TEORIA GRUP II '23/24
WYKŁADY 2., 3. I 4.
LIE TO ME, CARTAN!

Spis treści

1. Grupy Liego i ich geometria stycznościowa

Ostatni wykład dostarczył rzetelnej motywacji do studiowania grup, których elementy zależą w sposób ciągły lub zgoła gładki od (zbioru) parametrów. Naturalnego uogólnienia i formalizacji naszych rozważań dostarcza teoria grup Liego, tj. zbiorów wyposażonych w uzgodnione wzajem struktury: algebraiczną strukturę grupy (wprowadzoną na pierwszorocznym wykładzie z Algebry i omówioną szczegółowo na kursie Teoria Grup I) i geometryczną strukturę rozmaitości różniczkowalnej (wprowadzoną na drugorocznym wykładzie z Geometrii różniczkowej). Uzgodnienie takie ma daleko idące konsekwencje dla stycznościowego rachunku różniczkowego na tych rozmaitościach, którego liczne *strukturalne* zastosowania w mechanice klasycznej (np. teoria odwzorowań momentowych w opisie symetrii i redukcji symplektycznych) i teorii pola (np. cechowanie symetrii sztywnych, zw. też globalnymi, ale także nieliniowe realizacje symetrii istotne w opisie zjawisk takich jak mechanizm Higgsa czy odwrotny mechanizm Higgsa) czynią studium jego podstawowych własności nieodzownym elementem niniejszego kursu. Z owego studium wyprowadzimy naturalnie pojęcie (stycznościowej) algebry Liego (grupy Liego), którego desygnat zostanie następnie poddany abstrakcji i klasyfikacji, co będzie stanowiło punkt wyjścia do dyskusji teorii reprezentacji o fundamentalnym znaczeniu fizycznym (w kontekście, m.in., klasycznej teorii oddziaływań fundamentalnych i kwantowomechanicznej klasyfikacji pól materii i nośników oddziaływań).

Zaczniemy od pojęć podstawowych

Definicja 1. **Grupa topologiczna** to grupa

$$\big(\mathrm{G}, m \equiv \cdot, \mathrm{Inv} \equiv (\cdot)^{-1}, \bullet \longmapsto e\big),$$

której nośnik G jest przestrzenią topologiczną, a odwzorowania strukturalne m i Inv są ciągłe. **Podgrupa topologiczna** grupy topologicznej $(\mathrm{G}, m, \mathrm{Inv}, \bullet \longmapsto e)$ to grupa topologiczna $(\mathrm{H}, m\restriction_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}}, \mathrm{Inv}\restriction_{\mathrm{H}}, \bullet \longmapsto e)$, której nośnik H jest podprzestrzenią topologiczną przestrzeni G. **Homomorfizm topologiczny** między grupami topologicznymi $(\mathrm{G}_1, m_1, \mathrm{Inv}_1, \bullet_1 \longmapsto e_1)$ i $(\mathrm{G}_2, m_2, \mathrm{Inv}_2, \bullet_2 \longmapsto e_2)$ to homomorfizm grup ciągły względem topologii dziedziny i przeciwdziedziny.

Analogicznie definiujemy **grupę Liego** jako grupę, której nośnik jest rozmaitością gładką, a odwzorowania strukturalne m i Inv są klasy C^∞. **Podgrupa Liego** grupy Liego $(\mathrm{G}, m, \mathrm{Inv}, \bullet \longmapsto e)$ to grupa Liego $(\mathrm{H}, m\restriction_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}}, \mathrm{Inv}\restriction_{\mathrm{H}}, \bullet \longmapsto e)$, której nośnik H jest podrozmaitością klasy C^∞ rozmaitości G. **Homomorfizm grup Liego** to homomorfizm grup gładki względem struktury różniczkowej dziedziny i przeciwdziedziny.

Przykłady 1.
(1) $\mathbb{R}^{\times n}$
(2) $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \equiv \mathrm{U}(1) \cong \mathbb{S}^1$
(3) $\mathrm{SU}(2) \cong \mathbb{S}^3$
(4) grupa Poincarégo $\mathrm{ISO}(3,1) = \mathrm{SO}(3,1) \ltimes \mathbb{R}^{\times 4}$

(5) Grupa liniowa główna $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ dziedziczy topologię i strukturę różniczkową z przestrzeni $\mathbb{R}(n) \equiv \mathbb{R}^{\times n^2}$, w której jest zanurzona jako podzbiór otwarty $\det_{(n)}^{-1}(\mathbb{R}_{\neq 0})$ (wszak $\det_{(n)} : \mathbb{R}(n) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem wielomianowo zależnym od wyrazów macierzy, więc ciągłym)

(6) wiele innych, które zostaną przedstawione na ćwiczeniach.

Lemat 1. Przyjmijmy zapis Def. 1 i niechaj G będzie grupą topologiczną. Dla dowolnego elementu $g \in \mathrm{G}$ i dowolnego otoczenia otwartego $\mathcal{O}_e \in \mathscr{T}(\mathrm{G})$ elementu neutralnego $e \in \mathrm{G}$ istnieje otoczenie otwarte $\mathcal{O}_g \in \mathscr{T}(\mathrm{G})$ elementu g spełniające warunek

$$m_{\mathrm{G}} \circ (\mathrm{Inv}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}})(\mathcal{O}_g \times \mathcal{O}_g) \subset \mathcal{O}_e \,.$$

<u>*Dowód:*</u> Odwzorowanie $f \equiv m_{\mathrm{G}} \circ (\mathrm{Inv}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}})$ jest ciągłe (w topologii produktowej na swej dziedzinie), przeto istnieją otoczenia otwarte $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ elementu g o własności $f(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) \subset \mathcal{O}_e$. Otwarte otoczenie $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 =: \mathcal{O}_g$ spełnia pożądany warunek $f(\mathcal{O}_g \times \mathcal{O}_g) \subset \mathcal{O}_e$. □

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 1 i niechaj $(\mathrm{G}, m, \mathrm{Inv}, \bullet \longmapsto e)$ będzie grupą Liego. Czwórka

$$\big(\mathsf{T}\mathrm{G}, \mathsf{T}m, \mathsf{T}\mathrm{Inv}, (\bullet, 0) \longmapsto 0_{\mathsf{T}_e\mathrm{G}} \in \mathsf{T}_e\mathrm{G}\big)$$

jest grupą Liego noszącą miano **stycznej grupy Liego**. Rzut kanoniczny $\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}} : \mathsf{T}\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}$ oraz cięcie zerowe $\mathbf{0}_{\mathsf{T}\mathrm{G}}$ są homomorfizmami grup Liego spełniającymi relację

$$\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}} \circ \mathbf{0}_{\mathsf{T}\mathrm{G}} = \mathrm{id}_{\mathrm{G}} \,. \tag{1}$$

<u>*Dowód:*</u> Chwila zastanowienia uświadamia nam, że przyporządkowanie rozmaitości gładkiej jej wiązki stycznej ma charakter funktorialny (zrozumienie użytego tu niezwykle ekonomicznego skrótu pojęciowego umożliwia krótkie wprowadzenie do języka teorii kategorii, które załączam w oddzielnym pliku). Funktorialność T zapewnia transport nie tylko pełnej struktury (czyli struktury gładkiej i odwzorowań) grupy Liego G, ale także jej aksjomatyki – funktorialnym obrazem diagramów przemiennych wyrażających aksjomaty G są analogiczne diagramy dla $\mathsf{T}\mathrm{G}$. Jedynym zatem nietrywialnym punktem dowodzonego stwierdzenia jest ten mówiący o homomorficznym charakterze rzutu kanonicznego i cięcia zerowego oraz ich wzajemnej relacji. Zacznijmy od rzutu kanonicznego. Zważywszy definicję odwzorowania stycznego, stwierdzamy, że dla dowolnych $(g,h) \in \mathrm{G}^{\times 2}$ jest

$$\mathsf{T}_{(g,h)}m \,:\, \mathsf{T}_{(g,h)}(\mathrm{G} \times \mathrm{G}) \cong \mathsf{T}_g\mathrm{G} \oplus \mathsf{T}_h\mathrm{G} \longrightarrow \mathsf{T}_{m(g,h)}\mathrm{G} \,,$$

zatem

$$\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}} \circ \mathsf{T}m = m \circ (\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}} \times \pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}) \,,$$

a to jest właśnie definiująca własność homomorfizmu grup, przy czym wobec gładkości m także odwzorowanie styczne jest gładkie, mamy przeto do czynienia z homomorfizmem grup Liego. Aby postąpić dalej, musimy wejrzeć w strukturę $\mathsf{T}_{(g,h)}m$. Dla dowolnego elementu $g \in \mathrm{G}$ zdefiniujmy odwzorowania gładkie

$$\ell_g \,:\, \mathrm{G} \circlearrowleft \,:\, h \longmapsto m(g,h) \,, \qquad \wp_g \,:\, \mathrm{G} \circlearrowleft \,:\, h \longmapsto m(h,g) \,.$$

