lokalnych) dowód słuszności przedłożonej przez nas identyfikacji włókna typowego wiązki stowarzyszonej. Warto przy tym zwrócić uwagę na naturalność tego dyfeomorfizmu, maskowaną przez jego definicję, będącą artefaktem swobody wyboru reprezentanta orbity-argumentu $[(p,m)]$. Istotnie, jeśli – korzystając z wykazanej niezależności wyniku od tegoż wyboru – dokonać go w sposób roztropny, tj w postaci $(p_*,\widetilde{m})\in[(p,m)]$, to otrzymujemy oczywistą postać przyporządkowania:

$$[p_*]_\lambda^{-1}\big([(p,m)]\big)\equiv[p_*]_\lambda^{-1}\big([(p_*,\widetilde{m})]\big)=\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_*)}\big(\widetilde{m}\big)=\widetilde{m}\,.$$

Przykłady 1.

(1) Wiązka wektorowa $\mathbb{V}$ (rzędu n) jest wiązką stowarzyszoną z wiązką (główną) reperów $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ poprzez działanie definiujące (ewaluację),

$$\mathbb{V}\cong\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times_{\mathrm{ev}}\mathbb{K}^{\times n}\,.$$

(2) **Wiązka dołączona**

$$\big(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\equiv\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\mathrm{Ad}}\mathrm{G},B,\mathrm{G},\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\mathrm{Ad}}\mathrm{G}}\big)\,.$$

(3) Wiązka główna P_{G} może być zrealizowana jako wiązka stowarzyszona

$$\big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\ell\mathrm{G},B,\mathrm{G},\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\ell\mathrm{G}}\big)\,.$$

Stosowny izomorfizm wiązek włóknistych to

$$\widetilde{\iota}\;:\;\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\ell\mathrm{G}\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\;:\;[(p,g)]\longmapsto p\triangleleft g\,,$$

przy czym jego gładkość wynika z tego, że domyka on diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} & B \\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{G} \arrow[ur, "r"] \arrow[r, "\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{G})/\mathrm{G}}"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\ell\mathrm{G} \arrow[u, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\ell\mathrm{G}}"'] \end{tikzcd}\,,$$

w którym $\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{G})/\mathrm{G}}$ jest surjektywną submersją, r zaś – odwzorowaniem gładkim. Odwrotność $\widetilde{\iota}$ jest dana w (jawnie gładkiej) postaci

$$\widetilde{\iota}^{-1}\;:\;\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\ell\mathrm{G}\;:\;p\longmapsto[(p,e)]\,.$$

Na wiązce stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\ell\mathrm{G}$ jest określone działanie prawostronne grupy G w postaci

$$\widetilde{r}\;:\;(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\ell\mathrm{G})\times\mathrm{G}\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\ell\mathrm{G}\;:\;\big([(p,g)],h\big)\longmapsto[(p,g\cdot h)]\,,$$

względem którego każde z włókien jest torsorem. Izomorfizm $\widetilde{\iota}$ jest G-ekwiwariantny,

$$\widetilde{\iota}\circ\widetilde{r}\big([(p,g)],h\big)=\widetilde{\iota}\big([(p,g\cdot h)]\big)=p\triangleleft(g\cdot h)=(p\triangleleft g)\triangleleft h=r\circ\widetilde{\iota}\big([(p,g)],h\big)\,,$$

mamy zatem do czynienia z izomorfizmem wiązek głównych.

W poszukiwaniu automorfizmów wiązki stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\ell\mathrm{G}$ zauważamy, że ze względu na przemienność działania regularnego lewostronnego $\ell.$ z działaniem regularnym prawostronnym $\wp.\;:\;\mathrm{G}\times\mathrm{G}\longrightarrow\mathrm{G}\;:\;(g,h)\longmapsto g\cdot h$ to ostatnie indukuje – na mocy Stw. 3, a dla dowolnego $g\in\mathrm{G}$ – niezmiennik wiązek

$$\Phi[r_g]\;:\;\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\ell\mathrm{G}\circlearrowleft\;:\;[(p,h)]\longmapsto\Phi[r_g]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\big([(p,h)]\big)\,,$$

przy czym

$$\begin{aligned}\Phi[r_g]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\big([(p,h)]\big)&=[p]_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\ell\mathrm{G}}\circ r_g\circ[p]^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\ell\mathrm{G}}\big([(p,h)]\big)=[p]_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\ell\mathrm{G}}\circ r_g\circ\ell_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,p)}(h)\\&=[p]_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\ell\mathrm{G}}\circ r_g(h)=[p]_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\ell\mathrm{G}}(h\cdot g)=[(p,h\cdot g)]\equiv\widetilde{r}_g\big([(p,h)]\big)\,,\end{aligned}$$

czyli

$$\Phi[r_g]\equiv\widetilde{r}_g\,,$$

a ponieważ

$$[(p,h)]=[(p\triangleleft h,e)]\equiv\widetilde{\iota}^{-1}(p\triangleleft h)$$

oraz

$$[(p, h \cdot g)] = [(p \triangleleft h \cdot g, e)] = \big[\big((p \triangleleft h) \triangleleft g, e\big)\big] = \big[\big(r_g(p \triangleleft h), e\big)\big] \equiv \widetilde{\iota}^{-1} \circ r_g(p \triangleleft h)\,,$$

zatem

$$\widetilde{\iota} \circ \Phi[r_g] \circ \widetilde{\iota}^{-1} = r_g\,.$$

W tym więc sensie automorfizmy $\Phi[r_g]$ są indukowane przez $r_\cdot$, a o tym ostatnim możemy myśleć jako o modelowym niezmienniku wiązek.

Celem praktycznym (np. fizykalnym) konstrukcji wiązek stowarzyszonych jest uzyskanie gładkich dystrybucji rozmaitości określonego (izo)typu M nad zadaną bazą B (np. czasoprzestrzenią) będących nośnikiem wyróżnionego działania ustalonej grupy Liego G (np. symetrii teorii fizykalnej), które ma charakter lokalny nad bazą. Innymi słowy, jest nim stworzenie rozmaitości lokalnie modelowanej na $\mathcal{O} \times M$, $\mathcal{O} \subset B$ z działaniem G lokalnie modelowanym na λ. O tym, że tak zdefiniowany cel został skutecznie zrealizowany zaświadczają dwa poniższe stwierdzenia, z których pierwsze dostarcza zarazem „usprawiedliwienia" *ex post* dokonanego przez nas nieoczywistego wyboru (podklasy) morfizmów wiązek stowarzyszonych.

