# W $15\frac{1}{2}$ STRONY OD TEORII GRUP DO TEORII KATEGORII
## (MAWF '23/24 1.I & 1.II [RRS])

Fig. 1. Saunders Mac Lane (l.), Samuel Eilenberg (śr.), Nobuo Yoneda (p.).

Spis treści



Każda Opowieść potrzebuje języka, którego użycie jest obwarowane zasadami uzgodnionego systemu formalnego. Język w swej najbardziej elementarnej funkcji *reprezentuje* przedmiot komunikacji, ale też – wtórnie – *strukturyzuje* i *kierunkuje* sam proces ustalania z nim relacji poznawczej u uczestników aktu komunikacji poprzez narzucenie swoistego zbioru form reprezentacji i zależności między nimi; odzwierciedla nasz sposób myślenia o Rzeczy, ale – gdy już raz zostanie przyjęty – zarazem je porządkuje i kontekstualizuje, przygotowując podłoże pod abstrakcję i uogólnienie wedle obecnych w nim schematów. Językiem naszej Opowieści będzie – obok języków algebry i geometrii, znanych Czytelnikowi najpewniej z innych kursów – język teorii kategorii, zasadniczo reprezentujący obiekty rozważań i komunikacji *relacyjnie* w obrębie klas wszystkich obiektów o interesujących właściwościach i tym samym ustanawiający naturalny poziom *rozdzielczości* rozważań: „z dokładnością do nierozróżnialności w klasie, kodowanej przez (przenoszącą własności) relację wzajem jednoznaczną". Podejście to należy odróżnić od tego, uświęconego wielowiekową tradycją, w którym ograniczamy się do opisu (wszech-)rzeczy w terminach zbiorów, traktowanych jako pojęcia podstawowe, więc niedefiniowalne, i – co kluczowe – ich *elementów*. To ostatnie szybko zaczyna pożerać swój własny ogon w konsekwencji przyjętej aksjomatyki (patrz, np., tzw. paradoks Cantora[1]), a zarazem nie niesie żadnej informacji swoistej, której nie dałoby się wpisać w schemat relacyjny – w rzeczy samej, elementy zbioru $S$ bez trudu reprezentujemy jako odwzorowania

[1]Spróbujmy skonstruować „zbiór wszystkich zbiorów", tak by móc mówić o zbiorach *en bloc*. Wykorzystując jedynie elementarne narzędzia, w jakie wyposaża nas aksjomatyka teorii mnogości, natychmiast wpadamy w pułapkę antynomii: Gdyby zbiór takowy istniał, to wówczas istniałaby także – jako zbiór – suma rozłączna wszystkich zbiorów, w którą każdy z nich byłby włożony kanonicznie. A skoro istniałaby takowa suma, to istniałby także jej zbiór potęgowy, w który byłaby ona – na mocy Tw. Cantora – włożona w sposób *właściwy*. Stwierdzilibyśmy przeto,

$\{\bullet\} \longrightarrow S$ z wybranego dowolnie zbioru jednoelementowego $\{\bullet\}$ (singletonu). Stwierdzamy więc, że paradygmat kategorialny, czyli relacyjny, jest po prostu skromniej wewnętrznie ograniczonym logicznie i w tym sensie bardziej ogólnym „schematem upakowania" informacji o rozważanych przez nas obiektach.

Obiekty wyreprezentowane w ujęciu kategoryjnym poddają się łacno *realizacji* w innych klasach, w oderwaniu od swej „anatomii", tj. struktury *wewnętrznej* (jak np. rozkład punktów w rozmaitości), pozostającej nierzadko – w mniejszym lub większym stopniu – poza pożądanym zakresem rozdzielczości poznawczej. W kolejnym kroku abstrakcji możemy następnie badać relacje pomiędzy realizacjami przenoszące własność „bycia realizacją klasy referencyjnej" pomiędzy podklasami przez owe realizacje tworzonymi *etc.*, dokonując tym samym mozolnej transkrypcji informacji o przedmiotach poznania w hierarchiach *relacji*, pierwotnych i wtórnych, których piętra określają osobne wybory „rozdzielczości". Transport bytów relacyjnych poprzez ich realizację wydatnie poszerza nasze możliwości wnioskowania dając nam do ręki narzędzia formalne z kontekstów odległych w wymiarze „anatomicznym", ale przede wszystkim pozwala – bywa[2] – oddzielić *istotę* zagadnienia od istoty tej „anatomicznej" *konkretyzacji*. Złożoność tej drugiej potrafi przesłonić prostotę pierwszej, skazując badacza na niekończące się zmagania natury technicznej, walkę z formatem opisu „anatomicznego" lub o taki opis, niejako *obok* przedmiotu dociekań.

Użyte powyżej słowa kluczowe: relacje przenoszące własności, realizacje, relacje pomiędzy realizacjami przenoszące własność „bycia realizacją"... przywodzą na myśl naturalne skojarzenia z *symetriami* zbiorów (zazwyczaj obdarzonych dodatkową strukturą, więc „anatomią", która jest przez te symetrie zachowywana), modelowanymi na strukturze i działaniu *grup*, a dalej – grup tych reprezentacji i splataczy reprezentacji. Te skojarzenia wytyczają najbardziej bodaj naturalną drogę dojścia od pojęć klasycznej teorii zbiorów i algebry oraz intuicji z nich wywiedzionych ku algebrze wyższej osadzonej w paradygmacie teoriokategorialnym. Poniżej podejmujemy próbę ostrożnego, lecz zarazem energicznego przeprowadzenia Czytelnika po tej ścieżce ku teorii kategorii. Żywimy przy tym nadzieję, że ta ostatnia stanie się z czasem dla Czytelnika czymś „więcej" niż formalny metajęzyk (wykładu), a mianowicie: precyzyjnym narzędziem i metronomem, a z czasem wręcz substratem ścisłego myślenia.

## 1. O grupach, trochę inaczej niż zwykle

Zaczniemy od przeformułowania opisu pojęcia grupy. Oto w sposób nieco sztuczny przedstawimy grupę $\mathrm{G}$ jako zbiór bijekcji singletonu (zbioru jednoelementowego) $\{\bullet\}$ „udekorowanych" elementami grupy $g \in \mathrm{G}$. Taką oczywistą nadmiarowości w zbiorze odwzorowań singletonu w siebie możemy traktować jako sposób na zapisanie informacji o ukrytej wewnętrznej strukturze *obiektu* $\bullet$, której nie określamy w żaden inny (bezpośredni) sposób. W tym obrazku $\mathrm{G}$ stanowi (albo indeksuje) kompletny zbiór odwzorowań uzgodnionych z ukrytą strukturą obiektu $\bullet$, tj. strukturę tę respektujących (i w tym sensie „zachowujących" obiekt $\bullet$), więc *dozwolonych* z punktu widzenia naszych rozważań. Istnienie operacji binarnej na $\mathrm{G}$ możemy zrozumieć jako prawo orzekające, że superpozycja odwzorowań dozwolonych jest także odwzorowaniem dozwolonym, a łączność operacji binarnej tłumaczy się na łączność tejże dobrze określonej superpozycji. Pośród odwzorowań dozwolonych istnieje jedno odwzorowanie wyróżnione, które odpowiada trywialnej bijekcji obiektu $\bullet$ i z tej przyczyny nie zmienia żadnego innego odwzorowania dozwolonego po przyłożeniu go przed tym odwzorowaniem lub po nim – tym odwzorowaniem jest bijekcja indeksowana elementem neutralnym $e \in \mathrm{G}$. Wreszcie też każdemu odwzorowaniu odpowiada odwzorowanie *odwrotne*, tj. takie, którego superpozycja z wyjściowym daje poprzednio omówione odwzorowanie trywialne. Jego istnienie zapewnia operacja unarna $\mathrm{Inv} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}$.

Z naszej dotychczasowej dyskusji wyłania się już pewna (z konieczności dość banalna w swej zawartości) struktura, dostarczająca równoważnego przeformułowania opisu grupy, które poddaje się

że wyjściowy „zbiór wszystkich zbiorów" nie zawiera zbioru izomorficznego (tj. w bijekcji) z tym ostatnim, który wszak miałby być zbiorem, tym bardziej przeto nie zawiera jego samego...