Wybierzmy lokalne mapy: $\kappa_g \equiv (x^1, x^2, \ldots, x^n) \,:\, \mathcal{O}_g \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_g \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\times n})$, $n = \dim \mathrm{G}$ na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_g$ punktu g, $\kappa_h \equiv (y^1, y^2, \ldots, y^n) \,:\, \mathcal{O}_h \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_h \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\times n})$ na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_h$ punktu h oraz $\kappa_{g\cdot h} \equiv (z^1, z^2, \ldots, z^n) \,:\, \mathcal{O}_{g\cdot h} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{g\cdot h} \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\times n})$ na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_{g\cdot h}$ punktu $g \cdot h$, a wtedy – dla dowolnych $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}(g) \in \mathsf{T}_g\mathrm{G}$ i $W = W^a \frac{\partial}{\partial y^a}(h) \in \mathsf{T}_h\mathrm{G}$ – dostajemy

$$\mathsf{T}_{(g,h)}m(V,W) \quad = \quad V^i \, \tfrac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial x^i}\big(\kappa_g(g), \kappa_h(h)\big) \, \tfrac{\partial}{\partial z^\mu}(g \cdot h)$$

$$+W^a\,\tfrac{\partial(z^\mu\circ m\circ(\kappa_g^{-1}\times\kappa_h^{-1}))}{\partial y^a}\big(\kappa_g(g),\kappa_h(h)\big)\,\tfrac{\partial}{\partial z^\mu}(g\cdot h)\,.$$

W wyrażeniach $\frac{\partial(z^\mu\circ m\circ(\kappa_g^{-1}\times\kappa_h^{-1}))}{\partial x^i}(\kappa_g(g),\kappa_h(h))$ i $\frac{\partial(z^\mu\circ m\circ(\kappa_g^{-1}\times\kappa_h^{-1}))}{\partial y^a}(\kappa_g(g),\kappa_h(h))$ rozpoznajemy elementy macierzy odwzorowań liniowych $\mathsf{T}_g\wp_h$ i $\mathsf{T}_h\ell_g$, odpowiednio, możemy zatem przepisać powyższe w wygodnej postaci

(2) $$\mathsf{T}_{(g,h)}m=\mathsf{T}_g\wp_h\circ\mathrm{pr}_1+\mathsf{T}_h\ell_g\circ\mathrm{pr}_2\,.$$

Na tej podstawie wnioskujemy o słuszności równości

$$\begin{aligned}\mathsf{T}m\circ(\mathbf{0}_{\mathsf{T}\mathrm{G}}\times\mathbf{0}_{\mathsf{T}\mathrm{G}})(g,h)&=\mathsf{T}_{(g,h)}m(0_{\mathsf{T}_g\mathrm{G}},0_{\mathsf{T}_h\mathrm{G}})=\mathsf{T}_g\wp_h(0_{\mathsf{T}_g\mathrm{G}})+\mathsf{T}_h\ell_g(0_{\mathsf{T}_h\mathrm{G}})\\&=0_{\mathsf{T}_{g\cdot h}\mathrm{G}}+0_{\mathsf{T}_{g\cdot h}\mathrm{G}}=0_{\mathsf{T}_{g\cdot h}\mathrm{G}}\equiv\mathbf{0}_{\mathsf{T}\mathrm{G}}\circ m(g,h)\,,\end{aligned}$$

która dokumentuje homomorficzny charakter $\mathbf{0}_{\mathsf{T}\mathrm{G}}$, przy czym – rzecz jasna – mamy tu do czynienia z homomorfizmem gładkim. Tożsamość (1) jest oczywista. □

Uwaga 1. Ażeby do końca oswoić styczną grupę Liego, znajdziemy jeszcze jawną postać morfizmu $\mathsf{T}\mathrm{Inv}$. W tym celu roważymy tożsamości

$$m\circ(\mathrm{id}_\mathrm{G}\times\mathrm{Inv})\circ\Delta=\eta=m\circ(\mathrm{Inv}\times\mathrm{id}_\mathrm{G})\circ\Delta\,,$$

w których zapisie użyliśmy odwzorowań (jawnie) gładkich

$$\Delta\;:\;\mathrm{G}\longrightarrow\mathrm{G}\times\mathrm{G}\;:\;g\longmapsto(g,g)\,,\qquad\qquad\eta\;:\;\mathrm{G}\circlearrowleft\;:\;g\longmapsto e\,,$$

a których funktorialnym obrazem względem T jest

$$\mathsf{T}m\circ(\mathrm{id}_{\mathsf{T}\mathrm{G}}\times\mathsf{T}\mathrm{Inv})\circ\mathsf{T}\Delta=0=\mathsf{T}m\circ(\mathsf{T}\mathrm{Inv}\times\mathrm{id}_{\mathsf{T}\mathrm{G}})\circ\mathsf{T}\Delta\,.$$

Uwzględniając Równ. (2), wyprowadzamy stąd tożsamości (dla dowolnych $g\in\mathrm{G}$ i $V\in\mathsf{T}_g\mathrm{G}$)

$$\mathsf{T}_g\wp_{g^{-1}}(V)+\mathsf{T}_{g^{-1}}\ell_g\circ\mathsf{T}_g\mathrm{Inv}(V)=0_{\mathsf{T}_e\mathrm{G}}=\mathsf{T}_{g^{-1}}\wp_g\circ\mathsf{T}_g\mathrm{Inv}(V)+\mathsf{T}_g\ell_{g^{-1}}(V)\,,$$

czyli

$$\mathsf{T}_g\mathrm{Inv}=-\mathsf{T}_e\ell_{g^{-1}}\circ\mathsf{T}_g\wp_{g^{-1}}=-\mathsf{T}_e\wp_{g^{-1}}\circ\mathsf{T}_g\ell_{g^{-1}}\,.$$

Godzi się przy tym podkreślić, że ostatnia równość nie wymaga powyższego wyprowadzenia, wynika ona bowiem wprost ze wzajemnej przemienności ℓ_g i $\wp_h$ dla dowolnych $g,h\in\mathrm{G}$.

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i zdefiniujmy **działanie dołączone**

$$\mathrm{Ad}_\cdot\;:\;\mathrm{G}\times\mathrm{G}\longrightarrow\mathrm{G}\;:\;(g,h)\longmapsto m\big(m(g,h),\mathrm{Inv}(g)\big)\equiv\mathrm{Ad}_g(h)\,.$$

Odwzorowanie

$$\mathsf{T}_e\ell_\cdot\;:\;\mathrm{G}\,{}_{\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_\cdot}\!\ltimes\mathsf{T}_e\mathrm{G}\longrightarrow\mathsf{T}\mathrm{G}\;:\;(g,X)\longmapsto\mathsf{T}_e\ell_g(X)$$

jest izomorfizmem grup Liego.