Stwierdzenie 3. Wiązki stowarzyszone z daną wiązką główną $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ wraz z odnośnymi niezmiennikami wiązek stowarzyszonych tworzą **kategorię wiązek stowarzyszonych z wiązką główną** P_{G}, którą będziemy oznaczać symbolem

$$\mathbf{AssBun}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\,.$$

Kategoria ta jest kanonicznie równoważna kategorii $\mathbf{Man}_{\mathrm{G}}$ rozmaitości z (lewostronnym) działaniem gładkim o morfizmach danych przez odwzorowania G-ekwiwariantne.

<u>*Dowód:*</u> Pierwsza część tezy stanowi ledwie wskazanie klasy morfizmów przez nas rozpatrywanych i jako taka nie wymaga odrębnego dowodu (niezmienniki wiązek można w oczywisty sposób składać, a ponadto morfizm identycznościowy jest – rzecz jasna – niezmiennikiem wiązek). Także wzajem jednoznaczna odpowiedniość między obiektami kategorii $\mathbf{AssBun}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ i G-rozmaitościami jest oczywista. Jedynym zatem, co wymaga sprawdzenia, jest stosowna bijektywna odpowiedniość między niezmiennikami wiązek stowarzyszonych i odwzorowaniami G-ekwiwariantnymi.

Niechaj $(\Phi, \mathrm{id}_B) : \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1 \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_2} M_2$ będzie niezmiennikiem wiązek, a wtedy możemy zdefiniować – dla pewnego (dowolnego) punktu $p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ – odwzorowanie (jawnie gładkie)

$$\chi[\Phi] := [p]_{\lambda_2}^{-1} \circ \Phi \circ [p]_{\lambda_1} \;:\; M_1 \xrightarrow{\cong} (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} \longrightarrow (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_2} M_2)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} \xrightarrow{\cong} M_2\,,$$

które wobec definiującej własności Φ,

$$\Phi \circ [p_2]_{\lambda_1} \circ [p_1]_{\lambda_1}^{-1} = [p_2]_{\lambda_2} \circ [p_1]_{\lambda_2}^{-1} \circ \Phi\,,$$

nie zależy od wyboru punktu p użytego w jego definicji. G-ekwiwariantność tak określonych odwzorowań,

$$\chi[\Phi] \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(M_1, M_2)\,,$$

wynika wprost z bezpośredniego rachunku, odwołującego się do Równ. (3) i przeprowadzonego poniżej dla dowolnych $(p, g) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G}$,

$$\begin{aligned}\chi[\Phi] \circ \lambda_{1\,g} &\equiv [p]_{\lambda_2}^{-1} \circ \Phi \circ \big([p]_{\lambda_1} \circ \lambda_{1\,g}\big) = [p]_{\lambda_2}^{-1} \circ \Phi \circ [p \triangleleft g]_{\lambda_1} \equiv \big([p \triangleleft g]_{\lambda_2} \circ \lambda_{2\,g^{-1}}\big)^{-1} \circ \Phi \circ [p \triangleleft g]_{\lambda_1} \\ &= \lambda_{2\,g} \circ [p \triangleleft g]_{\lambda_2}^{-1} \circ \Phi \circ [p \triangleleft g]_{\lambda_1} = \lambda_{2\,g} \circ [p]_{\lambda_2}^{-1} \circ \Phi \circ [p]_{\lambda_1} \equiv \lambda_{2\,g} \circ \chi[\Phi]\,.\end{aligned}$$

I odwrotnie, z każdym odwzorowaniem $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(M_1, M_2)$ możemy stowarzyszyć odwzorowanie (gładkie)

$$\begin{aligned}\Phi[\chi]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} := [p]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} \quad &: \quad (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} \longrightarrow (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_2)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} \\ &: \quad [(p, m)] \longmapsto \big[\big(p, \chi(m)\big)\big]\,,\end{aligned}$$

zależne jedynie od rzutu $p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ na bazę wiązki B,

$$\begin{aligned}\Phi[\chi]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p\triangleleft g)} &= [p\triangleleft g]_{\lambda_2}\circ\chi\circ[p\triangleleft g]_{\lambda_1}^{-1} = [p]_{\lambda_2}\circ\big(\lambda_{2\,g}\circ\chi\circ\lambda_{1\,g^{-1}}\big)\circ[p]_{\lambda_1}^{-1} \\ &= [p]_{\lambda_2}\circ\chi\circ\big(\lambda_{1\,g}\circ\lambda_{1\,g^{-1}}\big)\circ[p]_{\lambda_1}^{-1} = [p]_{\lambda_2}\circ\chi\circ[p]_{\lambda_1}^{-1} \equiv \Phi[\chi]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\,,\end{aligned}$$

i z tej racji określające niezmiennik wiązek dany wzorem

$$\Phi[\chi]\ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_1}M_1\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_2}M_2\ :\ [(p,m)]\longmapsto\Phi[\chi]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\big([(p,m)]\big)\,.$$

Istotnie, obliczamy

$$\begin{aligned}\Phi[\chi]\circ[p_2,p_1]_{\lambda_1} &\equiv \big([p_2]_{\lambda_2}\circ\chi\circ[p_2]_{\lambda_1}^{-1}\big)\circ\big([p_2]_{\lambda_1}\circ[p_1]_{\lambda_1}^{-1}\big) = [p_2]_{\lambda_2}\circ\chi\circ[p_1]_{\lambda_1}^{-1} \\ &= \big([p_2]_{\lambda_2}\circ[p_1]_{\lambda_2}^{-1}\big)\circ\big([p_1]_{\lambda_2}\circ\chi\circ[p_1]_{\lambda_1}^{-1}\big) \equiv [p_2,p_1]_{\lambda_2}\circ\Phi[\chi]\,.\end{aligned}$$

Skonstruowane tu przyporządkowania

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{AssBun}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_1}M_1,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_2}M_2)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(M_1,M_2)\ :\ (\Phi,\mathrm{id}_B)\longmapsto\chi[\Phi]$$

oraz

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(M_1,M_2)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathbf{AssBun}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_1}M_1,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_2}M_2)\ :\ \chi\longmapsto\big(\Phi[\chi],\mathrm{id}_B\big)$$

są wzajem odwrotne, a każde z nich jest funktorialne. Istotnie, w przypadku rozmaitości M z działaniem $\lambda\ :\ \mathrm{G}\times M\longrightarrow M$ otrzymujemy, w dowolnym punkcie $p\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$, równość

$$\Phi[\mathrm{id}_M]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} = [p]_{\lambda_2}\circ\mathrm{id}_B\circ[p]_{\lambda_1}^{-1} = [p]_{\lambda_2}\circ[p]_{\lambda_1}^{-1} = \mathrm{id}_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}}\,,$$

czyli też tożsamość

$$\Phi[\mathrm{id}_M] = \mathrm{id}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}\,,$$

a nadto dla dowolnej pary odwzorowań G-ekwiwariantnych $\chi_\alpha\ :\ M_\alpha\longrightarrow M_{\alpha+1},\ \alpha\in\{1,2\}$ pomiędzy G-rozmaitościami $M_\beta,\ \beta\in\{1,2,3\}$ z odnośnymi działaniami $\lambda_\beta\ :\ \mathrm{G}\times M_\beta\longrightarrow M_\beta$ otrzymujemy diagram przemienny (dla dowolnego $p\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$)