[2]Dobrym przykładem jest tutaj koncepcja funktora kwantowania pochodząca od Segala, a rozwijana przez Atiyaha, Wittena, Turaeva, Reshetikhina, Fröhlicha i wielu, wielu innych.

dalekosiężnemu uogólnieniu. Strukturę tę będziemy oznaczać symbolem $\widetilde{\mathrm{G}}$ dla podkreślenia jej intymnego związku (lecz nie tożsamości) z $\mathrm{G}$. Mamy więc do czynienia z dwoma zbiorami: **zbiorem obiektów** $\mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathrm{G}} \equiv \{\bullet\}$ i zbiorem dozwolonych odwzorowań między nimi, który będziemy określać mianem **zbioru morfizmów** $\mathrm{Mor}\,\widetilde{\mathrm{G}} \cong \mathrm{G}$ i przedstawiać jako zbiór strzałek „udekorowanych" elementami grupy,

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above, "g"] \end{tikzcd}$$

Każde z odwzorowań ma swoją dziedzinę, z której wychodzi stowarzyszona z nim strzałka i którą w dalszej części wywodu będziemy nazywać **początkiem morfizmu**,

$$s \;:\; \mathrm{Mor}\,\widetilde{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathrm{G}} \;:\; \xleftarrow{\;g\;} \;\longmapsto \bullet\,,$$

oraz przeciwdziedzinę, do której strzałka sięga i którą będziemy nazywać **końcem morfizmu**,

$$t \;:\; \mathrm{Mor}\,\widetilde{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathrm{G}} \;:\; \xleftarrow{\;g\;} \;\longmapsto \bullet\,.$$

Na zbiorze $\mathrm{Mor}\,\widetilde{\mathrm{G}}_s\times_t \mathrm{Mor}\,\widetilde{\mathrm{G}}$ par strzałek składalnych, tj. takich, u których koniec poprzednika pokrywa się z początkiem następnika (w naszym przypadku są to wszystkie strzałki), określona jest łączna operacja **złożenia** (**superpozycji**)

$$\circ \;:\; \mathrm{Mor}\,\widetilde{\mathrm{G}}_s\times_t \mathrm{Mor}\,\widetilde{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\widetilde{\mathrm{G}} \;:\; \Big(\xleftarrow{\;h\;}\,,\,\xleftarrow{\;g\;}\Big) \longmapsto \xleftarrow{\;h\cdot g\;}$$

o oczywistych (u nas wręcz trywialnych) własnościach

$$s\Big(\xleftarrow{\;h\;} \circ \xleftarrow{\;g\;}\Big) = s\Big(\xleftarrow{\;g\;}\Big)\,, \qquad\qquad t\Big(\xleftarrow{\;h\;} \circ \xleftarrow{\;g\;}\Big) = t\Big(\xleftarrow{\;h\;}\Big)\,.$$

Na zbiorze obiektów określamy odwzorowanie

$$\mathrm{Id.} \;:\; \mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\widetilde{\mathrm{G}} \;:\; \bullet \longmapsto \xleftarrow{\;e\;}\,,$$

które przypisuje obiektowi **morfizm identycznościowy** o własnościach

$$s \circ \mathrm{Id.} = \mathrm{id}_{\mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathrm{G}}} = t \circ \mathrm{Id.}\,,$$

$$\xleftarrow{\;g\;} \circ \mathrm{Id}_{s(\xleftarrow{\;g\;})} = \xleftarrow{\;g\;} = \mathrm{Id}_{t(\xleftarrow{\;g\;})} \circ \xleftarrow{\;g\;}\,.$$

Odwracalność wszystkich morfizmów (strzałek) jest równoznaczna z istnieniem odwzorowania

$$\mathrm{Inv} \;:\; \mathrm{Mor}\,\widetilde{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\widetilde{\mathrm{G}} \;:\; \xleftarrow{\;g\;} \;\longmapsto\; \xrightarrow{\;g\;} \;\equiv\; \xleftarrow{\;g^{-1}\;}$$

o własnościach

$$s \circ \mathrm{Inv} = t\,, \qquad\qquad t \circ \mathrm{Inv} = s\,,$$

$$\xleftarrow{\;g\;} \circ \mathrm{Inv}\Big(\xleftarrow{\;g\;}\Big) = \mathrm{Id}_{t(\xleftarrow{\;g\;})}\,,$$

$$\mathrm{Inv}\Big(\xleftarrow{\;g\;}\Big) \circ \xleftarrow{\;g\;} = \mathrm{Id}_{s(\xleftarrow{\;g\;})}\,.$$

Zanim przejdziemy do dyskusji realizacji grupy, zaadaptujemy nowy formalizm do opisu struktury nieco mniej sztywnej niż rozpatrywana dotąd struktura grupy, a mianowicie: monoidu $\mathbf{Map}(X,X)$ odwzorowań (ustalonego) zbioru $X$ w siebie. Struktura ta doskonale, a przy tym całkowicie naturalnie ilustruje ideę modelowania wewnętrznej struktury obiektu (jakim w tym przypadku jest sam zbiór $X$) w mnogości dozwolonych morfizmów. Mamy tu zatem do czynienia z jednoelementowym zbiorem obiektów

$$\mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathbf{Map}(X,X)} = \{X\}\,,$$

zbiorem morfizmów zaś – w pełnej analogii do sytuacji wcześniejszej – jest zbiór strzałek udekorowanych odwzorowaniami $f \in \mathbf{Map}(X,X)$. Reszta dyskusji przebiega analogicznie jak w przypadku grupy $\widetilde{\mathrm{G}}$, z tą wszelako istotną różnicą, że tym razem opuszczamy wymóg odwracalności morfizmów.

Dokonawszy powyższej – może nieco dziwacznej na pierwszy rzut oka, ale też – jak się okaże – nader pożytecznej – formalizacji struktury grupy i wyróżnionego monoidu $\mathbf{Map}(X,X)$, możemy poddać analogicznemu zabiegowi strukturę realizacji $R$ (tj. działania, o którym zakładamy dodatkowo, że jest *lewe*, czyli jest homomorfizmem grup $R : \mathrm{G} \longrightarrow \mathfrak{S}_X$) grupy $\mathrm{G}$ na zbiorze $X$. Realizacja taka jest też oczywiście homomorfizmem monoidu definiowanego przez $\mathrm{G}$ (poprzez „zapomnienie" o odwracalności wszystkich elementów) w monoid[3] $\mathbf{Map}(X, X)$.

W wypracowanym wcześniej języku, stwierdzamy więc istnienie odwzorowania o **składowych**: **obiektowej**

$$R \;:\; \mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathbf{Map}(X,X)} \;:\; \bullet \longmapsto X$$

i **morfizmowej** (zwyczajowo oznaczanej tym samym symbolem)

$$R \;:\; \mathrm{Mor}\,\widetilde{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\widetilde{\mathbf{Map}(X,X)} \;:\; \xleftarrow{\;g\;} \;\longmapsto\; \xleftarrow{\;R(g)\;}$$

o własnościach (zapisanych w konwencji zgodnej z tym zwyczajem)

$$s^{\widetilde{\mathbf{Map}(X,X)}} \circ R = R \circ s^{\widetilde{\mathrm{G}}}\,, \qquad\qquad t^{\widetilde{\mathbf{Map}(X,X)}} \circ R = R \circ t^{\widetilde{\mathrm{G}}}$$

oraz

$$R\big(\xleftarrow{\;h\;} \circ_{\widetilde{\mathrm{G}}} \xleftarrow{\;g\;}\big) = R\big(\xleftarrow{\;h\;}\big) \circ_{\widetilde{\mathbf{Map}(X,X)}} R\big(\xleftarrow{\;g\;}\big)\,,$$

$$R \circ \mathrm{Id}^{\widetilde{\mathrm{G}}}_{\cdot} = \mathrm{Id}^{\widetilde{\mathbf{Map}(X,X)}}_{\cdot} \circ R\,.$$

Na najniższym szczeblu hierarchii struktur algebraicznych stowarzyszonych z pojęciem grupy i jej działania na wybranym zbiorze znajdujemy odwzorowania $\widetilde{\mathrm{G}}$-ekwiwariantne splatające realizacje $R_1$ i $R_2$, które w rozbudowanym tu formalizmie możemy (znów w sposób nieco nadmiarowy) przedstawić jako indeksowane przez zbiór $\mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathrm{G}}$ rodziny morfizmów

$$\eta_{\cdot} \;:\; \mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\widetilde{\mathbf{Map}(X,X)} \;:\; \bullet \longmapsto \eta_\bullet$$

o **składowych** (tutaj w liczbie 1)

$$\eta_\bullet \;:\; R_1(\bullet) \to R_2(\bullet)\,,$$

na które został nałożony definiujący warunek $\widetilde{\mathrm{G}}$-ekwiwariantności

$$\forall_{\xleftarrow{\;g\;} \in \mathrm{Mor}\,\widetilde{\mathrm{G}}} \;:\; \eta_{t(\xleftarrow{\;g\;})} \circ R_1\big(\xleftarrow{\;g\;}\big) = R_2\big(\xleftarrow{\;g\;}\big) \circ \eta_{s(\xleftarrow{\;g\;})}\,.$$

Sformułowany przez nas schemat opisu struktur grupy i zbioru z jej działaniem poddaje się następującym istotnym i przez to interesującym ogólnieniom:

- Dopuszczenie dowolnej liczby obiektów we wcześniejszym opisie grupy (co prowadzi do wyodrębnienia podzbioru właściwego par morfizmów składalnych w kwadracie kartezjańskim zbioru morfizmów) przy zachowaniu odwracalności wszystkich morfizmów daje **grupoid**.
- Rezygnacja z odwracalności morfizmów prowadzi do ogólnej **małej kategorii**.
- Jeśli dodatkowo dopuścić tę ewentualność, że obiekty lub morfizmy nie tworzą zbioru, lecz klasę właściwą (tj. mnogość nie będącą zbiorem a określaną przez wspólną cechę elementów, jak np. klasa wszystkich zbiorów określana przez cechę „bycie zbiorem"), to mamy do czynienia także z **dużymi kategoriami**, przy czym wyróżniamy takie, u których klasy morfizmów są zbiorami, nazywając je **lokalnie małymi**.

Mamy zatem

**Definicja 1. Kategorię** $\mathcal{C}$ tworzą następujące klasy[4]:

- **klasa obiektów** $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$,

[3] Obraz $\mathrm{G}$ leży w grupie symetrycznej $\mathfrak{S}_X$, jednak to uściślenie pozbawiłoby nasze rozumowanie nieodzownej ogólności.

[4] **Klasa** to wszystkie obiekty (np. zbiory) uwspólniające ustaloną cechę definiującą (np. "bycie zbiorem"). Pojęcie to stanowi takie uogólnienie pojęcia zbioru, które pozwala mówić o mnogości obiektów określonego typu bez popadania w antynomię, jak to ma miejsce choćby w przypadku próby opisania mnogości wszystkich zbiorów przy użyciu pojęcia zbioru (więc także obiektu definiowanej tym sposobem mnogości) – patrz: przypis na str. 1.