<u>*Dowód:*</u> Na podstawie Równ. (2) możemy przepisać

$$\begin{aligned}\mathsf{T}_{(g,e)}m\circ(\mathbf{0}_{\mathsf{T}\mathrm{G}}\times\mathrm{id}_{\mathsf{T}_e\mathrm{G}})(g,X)&=\mathsf{T}_{(g,e)}m(0_{\mathsf{T}_g\mathrm{G}},X)=\mathsf{T}_g\wp_e(0_{\mathsf{T}_g\mathrm{G}})+\mathsf{T}_e\ell_g(X)\\&=\mathsf{T}_e\ell_g(X)\equiv\mathsf{T}_e\ell_\cdot(g,X)\,,\end{aligned}\tag{4}$$

czyli

$$\mathsf{T}_e\ell_\cdot=\mathsf{T}_{(g,e)}m\circ(\mathbf{0}_{\mathsf{T}\mathrm{G}}\times\mathrm{id}_{\mathsf{T}_e\mathrm{G}})\,,$$

co dowodzi gładkości $\mathsf{T}_e\ell_\cdot$. W połączeniu z obserwacją

$$\big(\mathsf{T}_e\ell_\cdot\big)^{-1}=\big(\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}},\mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(\cdot)}\ell_{\mathrm{Inv}\circ\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(\cdot)}(\cdot)\big)\,,$$

którą weryfikujemy w bezpośrednim rachunku (w którym $v\in\mathsf{T}\mathrm{G}$):

$$\big(\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}},\mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(\cdot)}\ell_{\mathrm{Inv}\circ\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(\cdot)}(\cdot)\big)\circ\mathsf{T}_e\ell_\cdot(g,X)$$

$$= \big(\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}, \mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(\cdot)}\ell_{\mathrm{Inv}\circ\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(\cdot)}(\cdot)\big)\circ\mathsf{T}_e\ell_g(X) = \big(g, \mathsf{T}_g\ell_{g^{-1}}\circ\mathsf{T}_e\ell_g(X)\big)$$

$$= \big(g, \mathsf{T}_e(\ell_{g^{-1}}\circ\ell_g)(X)\big) = \big(g, \mathsf{T}_e\ell_{g^{-1}\cdot g}(X)\big) = \big(g, \mathsf{T}_e\ell_e(X)\big) = (g, X)\,,$$

$$\mathsf{T}_e\ell.\circ\big(\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}, \mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(\cdot)}\ell_{\mathrm{Inv}\circ\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(\cdot)}(\cdot)\big)(v)$$

$$= \mathsf{T}_e\ell_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(v)}\circ\mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(v)}\ell_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(v)^{-1}}(v) = \mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(v)}(\ell_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(v)}\circ\ell_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(v)^{-1}})(v)$$

$$= \mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(v)}(\ell_e)(v) = v\,,$$

przekonuje nas to o dyfeomorficznym charakterze tego odwzorowania (zależność $\big(\mathsf{T}_e\ell.\big)^{-1}$ od argumentu jest jawnie gładka). Pozostaje zatem upewnić się, że mamy do czynienia z homomorfizmem grup. W tym celu obliczamy – dla dowolnych $X, Y \in \mathsf{T}_e\mathrm{G}$ oraz $g, h \in \mathrm{G}$, a w odwołaniu do Równ. (2) –

$$\mathsf{T}_e\ell.\big((g, X)\,{}_{\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}.}\cdot\,(h, Y)\big) = \mathsf{T}_e\ell.\big(g\cdot h, \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X) + Y\big)$$

$$= \mathsf{T}_e\ell_{g\cdot h}\big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X) + Y\big) = \mathsf{T}_e(\ell_{g\cdot h\cdot h^{-1}}\circ\wp_h)(X) + \mathsf{T}_h\ell_g\circ\mathsf{T}_e\ell_h(Y)$$

$$= \mathsf{T}_e(\wp_h\circ\ell_g)(X) + \mathsf{T}_h\ell_g\circ\mathsf{T}_e\ell_h(Y) = \mathsf{T}_g\wp_h\big(\mathsf{T}_e\ell_g(X)\big) + \mathsf{T}_h\ell_g\big(\mathsf{T}_e\ell_h(Y)\big)$$

$$\equiv \mathsf{T}_{(g,h)}m\big(\mathsf{T}_e\ell_g(X), \mathsf{T}_e\ell_h(Y)\big) \equiv \mathsf{T}_{(g,h)}m\big(\mathsf{T}_e\ell.(g, X), \mathsf{T}_e\ell.(h, Y)\big)\,.$$

Warto odnotować na marginesie, że $\mathsf{T}_e\ell.$ jest stycznościowym odpowiednikiem dyfeomorfizmu $\ell.\restriction_{\mathrm{G}\times\{e\}}\ :\ \mathrm{G}\times\{e\}\longrightarrow\mathrm{G}$. □

2. Pola niezmiennicze na grupie Liego

Po przedyskutowaniu ogólnych własności geometrii stycznościowej rozmaitości różniczkowalnych będących nośnikami uzgodnionej struktury grupy przejdziemy obecnie do szczegółowego zanalizowania wyróżnionych przez tę strukturę gładkich pól wektorowych na tych rozmaitościach, których studium doprowadzi nas do abstrakcyjnej konstrukcji algebry Liego.

Definicja 2. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. **Pole wektorowe lewoniezmiennicze** na grupie Liego G to pole wektorowe $\mathcal{V}_L \in \Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G})$ o własności

$$\forall_{g\in\mathrm{G}}\ :\ \ell_{g\,*}\mathcal{V} = \mathcal{V}\,.$$

Analogicznie, **pole wektorowe prawoniezmiennicze** na G to pole wektorowe $\mathcal{V}_R \in \Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G})$ o własności

$$\forall_{g\in\mathrm{G}}\ :\ \wp_{g\,*}\mathcal{V} = \mathcal{V}\,.$$

Uwaga 2. Jako że powyższe wzory prowadzą czasami do nieporozumień, wypiszemy drugi z nich w jawnej postaci. Oto więc dla dowolnych $g, h \in \mathrm{G}$ zachodzi w ogólności

$$\big(\ell_{g\,*}\mathcal{V}\big)(h) \equiv \mathsf{T}_{\ell_g^{-1}(h)}\ell_g\big(\mathcal{V}\big(\ell_g^{-1}(h)\big)\big) = \mathsf{T}_{g^{-1}\cdot h}\ell_g\big(\mathcal{V}\big(g^{-1}\cdot h\big)\big)\,,$$

przeto warunek lewoniezmienniczości przyjmuje postać

$$\mathsf{T}_{g^{-1}\cdot h}\ell_g\big(\mathcal{V}\big(g^{-1}\cdot h\big)\big) = \mathcal{V}(h)\,.$$

Innymi słowy, przesuwając stycznościowo wzgl. lewej translacji ℓ_g na grupie wartość pola wektorowego w dowolnym punkcie otrzymujemy wektor w punkcie poddanym translacji tożsamy z wartością tegoż pola w tym punkcie.

Stwierdzenie 3. Zbiory

$$\mathfrak{X}_L(\mathrm{G}) \quad := \quad \{\ \mathcal{V} \in \Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G}) \quad | \quad \mathcal{V} \quad \text{lewoniezmiennicze}\ \},$$

$$\mathfrak{X}_R(\mathrm{G}) \quad := \quad \{\ \mathcal{V} \in \Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G}) \quad | \quad \mathcal{V} \quad \text{prawoniezmiennicze}\ \}$$

są podprzestrzeniami $\mathbb{R}$-liniowymi w $\Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G})$, a ponadto komutator pól wektorowych ogranicza się do każdego z nich,

$$[\cdot,\cdot]_{\mathrm{G}}\big(\mathfrak{X}_H(\mathrm{G}) \times \mathfrak{X}_H(\mathrm{G})\big) \subset \mathfrak{X}_H(\mathrm{G}), \quad H \in \{L, R\}.$$

Parę

$$\big(\mathfrak{X}_L(\mathrm{G}), [\cdot,\cdot]_{\mathrm{G}} \restriction_{\mathfrak{X}_L(\mathrm{G}) \times \mathfrak{X}_L(\mathrm{G})}\big)$$

nazywamy **algebrą pól lewoniezmienniczych na** G, a parę

$$\big(\mathfrak{X}_R(\mathrm{G}), [\cdot,\cdot]_{\mathrm{G}} \restriction_{\mathfrak{X}_R(\mathrm{G}) \times \mathfrak{X}_R(\mathrm{G})}\big)$$

algebrą pól prawoniezmienniczych na G.