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[rrr, "{[p]_{\lambda_1}}"] \arrow[dr, "\chi_1"] \arrow[dd, "\chi_2\circ\chi_1"'] & & & \big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_1}M_1\big)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} \arrow[dl, "{\Phi[\chi_1]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}}"'] \arrow[dd, "{\Phi[\chi_2]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\circ\Phi[\chi_1]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}}"] \\
& M_2 \arrow[r, "{[p]_{\lambda_2}}"] \arrow[dl, "\chi_2"] & \big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_2}M_2\big)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} \arrow[dr, "{\Phi[\chi_2]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}}"'] & \\
M_3 \arrow[rrr, "{[p]_{\lambda_3}}"'] & & & \big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_3}M_3\big)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}
\end{tikzcd}\ ,$$

w którym przemienność górnego (wzgl. dolnego) trapezu wyraża definicję niezmiennika $\Phi[\chi_1]$ (wzgl. $\Phi[\chi_2]$), a przemienność lewego i prawego trójkąta jest zapisem definicji odnośnych superpozycji odwzorowań, a ponieważ zarazem skrajna prawa krawędź jest – wprost z definicji – tożsama z odwzorowaniem $\Phi[\chi_2\circ\chi_1]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}$, przeto – zgodnie z oczekiwaniami –

$$\Phi[\chi_2\circ\chi_1] = \Phi[\chi_2]\circ\Phi[\chi_1]\,.$$

Ten sam diagram przekonuje nas o funktorialności odwzorowania odwrotnego, jeśli tylko potraktować niezmienniki wiązek jako dane, a odwzorowania G-ekwiwariantne – jako przypisane tym ostatnim. □

Uwaga 2. Termin „wiązka dołączona” bywa używany w literaturze w odniesieniu do wiązki stowarzyszonej

$$(\mathrm{ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \equiv \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\mathsf{T}_e \mathrm{Ad}} \mathfrak{g}, B, \mathfrak{g}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\mathsf{T}_e \mathrm{Ad}} \mathfrak{g}}),$$

o włóknie typowym tożsamym z algebrą Liego $\mathfrak{g}$ grupy Liego G.

Mamy też zasadnicze

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def. 1 oraz Przykł. 1 (2). Istnieje kanoniczna struktura wiązki grup na $\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$, lokalnie modelowana na strukturze grupy na włóknie typowym G, tj. są określone: łączna operacja binarna

$$[M] \ : \ \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$$

posiadająca element neutralny oraz operacja unarna

$$[\mathrm{Inv}] \ : \ \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \circlearrowleft,$$

spełniające (włókno po włóknie) aksjomaty grupy. Struktura ta indukuje kanonicznie strukturę grupy (Frécheta–Liego) na przestrzeni cięć $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ tej wiązki, mającą swą realizację na przestrzeni cięć $\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$ wiązki stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$ indukowaną przez odwzorowanie

$$[\lambda]. \ : \ \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M) \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$$

spełniające (włókno po włóknie) aksjomaty (lDG1) i (lDG2) działania grupy Liego na rozmaitości i modelowane lokalnie na λ.

<u>*Dowód:*</u> Rozważmy na wstępnie operację binarną

$$[M] \ : \ \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \ : \ \big([(p_1,g_1)],[(p_2,g_2)]\big) \longmapsto \big[\big(p_1, g_1 \cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2)\big)\big],$$

wraz z przyporządkowaniem – włókno po włóknie –

$$[\varepsilon]_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} \ : \ \{\bullet\} \longrightarrow \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \ : \ \bullet \longmapsto [(p,e)], \quad p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$$

oraz operacją unarną

$$[\mathrm{Inv}] \ : \ \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \circlearrowleft \ : \ [(p,g)] \longmapsto \big[\big(p,g^{-1}\big)\big].$$

Zaczniemy od sprawdzenia, że wszystkie trzy odwzorowania są dobrze określone. Niech zatem $(p_3,g_3) \in [(p_1,g_1)]$, tj. $(p_3,g_3) = (p_1 \triangleleft g_{13}, \mathrm{Ad}_{g_{13}^{-1}}(g_1))$ oraz $(p_4,g_4) \in [(p_2,g_2)]$, tj. $(p_4,g_4) = (p_2 \triangleleft g_{24}, \mathrm{Ad}_{g_{24}^{-1}}(g_2))$, gdzie dla skrótu oznaczyliśmy $g_{ij} \equiv \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_i,p_j)$, $(i,j) \in \{(1,3),(2,4)\}$, a wówczas – na mocy Stw. 5-6.1 – otrzymujemy

$$\big[\big(p_3, g_3 \cdot \mathrm{Ad}_{g_{34}}(g_4)\big)\big] = \big[\big(p_1, \mathrm{Ad}_{g_{13}}\big(g_3 \cdot \mathrm{Ad}_{g_{34}}(g_4)\big)\big)\big] = \big[\big(p_1, \mathrm{Ad}_{g_{13}}\big(\mathrm{Ad}_{g_{13}^{-1}}(g_1) \cdot \mathrm{Ad}_{g_{34} \cdot g_{24}^{-1}}(g_2)\big)\big)\big]$$

$$= \ \big[\big(p_1, g_1 \cdot \mathrm{Ad}_{g_{13} \cdot g_{34} \cdot g_{42}}(g_2)\big)\big] = \big[\big(p_1, g_1 \cdot \mathrm{Ad}_{g_{12}}(g_2)\big)\big]$$

oraz

$$\big[\big(p_3, g_3^{-1}\big)\big] = \big[\big(p_1, \mathrm{Ad}_{g_{13}}\big(g_3^{-1}\big)\big)\big] = \big[\big(p_1, \mathrm{Ad}_{g_{13}}(g_3)^{-1}\big)\big] = \big[\big(p_1, g_1^{-1}\big)\big],$$

a nadto stwierdzamy, że wartość odwzorowania $[\varepsilon]_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}$ nie zależy od wyboru punktu we włóknie nad $\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)$, oto bowiem dla dowolnego $\widetilde{p} = p \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p})$ dostajemy

$$[(\widetilde{p},e)] = \big[\big(p \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p}), e\big)\big] = \big[\big(p, \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p})}(e)\big)\big] = [(p,e)].$$