- **klasa morfizmów** $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$, której elementy zwiemy **morfizmami**, przy czym dla dowolnych $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ klasę morfizmów z $A$ do $B$ oznaczamy symbolami $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \equiv \mathcal{C}(A,B)$,

na których określone są następujące odwzorowania:

- **początek morfizmu** $s : \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ i **koniec morfizmu** $t : \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, przy czym
$$\forall_{A,B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}\ \forall_{f \in \mathcal{C}(A,B)}\ :\ (s,t)(f) = (A,B)\,,$$
- **identyczność** $\mathrm{id.} : \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} : A \longmapsto \mathcal{C}(A,A)$,
- **złożenie morfizmów**
$$\circ_{\mathcal{C}} \quad : \quad \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}\,{}_s\!\times_t \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \equiv \{\ (f,g) \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}^{\times 2} \quad | \quad s(f) = t(g)\ \} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$$
$$\quad : \quad (f,g) \longmapsto f \circ_{\mathcal{C}} g \in \mathcal{C}(s(g), t(f))$$

spełniające warunki:
$$\forall_{A,B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}\ \forall_{(f,g) \in \mathcal{C}(A,B) \times \mathcal{C}(B,A)}\ :\ \big(\ f \circ_{\mathcal{C}} \mathrm{id}_A = f \quad \wedge \quad \mathrm{id}_A \circ_{\mathcal{C}} g = g\ \big)\,,$$
$$\forall_{(f,g,h) \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}\,{}_s\!\times_t \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}\,{}_s\!\times_t \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}}\ :\ (f \circ_{\mathcal{C}} g) \circ_{\mathcal{C}} h = f \circ_{\mathcal{C}} (g \circ_{\mathcal{C}} h)\,.$$

Ilekroć klasa $\mathcal{C}(A,B)$ jest zbiorem dla każdej pary $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, kategorię $\mathcal{C}$ nazywamy **lokalnie małą**. Jeśli natomiast zarówno $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, jak i $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ są zbiorami, $\mathcal{C}$ określamy mianem **małej kategorii**. Mała kategoria, w której każdy morfizm jest odwracalny, nosi przydomek **grupoidu**. Kategorię, która nie jest mała, nazywamy **wielką**.

Dowolna kategoria $\mathcal{C}$ wyznacza **kategorię przeciwną** $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ o tych samych klasach obiektów, $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, i morfizmów, $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} = \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$, lecz odwrotnym porządku składania tych ostatnich, tj. $f \circ_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}} g = g \circ_{\mathcal{C}} f$.

**Podkategoria** $\mathcal{S}$ kategorii $\mathcal{C}$ jest utworzona przez

- podklasę $\mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$ klasy obiektów $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$;
- podklasę $\mathrm{Mor}\,\mathcal{S}$ klasy morfizmów $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$, przy czym dla dowolnych obiektów $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$ klasę morfizmów z $A$ do $B$ w $\mathrm{Mor}\,\mathcal{S}$ oznaczamy symbolami $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(A,B) \equiv \mathcal{S}(A,B)$,

które spełniają następujące warunki:

- $\forall_{A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}}\ :\ \mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{S}$;
- $\forall_{f \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{S}}\ :\ s(f), t(f) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$;
- $\forall_{(f,g) \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{S}\,{}_s\!\times_t \mathrm{Mor}\,\mathcal{S}}\ :\ f \circ_{\mathcal{C}} g \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{S}$.

Tym samym $\mathcal{S}$ jest kategorią. Podkategorię $\mathcal{S}$ kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy **pełną**, ilekroć dla dowolnych obiektów $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$ zachodzi równość
$$\mathcal{S}(A,B) = \mathcal{C}(A,B)\,.$$

W szczególności **podgrupoid** grupoidu $\mathcal{G}$ to dowolna jego podkategoria sama będąca grupoidem.

**Przykłady 1.** (Kategorie)

(1) Zbiory wraz z odwzorowaniami między nimi (dla których złożeniem jest superpozycja odwzorowań) tworzą wielką kategorię **Set**.

(2) Struktury algebraiczne określonego typu tworzą kategorie wraz z odnośnymi homomorfizmami jako morfizmami. Mamy więc kategorie **Grp** (grupy), **AbGrp** (grup przemiennych), **Ring** (pierścieni), **AbRing** (pierścieni przemiennych), **Field** (ciał), $\mathbf{Mod}_R$ (lewych modułów nad pierścieniem $R$), $\mathbf{Mod}_{R^{\mathrm{opp}}}$ (prawych modułów nad pierścieniem $R$), $\mathbf{Mod}_{(R_1, R_2^{\mathrm{opp}})}$ ($(R_1, R_2^{\mathrm{opp}})$-bimodułów nad parą pierścieni $(R_1, R_2)$), $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ (przestrzeni wektorowych nad ciałem $\mathbb{K}$), $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{(<\infty)}$ (skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych nad ciałem $\mathbb{K}$), $\square\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ (przestrzeni kwadratowych nad ciałem $\mathbb{K}$), $\mathbf{Alg}_R$ (algebr nad pierścieniem przemiennym $R$), $\mathbf{uAlg}_R$ (unitalnych algebr nad pierścieniem przemiennym $R$), $\mathbf{AssAlg}_R$ (algebr przemiennych nad pierścieniem przemiennym $R$) *etc.*

(3) Graf skierowany kanonicznie określa małą kategorię, której obiektami są wierzchołki grafu, morfizmami zaś – ścieżki w grafie (ich konkatenacja jest złożeniem morfizmów).
(4) Grupa kanonicznie określa małą kategorię o jednoelementowym zbiorze obiektów (dowolny singleton) i zbiorze morfizmów tożsamym z grupą (w szczególności wszystkie morfizmy są odwracalne).
(5) Dowolny zbiór $S$ określa następujące trzy (małe) kategorie:
  - kategorię $\widetilde{S}$ (nierzadko oznaczaną tym samym symbolem $S$ co zbiór) o zbiorze obiektów $S$ i zbiorach morfizmów (jedynych niepustych) $\widetilde{S}(x,x) = \{x \to x \equiv \mathrm{Id}_x^{\widetilde{S}}\},\ x \in S$ – kategorię tę nazwiemy **kategorią zbioru** $S$;
  - kategorię $\hat{S}$ o zbiorze obiektów $\mathrm{Ob}\,\hat{S} \coloneqq S \cup \{\bullet\}$, w którym singleton $\{\bullet\}$ jest jedynym obiektem inicjalnym, oraz o jednoelementowych zbiorach morfizmów (jedynych niepustych) $\hat{S}(\bullet, s) = \{\bullet \to s\},\ s \in S$ i $\hat{S}(x,x) = \{x \to x\},\ x \in S \cup \{\bullet\}$ – kategorię tę nazwiemy **rozpięciem** $S$;
  - kategorię $\check{S}$ o zbiorze obiektów $\mathrm{Ob}\,\check{S} \coloneqq S \cup \{\bullet\}$, w którym singleton $\{\bullet\}$ jest jedynym obiektem terminalnym, oraz o jednoelementowych zbiorach morfizmów (jedynych niepustych) $\check{S}(s, \bullet) = \{s \to \bullet\},\ s \in S$ i $\check{S}(x,x) = \{x \to x\},\ x \in S \cup \{\bullet\}$ – kategorię tę nazwiemy **korozpięciem** $S$.

  Powyżej morfizmy są dowolnymi singletonami, które dla przejrzystości oznaczyliśmy symbolami ich początku i końca. Obie kategorie występują jako modele diagramów używanych w konstrukcjach uniwersalnych.

- Odwzorowanie między kategoriami spełniające warunki wypisane dla realizacji grupy to **funktor kowariantny** $F : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$.

Jest przeto

**Definicja 2. Funktor kowariantny** z kategorii $\mathcal{C}_1$ w kategorię $\mathcal{C}_2$ to odwzorowanie o składowych, zwyczajowo oznaczanych tym samym symbolem,
- obiektowej $F : \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_2$,
- morfizmowej $F : \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}_2$ ,

które spełniają następujące warunki:
- $s \circ F\restriction_{\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}_1} = F \circ s$ oraz $t \circ F\restriction_{\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}_1} = F \circ t$, czyli
$$\forall_{A,B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1}\ \forall_{f \in \mathcal{C}_1(A,B)}\ :\ F(f) \in \mathcal{C}_2(F(A), F(B))\,,$$
- $\mathrm{id} \circ F\restriction_{\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1} = F \circ \mathrm{id}$, czyli
$$\forall_{A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1}\ :\ F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}\,,$$
- $\circ_{\mathcal{C}} \circ (F\restriction_{\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}_1} \times F\restriction_{\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}_1}) = F \circ \circ_{\mathcal{C}}$, czyli
$$\forall_{(f,g) \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}_1\, {}_s\!\times_t \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}_1}\ :\ F(f \circ_{\mathcal{C}_1} g) = F(f) \circ_{\mathcal{C}_2} F(g)\,.$$

W kontekście konstrukcji uniwersalnych funktor $F : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ określamy często mianem **diagramu w kategorii $\mathcal{C}_2$ modelowanego na kategorii $\mathcal{C}_1$**. W szczególności **morfizm grupoidów** pomiędzy dwoma grupoidami $\mathcal{G}_\alpha,\ \alpha \in \{1,2\}$ to funktor kowariantny między odnośnymi kategoriami.