Dowód: Pierwsza część tezy wynika wprost z $\mathbb{R}$-liniowości warunku lewoniezmienniczości (wzgl. prawoniezmienniczości), a druga – z prostego rachunku (przeprowadzonego dla dowolnego elementu $g \in \mathrm{G}$ i dowolnych pól lewoniezmienniczych $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in \mathfrak{X}_L(\mathrm{G})$):

$$\ell_{g\,*}[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_{\mathrm{G}} = [\ell_{g\,*}\mathcal{V}_1, \ell_{g\,*}\mathcal{V}_2]_{\mathrm{G}} = [\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_{\mathrm{G}}.$$

Analogiczny rachunek dowodzi prawoniezmienniczości komutatora dowolnej pary pól prawoniezmienniczych. □

Uwaga 3. Przywołane powyżej zachowanie komutatora pól wektorowych stanowi szczególny przypadek ogólniejszego mechanizmu, któremu podlegają tzw. **pary pól wektorowych w F-relacji** wyróżnione przez dowolne gładkie odwzorowanie $F : M \longrightarrow M$ między rozmaitościami różniczkowalnymi M, N. Przypomnijmy: elementy takiej pary $(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \in \Gamma(\mathsf{T}M) \times \Gamma(\mathsf{T}N)$ spełniają tożsamość definiującą

$$\forall_{x \in M} \ : \ \mathcal{W}\big(F(x)\big) = \mathsf{T}_x F\big(\mathcal{V}(x)\big).$$

Dla każdych dwóch takich par $(\mathcal{V}_A, \mathcal{W}_A)$, $A \in \{1, 2\}$ dowodzimy tożsamości

$$\forall_{x \in M} \ : \ [\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2]_{\Gamma(\mathsf{T}N)}\big(F(x)\big) = \mathsf{T}_x F\big([\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2](x)\big), \tag{5}$$

wyrażającej prawidłowość: Komutator pierwszych składowych pary pól w F-relacji jest w F-relacji z komutatorem drugich składowych pary. W rozpatrywanym powyżej przypadku para $(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ jest w ℓ_g-relacji dla dowolnego elementu grupy $g \in \mathrm{G}$.

Definicja 3. Algebra Liego nad ciałem $\mathbb{K}$ to kolekcja $\Big(\big((V, +_V, P_V, \bullet \longmapsto \mathbf{0}_V), \ell_V\big), [\cdot,\cdot]_V\Big)$ złożona z przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej $\big((V, +_V, P_V, \bullet \longmapsto \mathbf{0}_V), \ell_V\big)$ oraz odwzorowania dwu-$\mathbb{K}$-liniowego skośnie symetrycznego

$$[\cdot,\cdot]_V \ : \ V \times V \longrightarrow V \ : \ (v, w) \longmapsto [v, w]_V = -[w, v]_V,$$

zwanego **nawiasem Liego na** V, którego **jakobiator**

$$\begin{aligned} \mathrm{Jac}_V \quad : \quad & V \times V \times V \longrightarrow V \\ : \quad & (X_1, X_2, X_3) \longmapsto [[X_1, X_2]_V, X_3]_V + [[X_3, X_1]_V, X_2]_V + [[X_2, X_3]_V, X_1]_V \end{aligned}$$

jest tożsamościowo równy zeru. Tożsamość w algebrze wyrażająca znikanie jakobiatora nazywa się **tożsamością Jacobiego**.

Podalgebrą Liego algebry Liego $\Big(\big((V, +_V, P_V, \bullet \longmapsto \mathbf{0}_V), \ell_V\big), [\cdot,\cdot]_V\Big)$ nazwiemy algebrę Liego $\Big(\big((W, +_V \restriction_{W \times W}, P_V \restriction_W, \bullet \longmapsto \mathbf{0}_V), \ell_V \restriction_{\mathbb{K} \times W}\big), [\cdot,\cdot]_V \restriction_{W \times W}\Big)$ o nośniku $W \subseteq V$ będącym podprzestrzenią $\mathbb{K}$-liniową V.

Homomorfizm algebr Liego między algebrami Liego $\big(\big((V_\alpha,+_\alpha,P_\alpha,\bullet\longmapsto\mathbf{0}_\alpha),\ell_\alpha\big),[\cdot,\cdot]_\alpha\big)$, $\alpha\in\{1,2\}$ to odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe $\chi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1,V_2)$ o własności

$$[\cdot,\cdot]_2\circ(\chi\times\chi)=\chi\circ[\cdot,\cdot]_1\,.$$

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def. 3 i Stw. 3. Odwzorowanie

$$\mathsf{T}.\mathrm{Ad}.\ :\ \mathfrak{X}_R(\mathrm{G})\xrightarrow{\cong}\mathfrak{X}_L(\mathrm{G})\ :\ \mathcal{V}\longmapsto\mathsf{T}.\mathrm{Ad}.\big(\mathcal{V}(\cdot)\big)$$

jest izomorfizmem przestrzeni pól prawo- i lewoniezmienniczych. Istnieją kanoniczne izomorfizmy przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowych[1]

$$H.\ :\ \mathfrak{g}\equiv\mathrm{Der}_e\,C^1(\mathrm{G},\mathbb{R})\xrightarrow{\cong}\mathfrak{X}_H(\mathrm{G})\,,\quad H\in\{L,R\}\,,$$

o własności

$$L.\circ(R.)^{-1}\equiv\mathsf{T}.\mathrm{Ad}.\,.\tag{6}$$

Indukują one na przestrzeni $\mathfrak{g}\cong\mathsf{T}_e\mathrm{G}$ nawias Liego

$$[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}\ :\ \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}\ :\ (X_1,X_2)\longmapsto[L_{X_1},L_{X_2}]_{\Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G})}(e)\,.$$

Algebra Liego

$$\big(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}\big)\equiv\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$$

(w której zapisie $\mathfrak{g}$ jest traktowana jako przestrzeń $\mathbb{R}$-liniowa) nosi miano **algebry Liego grupy Liego** G.

<u>*Dowód:*</u> Dla dowolnego pola prawoniezmienniczego $\mathcal{V}\in\mathfrak{X}_R(\mathrm{G})$ sprawdzamy lewoniezmienniczość jego obrazu względem (jawnie $\mathbb{R}$-liniowego i odwracalnego) $\mathsf{T}.\mathrm{Ad}.$ w bezpośrednim rachunku, prowadzonym dla dowolnych $g,h\in\mathrm{G}$ z uwzględnieniem prawoniezmienniczości $\mathcal{V}$,

$$\begin{aligned}
&\ell_{g\,*}\big(\mathsf{T}.\mathrm{Ad}.\big(\mathcal{V}(\cdot)\big)\big)(h)=\mathsf{T}_{\ell_{g^{-1}}(h)}\ell_g\Big(\big(\mathsf{T}.\mathrm{Ad}.\big(\mathcal{V}(\cdot)\big)\big(\ell_{g^{-1}}(h)\big)\Big)\\
=\ &\mathsf{T}_{g^{-1}h}\ell_g\big(\mathsf{T}_{g^{-1}h}\mathrm{Ad}_{g^{-1}h}\big(\mathcal{V}(g^{-1}h)\big)\big)=\mathsf{T}_{g^{-1}h}\big(\ell_h\circ\wp_{h^{-1}g}\big)\big(\mathcal{V}(g^{-1}h)\big)\\
=\ &\mathsf{T}_e\ell_h\circ\mathsf{T}_{g^{-1}h}\wp_{h^{-1}g}\big(\mathcal{V}(g^{-1}h)\big)=\mathsf{T}_e\ell_h\big(\mathcal{V}(e)\big)\equiv\mathsf{T}_e\ell_h\circ\mathsf{T}_h\wp_{h^{-1}}\big(\mathcal{V}(h)\big)\\
\equiv\ &\big(\mathsf{T}.\mathrm{Ad}.\big(\mathcal{V}(\cdot)\big)\big)(h)\,.
\end{aligned}$$