Dowód stwierdzenia, że powyższa struktura jest w istocie lokalnie modelowana na strukturze algebraicznej G, sprowadza się do wykazania, że izomorfizmy modelujące włókna wiązki dołączonej,

$$[p_*]_{\mathrm{Ad}} \ : \ \big(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\big)_x \longrightarrow \mathrm{G} \ : \ [(p,g)] \longmapsto \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p)}(g), \quad x \in B,$$

są homomorfizmami grup, co czynimy poniżej (dla dowolnej pary punktów $(p_1,g_1),(p_2,g_2) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G}$ o własności $p_1,p_2 \in (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_x$), w odwołaniu do Stw. 5-6.1,

$$[p_*]_{\mathrm{Ad}} \circ [M]\big([(p_1,g_1)],[(p_2,g_2)]\big) = [p_*]_{\mathrm{Ad}}\big(\big[\big(p_1, g_1 \cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2)\big)\big]\big)$$

$$= \ \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_1)}\big(g_1 \cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2)\big) = \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_1)}(g_1) \cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_1) \cdot \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2)$$

$$= \quad \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_1)}(g_1)\cdot\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_2)}(g_2)\equiv M\big([p_*]_{\mathrm{Ad}}\big([p_1,g_1]\big),[p_*]_{\mathrm{Ad}}\big([p_2,g_2]\big)\big)\,.$$

Pierwszym krokiem na drodze do zrekonstruowania działania włókno po włóknie grupy $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ na przestrzeni $\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)$ jest identyfikacja następującego *lewego* (*sic*!) działania wiązki dołączonej na P_{G}:

$$[r]_\cdot\ :\ \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_B\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\ :\ \big([(p,g)],\widetilde p\big)\longmapsto r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde p,p)}(g)}(\widetilde p)\,.$$

Jest ono w pełni jednoznacznie określone, oto bowiem dla dowolnego reprezentanta $(p_2,g_2)\in[(p_1,g_1)]$ otrzymujemy

$$r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde p,p_2)}(g_2)}(\widetilde p)=r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde p,p_1)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2)}(\widetilde p)=r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde p,p_1)}(\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2))}(\widetilde p)=r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde p,p_1)}(g_1)}(\widetilde p)\,.$$

O jego gładkości przesądza Stw. Niezb-29 – istotnie, $[r]_\cdot$ jest (jedynym) gładkim odwzorowaniem indukowanym przez stałe na poziomicach rzutu kanonicznego $\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{G})/\mathrm{G}}$ odwzorowanie (jawnie gładkie)

$$\widetilde r_\cdot\ :\ (\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{G})\times_B\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\ :\ \big((p,g),\widetilde p\big)\longmapsto r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde p,p)}(g)}(\widetilde p)\,.$$

Bez trudu przekonujemy się, że $[r]_\cdot$ ma własności analogiczne do własności definiujących (*lewego*) działania grupy: oto element neutralny działa trywialnie,

$$[r]_{[(p,e)]}(\widetilde p)=r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde p,p)}(e)}(\widetilde p)=r_e(\widetilde p)=\widetilde p\,,$$

a odwzorowanie $[r]_\cdot$ jest multyplikatywne w pierwszym argumencie, tj. dla dowolnej pary $[(p_1,g_1)]$, $[(p_2,g_2)]\in(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde p)}$ zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned}
&[r]_{[M]([(p_1,g_1)],[(p_2,g_2)])}(\widetilde p)=r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde p,p_1)}(g_1\cdot\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2))}(\widetilde p)\\
=\ &r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde p,p_1)}(g_1)\cdot\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde p,p_1)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2)}(\widetilde p)=r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde p,p_1)}(g_1)\cdot\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde p,p_2)}(g_2)}(\widetilde p)\\
=\ &r_{\mathrm{Ad}_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde p,p_2)}(g_2^{-1})}(\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde p,p_1)}(g_1))}\circ r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde p,p_2)}(g_2))}(\widetilde p)\\
\equiv\ &r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde p,p_2)\cdot g_2^{-1}\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)}(g_1)}\circ[r]_{[(p_2,g_2)]}(\widetilde p)\,,
\end{aligned}$$

którą wobec równości

$$\begin{aligned}
&\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big([r]_{[(p_2,g_2)]}(\widetilde p),p_1\big)\equiv\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(r_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde p,p_2)\cdot g_2\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,\widetilde p)}(\widetilde p),p_1\big)=\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(r_{g_2\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,\widetilde p)}(p_2),p_1\big)\\
=\ &\big(g_2\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,\widetilde p)\big)^{-1}\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)=\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde p,p_2)\cdot g_2^{-1}\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)
\end{aligned}$$

możemy przepisać w pożądanej postaci

$$[r]_{[M]([(p_1,g_1)],[(p_2,g_2)])}(\widetilde p)=r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}([r]_{[(p_2,g_2)]}(\widetilde p),p_1)}(g_1)}\big([r]_{[(p_2,g_2)]}(\widetilde p)\big)\equiv[r]_{[(p_1,g_1)]}\circ[r]_{[(p_2,g_2)]}(\widetilde p)\,.$$

Należy przy tym podkreślić, że zdefiniowane tu działanie wiązki dołączonej jest przemienne z działaniem prawostronnym definiującym $r_\cdot$ – w rzeczy samej, dla dowolnych $[(p,g)]\in\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$, $h\in\mathrm{G}$ i $\widetilde p\in(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}$ stwierdzamy, że

$$\begin{aligned}
&[r]_{[(p,g)]}\circ r_h(\widetilde p)=r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(r_h(\widetilde p),p)}(g)}\big(r_h(\widetilde p)\big)=r_{g\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,r_h(\widetilde p))}(p)\\
=\ &r_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde p,p)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,r_h(\widetilde p))}\big(r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde p,p)}(g)}(\widetilde p)\big)\equiv r_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde p,r_h(\widetilde p))}\big([r]_{[(p,g)]}(\widetilde p)\big)=r_h\circ[r]_{[(p,g)]}(\widetilde p)\,.
\end{aligned}$$

Działanie to możemy następnie podnieść, z zachowaniem wszystkich sprawdzonych powyżej jego pożądanych własności, z przestrzeni totalnej wiązki dołączonej do przestrzeni cięć (globalnych) tejże wiązki, wedle schematu

$$\Gamma[r]_\cdot\ :\ \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\times\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\ :\ (\gamma,p)\longmapsto[r]_{\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}(p)\,.$$

