TEORIA GRUP II

WYKŁAD I

2022/23

GRUPY i ALGEBRY LIEGO

– ALEŻ SKĄD ?!

OGÓLNIKI

POZNANIE FIZYCZNE / MATEMATYCZNE :

MUSIMY USTALIĆ :

OBIEKTY OBDARZONE STRUKTURĄ , np. PUNKTY, FERMIONY, ATOMY, GWIAZDY

i

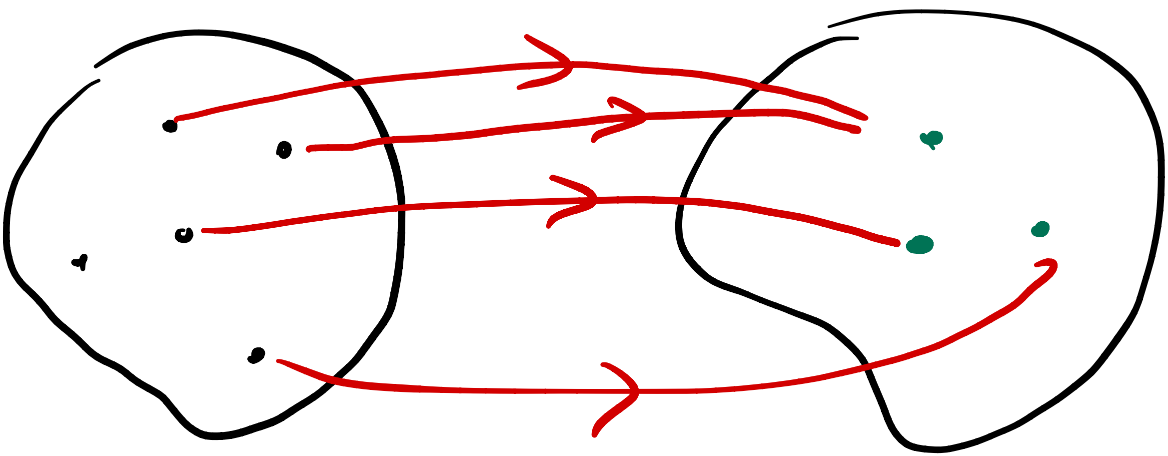
RELACJE MIĘDZY NIMI TRANSPORTUJĄCE STRUKTURĘ

OKREŚLA „ROZDZIELCZOŚĆ” NASZYCH ROZWAŻAŃ

WIELE ROZWAŻAŃ PROWADZIMY ②

W KATEGORII **Set** : ZBIORY

(ew. z dod. struktury) i ODWZOROWANIA



POŚRÓD RELACJI WYRÓŻNIAMY

TE WEWNĘTRZNE , $R \subset X \times X$

A DALEJ TE, KTÓRE

- ZACHOWUJĄ „STRUKTURĘ"/INFO LOKALNĄ,
  (JAKĄŚ!

np.

(⇑ W TYM PRZYP)

- ZACHOWUJĄ „STRUKTURĘ"/INFO GLOBALNĄ

$$|f(X)| = |X|, \text{ albo lepiej}$$

$$\exists f^{-1}$$

- ZACHOWUJĄ „STRUKTURĘ"/INFO MIĘDZY-LOK.,

np. STRUKTURĘ OTOCZEŃ! — > ILE ICH ISTNIEJE . . .

TAK OKREŚLONE AUTORELACJE (4)

TO **SYMETRIE** (W NAJOG. MOŻLIWYM ZNACZENIU)

$S_X \subset \mathrm{Hom}(X,X)$

OBSERWACJE:

$\to \mathrm{id}_X \in S_X$

$\to f, g \in S_X \Rightarrow f \circ g \in S$

$\to f \in S_X \Rightarrow f^{-1} \in S$

WŁASNOŚCI: $\circ$; id_X CZYNIĄ Z $(S_X, \circ, (\cdot)^{-1}, \bullet \mapsto \mathrm{id}_X)$ GRUPĘ (SYMETRII)

E.g., DLA X - ZBIÓR ZE STRUKTURĄ GLOBALNĄ $|X|$

MAMY $S \equiv G_X = \{\sigma \in \mathrm{Map}(X,X) \mid \exists\, \sigma^{-1}\}$

GRUPA SYMETRYCZNA X

FIZYKA ZAWĘŻA POWYŻSZĄ OGÓLNĄ DEFINICJĘ, PRZYDAJĄC ZARAZEM NIEJAKO (NATURALNEJ) STRUKTURY GRUPIE SYMETRII:

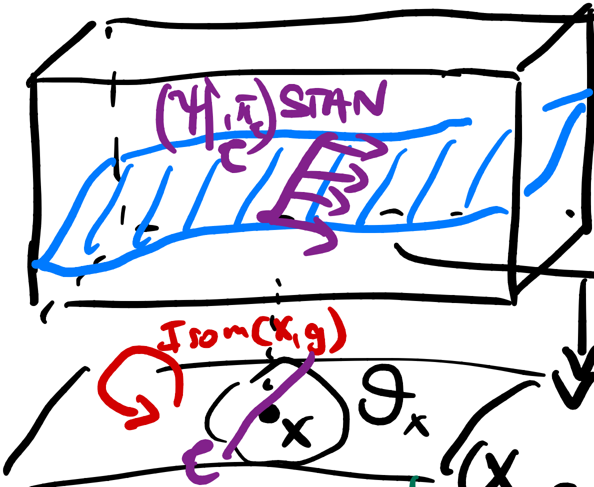
II SYMETRIE (CIĄGŁE) W FIZYCE ⑥

(*) CZYM JEST X ?

(**) JAKIE SĄ NATURALNE $\mathcal{S}$?

ŻEBY TO USTALIĆ, MUSIMY ZDEFINIOWAĆ PARADYGMAT, W KTÓRY WPISZEMY „FIZYKĘ" ...

PARADYGMAT gLFT



$\mathcal{F}$ WIĄZKA PÓL

ψ POLE

ϑ_x

CZASOPRZESTRZEŃ

$\pi_{\mathcal{F}}$

(X, g)

Aut(F)

(WEWN.)

F - STOPNIE SWOBODY POLA, skalary, np. wektory, spinory

Θ_x

KLASYCZNE: $\delta S[\psi_*]=0$

S FUNKCJONAŁ DZIAŁANIA

$$\int_{(X,g)} vol(X,g)\, \mathcal{L}(\psi, \partial\psi)$$

$$S^1 \simeq \mathbb{R}/2\pi\hbar\mathbb{Z}$$

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}, \{\cdot,\cdot\}_{PB})$$

PRZESTRZEŃ STANÓW

8

$\{\cdot,\cdot\} \mapsto \frac{1}{i\hbar}[\cdot,\cdot]$

nawias Liego

KOMUTATOR

$$\Big(\mathcal{P}_F\,,\ \underbrace{\{\cdot\,,\cdot\}_{P.B.}}\Big) \overset{g}{\underset{\text{ART}}{\rightsquigarrow}} \Big(\mathcal{H}_F\,,\ \underbrace{[\cdot\,,\cdot]}_{\text{nawias Liego}}\Big)$$

NAWIAS POISSONA

$|\psi\rangle$

PRZESTRZEŃ HILBERTA TEORII

TRANSFORMACJE KANONICZNE

Operatory Unitarne i Antyunitarne

POMIARY $\in \mathbb{R}$

$$\left|\langle\psi'|\,\hat{O}\,|\psi\rangle\right|^2$$

SAMOSPRZĘŻONE

9

IDEA OGÓLNA/SUROWA:

$$X = \{ \text{STANY TEORII } (\Psi|_{\Sigma}, \pi) \}$$

$$\mathcal{S} = \{ \gamma|_{\mathcal{P}_F} \in \underset{\substack{\parallel \\ \mathcal{P}_F}}{\mathcal{G}_{\mathcal{P}_F}} \;\Big|\; \text{"}\gamma \text{ ZACHOWUJE DYNAMIKĘ"} \}, \quad \gamma \in \mathcal{G}_{\Gamma(F)}$$

$\cup$ ZE SKŁADANIEM

$id_{\mathcal{P}_F}$

GRUPA SYMETRII TEORII

MUSIMY DOPRECYZOWAĆ...

(i) OBRAZEK LAGRANŻOWSKI :

Eg. $$S[g] = \int_{t_0}^{t_1} dt\, L(g,\dot{g}) \qquad g : Param \to (M,g)$$

TRAJEKTORIE KLASYCZNE : $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{g}}\right) = \frac{\partial L}{\partial g} \qquad (E-L)$$

ROZWAŻAMY $$(g,\dot{g}) \xrightarrow[s\,\in\,]-\varepsilon,\varepsilon[]{\gamma_s\,\in\,Map(M,M)} \left(\gamma_s(g),\ \underbrace{\frac{\partial \gamma_s}{\partial g}(g)\dot{g}}_{\text{INDUK.!}}\right)$$

1-PARAMETROWE GRUPY SYMETRII

$\boxed{\text{NIEZMIENNICZOŚĆ DZIAŁANIA}}$: $$L\left(\gamma_s(g), \frac{\partial \gamma_s}{\partial g}(g)\dot{g}\right) = L(g,\dot{g})$$

DOWOLNA! $\rightsquigarrow$ $+\frac{d}{dt}F_s(g,\dot{g},t)$

11

$\Rightarrow$ POPRAWKI BRZEGOWE DO S
(KLASYCZNIE ~ „BEZ ZNACZENIA!")