Poszukiwania izomorfizmu $L.$ zaczniemy od zauważenia, że dowolne pole lewoniezmiennicze $\mathcal{V}\in\mathfrak{X}_L(\mathrm{G})$ spełnia tożsamość

$$\mathcal{V}(g)=(\ell_{g\,*}\mathcal{V})(g)\equiv\mathsf{T}_{\ell_{g^{-1}}(g)}\ell_g\big(\mathcal{V}\big(\ell_{g^{-1}}(g)\big)\big)=\mathsf{T}_e\ell_g\big(\mathcal{V}(e)\big)\equiv\mathcal{V}(e)\circ\ell_g^*\,,$$

gdzie ℓ_g^*, $g\in\mathrm{G}$ jest cofnięciem (funkcji), $\mathcal{V}(e)$ zaś jest różniczkowaniem algebry funkcji na grupie w jej elemencie neutralnym. Jako że $\mathcal{V}(e)\in\mathfrak{g}$, powyższa obserwacja podpowiada wprost definicję poszukiwanego izomorfizmu. Określmy odwzorowanie, jawnie $\mathbb{R}$-liniowe,

$$L.\ :\ \mathfrak{g}\longrightarrow\Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G})\ :\ X\longmapsto X\circ\ell_\cdot^*\equiv L_X\,,$$

Bez trudu sprawdzamy lewoniezmienniczość pól w jego obrazie,

$$\begin{aligned}
\ell_{g\,*}L_X\ &=\ \mathsf{T}_{\ell_{g^{-1}}(\cdot)}\ell_g\big(L_X\circ\ell_{g^{-1}}(\cdot)\big)\equiv\big(L_X\circ\ell_{g^{-1}}(\cdot)\big)\circ\ell_g^*\equiv X\circ\ell_{\ell_{g^{-1}}(\cdot)}^*\circ\ell_g^*\\
&=\ X\circ\big(\ell_g\circ\ell_{\ell_{g^{-1}}(\cdot)}\big)^*=X\circ\ell_{g\cdot\ell_{g^{-1}}(\cdot)}^*=X\circ\ell_\cdot^*\equiv L_X\,,\quad g\in\mathrm{G}\,.
\end{aligned}$$

Kierując się wcześniejszym rachunkiem postulujemy odwrotność $L.$ w postaci, także jawnie $\mathbb{R}$-liniowej,

$$\mathrm{ev}_e\ :\ \mathfrak{X}_L(\mathrm{G})\longrightarrow\mathfrak{g}\ :\ \mathcal{V}\longmapsto\mathcal{V}(e)\,,$$

[1] $\mathrm{Der}_e\,C^1(\mathrm{G},\mathbb{R})=\{\ V\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(C^1(\mathrm{G},\mathbb{R}),\mathbb{R})\ \mid\ \forall_{f,g\in C^1(\mathrm{G},\mathbb{R})}\ :\ V(f\cdot_{C^1(\mathrm{G},\mathbb{R})}g)=V(f)\cdot g(e)+f(e)\cdot V(g)\ \}$ jest przestrzenią różniczkowań algebry funkcji klasy C^1 w e.

oto bowiem zachodzi

$$\mathcal{V} = \mathrm{ev}_e(\mathcal{V}) \circ \ell_\cdot^* \equiv L_{\mathrm{ev}_e(\mathcal{V})}\,.$$

Z drugiej strony obliczamy

$$\mathrm{ev}_e(L_X) = X \circ \ell_e^* = X\,,$$

więc w istocie

$$\mathrm{ev}_e = (L_\cdot)^{-1}\,.$$

Zastąpiwszy w powyższym rozumowaniu działanie lewe regularne $\ell_\cdot$ jego prawym odpowiednikiem $\wp_\cdot$, możemy powtórzyć to rozumowanie w odniesieniu do pól prawoniezmienniczych, co daje nam izomorfizm

$$R_\cdot \;:\; \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}_R(\mathrm{G}) \;:\; X \longmapsto X \circ \wp_\cdot^* \equiv R_X\,,$$

o odwrotności – jak poprzednio –

$$(R_\cdot)^{-1} = \mathrm{ev}_e\,.$$

Tożsamość (6) jest w oczywisty sposób spełniona, oto bowiem dla dowolnego wektora $X \in \mathfrak{g}$ zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned} \mathsf{T}\mathrm{Ad}_\cdot \circ R_\cdot(X) &= \mathsf{T}\mathrm{Ad}_\cdot\big(X \circ \wp_\cdot^*\big) = X \circ \wp_\cdot^* \circ \ell_\cdot^* \circ \wp_{\mathrm{Inv}(\cdot)}^* = X \circ \wp_\cdot^* \circ \wp_{\mathrm{Inv}(\cdot)}^* \circ \ell_\cdot^* = X \circ \wp_{\mathrm{Inv}(\cdot)\cdot\cdot}^* \circ \ell_\cdot^* \\ &= X \circ \wp_e^* \circ \ell_\cdot^* = X \circ \ell_\cdot^* \equiv L_\cdot(X)\,. \end{aligned}$$

Pozostaje już tylko przekonać się, że jakobiator jawnie skośnie symetrycznego i dwu-$\mathbb{R}$-liniowego odwzorowania $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ znika tożsamościowo. Czynimy to w bezpośrednim rachunku, w którym wykorzystujemy prostą tożsamość (w której, tak jak w tych po niej następujących, opuszczamy znacznik $\Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G})$ na komutatorze pól wektorowych)

$$L_{[X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}} \equiv L_{\mathrm{ev}_e([L_{X_1},L_{X_2}])} = [L_{X_1}, L_{X_2}]\,.$$

Oto więc wyznaczamy

$$\begin{aligned} \mathrm{Jac}_{\mathfrak{g}}(X_1,X_2,X_3) &\equiv [[X_1,X_2]_{\mathfrak{g}},X_3]_{\mathfrak{g}} + [[X_3,X_1]_{\mathfrak{g}},X_2]_{\mathfrak{g}} + [[X_2,X_3]_{\mathfrak{g}},X_1]_{\mathfrak{g}} \\ &= [\mathrm{ev}_e\big([L_{X_1},L_{X_2}]\big),X_3]_{\mathfrak{g}} + [\mathrm{ev}_e\big([L_{X_3},L_{X_1}]\big),X_2]_{\mathfrak{g}} + [\mathrm{ev}_e\big([L_{X_2},L_{X_3}]\big),X_1]_{\mathfrak{g}} \\ &= [L_{\mathrm{ev}_e([L_{X_1},L_{X_2}])},L_{X_3}](e) + [L_{\mathrm{ev}_e([L_{X_3},L_{X_1}])},L_{X_2}](e) + [L_{\mathrm{ev}_e([L_{X_2},L_{X_3}])},L_{X_1}](e) \\ &= [[L_{X_1},L_{X_2}],L_{X_3}](e) + [[L_{X_3},L_{X_1}],L_{X_2}](e) + [[L_{X_2},L_{X_3}],L_{X_1}](e) \\ &\equiv \mathrm{Jac}_{\Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G})}(L_{X_1},L_{X_2},L_{X_3})(e) = 0_{\mathfrak{g}}\,, \end{aligned}$$

co kończy dowód stwierdzenia. □

Definicja 4. Przyjmijmy zapis Stw. 4 i jego dowodu, przy czym założymy dodatkowo, że $N := \dim \mathrm{G} < \infty$. Wybierzmy w przestrzeni wektorowej $\mathfrak{g}$ dowolną bazę $\mathcal{T} := \{t_A\}_{A\in\overline{1,N}}$, a wówczas **stałe struktury algebry Liego** $\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$ w bazie $\mathcal{T}$ to liczby $f_{ABC} = -f_{BAC} \in \mathbb{R}$, $A,B,C \in \overline{1,N}$ zdefiniowane przez **równania struktury algebry Liego** $\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$

$$[t_A, t_B] = f_{ABC} \triangleright t_C\,, \quad A,B \in \overline{1,N}\,.$$

W konsekwencji znikania jakobiatora na $\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$ spełniają one tożsamościowo dwuliniowe relacje

$$f_{ABD}\, f_{DCE} + f_{CAD}\, f_{DBE} + f_{BCD}\, f_{DAE} = 0\,, \quad A,B,C,E \in \overline{1,N}\,,$$

zwane **tożsamościami Jacobiego dla stałych struktury** $\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$. Elementy bazy $C^\infty(\mathrm{G},\mathbb{R})$-modułu $\Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G})$ będącej $L_\cdot$- wzgl. $R_\cdot$-obrazem bazy $\mathcal{T}$ będziemy oznaczać symbolem

$$L_A(\cdot) \equiv \mathsf{T}_e\ell_\cdot(t_A)$$

wzgl.