Przestrzeń $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ (wyposażona w naturalną strukturę rozmaitości Frécheta) objawia się w roli nośnika struktury grupy (Frécheta–Liego) o operacjach grupowych (σ jest *dowolnym* cięciem lokalnym P_{G} na otoczeniu danego punktu w bazie)

$$\begin{aligned} \Gamma[M] \quad &: \quad \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\times\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\longrightarrow\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \;:\; (\gamma_1,\gamma_2)\longmapsto[M]\circ(\gamma_1,\gamma_2)\,, \\ \Gamma[\mathrm{Inv}] \quad &: \quad \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\circlearrowleft \;:\; \gamma\longmapsto[\mathrm{Inv}]\circ\gamma\,, \\ \Gamma[\varepsilon] \quad &: \quad \{\bullet\}\longrightarrow\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \;:\; \bullet\longmapsto\big[\big(\sigma(\cdot),e\big)\big]\,, \end{aligned}$$

indukowanych w oczywisty sposób (punktowo) z odnośnych operacji na $\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$, i zarazem – w roli podgrupy grupy automorfizmów wiązki głównej P_{G} (nad identycznością na bazie), przy czym odwzorowanie $\Gamma[r]_\gamma$ utożsamiamy z automorfizmem $(\Gamma[r]_\gamma,\mathrm{id}_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_B)$ w zapisie Def. 5-6.1. Używając tak rozumianego działania grupy cięć wiązki dołączonej na P_{G}, możemy następnie w oczywisty sposób rozszerzyć działanie tejże grupy cięć do wiązki $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M$ nad wyjściową bazą B kładąc

$$\Gamma[\widetilde{r}].:=\Gamma[r].\times\mathrm{id}_M \;:\; \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\times(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M)\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M \;:\; \big(\gamma,(p,m)\big)\longmapsto\big([r]_{\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}(p),m\big)\,.$$

Własnością tego działania o kluczowym znaczeniu dla naszych dalszych rozważań jest jego przemienność z działaniem $\widetilde{\lambda}.$ zdefiniowanym w Równ. (7-8.2), stanowiącym podstawę konstrukcji wiązki stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M$. Istotnie, dla dowolnych $\gamma\equiv[(\sigma,\mu)]\in\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$, $g\in\mathrm{G}$ oraz $(p,m)\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M$, otrzymujemy – przywoławszy sprawdzoną uprzednio przemienność działań: $[r].$ i $r.$ – x

$$\begin{aligned} \Gamma[\widetilde{r}]_\gamma\circ\widetilde{\lambda}_g(p,m) \quad &= \quad \big([r]_{\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(r_g(p))}\big(r_g(p)\big),\lambda_{g^{-1}}(m)\big)\equiv\big([r]_{\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\circ r_g(p),\lambda_{g^{-1}}(m)\big) \\ &= \quad \big(r_g\circ[r]_{\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}(p),\lambda_{g^{-1}}(m)\big)=\widetilde{\lambda}_g\circ\Gamma[\widetilde{r}]_\gamma(p,m)\,. \end{aligned}$$

W konsekwencji tego faktu działanie indukowane $\Gamma[\widetilde{r}].$ zstępuje na rozmaitość orbit $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M)/\mathrm{G}\equiv\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M$, tj. kanonicznie indukuje działanie lewostronne grupy $\Gamma(P_{\mathrm{Ad.}}\mathrm{G})$ na rozmaitości $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M$ dane wzorem

$$[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_. \;:\; \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\times\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M \;:\; \big(\gamma,[(p,m)]\big)\longmapsto\big[\big([r]_{\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}(p),m\big)\big]\,.$$

Dotychczasowa nasza analiza przekonuje, że odwzorowanie to jest dobrze określone i ma wszystkie własności działania (lewostronnego) grupy. W ostatnim kroku indukujemy przy jego użyciu postulowane w treści dowodzonego stwierdzenia działanie grupy $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ na przestrzeni cięć (globalnych) wiązki stowarzyszonej,

$$\begin{aligned} \Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_. \quad &: \quad \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\times\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)\longrightarrow\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M) \\ &: \quad \big(\gamma,[(\sigma,\mu)]\big)\longmapsto\big[\big([r]_{\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\circ\sigma(\cdot)}\circ\sigma(\cdot),\mu(\cdot)\big)\big]\equiv\big[\big([r]_{\gamma(\cdot)}\circ\sigma(\cdot),\mu(\cdot)\big)\big]\,. \end{aligned} \tag{4}$$

To ostatnie w oczywisty sposób stanowi podniesienie do przestrzeni cięć odwzorowania

$$\begin{aligned} [\lambda]. \quad &: \quad \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_B(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M \\ &: \quad \big([(p_1,g)],[(p_2,m)]\big)\longmapsto\big[\big(p_2,\lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)}(g)}(m)\big)\big]\,, \end{aligned}$$

którego określoność i multyplikatywność w pierwszym argumencie jest bezpośrednią konsekwencją zweryfikowanych przez nas odnośnych własności działania $\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_.$. To, że – zgodnie z tezą stwierdzenia – działanie $[\lambda].$ jest lokalnie modelowane na $\lambda.$, stwierdzamy, używając wskazanych wcześniej izomorfizmów $[p_*]_{\mathrm{Ad}}$ oraz $[p_*]_\lambda$. Wykonujemy zatem prosty rachunek:

$$\begin{aligned} &\lambda_{[p_*]_{\mathrm{Ad}}([(p_1,g)])}\big([p_*]_\lambda\big([(p_2,m)]\big)\big)=\lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_1)}(g)}\circ\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_2)}(m) \\ = \quad &\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_2)\cdot\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)}(g)}(m)=\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_2)}\big(\lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)}(g)}(m)\big) \\ \equiv \quad &[p_*]_\lambda\big(\big[\big(p_2,\lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)}(g)}(m)\big)\big]\big)\equiv[p_*]_\lambda\circ[\lambda]_{[(p_1,g)]}\big([(p_2,m)]\big)\,. \end{aligned}$$

□

Uwaga 3. Postać zapostulowanych w treści dowodu geometryzacji operacji grupowych ($[M], [\mathrm{Inv}]$ i $[\varepsilon]$) oraz działania grupy ($[\lambda].$) może na pierwszy rzut oka wydać się wysoce nieoczywistą. Należy jednak podkreślić, że ich złożoność jest jedynie artefaktem przyjętego wcześniej schematu opisu (punktów) rozmaitości ilorazowych $\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ i $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$. Istotnie, gdy np. wykorzystać definicję orbity $[(p_2, g_2)]$ drugiego argumentu w definicji operacji binarnej $[M]$ i sprowadzić ją do postaci

$$[(p_2, g_2)] \equiv \big[\big(r_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(p_1), g_2\big)\big] \equiv \big[\big(p_1, \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2) \equiv \widetilde{g}_2\big)\big]$$