**Funktor kontrawariantny** z kategorii $\mathcal{C}_1$ w kategorię $\mathcal{C}_2$ to odwzorowanie o składowych, oznaczanych jak wyżej,
- obiektowej $F : \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_2$,
- morfizmowej $F : \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}_2$ ,

które spełniają następujące warunki:
- $s \circ F\restriction_{\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}_1} = F \circ t$ oraz $t \circ F\restriction_{\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}_1} = F \circ s$, czyli
$$\forall_{A,B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1}\ \forall_{f \in \mathcal{C}_1(A,B)}\ :\ F(f) \in \mathcal{C}_2(F(B), F(A))\,,$$
- $\mathrm{id} \circ F\restriction_{\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1} = F \circ \mathrm{id}$, czyli
$$\forall_{A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1}\ :\ F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}\,,$$

- $\circ_{\mathcal{C}} \circ \tau \circ (F\restriction_{\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}_1} \times F\restriction_{\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}_1}) = F \circ \circ_{\mathcal{C}}$, gdzie $\tau$ jest transpozycją, czyli
$$\forall_{(f,g)\in\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}_1\,{}_s\!\times_t\,\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}_1}\ :\ F(f \circ_{\mathcal{C}_1} g) = F(g) \circ_{\mathcal{C}_2} F(f)\,.$$

Funktor $F\ :\ \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ nazywamy

- **istotnie surjektywnym** (lub **gęstym**) jeśli każdy obiekt kategorii $\mathcal{C}_2$ jest izomorficzny z pewnym obiektem w obrazie funktora $F$, tj. jeśli spełniony jest warunek

$$\forall_{X\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_2}\ \exists_{A\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1}\ \exists_{f\in\mathcal{C}_2(X,F(A))}\ \exists_{f^{-1}\in\mathcal{C}_2(F(A),X)}\ :\ \left(\ f^{-1} \circ_{\mathcal{C}_2} f = \mathrm{id}_X \quad \wedge \quad f \circ_{\mathcal{C}_2} f^{-1} = \mathrm{id}_{F(A)}\ \right);$$

- **pełnym**, jeśli spełniony jest warunek
$$\forall_{A,B\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1}\ \forall_{f\in\mathcal{C}_2(F(A),F(B))}\ \exists_{g\in\mathcal{C}_1(A,B)}\ :\ f = F(g)$$
(w przypadku funktora kowariantnego) albo warunek
$$\forall_{A,B\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1}\ \forall_{f\in\mathcal{C}_2(F(A),F(B))}\ \exists_{g\in\mathcal{C}_1(B,A)}\ :\ f = F(g)$$
(w przypadku funktora kontrawariantnego);
- **wiernym**, jeśli spełniony jest warunek
$$\forall_{A,B\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1}\ \forall_{f,g\in\mathcal{C}_1(A,B)}\ :\ \left(\ F(f) = F(g) \quad \Longleftrightarrow \quad f = g\ \right);$$
- **w pełni wiernym**, jeśli jest pełny i wierny.

**Superpozycja funktorów** to zwykła superpozycja ich składowych: obiektowej i morfizmowej, którą oznaczamy standardowym symbolem $\circ$, tj. dla pary funktorów $F_\alpha\ :\ \mathcal{C}_\alpha \longrightarrow \mathcal{C}_{\alpha+1},\ \alpha \in \{1,2\}$ między kategoriami $\mathcal{C}_\beta,\ \beta \in \{1,2,3\}$ zapisujemy
$$F_2 \circ F_1\ :\ \mathcal{C}_1 \xrightarrow{F_1} \mathcal{C}_2 \xrightarrow{F_2} \mathcal{C}_3\,.$$

**Przykłady 2.** (Funktory)

(1) **Funktor identycznościowy** $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\ :\ \mathcal{C}\ \circlearrowleft$ o składowej obiektowej $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\ :\ \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}\ \circlearrowleft\ :\ A \longmapsto A$ i morfizmowej $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\ :\ \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}\ \circlearrowleft : f \longmapsto f$.

(2) **Funktor stały** $X\ :\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, zwany też **stałą**, określony przez obiekt $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, o składowej obiektowej $X\ :\ \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathcal{D} : A \longmapsto X$ i morfizmowej $X\ :\ \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathcal{D}\ :\ f \longmapsto \mathrm{id}_X$.

(3) Reprezentacja $R\ :\ G \longrightarrow \mathrm{GL}(V;\mathbb{K})$ grupy $G \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Grp}$ na przestrzeni wektorowej $V \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ nad ciałem $\mathbb{K}$ określa funktor kowariantny.

(4) Dualność modułów nad pierścieniem przemiennym $R$ określa (endo)funktor kontrawariantny ${}^*\ :\ \mathbf{Mod}_R\ \circlearrowleft$ o składowej obiektowej ${}^*\ :\ \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_R\ \circlearrowleft\ :\ G \longmapsto G^*$ i morfizmowej ${}^*\ :\ \mathrm{Mor}\,\mathbf{Mod}_R\ \circlearrowleft\ :\ \chi \longmapsto \chi^*$, gdzie dla dowolnego $\chi \in \mathrm{Hom}_R(G_1, G_2)$ jest $\chi^*\ :\ G_2^* \longrightarrow G_1^*\ :\ \varphi \longmapsto \varphi \circ \chi$.

(5) Konstrukcja zbioru potęgowego określa (endo)funktor kowariantny $2^{\cdot} : \mathbf{Set}\ \circlearrowleft$, o składowej obiektowej $2^{\cdot} : \mathrm{Ob}\,\mathbf{Set}\ \circlearrowleft : X \longmapsto 2^X$ i morfizmowej $2^{\cdot} : \mathrm{Mor}\,\mathbf{Set}\ \circlearrowleft : (\ X \xrightarrow{f} Y\ ) \longmapsto (\ 2^X \ni O \longmapsto f(O) \in 2^Y\ )$.

(6) Szczególnie ważnymi przykładami funktorów są **funktory** $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ dla ustalonej lokalnie małej kategorii $\mathcal{C}$: **kowariantny**
$$\mathcal{C}(X,\cdot)\ :\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}\,,$$
określony dla dowolnego $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, o składowej obiektowej
$$\mathcal{C}(X,\cdot)\ :\ \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathbf{Set}\ :\ Y \longmapsto \mathcal{C}(X,Y)$$
i morfizmowej
$$\begin{aligned}\mathcal{C}(X,\cdot)\quad &:\quad \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathbf{Set}\\ &:\quad \left(\ Y \xrightarrow{\chi} Z\ \right) \longmapsto \left(\ \mathcal{C}(X,Y) \xrightarrow{\chi\circ} \mathcal{C}(X,Z)\ \right),\end{aligned}$$
oraz **kontrawariantny**
$$\mathcal{C}(\cdot,X)\ :\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}\,,$$

określony analogicznie jak wyżej, o składowej obiektowej

$$\mathcal{C}(\cdot, X)\ :\ \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathbf{Set}\ :\ Y \longmapsto \mathcal{C}(Y, X)$$

i morfizmowej

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\cdot, X)\quad &:\quad \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathbf{Set} \\ &:\quad \big(\ Y \xrightarrow{\ \chi\ } Z\ \big) \longmapsto \big(\ \mathcal{C}(Z, X) \xrightarrow{\ \circ\chi\ } \mathcal{C}(Y, X)\ \big)\,. \end{aligned}$$

- Wreszcie też rodzinę odwzorowań w rodzaju tych przypisanych splataczowi realizacji $R_1$ i $R_2$ nazywamy **transformacją naturalną**.

Stosowna formalna (i kompletna)

**Definicja 3.** **Transformacja naturalna** między funktorami kowariantnymi $F_1, F_2\ :\ \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ to rodzina morfizmów $\eta_\cdot\ :\ \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}_2\ :\ A \longmapsto \eta_A$ o własności wyrażonej przez diagramy przemienne

(1)
$$\forall_{\substack{A,B\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1 \\ f\in\mathcal{C}_1(A,B)}}\ :\quad \begin{tikzcd} F_1(A) \arrow[r, "F_1(f)"] \arrow[d, "\eta_A"'] & F_1(B) \arrow[d, "\eta_B"] \\ F_2(A) \arrow[r, "F_2(f)"'] & F_2(B) \end{tikzcd}\ .$$

Transformację naturalną będziemy (najczęściej) zapisywać symbolicznie w postaci $\eta_\cdot\ :\ F_1 \Longrightarrow F_2$ lub

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_1 \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "F_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta_\cdot"] & \mathcal{C}_2 \end{tikzcd}$$

Jedyna różnica w definicji transformacji naturalnej w przypadku funktorów kontrawariantnych polega na tym, że rodzina morfizmów w kategorii-przeciwdziedzinie indeksowanych przez morfizmy z kategorii-dziedziny spełnia warunki wyrażone przez diagramy przemienne

(2)
$$\forall_{\substack{A,B\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1 \\ f\in\mathcal{C}_1(A,B)}}\ :\quad \begin{tikzcd} F_1(A) \arrow[d, "\eta_A"'] & F_1(B) \arrow[l, "F_1(f)"'] \arrow[d, "\eta_B"] \\ F_2(A) & F_2(B) \arrow[l, "F_2(f)"] \end{tikzcd}\ .$$

Jeśli wszystkie morfizmy tworzące rodzinę $\eta_\cdot$ są izomorfizmami, transformację naturalną określamy mianem **izomorfizmu naturalnego** (**funktorów**) lub **równoważności naturalnej**

Transformacje naturalne można w naturalny sposób składać: Ilekroć dane są funktory $F_1, F_2, F_3\ :\ \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ oraz transformacje naturalne

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_1 \arrow[r, bend left, "F_A"] \arrow[r, bend right, "F_{A+1}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta_\cdot^A"] & \mathcal{C}_2 \end{tikzcd}\ ,\qquad A \in \{1, 2\}\,,$$

określamy **złożenie pionowe** (albo **wertykalne**) tych ostatnich jako transformację naturalną