$$R_A(\cdot) \equiv \mathsf{T}_e\wp.(t_A)\,.$$

Twierdzenie 1 (Funktorialność Lie)**.** Przyjmijmy zapis Def. 3 i Stw. 4. Przyporządkowanie grupom Liego ich algebr Liego rozszerza się kanonicznie do funktora

$$\mathrm{Lie}\ :\ \mathbf{LieGrp} \longrightarrow \mathbf{LieAlg}_{\mathbb{R}}\,.$$

o składowej morfizmowej

$$\begin{aligned}\mathrm{Lie}\quad &:\quad \mathrm{Mor}\,\mathbf{LieGrp} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathbf{LieAlg}_{\mathbb{R}}\\ &:\quad \big(\ \mathrm{G}_1 \xrightarrow{\chi} \mathrm{G}_2\ \big) \longmapsto \big(\ \mathrm{Lie}\,\mathrm{G}_1 \xrightarrow{\mathsf{T}_{e_1}\chi} \mathrm{Lie}\,\mathrm{G}_2\ \big)\,.\end{aligned}$$

<u>*Dowód:*</u> Odwzorowanie $\mathsf{T}_{e_1}\chi$ jest dobrze określone, pozostaje zatem jedynie wykazać, że jest ono homomorfizmem algebr Liego. Punktem wyjścia będzie dla nas następująca tożsamość funkcjonalna, słuszna dla dowolnego elementu $g_1 \in \mathrm{G}$:

$$\ell_{\chi(g_1)} \circ \chi = \chi \circ \ell_{g_1}\,.$$

Na jej podstawie obliczamy, dla dowolnych: funkcji $f \in C^1(\mathrm{G}_2;\mathbb{R})$ oraz wektora $X \in \mathfrak{g}_1$,

$$\begin{aligned}\mathsf{T}_{g_1}\chi\big(L_X(g_1)\big)(f) \quad &\equiv \quad L_X(g_1)\circ\chi^*(f) \equiv X\circ\ell_{g_1}^*\circ\chi^*(f) = X\circ(\chi\circ\ell_{g_1})^*(f)\\ &= \quad X\circ(\ell_{\chi(g_1)}\circ\chi)^*(f) = (X\circ\chi^*)\circ\ell_{\chi(g_1)}^*(f)\\ &\equiv \quad \mathsf{T}_{e_1}\chi(X)\circ\ell_{\chi(g_1)}^*(f) \equiv L_{\mathsf{T}_{e_1}\chi(X)}\big(\chi(g_1)\big)(f)\,,\end{aligned}$$

co pozwala skonstatować, że

$$\mathsf{T}.\chi\big(L_X(\cdot)\big) = L_{\mathsf{T}_{e_1}\chi(X)}\big(\chi(\cdot)\big)\,,$$

czyli że $\big(L_X, L_{\mathsf{T}_{e_1}\chi(X)}\big)$ jest parą pól w χ-relacji w rozumieniu Uwagi 3, a zatem w świetle wypisanego w niej Równ. (5) dla dowolnych wektorów $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_1$ zachodzi pożądana tożsamość

$$\begin{aligned}[\mathsf{T}_{e_1}\chi(X_1), \mathsf{T}_{e_1}\chi(X_2)]_{\mathfrak{g}_2} \quad &\equiv \quad [L_{\mathsf{T}_{e_1}\chi(X_1)}, L_{\mathsf{T}_{e_1}\chi(X_2)}]_{\mathrm{G}_2}(e_2) = [L_{\mathsf{T}_{e_1}\chi(X_1)}, L_{\mathsf{T}_{e_1}\chi(X_2)}]_{\mathrm{G}_2}\big(\chi(e_1)\big)\\ &= \quad \mathsf{T}_{e_1}\chi\big([L_{X_1}, L_{X_2}]_{\mathrm{G}_1}(e_1)\big) \equiv \mathsf{T}_{e_1}\chi\big([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}_1}\big)\,.\end{aligned}$$

□

Stwierdzenie 5. Pola lewo- i prawoniezmiennicze na dowolnej grupie Liego są zupełne.

<u>*Dowód:*</u> Rozważmy gładką krzywą całkową $\gamma\ :\ ]a,b[\longrightarrow \mathrm{G}$ przez $\gamma(t_0) = g_0 \in \mathrm{G}$ w $t_0 \in]a,b[$ pola lewoniezmienniczego $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}_L(\mathrm{G})$, tj. rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\mathsf{D}\gamma(t) = \mathcal{V}\big(\gamma(t)\big)\,,\quad t \in]a,b[\,,\qquad\qquad \gamma(t_0) = g_0\,.$$

Wybierzmy (dowolnie) czasy pośrednie t_1, t_2 spełniające warunki $a < t_1 < t_2 < b$ i oznaczmy $\Delta t := t_2 - t_1 > 0$. Krzywą γ będziemy teraz dowolnie przedłużać wykorzystując przechodniość działania lewego regularnego na G, która pozwala nam wskazać $g_{21} := \gamma(t_2)\cdot\gamma(t_1)^{-1}$. Zdefiniujmy zatem ścieżkę

$$\gamma_{\Delta t}\ :\ ]a+\Delta t, b+\Delta t[\longrightarrow \mathrm{G}\ :\ t \longmapsto \ell_{g_{21}}\circ\gamma(t-\Delta t)\,.$$

Jest ona rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$\mathsf{D}\gamma_{\Delta t}(t) = \mathsf{T}_{\gamma(t-\Delta t)}\ell_{g_{21}}\circ\mathsf{D}\gamma(t-\Delta t)\,,\quad t \in]a+\Delta t, b+\Delta t[\,,\qquad\qquad \gamma_{\Delta t}(t_2) = \gamma(t_2)\,,$$

a ponieważ $t-\Delta t \in]a,b[$ dla dowolnego czasu $t \in]a+\Delta t, b+\Delta t[$, przeto – wobec lewoniezmienniczości pola $\mathcal{V}$ –

$$\mathsf{D}\gamma_{\Delta t}(t) = \mathsf{T}_{\gamma(t-\Delta t)}\ell_{g_{21}}\circ\mathcal{V}\big(\gamma(t-\Delta t)\big) = \mathcal{V}\big(\ell_{g_{21}}\circ\gamma(t-\Delta t)\big) \equiv \mathcal{V}\big(\gamma_{\Delta t}(t)\big)\,.$$

Widzimy więc, że także $\gamma_{\mathsf{D}t}$ jest gładką krzywą całkową pola $\mathcal{V}$, stąd też – na mocy Twierdzenia o Jednoznaczności Rozwiązania Zagadnienia Cauchy'ego w dziedzinie określoności – na niepustym przedziale $\Delta I :=]a + \Delta t, b[\ni t_2$ zachodzi równość

$$\gamma_{\Delta t}\restriction_{\Delta I} = \gamma\restriction_{\Delta I}$$

i otrzymujemy gładkie przedłużenie $\widetilde{\gamma}$ krzywej γ do $]a, b + \Delta t[$ w postaci

$$\widetilde{\gamma} \;:\;]a, b + \Delta t[\longrightarrow \mathrm{G} \;:\; \begin{cases} \gamma(t) & \text{dla } t \in]a, b[\\ \gamma_{\Delta t}(t) & \text{dla } t \in]a + \Delta t, b + \Delta t[\end{cases} .$$

Dokonując iteracji powyższej procedury, możemy gładko przedłużyć wyjściową krzywą w sposób nieograniczony od góry, tj. do przedziału $]a, \infty[$. Podobny argument pokazuje, że jest ona także przedłużalna wstecz, tj. do $]-\infty, b[$, ostatecznie więc stwierdzamy, że γ przedłuża się gładko do $\mathbb{R}$, co wobec dowolności g_0 (wszak pole $\mathcal{V}$ jest określone na całej rozmaitości G) daje nam postulowaną tezę dla pól lewoniezmienniczych. Dowód w przypadku pól prawoniezmienniczych przebiega w pełni analogicznie. □