(wszak $(p_1, p_2) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$), otrzymamy naturalną postać geometrycznego mnożenia:

$$[M]\big([(p_1, g_1)], [(p_1, \widetilde{g}_2)]\big) = \big[\big(p_1, g_1 \cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_1)}(\widetilde{g}_2)\big)\big] = \big[\big(p_1, g_1 \cdot \mathrm{Ad}_e(\widetilde{g}_2)\big)\big] = \big[\big(p_1, g_1 \cdot \widetilde{g}_2\big)\big].$$

Analogiczny wniosek dotyczy działania $[\lambda]..$ Po przepisaniu drugiego jego argumentu wedle powyższego schematu,

$$[(p_2, m)] \equiv \big[\big(p_1, \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(m) \equiv \widetilde{m}\big)\big],$$

dostajemy

$$[\lambda]\big([(p_1, g)], [(p_1, \widetilde{m})]\big) = \big[\big(p_1, \lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_1)}(g)}\big(\widetilde{m}\big)\big)\big] \equiv \big[\big(p_1, \lambda_g\big(\widetilde{m}\big)\big)\big].$$

Powyższe stwierdzenie wraz z jego konstruktywnym dowodem pokazują dowodnie, że cel, o którym była mowa wcześniej, został osiągnięty. Eksponują przy tym rolę zbioru gładkich cięć wiązki stowarzyszonej, co każe nam przyjrzeć się uważniej temu ostatniemu. Czynimy to w

Stwierdzenie 5. Przyjmijmy zapis Def. 1 i Przykł. 1 (2). Istnieje bijekcja

$$\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, M),$$

w której zapisie $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, M)$ jest zbiorem odwzorowań G-ekwiwariantnych z Def. 7-8.2.

<u>*Dowód:*</u> Niechaj $\phi \equiv [(\sigma, \mu)] \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$ będzie cięciem *globalnym* określonym przez cięcia (lokalnie gładkie) $\sigma \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ i $\mu \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(B \times M)$ (to ostatnie to lokalnie gładkie odwzorowanie $\mu : \mathrm{B} \longrightarrow M$). Korzystając z odwzorowania ilorazowego i rzutu kanonicznego na bazę wiązki P_{G}, możemy zdefiniować odwzorowanie

$$\Phi_\lambda[\phi] \;:\; \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow M \;:\; p \longmapsto \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big).$$

Bez trudu upewniamy się, że powyższa definicja ma sens, oto bowiem dla dowolnej pary $(\sigma', \mu') = (\sigma \triangleleft \mathrm{Inv} \circ \gamma, \gamma \triangleright \mu)$ wyznaczonej w oczywisty sposób przez $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(B \times \mathrm{G})$ otrzymujemy – w odwołaniu do aksjomatyki działania grupy na zbiorze – pożądaną równość

$$\begin{aligned}
&\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \sigma'\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu' \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) = \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p) \triangleleft \gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)^{-1})}\big(\lambda_{\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big)\big) \\
= \;& \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)) \cdot \gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)^{-1} \cdot \gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) = \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big).
\end{aligned}$$

Jego G-ekwiwariantność wynika wprost z rachunku:

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda[\phi] \circ r_g(p) &= \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p\triangleleft g, \sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p\triangleleft g))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p \triangleleft g)\big) = \lambda_{g^{-1}\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\
&= \lambda_{g^{-1}} \circ \Phi_{\lambda.}[\phi](p),
\end{aligned}$$

przeprowadzonego dla dowolnych $(p, g) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G}$, a używającego Stw. 5-6.1 oraz wspomnianej wcześniej aksjomatyki.

Ażeby skonstruować odwrotność powyższego przyporządkowania, ustalmy (dowolnie) pokrycie trywializujące $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ wiązki P_{G}, a następnie dowolnemu odwzorowaniu G-ekwiwariantnemu $f : \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow M$ przyporządkujmy rodzinę cięć lokalnych

$$S_\lambda[f]_i \quad : \quad \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M \;:\; x \longmapsto \big[\big(\tau_i^{-1}(x, e), f \circ \tau_i^{-1}(x, e)\big)\big], \quad i \in I.$$

Każde z nich jest (lokalnie) gładkie jako superpozycja odnośnych odwzorowań gładkich $\big(\tau_i^{-1}(\cdot,e), f\circ \tau_i^{-1}(\cdot,e)\big)\ :\ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathsf{P}_{\rm G}\times M$ i surjektywnej submersji $\pi_{(\mathsf{P}_{\rm G}\times_\lambda M)/{\rm G}}$. Z łatwością przekonujemy się, że cięcia te są ograniczeniami (do odnośnych zbiorów $\mathcal{O}_i$) cięcia globalnego, stwierdzając, że z racji G-ekwiwariantności odwzorowań τ_i i f w dowolnym punkcie $x\in\mathcal{O}_{ij}$ zachodzi równość

$$
\begin{aligned}
& S_\lambda[f]_j(x) = \big[\big(\tau_j^{-1}(x,e), f\circ\tau_j^{-1}(x,e)\big)\big] = \big[\big(\tau_i^{-1}\big(x,g_{ij}(x)\big), f\circ\tau_i^{-1}\big(x,g_{ij}(x)\big)\big)\big] \\
= \ & \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e)\triangleleft g_{ij}(x), f\big(\tau_i^{-1}(x,e)\triangleleft g_{ij}(x)\big)\big] = \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e)\triangleleft g_{ij}(x), g_{ij}(x)^{-1}\triangleright f\circ\tau_i^{-1}(x,e)\big] \\
= \ & \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e), f\circ\tau_i^{-1}(x,e)\big)\big] \equiv S_\lambda[f]_i(x)\,.
\end{aligned}
$$

Bezpośredni rachunek obu superpozycji:

$$\Phi_\lambda\big[S_\lambda[f]\big]\ :\ \mathsf{P}_{\rm G}\longrightarrow M\ :\ p\longmapsto \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p,p)}\big(f(p)\big) = \lambda_e\big(f(p)\big) = f(p)$$

oraz

$$
\begin{aligned}
S_\lambda\big[\Phi_\lambda\big[[(\sigma,\mu)]\big]\big] \quad : \quad & B\longrightarrow \mathsf{P}_{\rm G}\times_\lambda M \\
& :\ x\longmapsto \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e), \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(\tau_i^{-1}(x,e),\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}\circ\tau_i^{-1}(x,e))}\big(\mu\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}\circ\tau_i^{-1}(x,e)\big)\big)\big] \\
& \equiv \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e), \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(\tau_i^{-1}(x,e),\sigma(x))}\big(\mu(x)\big)\big)\big] = [(\sigma,\mu)](x)
\end{aligned}
$$

pokazuje dowodnie, że prawdziwe są tożsamości

$$\Phi_\lambda\circ S_\lambda = {\rm id}_{{\rm Hom}_{\rm G}(\mathsf{P}_{\rm G},M)}\,,\qquad\qquad S_\lambda\circ\Phi_\lambda = {\rm id}_{\Gamma(\mathsf{P}_{\rm G}\times_\lambda M)}\,.$$