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_1 \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "F_3"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta^2_{\cdot} \bullet \eta^1_{\cdot}"] & \mathcal{C}_2 \end{tikzcd} \equiv \begin{tikzcd} \mathcal{C}_1 \arrow[r, bend left=60, "F_1"] \arrow[r, "F_2" description] \arrow[r, bend right=60, "F_3"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow \eta^1_{\cdot}"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow \eta^2_{\cdot}"] & \mathcal{C}_2 \end{tikzcd}$$

o składowych

$$\eta^2_{\cdot} \bullet \eta^1_A = \eta^2_A \circ \eta^1_A, \quad A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1 .$$

Dla dwóch par funktorów: $F_1, F_2 \;:\; \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ i $G_1, G_2 \;:\; \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_3$ oraz transformacji naturalnych

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_1 \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "F_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta_{\cdot}"] & \mathcal{C}_2 \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C}_2 \arrow[r, bend left, "G_1"] \arrow[r, bend right, "G_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \theta_{\cdot}"] & \mathcal{C}_3 \end{tikzcd}$$

określamy **złożenie poziome** (albo **horyzontalne**) tych ostatnich jako transformację naturalną

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_1 \arrow[r, bend left, "G_1 \circ F_1"] \arrow[r, bend right, "G_2 \circ F_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \theta \circ \eta_{\cdot}"] & \mathcal{C}_3 \end{tikzcd} \equiv \begin{tikzcd} \mathcal{C}_1 \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "F_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta_{\cdot}"] & \mathcal{C}_2 \arrow[r, bend left, "G_1"] \arrow[r, bend right, "G_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \theta_{\cdot}"] & \mathcal{C}_3 \end{tikzcd}$$

o składowych

$$\theta \circ \eta_A = \theta_{F_2(A)} \circ G_1(\eta_A) \equiv G_2(\eta_A) \circ \theta_{F_1(A)}, \quad A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1 .$$

**Przykłady 3.** (Transformacje naturalne)

(1) Rodzina izomorfizmów grup $\mathrm{Inv}_{\cdot} \;:\; \mathrm{Ob}\,\mathbf{Grp} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathbf{Grp} \;:\; \mathrm{G} \longmapsto \mathrm{Inv}_{\mathrm{G}}$, z których każdy traktujemy jako odwzorowanie z (odnośnej) grupy $\mathrm{G}$ w grupę do niej przeciwną, $\mathrm{G}^{\mathrm{opp}}$, określa izomorfizm naturalny między funktorem identycznościowym na kategorii **Grp** a funktorem „brania przeciwności", który dowolnej grupie przyporządkowuje grupę do niej przeciwną i każdemu homomorfizmowi grup – *tenże* homomorfizm.

(2) Rodzina monomorfizmów przestrzeni wektorowych (nad ustalonym ciałem $\mathbb{K}$) $\mathrm{ev}^{\cdot}_{\cdot} \;:\; \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \;:\; V \longmapsto \mathrm{ev}^{V}_{\cdot}$, z których każdy przyporządkowuje (odnośnej) przestrzeni wektorowej $V$ odwzorowanie ($\mathbb{K}$-liniowe) ewaluacji $\mathrm{ev}^{V}_{\cdot} \;:\; V \longrightarrow V^{**} \;:\; v \longmapsto \mathrm{ev}^{V}_{v}$ określone wzorem $\mathrm{ev}^{V}_{v} \;:\; V^* \longrightarrow \mathbb{K} \;:\; \varphi \longmapsto \varphi(v)$, określa transformację naturalną między funktorem identycznościowym na kategorii $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ a funktorem bidualizacji, który dowolnej przestrzeni przyporządkowuje bidualną do niej i każdemu odwzorowaniu $\mathbb{K}$-liniowemu – odwzorowanie bidualne.

Mamy elementarne, acz istotne

**Stwierdzenie 1** (Prawo przemienności dla transformacji naturalnych)**.** Niechaj $\mathcal{C}_A,\ A \in \{1,2,3\}$ będą kategoriami, $F_B, G_B, H_B \;:\; \mathcal{C}_B \longrightarrow \mathcal{C}_{B+1},\ B \in \{1,2\}$ funktorami (kowariantnymi), $\alpha^{C}_{\cdot} \;:$

$F_C \Longrightarrow G_C$ i $\beta^C_\cdot \,:\, G_C \Longrightarrow H_C$, $C \in \{1,2\}$ zaś – transformacjami naturalnymi. Diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_1 \arrow[r, bend left=60, "F_1"] \arrow[r, "G_1" description] \arrow[r, bend right=60, "H_1"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow \alpha^1_\cdot"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow \beta^1_\cdot"] & \mathcal{C}_2 \arrow[r, bend left=60, "F_2"] \arrow[r, "G_2" description] \arrow[r, bend right=60, "H_2"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow \alpha^2_\cdot"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow \beta^2_\cdot"] & \mathcal{C}_3
\end{tikzcd}$$

jednoznacznie określa transformację naturalną, tj. zachodzi tożsamość

$$\left(\beta^2 \bullet \alpha^2\right) \circ \left(\beta^1 \bullet \alpha^1\right)_\cdot = \left(\beta^2 \circ \beta^1\right) \bullet \left(\alpha^2 \circ \alpha^1\right)_\cdot .$$

Możemy już wysłowić naturalne warunki „tożsamości” kategorii, uwzględniające wpisane w ich definicję ograniczenie „rozdzielczości” naszego rozpoznania i rozróżnienia ich obiektów w okolicznościach abstrahowania od obiektów tych „wewnętrznej struktury”, jakim jest wskazanie wyróżnionych elementów klasy morfizmów, a mianowicie – *izo*morfizmów, będących markerami nierozróżnialności obiektów na przyjętym poziomie „rozdzielczości” (czyli w obrębie danej kategorii). Mamy więc

**Definicja 4.** **Równoważność kategorii** $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ to para funktorów

$$F \,:\, \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2\,, \qquad\qquad G \,:\, \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_1$$

wraz z parą izomorfizmów naturalnych

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_1 \arrow[rr, bend left, "G\circ F"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}_1}"'] \arrow[rr, phantom, "\cong \Downarrow \widehat{\eta}_\cdot"] & & \mathcal{C}_1
\end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd}
\mathcal{C}_2 \arrow[rr, bend left, "F\circ G"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}_2}"'] \arrow[rr, phantom, "\cong \Downarrow \check{\eta}_\cdot"] & & \mathcal{C}_2
\end{tikzcd} .$$

Kategorie, dla których istnieje równoważność, określamy mianem (**wzajem**) **równoważnych**.

Wygodnego i przydatnego przeformułowania powyższego pojęcia dostarcza

**Stwierdzenie 2.** Warunkiem koniecznym i wystarczającym równoważności dwóch kategorii jest istnienie pomiędzy nimi funktora istotnie surjektywnego i w pełni wiernego.

Użytecznej egzemplifikacji spiętrzenia abstrakcyjnego nonsensu dostarcza

**Definicja 5.** Niechaj $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ będą kategoriami. **Kategorią funktorów kowariantnych z** $\mathcal{C}_1$ **do** $\mathcal{C}_2$ to kategoria, której obiektami są funktory kowariantne $F \,:\, \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$, a morfizmami – transformacje naturalne między tymiż funktorami. Oznaczamy ją symbolem

$$\mathcal{C}_2^{\mathcal{C}_1} \equiv [\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2] \equiv \mathbf{Fun}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)\,.$$

Analogicznie definiujemy **kategorię funktorów kontrawariantnych z** $\mathcal{C}_1$ **do** $\mathcal{C}_2$, dla której rezerwujemy symbol

$$\mathcal{C}_2^{\mathcal{C}_1^{\mathrm{op}}} \equiv [\mathcal{C}_1^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}_2] \equiv \mathbf{Fun}(\mathcal{C}_1^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}_2)\,.$$

W szczególności kategorię $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$ określamy mianem **kategorii kopresnopów na** $\mathcal{C}$ i oznaczamy symbolem

$$\mathbf{CoPreSh}(\mathcal{C}) \equiv [\mathcal{C}, \mathbf{Set}]\,.$$

Jej obiekty nazywamy **kopresnopami na** $\mathcal{C}$. Analogicznie kategorię $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ nazywamy **kategorią presnopów na** $\mathcal{C}$ i oznaczamy symbolem

$$\mathbf{PreSh}(\mathcal{C}) \equiv [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]\,.$$

Jej obiekty nazywamy **presnopami na** $\mathcal{C}$.

**Uwaga 1.** Presnopy, zwłaszcza zaś te spośród nich, które spełniają dodatkowe warunki czyniące z nich tzw. **snopy**, pełnią fundamentalną rolę w opisie własności topologicznych rozmaitości, w szczególności – struktur indukowanych na nich w obecności nietrywialnych pól form różniczkowych, modelujących pola ładunkowe (takie jak, np., pole fotonu, gluonów i masywnych bozonów pośredniczących). Dostarczają nam one także narzędzi (homologicznych) do opisu lokalnego i globalnego tzw. wiązek włóknistych, jak również – do klasyfikacji obstrukcji topologicznych wobec ich konstrukcji. Wrócimy do ich dyskusji w części geometrycznej niniejszego kursu.