Stwierdzenie 6. Przyjmijmy zapis Stw. 4 i niechaj $X \in \mathfrak{g}$. Jednoparametrowe grupy dyfeomorfizmów grupy Liego G stowarzyszone z polami: lewoniezmienniczym L_X,

$$\mathcal{L}^X_{\cdot_1}(\cdot_2) \equiv \Phi_{L_X}(\cdot_1, \cdot_2) \;:\; \mathbb{R} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G} \;:\; (t, g) \longmapsto \Phi_{L_X}(t, g) \equiv \mathcal{L}^X_t(g)\,,$$

oraz prawoniezmienniczym R_X,

$$\mathcal{R}^X_{\cdot_1}(\cdot_2) \equiv \Phi_{R_X}(\cdot_1, \cdot_2) \;:\; \mathbb{R} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G} \;:\; (t, g) \longmapsto \Phi_{R_X}(t, g) \equiv \mathcal{R}^X_t(g)\,,$$

przyjmują postać, odpowiednio,

$$\mathcal{L}^X_t = \wp_{\mathcal{L}^X_t(e)}\,, \qquad\qquad \mathcal{R}^X_t = \ell_{\mathcal{R}^X_t(e)}\,. \tag{7}$$

<u>*Dowód:*</u> To, że potoki zupełnych (i globalnie gładkich) pól lewo- i prawoniezmienniczych zadają jednoparametrowe grupy dyfeomorfizmów G, wynika wprost z wiedzy zgromadzonej w trakcie I semestru. Pozostaje sprawdzić słuszność tożsamości (7). Obliczamy, dla dowolnego $g \in \mathrm{G}$,

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\mathcal{L}^X_t(g) = L_X(g) = \mathsf{T}_e\ell_g\big(L_X(e)\big) \equiv \mathsf{T}_e\ell_g\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\mathcal{L}^X_t(e)\big) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\ell_g \circ \mathcal{L}^X_t(e) \equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(\wp_{\mathcal{L}^X_t(e)}(g)\big)\,,$$

gdzie w ostatnim kroku skorzystaliśmy z Reguły Łańcuchowej dla pochodnej funkcji złożonej. Ścieżki $\mathcal{L}^X_\cdot(g)$ i $\ell_g \circ \mathcal{L}^X_\cdot(e)$, przecinające się w chwili $t = 0$,

$$\ell_g \circ \mathcal{L}^X_0(e) = \ell_g(e) = g \cdot e = g \equiv \mathcal{L}^X_0(g)\,,$$

są zatem współstyczne w tejże chwili, a wektorem stycznym jest wartość pola lewoniezmienniczego L_X w g. Obie też są krzywymi całkowymi pola L_X, oto bowiem dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ zachodzi – wprost z definicji –

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\mathcal{L}^X_t(g) = L_X \circ \mathcal{L}^X_t(g)\,,$$

a także – wobec lewoniezmienniczości L_X –

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\ell_g \circ \mathcal{L}^X_t(e) = \mathsf{T}_{\mathcal{L}^X_t(e)}\ell_g\big(L_X \circ \mathcal{L}^X_t(e)\big) = L_X \circ \ell_g \circ \mathcal{L}^X_t(e)\,.$$

Na mocy Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego ścieżki te są tożsame. Analogicznie dowodzimy drugiej równości w Równ. (7). □

W dalszej części zajmiemy się zatem wyróżnionymi ścieżkami $\mathcal{L}^X_\cdot(e)$ oraz $\mathcal{R}^X_\cdot(e)$.

Stwierdzenie 7. Przyjmijmy zapis Stw. 6. Gładkie ścieżki

$$\lambda_X \equiv \mathcal{L}^X_\cdot(e) \;:\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{G}\,, \qquad\qquad \rho_X \equiv \mathcal{R}^X_\cdot(e) \;:\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{G}$$

spełniają tożsamości

$$\forall_{t \in \mathbb{R}} \;:\; \big(\; \lambda_{t \triangleright X}(1) = \lambda_X(t) \quad \wedge \quad \rho_{t \triangleright X}(1) = \rho_X(t) \;\big)\,.$$

Dowód: W świetle Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego krzywa λ_X jest jednoznacznie określona przez warunki

$$\lambda_X(0) = e \qquad \wedge \qquad \forall_{t\in\mathbb{R}} \ : \ \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\lambda_X(t) = L_X \circ \lambda_X(t) \equiv \mathsf{T}_e\ell_{\lambda_X(t)}(X)\,.$$

Z drugiego z nich wyprowadzamy tożsamość

$$\forall_{s,t\in\mathbb{R}} \ : \ \mathsf{T}_e\ell_{\lambda_X(st)}(X) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}(st)}\lambda_X(st) = \tfrac{1}{s}\cdot\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\lambda_X(st)\,,$$

czyli też równoważną jej (wobec $\mathbb{R}$-liniowości $\mathsf{T}_e\ell_{\lambda_X(st)}$)

$$\forall_{s,t\in\mathbb{R}} \ : \ \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\lambda_X(st) = \mathsf{T}_e\ell_{\lambda_X(st)}(s \triangleright X)\,,$$

Zdefiniujmy rodzinę ścieżek

$$\gamma_s \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{G} \ : \ t \longmapsto \lambda_X(st)\,, \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

a wówczas powyższy warunek możemy zapisać w postaci

$$\forall_{s,t\in\mathbb{R}} \ : \ \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\gamma_s(t) = \mathsf{T}_e\ell_{\gamma_s(t)}(s \triangleright X) \equiv L_{s\triangleright X}\big(\gamma_s(t)\big)\,,$$

przy czym też

$$\gamma_s(0) = e = \lambda_{s\triangleright X}(0)\,,$$

stwierdzamy zatem równość

$$\forall_{s\in\mathbb{R}} \ : \ \gamma_s = \lambda_{s\triangleright X}\,,$$

skąd ostatecznie wniosek

$$\lambda_{s\triangleright X}(t) = \gamma_s(t) \equiv \lambda_X(st)\,,$$

czyli także – w szczególności

$$\lambda_{s\triangleright X}(1) = \lambda_X(s)\,.$$

Dowód dla ścieżek wykreślanych przez pola prawoniezmiennicze przebiega w pełni analogicznie. $\square$

Stwierdzenie 8. Przyjmijmy zapis Stw. 7. Gładkie ścieżki λ_X i ρ_X są homomorfizmami addytywnej grupy Liego $\mathbb{R}$ (z naturalną strukturą różniczkową) w G, spełniającymi warunek początkowy

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\lambda_X(t) = X = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\rho_X(t)\,.$$

I odwrotnie, każdy homomorfizm grup Liego

$$\chi \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{G}$$

spełniający warunek początkowy

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\chi(t) = X \in \mathfrak{g} \tag{8}$$

jest postaci

$$\lambda_X = \chi = \rho_X\,.$$

W szczególności więc ścieżki λ_X i ρ_X są tożsame.

Dowód: Jedynym, co wymaga sprawdzenia w przypadku ścieżek $\gamma \in \{\lambda_X, \rho_X\}$, jest warunek homomorfizmu

$$\forall_{s,t\in\mathbb{R}} \ : \ \gamma(s+t) = \gamma(s)\cdot\gamma(t)\,.$$

Zaczniemy od $\gamma = \lambda_X$. Ażeby udowodnić powyższą tożsamość, musimy przekonać się o tożsamości ścieżek λ_X i $\gamma_s := \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \circ \lambda_X(s+\cdot)$ przy ustalonym (dowolnie) s. W tym celu obliczamy – korzystając przy tym wprost z definicji ścieżki γ oraz z lewoniezmienniczości L_X –

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\gamma_s(t) \quad = \quad \mathsf{T}_{\lambda_X(s+t)}\ell_{\lambda_X(s)^{-1}}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\lambda_X(t+s)\big) \equiv \mathsf{T}_{\lambda_X(s+t)}\ell_{\lambda_X(s)^{-1}}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}(s+t)}\lambda_X(s+t)\big)$$

$$= \mathsf{T}_{\lambda_X(s+t)}\ell_{\lambda_X(s)^{-1}}\big(L_X\big(\lambda_X(s+t)\big)\big) = L_X\big(\ell_{\lambda_X(s)^{-1}}\circ\lambda_X(s+t)\big)$$

$$\equiv L_X\big(\gamma_s(t)\big)\,,$$

skąd wniosek, że ścieżka γ_s jest krzywą całkową pola L_X tak jak λ_X, a nadto

$$\gamma_s(0) = e = \lambda_X(0)\,,$$

zatem są to rozwiązania zagadnienia początkowego (dla tego samego pola wektorowego) przy tych samych warunkach początkowych, co w świetle Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego przesądza o ich postulowanej tożsamości. W przypadku $\gamma = \rho_X$ powtarzamy rozumowanie dla $\widetilde{\gamma}_s := \wp_{\rho_X(s)^{-1}}\circ\rho_X(s+\cdot)$.