□

Specjalizacja powyższego wyniku do przypadku wiązki dołączonej okazuje się mieć charakter strukturalny, co orzeka

Stwierdzenie 6. Bijekcja

$$\Gamma({\rm Ad}\,\mathsf{P}_{\rm G})\cong{\rm Hom}_{\rm G}(\mathsf{P}_{\rm G},{\rm G})\,,$$

o której mówi Stw. 5, jest izomorfizmem między grupą cięć wiązki dołączonej, o strukturze opisanej w dowodzie Stw. 4, i grupą odwzorowań $\mathsf{P}_{\rm G}$ w G ekwiwariantnych względem odnośnych działań (lewostronnych) $r_{{\rm Inv}(\cdot)}$ i Ad., o naturalnej strukturze punktowej (obecnej na zbiorze odwzorowań, których przeciwdziedziną jest grupa).

__Dowód:__ W notacji dowodów obu stwierdzeń z tezy stwierdzenia dowodzonego sprawdzamy – dla dowolnej pary cięć $\gamma_\alpha = [(\sigma_\alpha,\mu_\alpha)]\in\Gamma({\rm Ad}\,\mathsf{P}_{\rm G}),\ \alpha\in\{1,2\}$ oraz punktu $p\in\mathsf{P}_{\rm G}$ –

$$
\begin{aligned}
& \Phi_{\rm Ad}\big[\Gamma[M](\gamma_1,\gamma_2)\big](p) \\
= \ & {\rm Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p,\sigma_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p))}\big(\mu_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)\cdot{\rm Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(\sigma_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p),\sigma_2\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p))}\big(\mu_2\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)\big)\big) \\
= \ & {\rm Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p,\sigma_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p))}\big(\mu_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)\big)\cdot{\rm Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p,\sigma_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p))\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(\sigma_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p),\sigma_2\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p))}\big(\mu_2\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)\big) \\
= \ & {\rm Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p,\sigma_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p))}\big(\mu_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)\big)\cdot{\rm Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p,\sigma_2\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p))}\big(\mu_2\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)\big) \\
= \ & M\circ\big(\Phi_{\rm Ad}(\gamma_1),\Phi_{\rm Ad}(\gamma_2)\big)(p)\,.
\end{aligned}
$$

□

Strukturalny charakter bijekcji, o której mowa w Stw. 4 i 5, najpełniej ilustruje

Stwierdzenie 7. Przyjmijmy zapis Stw. 4 i 5 oraz ich dowodów. Bijekcja Φ_λ jest (lewostronnie) ekwiwariantna względem działań grupy $\Gamma({\rm Ad}\,\mathsf{P}_{\rm G})$: działania $\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_\cdot$ na przestrzeni $\Gamma(\mathsf{P}_{\rm G}\times_\lambda M)$, zdefiniowanego w Równ. (4), oraz naturalnego działania

$$[\Phi_{\rm Ad}\lambda]_\cdot\ :\ \Gamma({\rm Ad}\,\mathsf{P}_{\rm G})\times{\rm Hom}_{\rm G}(\mathsf{P}_{\rm G},M)\longrightarrow{\rm Hom}_{\rm G}(\mathsf{P}_{\rm G},M)\ :\ \big(\gamma,\Phi_\lambda[\mu]\big)\longmapsto\lambda_{\Phi_{\rm Ad}[\gamma](\cdot)}\big(\Phi_\lambda[\mu](\cdot)\big)$$

na przestrzeni odwzorowań G-ekwiwariantnych $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, M)$, czyli działanie

$$\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda. \equiv [\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda]. \circ (\Phi_{\mathrm{Ad}}^{-1} \times \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, M)})$$

grupy $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathrm{G})$ czyni przemiennym poniższy diagram

$$\begin{tikzcd} \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \times \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M) \arrow[r, "\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_\cdot"] \arrow[d, "\Phi_{\mathrm{Ad}} \times \Phi_\lambda"'] & \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M) \arrow[d, "\Phi_\lambda"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathrm{G}) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, M) \arrow[r, "\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda."'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, M) \end{tikzcd} .$$

Dowód: Przede wszystkim upewnimy się, że odwzorowanie $\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda.$ jest dobrze określone. W tym celu wybieramy dowolną parę $(\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma], \Phi_\lambda[\mu]) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathrm{G}) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, M)$ i rozważamy wynik ewaluacji $\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]}(\Phi_\lambda[\mu])$ – musimy udowodnić, że ten jest G-ekwiwariantny, co czynimy w rachunku bezpośrednim, wykonanym dla dowolnych $(p, g) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G}$,

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]} \circ r_g^*\big(\Phi_\lambda[\mu]\big)(p) &= \lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma] \circ r_g(p)}\big(\Phi_\lambda[\mu] \circ r_g(p)\big) = \lambda_{\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p))} \circ \lambda_{g^{-1}}\big(\Phi_\lambda[\mu](p)\big) \\ &= \lambda_{g^{-1}}\big(\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)}\big(\Phi_\lambda[\mu](p)\big)\big) \equiv \lambda_{g^{-1}} \circ \Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]}\big(\Phi_\lambda[\mu]\big)(p) . \end{aligned}$$

To, że odwzorowanie $\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda.$ spełnia aksjomatykę działania, jest oczywiste. Pozostaje zatem zweryfikować jego ekwiwariantność. Dla dowolnych $\gamma = [(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\mu})] \in \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ i $\phi = [(\sigma, \mu)] \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$ oraz $p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ obliczamy więc

$$\begin{aligned} &\Phi_\lambda\big[\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_\gamma(\phi)\big](p) = \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \lambda_{\gamma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}(\sigma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\ = \quad &\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\sigma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \widetilde{\sigma} \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}(\widetilde{\mu} \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}(\sigma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\ = \quad &\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, r_{\widetilde{\mu} \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p) \cdot \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{\sigma} \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \sigma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}(\widetilde{\sigma} \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\ = \quad &\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \widetilde{\sigma} \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)) \cdot \widetilde{\mu} \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p) \cdot \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{\sigma} \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \sigma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\ = \quad &\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \widetilde{\sigma} \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)) \cdot \widetilde{\mu} \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p) \cdot \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{\sigma} \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), p)} \circ \ell_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \sigma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\ = \quad &\lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \widetilde{\sigma} \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}(\widetilde{\mu} \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\Phi_\lambda[\phi](p)\big) = \Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\cdot, \widetilde{\sigma} \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\cdot))}(\widetilde{\mu} \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\cdot))}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)(p) \\ \equiv \quad &\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)(p) , \end{aligned}$$

co jest rezultatem pożądanym. □

Dotychczasowe nasze rozważania ukazały $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ w roli wiązki grup działającej naturalnie na wiązce rozmaitości M z modelowym działaniem λ. Poniższe stwierdzenie istotnie pogłębia tę obserwację.