TE SAME (E-L) W NOWYCH ZMIENNYCH

$$g_s(t) := \gamma_s \cdot g(t)$$

KONSEKWENCJE RÓŻNICZKOWALNEJ ZALEŻNOŚCI SYMETRII OD PARAMETRU s:

$\rightarrow$ γ_s INDUKUJE ODWZOROWANIE $\mathcal{P}_\Sigma$ ⟲
(W SZCZEG. ZACHOWUJE S $\rightarrow$ $g_* \mapsto \gamma_s \cdot g_*$)

$\rightarrow$ POJAWIAJĄ SIĘ CAŁKI RUCHU $\equiv$ WIELKOŚCI ZACHOWANE

ŁADUNKI
"

Ozn. : $\Phi(s,t) := \gamma_s \circ g(t)$

Liczymy na trajektorii klasycznej

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(L(\Phi,\dot{\Phi}) - \frac{d}{dt}F_s\right) = \frac{\partial}{\partial s} L(g,\dot{g}) = 0$$

!

zachowane na trajektorii

$$= \frac{\partial L}{\partial g}\frac{\partial \Phi}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{g}}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial t} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_s}{\partial s}$$

$$\underset{(E-L)}{=} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{g}}\right)^{\bullet}\frac{\partial \Phi}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{g}}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial t} - \left(\frac{\partial F_s}{\partial s}\right)^{\bullet}$$

ładunek Noether

$$= \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{g}}\frac{\partial \Phi}{\partial s} - \frac{\partial F_s}{\partial s}\right)}_{=:Q} \iff \boxed{\frac{d}{dt}Q = 0}$$

OGÓLNIE:

SYMETRIE GLOBALNE

$$\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \cong \left\{ \gamma \in \mathrm{Aut}(F) \,\middle|\, \gamma^* S \equiv S \ (\mathrm{mod}\ 2\pi\hbar\mathbb{Z}) \right\}$$

1-PARAMETROWE PODGRUPY

INDUKUJĄ ŁADUNKI NOETHEROWSKIE

(ii) OBRAZEK HAMILTONOWSKI

PRZESTRZEŃ STANÓW $\mathcal{P}_F \ni (\phi|_C, \pi)$

ROZWAŻAMY F-CJE GŁADKIE NA NIEJ („OBSERWABLE") A NA NICH HAMILTONIAN H ($\equiv p\dot{q} - L$ W PRZYP. REG.)

$$\{\cdot,\cdot\}_{P.B.} : C^\infty(\mathcal{P}_F, \mathbb{R})^{\times 2} \longrightarrow C^\infty(\mathcal{P}_F, \mathbb{R})$$

$$(f,g) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$$

NAWIAS POISSONA (H)

NATURALNOŚĆ: $\frac{dq}{dt} = \{H, q\}_{P.B.}$, $\frac{dp}{dt} = \{H, p\}_{P.B.}$

1) OGÓLNIE

$$\frac{d}{dt} f(q,p) = \{H, f\}_{P.B.}$$

WŁASNOŚCI: ALGEBRA LIEGO !!!

(1) $\forall f,g \in C^\infty$: $\{g,f\} = -\{f,g\}$

~~ANTYSYMETRIA~~

(2) $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$, $f,g,h \in C^\infty$: $\{\lambda f + \mu g, h\} = \lambda\{f,h\} + \mu\{g,h\}$

$\mathbb{R}$-LINIOWOŚĆ

(3) $\forall f,g,h \in C^\infty$: $\{f, g\cdot h\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$

LEIBNITZ

(4) $\forall f,g,h \in C^\infty$: $\mathrm{Jac}(f,g,h) = 0$

JACOBI

SYMETRIE ~ ŁADUNKI :

$$\dot{Q} = 0 \iff \{H, Q\}_{P.B.} = 0$$

tj. ŁADUNKI SYMETRII w INWOLUCJI z HAMILTONIANEM

$$\Downarrow$$

$\forall\, Q_1, Q_2$ - ładunki : $\{Q_1, Q_2\}_{P.B.}$ - ładunek,

bo $\{H, \{Q_1, Q_2\}\} \underset{Jac}{=} -\{Q_2, \overbrace{\{H, Q_1\}}^{0}\} + \{Q_1, \overbrace{\{H, Q_2\}}^{0}\}$

WNIOSEK: ŁADUNKI ROZPINAJĄ POD-ALGEBRĘ w C^∞ LEGO

TYM RAZEM ŁADUNKI „POCHODZĄ"
Z WIĘKSZEJ GRUPY ...