Niechaj teraz χ będzie homomorfizmem spełniającym warunek początkowy (8). Różniczkując relację funkcjonalną wyrażającą homomorficzność χ,

$$\begin{aligned}\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\chi(s) &\equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}\xi}\restriction_{\xi=s}\chi(\xi) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\chi(s+t) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\ell_{\chi(s)}\circ\chi(t)\\ &= \mathsf{T}_{\chi(0)}\ell_{\chi(s)}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\chi(t)\big) = \mathsf{T}_e\ell_{\chi(s)}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\chi(t)\big)\\ &\equiv L_{\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\chi(t)}\big(\chi(s)\big)\,,\end{aligned}$$

stwierdzamy, że χ jest krzywą całkową przez $e = \chi(0)$ (równość ta, użyta w powyższym rachunku, jest konsekwencją homomorficzności χ) lewoniezmienniczego pola wektorowego będącego obrazem wektora $\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\chi(t)$ względem izomorfizmu $L.$ ze Stw. 4. Powtarzając to rozumowanie w odniesieniu do relacji

$$\begin{aligned}\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\chi(t) &\equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}\xi}\restriction_{\xi=t}\chi(\xi) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\restriction_{s=0}\chi(s+t) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\restriction_{s=0}\wp_{\chi(t)}\circ\chi(s)\\ &= \mathsf{T}_{\chi(0)}\wp_{\chi(t)}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\restriction_{s=0}\chi(s)\big) = \mathsf{T}_e\wp_{\chi(t)}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{s=0}\chi(s)\big)\\ &\equiv R_{\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\restriction_{s=0}\chi(s)}\big(\chi(t)\big)\,,\end{aligned}$$

uzyskujemy ostatnią brakującą część tezy. □

Stwierdzenie 9. Przyjmijmy zapis Stw. 7. Odwzorowanie

$$\lambda.\ :\ \mathfrak{g}\times\mathbb{R}\longrightarrow \mathrm{G}\ :\ (X,t)\longmapsto\lambda_X(t)$$

jest gładkie.

<u>Dowód:</u> Gładkość zależności $\lambda.$ od drugiego argumentu wynika wprost z Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego, oto bowiem dla ustalonego X ścieżka λ_X jest krzywą całkową gładkiego pola L_X. Pozostaje zatem wykazać gładkość zależności $\lambda.$ od pierwszego argumentu. W tym celu przedstawimy λ_X jako krzywą całkową gładkiego pola wektorowego na $\mathfrak{g}\times\mathrm{G}$ o danych początkowych (X,e), co pozwoli nam wywnioskować postulowaną gładkość wprost z tegoż Twierdzenia. Będziemy przy tym – jak zazwyczaj – utożsamiać $\mathrm{Der}_e\,C^1(\mathrm{G},\mathbb{R})$ z $\mathsf{T}_e\mathrm{G}$. Rozważmy zatem pole wektorowe (jawnie gładkie)

$$\begin{aligned}\mathcal{V}\ &:\ \mathfrak{g}\times\mathrm{G}\longrightarrow\mathsf{T}(\mathfrak{g}\times\mathrm{G})\\ &:\ (X,g)\longmapsto\big(0_{\mathfrak{g}},\mathsf{T}_e\ell_g(X)\big)\equiv\big(0_{\mathfrak{g}},L_X(g)\big)\in\mathfrak{g}\oplus\mathsf{T}_e\ell_g(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}\oplus\mathsf{T}_g\mathrm{G}\\ &\qquad\equiv\mathsf{T}_{(X,g)}(\mathfrak{g}\times\mathrm{G})\,.\end{aligned}$$

Jego potok $\Phi_{\mathcal{V}}$ spełnia równanie

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\Phi_{\mathcal{V}}\big(t;t_0,(X_0,g_0)\big) = \mathcal{V}\big(\Phi_{\mathcal{V}}\big(t;t_0,(X_0,g_0)\big)\big)\,,$$

w którego zapisie (X_0, g_0) jest warunkiem początkowym (w czasie t_0),

$$\Phi_{\mathcal{V}}\big(t_0; t_0, (X_0, g_0)\big) = (X_0, g_0)\,.$$

Ustalmy warunek początkowy $(X_0, g_0) := (X, e)$ dla $t_0 := 0$. Rzutując powyższe równanie na drugą składową (tj. na G), w której odbywa się nietrywialna ewolucja, otrzymujemy równość

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\mathrm{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}\big(t; 0, (X, e)\big) &= \mathrm{pr}_2 \circ \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\Phi_{\mathcal{V}}\big(t; 0, (X, e)\big) = \mathrm{pr}_2 \circ \mathcal{V}\big(\Phi_{\mathcal{V}}\big(t; 0, (X, e)\big)\big) \\
&= L_{\mathrm{pr}_1 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e))}\big(\mathrm{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}\big(t; 0, (X, e)\big)\big) \\
&= L_X\big(\mathrm{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}\big(t; 0, (X, e)\big)\big)\,,
\end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika wprost z konstrukcji $\mathcal{V}$ (w swej pierwszej składowej warunek początkowy pozostaje niezmienny wobec trywialności tejże składowej pola $\mathcal{V}$). Otrzymana równość pozwala zidentyfikować $\mathrm{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(\cdot; 0, (X, e))$ jako (jedyną) krzywą całkową pola L_X wychodzącą z punktu $g_0 = e$, czyli

$$\mathrm{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(\cdot; 0, (X, e)) = \lambda_X(\cdot)\,,$$

co stanowi właśnie zapowiedzianą wcześniej reinterpretację tejże krzywej całkowej pola L_X. $\square$

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Stw. 9. Odwzorowanie

$$\exp \equiv \exp^{\mathrm{G}} := \lambda_{\cdot}(1) \;:\; \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{G}$$

określamy mianem **odwzorowania eksponencjalnego na** G.

CDN.

Dodatek A. Odzworowania

Niechaj $X_A, Y_A,\ A \in \{1, 2\}$ będą zbiorami, $f_A \;:\; X_A \longrightarrow Y_A$ zaś – odwzorowaniami. Definiujemy wówczas **produkt** odwzorowań f_A jako odwzorowanie

$$f_1 \times f_2 \;:\; X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2 \;:\; (x_1, x_2) \longmapsto \big(f_1(x_1), f_2(x_2)\big)\,.$$

Mając do dyspozycji zbiory X, Z_1, Z_2 i parę odwzorowań $F_\alpha \;:\; X \longrightarrow Z_\alpha,\ \alpha \in \{1, 2\}$, definiujemy także odwzorowanie

$$(F_1, F_2) \;:\; X \longrightarrow Z_1 \times Z_2 \;:\; x \longmapsto \big(F_1(x), F_2(x)\big)\,.$$

Relację pomiędzy tymi dwoma typami odwzorowań ustalmy wprowadzając odwzorowanie

$$\Delta \;:\; X \longrightarrow X \times X \;:\; x \longmapsto (x, x)\,,$$

wkładające zbiór X w jego kwadrat kartezjański w postaci jego przekątnej. Przy jego pomocy możemy zapisać tożsamość

$$(F_1, F_2) = (F_1 \times F_2) \circ \Delta\,.$$

Jest oczywiste, że ilekroć wszystkie zbiory objęte definicjami są wyposażone w strukturę rozmaitości różniczkowalnej klasy C^∞, względem której odnośne odwzorowania są gładkie, własność ta jest dziedziczona przez $f_1 \times f_2$ i (F_1, F_2).