Stwierdzenie 8. Przyjmijmy zapis Stw. 4 i jego dowodu. Istnieje kanoniczny izomorfizm grup

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \quad &\cong \quad \{\ (\Phi, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, f) \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \quad | \quad f = \mathrm{id}_B\ \} \\ &=: \quad \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,B) . \end{aligned}$$

Dowód: Zaczniemy od wskazania bijekcji między zbiorami $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathrm{G})$ i $\mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,B)$. Wybierzmy (dowolnie) $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathrm{G})$ i zdefiniujmy odwzorowanie

$$\Psi[\gamma]\ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \circlearrowleft\ :\ p \longmapsto r_{\gamma(p)}(p) .$$

Jest ono jawnie G-ekwiwariantne,

$$\forall_{(p,g) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G}}\ :\ \Psi[\gamma] \circ r_g(p) \quad \equiv \quad r_{\gamma \circ r_g(p)}\big(r_g(p)\big) = r_{\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \gamma(p)}\big(r_g(p)\big) = r_{g \cdot \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\gamma(p))}(p)$$

$$= \quad r_{\gamma(p)\cdot g}(p) = r_g \circ \Psi[\gamma](p)\,,$$

i zachowuje włókna, a zatem definiuje automorfizm

$$\big(\Psi[\gamma], \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B\big) \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,B)\,.$$

Jest przy tym homomorfizmem grup, o czym przekonuje bezpośredni rachunek

$$\begin{aligned}\Psi\big[\widetilde{M}(\gamma_1,\gamma_2)\big](p) &= r_{\gamma_1(p)\cdot\gamma_2(p)}(p) \equiv r_{\gamma_2(p)\cdot \mathrm{Ad}_{\gamma_2(p)^{-1}}(\gamma_1(p))}(p) = r_{\mathrm{Ad}_{\gamma_2(p)^{-1}}(\gamma_1(p))} \circ r_{\gamma_2(p)}(p)\\ &= r_{\gamma_1(p\triangleleft\gamma_2(p))} \circ r_{\gamma_2(p)}(p) \equiv \Psi[\gamma_1] \circ \Psi[\gamma_2](p)\,,\end{aligned}$$

przeprowadzony dla dowolnych $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathrm{G})$. Na tym etapie wystarczy przywołać Stw. 6, aby uzyskać homomorfizm grup

$$\big(\Psi[\cdot], \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B\big) \circ \Phi_{\mathrm{Ad.}} \;:\; \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,B)\,.$$

Idąc w kierunku odwrotnym, przyporządkujmy dowolnemu automorfizmowi $(\Phi, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B) \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,B)$ odwzorowanie

$$\chi[(\Phi, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)] \;:\; \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{G} \;:\; p \longmapsto \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p, \Phi(p)\big)\,,$$

którego G-ekwiwariantności dowodzimy w odwołaniu do Stw. 5-6.1, a dla dowolnych $(p,g) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G}$,

$$\begin{aligned}\chi[(\Phi, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)] \circ r_g(p) &\equiv \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(r_g(p), \Phi \circ r_g(p)\big) = \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(r_g(p), r_g \circ \Phi(p)\big)\\ &= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big(\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p, \Phi(p)\big)\big) \equiv \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \chi[(\Phi, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)](p)\,.\end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że otrzymane tym sposobem odwzorowanie

$$\chi \;:\; \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathrm{G})$$

jest homomorfizmem grup – w rzeczy samej, dla dowolnej pary automorfizmów $(\Phi_\alpha, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B) \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,B)$, $\alpha \in \{1,2\}$ obliczamy

$$\begin{aligned}\chi\big[(\Phi_1, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B) \circ (\Phi_2, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)\big](p) &= \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p, \Phi_1 \circ \Phi_2(p)\big)\\ &= \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p, \Phi_1(p)\big) \cdot \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\Phi_1(p), \Phi_1 \circ \Phi_2(p)\big)\,,\end{aligned}$$

ale też

$$\begin{aligned}&\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\Phi_1(p), \Phi_1 \circ \Phi_2(p)\big) = \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\Phi_1(p), \Phi_1\big(p \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p, \Phi_2(p)\big)\big)\big)\\ &= \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\Phi_1(p), \Phi_1(p) \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p, \Phi_2(p)\big)\big) = \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p, \Phi_2(p)\big)\,,\end{aligned}$$

przeto

$$\begin{aligned}&\chi\big[(\Phi_1, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B) \circ (\Phi_2, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)\big](p) = \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p, \Phi_1(p)\big) \cdot \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p, \Phi_2(p)\big)\\ &\equiv \widetilde{M}\big(\chi\big[(\Phi_1, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)\big], \chi\big[(\Phi_2, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)\big]\big)(p)\,,\end{aligned}$$

zgodnie z oczekiwaniami. Ostatecznie otrzymujemy homomorfizm grup

$$S_{\mathrm{Ad.}} \circ \chi \;:\; \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,B) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\,.$$

Ażeby stwierdzić, że jest to odwrotność wskazanego wcześniej homomorfizmu $\Psi \circ \Phi_{\mathrm{Ad}}$, wystarczy sprawdzić, że χ jest odwrotnością automorfizmu $\big(\Psi[\cdot], \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B\big)$, co czynimy wprost licząc – dla dowolnych $(p,g,x) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G} \times B$ –

$$\big(\Psi[\cdot], \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B\big) \circ \chi[(\Phi, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)](p,g,x) = \big(r_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\Phi(p))}(p), g, x\big) = \big(\Phi(p), g, x\big) \equiv (\Phi, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)(p,g,x)$$

oraz

$$\chi \circ \big(\Psi[\cdot], \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B\big)[\gamma](p) = \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p, r_{\gamma(p)}(p)\big) = \gamma(p)\,.$$

□

Literatura

[Car50] H. Cartan, *"La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal"*, Colloque de Topologie (espaces fibré) Bruxelles 1950, Centre Belge de Recherches Mathématiques, 1950, pp. 57–71.

[Tu20] L.W. Tu, *Introductory Lectures on Equivariant Cohomology*, Annals of Mathematics Studies, vol. 204, Princeton University Press, 2020.