ZAPISZMY $\{f, g\}_{P.P.} = \Pi(df, dg)$

Π - biwektor Poissona, niezdegenerowany!

$\Downarrow$

MAMY $\Omega := \Pi^{-1} \in \Omega^2(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$

JAC $\Longleftrightarrow$ $d\Omega = 0$

ORAZ $Q \longmapsto V_Q \in \mathfrak{X}(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$:

$$V_Q \lrcorner\, \Omega = -dQ$$

POLE HAMILTONOWSKIE

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{L}_{V_Q}\Omega = 0$$

STRUKTURĘ NA PRZ.-STANÓW
''

JEGO POTOKI ZACHOWUJĄ Ω,

$$\overline{\Phi}_{V_Q}(t,\cdot)^*\Omega = \Omega \;!$$

DYNAMIKI
''

+ ZACHOWYWANIE HAMILTONIANU
(nat. warunek)

19

<u>WNIOSEK</u>: SYMETRIE GENERUJĄ 1-PARAMETROWE PODGRUPY W GRUPIE SYMPLEKTOMORFIZMÓW ZACHOWUJĄCYCH HAMILTONIAN

(P_γ, Ω) (PRAWIDŁOWOŚĆ OGÓLNA)

TRAFO KAN. $\sim$ SYMETRIE SKALOWANE

(iii) OBRAZEK KWANTOWY (KAN.)

KWANTOWANIE KANONICZNE (WG DIRACA)

$$\left(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}, \{\cdot,\cdot\}_{P.B.}\right) \longmapsto \left(\mathcal{H}, [\cdot,\cdot]\right)$$

$C^\infty(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}, \mathbb{R})$ — OPERATORY SAMOSPRZĘŻONE

$$f \longmapsto \hat{f}$$

(NIE DBAMY O DZIEDZINY!)

$$[\hat{f}, \hat{g}] = -i\hbar\, \widehat{\{f, g\}_{P.B.}}$$

$$\text{const} \longmapsto \text{const}\ \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$$

(+ EKWIWARIANTNOŚĆ)

21

OBRAZEK HEISENBERGA:

$$\frac{d}{dt}\hat{f} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{f}]$$

(R-NIE HEISENBERGA)

WŁASNOŚCI KOMUTATORA

ALGEBRA LIEGO!

(1) $[B,A] = -[A,B]$

(2) $[\lambda A+\mu B, C] = \lambda[A,C]+\mu[B,C]$

(3) $[A,BC] = [A,B]C + B[A,C]$

(4) $\mathrm{Jac}(A,B,C) = 0$

ZNOWU WIĘC SYMETRIE ~ ŁADUNKI DANE PRZEZ

$$[\hat{Q}, \hat{H}] = 0$$

$$\Downarrow$$

W INWOLUCJI $\Rightarrow$ POD-ALGEBRA CIEGO !

(TO SAMO W OBRAZIE SCHRÖDINGERA

BO : $A_H(t) = e^{\frac{it}{\hbar}\hat{H}} A_S \, e^{-\frac{it}{\hbar}\hat{H}}$)

OBECNOŚĆ $\hat{Q}$ NARZUCA (OBSERWOWALNE) WIĘZY NA DYNAMIKĘ

$\Downarrow$

REGUŁY WYBORU, np. ELEKTRON W ATOMIE H (ZANIEDBUJEMY SPIN)

$\hookrightarrow$ ZACHOWANY MOMENT PĘDU,

$$[\hat{H}, \hat{\vec{J}}] = 0$$

$\Downarrow$

gł. liczba kwantowa

całk. moment pędu

rzut na $\hat{z}$

$$0 = \langle n', l', m' | [\hat{H}, \hat{J}_z] | n, l, m \rangle$$

$$= (m - m') \langle n', l', m' | \hat{H} | n, l, m \rangle$$

<u>Wniosek:</u> $\hat{H}$ ma $\neq 0$ elementy macierzowe tylko między stanami o $m' = m$]

ŁADUNKI SYMETRII GENERUJĄ 1-PARAMETROWE PODGRUPY

$$\mathcal{U}(\mathcal{H}) : \hat{Q} \longmapsto e^{it\hat{Q}} = U_{\hat{Q}}$$

ZACHOWUJĄCE AMPLITUDY PRZEJŚCIA

$$\langle U_{\hat{Q}} \psi_1 | U_{\hat{Q}} \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$$

$\Rightarrow$ PRAWDOPODOBIEŃSTWA, ale ...