**Przykłady 4.** W przypadku, gdy $\mathcal{C}_1 = \widetilde{\Lambda}$ jest kategorią pewnego zbioru $\Lambda \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Set}$ z Przykł. (1.5), odnośną kategorię $\mathcal{C}^{\widetilde{\Lambda}}$ określamy mianem **kategorii ciągów** (**uogólnionych**) **w** $\mathcal{C}$ **indeksowanych przez** $\Lambda$. Jej obiekty to funktory $X.\ :\ \widetilde{\Lambda} \longrightarrow \mathcal{C}$ o składowej obiektowej

$$X.\ :\ \Lambda \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}\ :\ \lambda \longmapsto X_\lambda$$

i morfizmowej ($X.$ jest funktorem!)

$$X.(\lambda \to \lambda) \equiv X.\big(\mathrm{Id}_\lambda^{\widetilde{\Lambda}}\big) = \mathrm{Id}_{X_\lambda}^{\mathcal{C}}\,,$$

możemy je zatem (więc też będziemy) utożsamiać z rodzinami obiektów z $\mathcal{C}$ indeksowanymi przez zbiór $\Lambda$,

$$X. \equiv \{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\,.$$

Morfizmy $\mathcal{C}^{\widetilde{\Lambda}}$ to transformacje naturalne $\eta.\ :\ X. \Longrightarrow Y.$, czyli indeksowane przez $\mathrm{Ob}\,\widetilde{\Lambda} \equiv \Lambda$ rodziny morfizmów

$$\{\eta_\lambda \in \mathcal{C}(X_\lambda, Y_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$$

spełniające odnośne warunki (jedyne „nietrywialne")

$$\begin{tikzcd}
X_\lambda \equiv X.(\lambda) \arrow[r, "X.\left(\mathrm{Id}_\lambda^{\widetilde{\Lambda}}\right)=\mathrm{Id}_{X_\lambda}^{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "\eta_\lambda"'] & X.(\lambda) \equiv X_\lambda \arrow[d, "\eta_\lambda"] \\
Y_\lambda \equiv Y.(\lambda) \arrow[r, "Y.\left(\mathrm{Id}_\lambda^{\widetilde{\Lambda}}\right)=\mathrm{Id}_{Y_\lambda}^{\mathcal{C}}"'] & Y.(\lambda) \equiv Y_\lambda
\end{tikzcd}\ .$$

Te są spełnione automatycznie na mocy aksjomatów kategorii, zatem morfizmy $\mathcal{C}^{\widetilde{\Lambda}}$ są po prostu dowolnymi rodzinami morfizmów z $\mathcal{C}$ indeksowanymi przez zbiór $\Lambda$ jak wyżej.

Kategorię $\mathcal{C}$ zanurzamy w $\mathcal{C}^{\widetilde{\Lambda}}$ przy użyciu funktora kowariantnego (ciągi stałe) $\Delta_{\mathcal{C};\Lambda}\ :\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\widetilde{\Lambda}}$ o składowych: obiektowej

$$\Delta_{\mathcal{C};\Lambda}\ :\ \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{\widetilde{\Lambda}}\ :\ X \longmapsto \{X_\lambda \equiv X\}_{\lambda\in\Lambda}$$

i morfizmowej

$$\Delta_{\mathcal{C};\Lambda}\ :\ \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}^{\widetilde{\Lambda}}\ :\ \eta \longmapsto \{\eta_\lambda \equiv \eta\}_{\lambda\in\Lambda}\,.$$

Z zastosowaniem tej kategorii zetkniemy się w okolicznościach konstrukcji wyróżnionych obiektów uniwersalnych w kategorii **Set** i innych, którą zajmiemy się na następnym wykładzie.

## 2. One Lemma to rule them all

Elementarnym, lecz istotnym wynikiem strukturalnym teorii grup, eksponującym pierwszorzędne znaczenie grup symetrycznych w tej teorii, jest Twierdzenie Cayleya, które orzeka, że każda grupa jest izomorficzna z pewną podgrupą grupy symetrycznej $\mathfrak{S}_X$ pewnego zbioru $X$, czyli może być zrealizowana jako podzbiór zbioru bijekcji $X$ w siebie, z ograniczonym doń składaniem odwzorowań w roli operacji binarnej (tj. działania grupowego). Dokonamy teraz transkrypcji klasycznego konstruktywnego dowodu tego twierdzenia w rozwijanym przez nas konsekwentnie formalizmie kategorialnym, co pozwoli wysłowić twierdzenie w sposób poddający się naturalnemu uogólnieniu. Takie uogólnienie będzie następnie przedmiotem naszych dalszych dociekań.

Przypomnijmy: we wspomnianym wyżej dowodzie jako zbiór $X$ wybieramy samą grupę $\mathrm{G}$ (innymi słowy, aplikujemy do niej **funktor zapominania Grp $\longrightarrow$ Set** z kategorii grup w kategorię zbiorów), wyróżniając zarazem te spośród jej bijekcji w siebie, które pochodzą od lewego regularnego działania grupy na sobie,

$$\ell. \;:\; \mathrm{G}\times X\to X \;:\; (g,h)\longmapsto g\cdot h\,,$$

czyli rozważamy podzbiór

$$\Lambda_{\mathrm{G}} \coloneqq \{\,\ell_g \mid g\in\mathrm{G}\,\}\subset\mathfrak{S}_X\,,$$

jawnie izomorficzny (czyli będący w bijekcji) ze zbiorem $\mathrm{G}$ i zamknięty ze względu na składanie odwzorowań,

$$\Lambda_{\mathrm{G}}\times\Lambda_{\mathrm{G}}\ni(\ell_{g_2},\ell_{g_1})\longmapsto\ell_{g_2}\circ\ell_{g_1}\equiv\ell_{g_2\cdot g_1}\in\Lambda_{\mathrm{G}}\,,$$

które realizują wiernie strukturę grupy, przez co należy rozumieć, że odwzorowanie

$$\widehat{\ell.}\;:\;\mathrm{G}\longrightarrow\mathfrak{S}_X\;:\;g\longmapsto\ell_g\,,$$

indukowane przez $\ell.$, jest monomorfizmem grup, więc też

$$(\mathrm{G},\cdot,\mathrm{Inv},\bullet\longmapsto e)\cong\big(\Lambda_{\mathrm{G}},\circ\restriction_{\Lambda_{\mathrm{G}}^{\times 2}},\Lambda_{\mathrm{G}}\ni\ell_g\longmapsto\ell_{g^{-1}}\in\Lambda_{\mathrm{G}},\bullet\longmapsto\ell_e\big)\subset(\mathfrak{S}_X,\circ,(\cdot)^{-1},\bullet\longmapsto\mathrm{id}_X)\,,$$

przy czym wskazany tu obraz odwzorowania $\widehat{\ell.}$ jest podgrupą $\mathfrak{S}_X$, o której mowa w tezie twierdzenia. Należy przy tym zauważyć, że wykorzystane tutaj działanie lewe regularne $\mathrm{G}$ na sobie jest przemienne z prawymi translacjami na $\mathrm{G}$ o dowolny element grupy, czyli z działaniem prawym regularnym

$$\wp.\;:\;X\times\mathrm{G}\to X\;:\;(h,g)\longmapsto h\cdot g\,,$$

czyli słuszne jest stwierdzenie

$$\forall_{g,h\in\mathrm{G}}\;:\;\ell_g\circ\wp_h=\wp_h\circ\ell_g\,,\tag{3}$$

będące konsekwencją łączności działania grupowego. Warto podkreślić, że powyższa własność odwzorowań $\wp_h\in\mathbf{Map}(X,X)$ jest dla nich definiująca, tzn. każde odwzorowanie $\gamma\in\mathbf{Map}(X,X)$ przemienne z działaniem lewym regularnym jest prawą translacją o pewien element grupy. W rzeczy samej, warunek

$$\forall_{g\in\mathrm{G}}\;:\;\ell_g\circ\gamma=\gamma\circ\ell_g$$

implikuje równość

$$\forall_{g\in\mathrm{G}}\;:\;g\cdot\gamma(e)=\gamma(g\cdot e)\equiv\gamma(g)\,,$$

która prowadzi do identyfikacji

$$\gamma=\wp_{\gamma(e)}\,.\tag{4}$$

Innymi słowy, stwierdzamy istnienie bijekcji

$$\mathrm{G}\cong\Lambda'_{\mathrm{G}}\big(\subset\mathrm{Map}(X,X)\big)$$

pomiędzy grupą $\mathrm{G}$ a komutantem grupy $\Lambda_{\mathrm{G}}$ w $\mathrm{Map}(X,X)$.