TE ZACHOWYWANE TAKŻE PRZEZ OPERATORY ANTY-UNITARNE:

$$\begin{cases} \Theta(\lambda\psi_1 + \mu\psi_2) = \bar{\lambda}\,\Theta(\psi_1) + \bar{\mu}\,\Theta(\psi_2) \\ \langle \Theta\psi_1 | \Theta\psi_2 \rangle = \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle \end{cases}$$

in $\overset{S}{\rightsquigarrow}$ out,

czyli związek z T odwrócenia czasu!

INNE ZASTOSOWANIA i UOGÓLNIENIA STRUKTUR LIE-GRUPOWYCH i -ALGEBRAICZNYCH W FIZYCE:

→ KLASYFIKACJA TYPÓW CZĄSTEK ELEM. WG TEORII REPR. $ISO(\mathbb{R}^{3,1})$ [Wigner]

→ CECHOWANIE SYMETRII GLOBALNYCH (WIĄZKI GRUP i GRUPOIDÓW NAD (X,g)) ORAZ ICH TORSORÓW

→ PROLONGACJE TYCHŻE W MODELOWANIU FERMIONÓW → wykład KCDG

→ SUPER-SYMETRIA
(supergrupy i superalgebry Liego)

→ MECHANIKA PĘTLI / TEORIA STRUN
(grupy i algebry pętlowe,
algebry prądowe, algebry Hopfa, grupy
kwantowe, kategorie ...)

... algebry obwiedni,
algebroidy etc.

III PRZEDMIOT WYKŁADU:

Def$^{\underline{n}}$ 1. GRUPA LIEGO to czwórka

$(G, m, \mathrm{Inv}, \cdot \mapsto e)$ złożona z

(1) G – rozmaitości różniczkowalnej klasy C^∞

(2) $m : G \times G \to G$ gładkiego mnożenia

(3) $\mathrm{Inv} : G \to G$ (—————) odwrotności

(4) $e \in G$ – elementu neutralnego

spełniających aksjomaty grupy.

PRZYKŁADY :

(1) $V \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{(<\infty)}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Wówczas : V – GRUPA LIEGO

z $m = +_V$, $\mathrm{Inv} = P_V$

$GL(V;\mathbb{K})$ – ———

$\equiv \{ X \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \mid \exists\, X^{-1} \}$

(2) $SL(n;\mathbb{K}) = \{ A \in GL(n;\mathbb{K}) \mid \det A = 1 \}$

(3) $O(n;\mathbb{R}) = \{ A \in GL(n;\mathbb{R}) \mid A^T A = 1 \}$

(4) $SO(n;\mathbb{K}) = O(n;\mathbb{K}) \cap SL(n;\mathbb{K})$ 30

(5) $U(n) = \{ A \in Gl(n;\mathbb{C}) \mid A^\dagger A = 1 \}$

(6) $SU(n) = U(n) \cap SL(n;\mathbb{C})$

(7) $Sp(n;\mathbb{K}) = \{ A \in SL(2n;\mathbb{K}) \mid A^T J_n A = J_n \}$

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix}$$

etc.

(8) $ISO(3,1) = \mathbb{R}^4 \rtimes SO(3,1)$

$$SO(3,1) = \{ A \in GL(m+n; \mathbb{R}) \mid A^T I_{m,n} A = I_{m,n}, \ \det A = 1 \}$$

$$I_{m,n} = \begin{pmatrix} I_m & \\ & -I_n \end{pmatrix}$$

Def^n 2. Niech G – grupa
Liego. Rozmaitość z działaniem
G to PARA (M, λ)
złożona z
→ M – rozmaitości C^∞
→ $\lambda : G \times M \longrightarrow M$

GŁADKIE

$\lambda : G \to \mathrm{Diff}(M)$

HOMEO

PRZYKŁAD:

(1) (G, m) JEST ROZMAITOŚCIĄ Z DZIAŁANIEM G

(2) S^2 — " — Z DZIAŁANIEM $SO(3)$

(3) $\mathrm{Mink}(3,1)$ — " — Z DZIAŁANIEM $ISO(3,1)$