Okazuje się, że *całą* opisaną tu strukturę można zwięźle wysłowić, jak następuje: Morfizm $\widehat{\ell.}$ określa kontrawariantne funktorialne zanurzenie (czyli funktor kontrawariantny w pełni wierny z) kategorii $\widetilde{\mathrm{G}}$, wprowadzonej wcześniej, w kategorię $\mathbf{Set}^{\widetilde{\mathrm{G}}}$ (kowariantnych) funktorów z kategorii $\widetilde{\mathrm{G}}$ w kategorię **Set** zbiorów. W szczególności funktorialny obraz kategorii $\widetilde{\mathrm{G}}$ w $\mathbf{Set}^{\widetilde{\mathrm{G}}}$, jakim jest pełna podkategoria $\widetilde{\Lambda_{\mathrm{G}}}$, jest kanonicznie izomorficzny z wyjściową kategorią $\widetilde{\mathrm{G}}$. Istotnie, odwzorowanie $\widetilde{\ell.}$ stowarzysza z jedynym obiektem $\bullet$ kategorii $\widetilde{\mathrm{G}}$ kowariantny funktor

$$\widetilde{\mathrm{G}}(\bullet,\cdot)\equiv\widetilde{\ell.}\;:\;\widetilde{\mathrm{G}}\longrightarrow\mathbf{Set}$$

o składowej obiektowej

$$\widetilde{\ell.}\;:\;\mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathrm{G}}\longrightarrow\mathrm{Ob}\,\mathbf{Set}\;:\;\bullet\longmapsto X(\equiv\mathrm{G})=\widetilde{\mathrm{G}}(\bullet,\bullet)$$

i składowej morfizmowej

$$\widetilde{\ell}.\ :\ \mathrm{Mor}\,\widetilde{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathbf{Set}\ :\ \xleftarrow{g} \longmapsto \xleftarrow{\ell_g} = \widetilde{\mathrm{G}}\big(\bullet,\ \xleftarrow{g}\ \big)\,,$$

przy czym ostatnie przyporządkowanie ma sens, gdyż $\xleftarrow{\ell_g} \in \mathbf{Set}(\widetilde{\ell}.(\bullet),\widetilde{\ell}.(\bullet)) \equiv \widetilde{\mathbf{Map}(X,X)}$. Funktorialność $\widetilde{\ell}.$ sprowadza się do stwierdzonych wcześniej strukturalnych własności odwzorowania $\ell.$, tj.

$$\widetilde{\ell}.(\mathrm{Id}^{\widetilde{\mathrm{G}}}_{\bullet}) = \mathrm{Id}^{\mathbf{Set}}_{\widetilde{\ell}.(\bullet)} \iff \ell_e = \mathrm{id}_X\,,$$

$$\widetilde{\ell}.(\ \xleftarrow{g_2} \circ_{\widetilde{\mathrm{G}}} \xleftarrow{g_1}\ ) = \widetilde{\ell}.(\ \xleftarrow{g_2}\ ) \circ_{\mathbf{Set}} \widetilde{\ell}.(\ \xleftarrow{g_1}\ ) \iff \ell_{g_2\cdot g_1} = \ell_{g_2} \circ \ell_{g_1}\,.$$

Wreszcie też $\widehat{\ell}.$ pozwala przyporządkować dowolnemu morfizmowi $\xleftarrow{g} \in \widetilde{\mathrm{G}}(\bullet,\bullet)(\equiv \mathrm{Mor}\,\widetilde{\mathrm{G}})$ transformację naturalną

$$\widetilde{\mathrm{G}}\big(\ \xleftarrow{g}\ ,\cdot\big)\ :\ \widetilde{\mathrm{G}}\big(t(\ \xleftarrow{g}\ ),\cdot\big) \Longrightarrow \widetilde{\mathrm{G}}\big(s(\ \xleftarrow{g}\ ),\cdot\big)\,,$$

czyli indeksowaną przez $\mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathrm{G}} = \{\bullet\}$ rodzinę morfizmów o jedynym elemencie

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{G}}\big(\ \xleftarrow{g}\ ,\bullet\big) \equiv \xleftarrow{\wp_g} \quad &\in \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}\big(\widetilde{\mathrm{G}}\big(t(\ \xleftarrow{g}\ ),\bullet\big),\widetilde{\mathrm{G}}\big(s(\ \xleftarrow{g}\ ),\bullet\big)\big)\\ &\equiv \mathrm{Mor}\,\widetilde{\mathbf{Map}(X,X)}\end{aligned}$$

o własności

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathrm{G}}\big(\ \xleftarrow{g}\ ,t(\ \xleftarrow{h}\ )\big) \circ_{\mathbf{Set}} \widetilde{\mathrm{G}}\big(t(\ \xleftarrow{g}\ ),\ \xleftarrow{h}\ \big)\\ =\ &\widetilde{\mathrm{G}}\big(s(\ \xleftarrow{g}\ ),\ \xleftarrow{h}\ \big) \circ_{\mathbf{Set}} \widetilde{\mathrm{G}}\big(\ \xleftarrow{g}\ ,s(\ \xleftarrow{h}\ )\big)\,,\end{aligned}$$

zapisanej dla dowolnego $\xleftarrow{h} \in \mathrm{Mor}\,\widetilde{\mathrm{G}}$, a wyrażającej stwierdzoną uprzednio własność (3). Podkreślmy, że kontrawariantny charakter opisanego tu funktora $\widetilde{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\widetilde{\mathrm{G}}}$ niesie informację o prawym charakterze działania prawego regularnego grupy $\widetilde{\mathrm{G}}$ na sobie, oto bowiem zapis

$$\widetilde{\mathrm{G}}\big(\ \xleftarrow{g_2} \circ_{\widetilde{\mathrm{G}}} \xleftarrow{g_1}\ ,\cdot\big) = \widetilde{\mathrm{G}}\big(\ \xleftarrow{g_1}\ ,\cdot\big) \circ_{\mathbf{Set}^{\widetilde{\mathrm{G}}}} \widetilde{\mathrm{G}}\big(\ \xleftarrow{g_2}\ ,\cdot\big)$$

oznacza w istocie tożsamość

$$\wp_{g_2\cdot g_1} = \wp_{g_1} \circ \wp_{g_2}\,.$$

Na koniec zauważmy, że jest to, zgodnie z wypowiedzianą wcześniej tezą, funktor w pełni wierny, albowiem dla jedynej pary obiektów jego dziedziny, $(\bullet,\bullet)$, zadawane przezeń przyporządkowanie (podkreślenie pierwszego „wolnego" miejsca oznacza, że to właśnie miejsce przyjmuje argument z dziedziny)

$$\widetilde{\mathrm{G}}(\underline{\cdot},\cdot)\ :\ \widetilde{\mathrm{G}}(\bullet,\bullet) \longrightarrow \mathbf{Set}^{\widetilde{\mathrm{G}}}\big(\widetilde{\mathrm{G}}(\bullet,\cdot),\widetilde{\mathrm{G}}(\bullet,\cdot)\big) \equiv \mathrm{Nat}\big(\widetilde{\ell}.,\widetilde{\ell}.\big)$$

jest omówioną wcześniej bijekcją $\wp. : \mathrm{G} \xrightarrow{\cong} \Lambda'_{\mathrm{G}} : g \longmapsto \wp_g$, patrz: (4).

Dokonane tutaj abstrakcyjne przeformułowanie Twierdzenia Cayleya w języku teorii kategorii stawia nas przed oczywistym pytaniem: Czy twierdzenie to jest przejawem szczególnego statusu $\widetilde{\mathrm{G}}$ pośród kategorii, czy też raczej jest ono emanacją ogólniejszego prawa, któremu podlegają wszystkie kategorie lokalnie małe? (Wymóg lokalnej małości staje się koniecznością, kiedy staramy się odwzorować klasy morfizmów pomiędzy dowolnymi parami obiektów wyjściowej kategorii *bijektywnie* w klasy transformacji naturalnych między funktorialnymi obrazami tychże obiektów.) Bardzo ogólnej odpowiedzi na tak postawione pytanie dostarcza

**Twierdzenie 1** (Lemat Yonedy)**.** Niechaj $\mathcal{C}$ będzie dowolną kategorią lokalnie małą, a $X$ – dowolnym jej obiektem i niech $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ będzie dowolnym funktorem kowariantnym. Wówczas istnieje kanoniczny izomorfizm (bijekcja) pomiędzy zbiorem $\mathrm{Nat}(\mathcal{C}(X,\cdot),F(\cdot)) \equiv [\mathcal{C},\mathbf{Set}](\mathcal{C}(X,\cdot),F(\cdot))$ transformacji naturalnych między funktorami $\mathcal{C}(X,\cdot)$ i $F$ a elementami zbioru $F(X)$,

$$\mathrm{Nat}\big(\mathcal{C}(X,\cdot),F(\cdot)\big) \cong F(X)\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Punktem wyjścia do konstruktywnego dowodu istnienia bijekcji, o której mowa w treści twierdzenia, jest następująca obserwacja: Oto dowolna transformacja naturalna $\eta_{\cdot} \in \mathrm{Nat}\big(\mathcal{C}(X,\cdot),F(\cdot)\big)$ jest w pełni określona przez element

$$\xi_X^{\eta_{\cdot}} \coloneqq \eta_X(\mathrm{Id}_X^{\mathcal{C}}) \in F(X)$$

zbioru będącego funktorialnym obrazem wyróżnionego obiektu $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. W rzeczy samej, warunek (1) naturalności $\eta_{\cdot}$ implikuje tożsamość

$$\eta_Y(\chi) \equiv \eta_Y(\chi \circ \mathrm{Id}_X^{\mathcal{C}}) = \big(\eta_Y \circ \mathcal{C}(X,\chi)\big)(\mathrm{Id}_X^{\mathcal{C}}) = \big(F(\chi) \circ \eta_X\big)(\mathrm{Id}_X^{\mathcal{C}}) = F(\chi)(\xi_X^{\eta_{\cdot}}),$$

słuszną dla dowolnego morfizmu $\chi \in \mathcal{C}(X,Y)$ o końcu w dowolnym obiekcie $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, a pokazującą dowodnie, że znajomość $\xi_X^{\eta_{\cdot}}$ pozwala wyznaczyć wszystkie elementy rodziny $\{\eta_Y\}_{Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}$. Odwzorowanie

$$\xi_X^{\cdot} \;:\; \mathrm{Nat}\big(\mathcal{C}(X,\cdot),F(\cdot)\big) \longrightarrow F(X) \;:\; \eta \longmapsto \xi_X^{\eta_{\cdot}},$$

jedyne naturalne przyporządkowanie transformacjom naturalnym elementów zbioru $F(X)$ (przy braku dodatkowych danych), to właśnie szukana bijekcja. Ażeby się o tym przekonać, wystarczy wskazać odwzorowanie odwrotne. Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\eta_{\cdot}^{\cdot} \;:\; F(X) \longrightarrow \mathrm{Nat}\big(\mathcal{C}(X,\cdot),F(\cdot)\big) \;:\; \xi \longmapsto \eta_{\cdot}^{\xi}$$

wzorem

$$\eta_Y^{\xi}(\chi) \coloneqq F(\chi)(\xi), \tag{5}$$

który – jak w poprzednim przypadku – jest jedynym naturalnym przyporządkowaniem elementom zbioru $F(X)$ odwzorowań $\mathcal{C}(X,Y) \longrightarrow F(Y)$ przy zadanym obiekcie $Y$. Podana definicja ma sens, gdyż dla dowolnego morfizmu $\psi \in \mathcal{C}(Y,Z)$ zachodzi

$$\begin{aligned}\big(\eta_Z^{\xi} \circ_{\mathbf{Set}} \mathcal{C}(X,\psi)\big)(\chi) \quad &= \quad \eta_Z^{\xi}(\psi \circ_{\mathcal{C}} \chi) = F(\psi \circ_{\mathcal{C}} \chi)(\xi) = \big(F(\psi) \circ_{\mathbf{Set}} F(\chi)\big)(\xi) \\ &= \quad F(\psi)\big(F(\chi)(\xi)\big) = \big(F(\psi) \circ_{\mathbf{Set}} \eta_Y^{\xi}\big)(\chi),\end{aligned}$$

czyli – w istocie – $\eta_{\cdot}^{\xi}$ jest transformacją naturalną między $\mathcal{C}(X,\cdot)$ a $F$. Pokażemy, że $\eta_{\cdot}^{\cdot}$ jest poszukiwaną odwrotnością odwzorowania $\xi_X^{\cdot}$. W tym celu wyznaczamy transformację naturalną przyporządkowaną przez $\eta_{\cdot}^{\cdot}$ elementowi $\xi_X^{\eta_{\cdot}}$,

$$\eta_Y^{\xi_X^{\eta_{\cdot}}}(\chi) = F(\chi)(\xi_X^{\eta_{\cdot}}) = \eta_Y(\chi),$$

uzyskując pożądany wynik

$$\eta_Y^{\xi_X^{\eta_{\cdot}}} = \eta_Y,$$

a następnie wskazujemy element zbioru $F(X)$ będący obrazem transformacji naturalnej $\eta_{\cdot}^{\xi}$ względem odwzorowania $\xi_X^{\cdot}$,

$$\xi_X^{\eta_{\cdot}^{\xi}} = \eta_X^{\xi}(\mathrm{Id}_X^{\mathcal{C}}) = F(\mathrm{Id}_X^{\mathcal{C}})(\xi) = \mathrm{Id}_{F(X)}^{\mathbf{Set}}(\xi) \equiv \mathrm{id}_{F(X)}(\xi) = \xi,$$

co kończy dowód postulowanej relacji między $\eta_{\cdot}^{\cdot}$ i $\xi_X^{\cdot}$, a tym samym także dowód twierdzenia. □

Bezpośredniego uogólnienia teoriogrupowego Twierdzenia Cayleya dostarcza poniższe elementarne corollarium Lematu Yonedy.

**Stwierdzenie 3** (Zanurzenie Yonedy)**.** W oznaczeniach Twierdzenia 1 kontrawariantny funktor

$$\mathcal{C}(\underset{\cdot}{\cdot},\cdot) \;:\; \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$$

jest w pełni wierny, przeto określa zanurzenie kategorii $\mathcal{C}$ w kategorii $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$, którego obrazem jest pełna podkategoria tej ostatniej o zbiorze obiektów $\{\, \mathcal{C}(X,\cdot) \mid X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \,\}$, izomorficzna z $\mathcal{C}$.

*<u>Dowód</u>:* Odnosząc tezę Lematu Yonedy do funktora $F \coloneqq \mathcal{C}(Y,\cdot)$, stwierdzamy istnienie bijekcji

$$\mathcal{C}(\underline{\cdot},\cdot)\ :\ \mathcal{C}(Y,X) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Nat}\big(\mathcal{C}(X,\cdot),\mathcal{C}(Y,\cdot)\big)\ :\ \chi \longmapsto \mathcal{C}(\chi,\cdot)\,.$$

Istotnie, przywoławszy wzór (5), znajdujemy – dla dowolnych: $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ i $\psi \in \mathcal{C}(X,Z)$ – tożsamość

$$\eta^\chi_Z(\psi) \equiv \mathcal{C}(Y,\cdot)(\psi)(\chi) \equiv \psi \circ \chi \equiv \mathcal{C}(\cdot,Z)(\chi)(\psi)\,,$$

więc też – wobec dowolności $\psi$ –

$$\eta^\chi_Z \equiv \mathcal{C}(\cdot,Z)(\chi) \equiv \mathcal{C}(\chi,Z)\,,$$

czyli ostatecznie

$$\eta^\chi_\cdot \equiv \mathcal{C}(\chi,\cdot)\,.$$

To wszakże oznacza właśnie, że funktor $\mathcal{C}(\underline{\cdot},\cdot)$ jest w pełni wierny. Tym samym kontrawariantny funktor

$$\mathcal{C}(\underline{\cdot},\cdot)\ :\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}}\,,$$

o składowej obiektowej

$$\mathcal{C}(\underline{\cdot},\cdot)\ :\ \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}\ :\ X \longmapsto \mathcal{C}(X,\cdot)$$

i morfizmowej

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\underline{\cdot},\cdot)\quad &:\quad \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}\\ &:\quad \big(\,Y \xrightarrow{\chi} X\,\big) \longmapsto \big(\,\mathcal{C}(X,\cdot) \xRightarrow{\mathcal{C}(\chi,\cdot)} \mathcal{C}(Y,\cdot)\,\big)\end{aligned}$$

zadaje zanurzenie kategorii $\mathcal{C}$ w kategorii funktorów $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$, zwane **zanurzeniem Yonedy**. □

Lemat Yonedy i wynikające zeń stwierdzenie o zanurzeniu stanowią doskonałą ilustrację jednej z najgłębszych idei, jakie tkwią u podstaw teorii kategorii: Miast zagłębiać się w „strukturę wewnętrzną" obiektu danej kategorii, możemy skupić się na studiowaniu morfizmów między tymże obiektem a (wszystkimi) obiektami tejże kategorii, a zatem – koniec końców – transformacji naturalnych między obrazem obiektu względem zanurzenia Yonedy a takimiż obrazami (wszystkich) obiektów kategorii. Teoria kategorii została sformułowana – nie bez kozery – w pierwszej połowie XX w., tj. w czasach fenomenalnej eksplozji myślenia abstrakcyjnego w naukach przyrodniczych[5] na wszystkich skalach dostępnych poznaniu – od skali atomowej po skalę kosmiczną. Zawartość „filozoficzna" rzeczonej idei powinna być zatem bliska sercu i umysłowi każdego fizyka, oto bowiem jedynym dostępnym nam sposobem empirycznego poznania elementarnych składników materii są obserwacje ich oddziaływań z innymi składnikami materii, przy czym obserwacje te prowadzimy w klasach obiektów oddziałujących wzajemnie, czyli będących nośnikami wspólnej cechy (np. ładunku) albo inaczej: należących do wspólnej kategorii. Najbardziej bodaj zwięzłej i obrazowej wulgaryzacji socjologicznej tych twierdzeń dostarcza stare powiedzenie

*Powiedz mi, kto jest twoim przyjacielem, a powiem ci, kim jesteś.*

---

[5] Profesor Stefan Jackowski miał stwierdzić, jakoby miejscem historycznie najpierwszego objawienia paradygmatu kategorialnego była praca magisterska Stanisława M. Ulama. Autor dziękuje p. Adamowi Maskalańcowi za tę informację.

## Zadania domowe

**Zadanie domowe 1.** Celem nabycia intuicji dotyczącej zawartości zaproponowanego w Definicji 4 pojęcia równoważności kategorii, rozważmy następującą sytuację: Niechaj $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ będą kategoriami, z których pierwsza ma jednoelementową klasę obiektów $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1 = \{X\}$, druga zaś – dwuelementową klasę obiektów $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_2 = \{X, Y\}$ oraz wyróżniony izomorfizm $\iota : X \xrightarrow{\cong} Y$, a nadto – niech $\mathcal{C}_2(X, X) = \mathcal{C}_1(X, X)$. Udowodnij, że te kategorie są równoważne, tj. $\mathcal{C}_1 \cong \mathcal{C}_2$.

**Zadanie domowe 2.** Udowodnij, że dowolny morfizm $f \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ w kategorii $\mathcal{C}$ (także dowolnej) ma co najwyżej jedną odwrotność, tj. $g \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ o własnościach $f \circ_{\mathcal{C}} g = \mathrm{Id}_{t(f)}$ i $g \circ_{\mathcal{C}} f = \mathrm{Id}_{s(f)}$.

**Zadanie domowe 3.** Udowodnij, że funktory zachowują izomorfizmy, tj. dla dowolnego funktora $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ i dowolnej pary $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ obiektów izomorficznych, $A \cong B$, istnieje izomorfizm $F(A) \cong F(B)$.

**Zadanie domowe 4.** Odwrotność odwzorowania G-ekwiwariantnego jest odwzorowaniem G-ekwiwariantnym. Sformułuj i udowodnij analogon kategorialny tego prostego stwierdzenia z teorii grup.

**Zadanie domowe 5.** Udowodnij Stw. 1.

**Zadanie domowe 6.** Udowodnij Stw. 2.

**Zadanie domowe 7.** Sformułuj i udowodnij kontrawariantną wersję Tw. 1 i Stw. 3.