THE GRAND CHESSBOARD
(MAWF '23/24 1.XI & 1.XII [RRS])

Fig. 1. Najstarsza znana szachownica, znaleziona w mieście Lothal w indyjskiej prowincji Gudżarat, a datowana na ok. 2300 r.p.n.e., kiedy to w Dolinie Indusu kwitła Kultura Harappańska. Kamienna tablica była wykorzystywana do gry w starożytną wersję szachów zw. chaturanga, opisaną w klasycznym hinduistycznym tekście Bhavishya Purana.

Spis treści

W dalszej części wykładu przedstawimy kompletną klasyfikację algebr Clifforda stowarzyszonych ze skończenie wymiarowymi przestrzeniami kwadratowymi nad ciałami liczbowymi o szczególnym znaczeniu w modelowaniu zjawisk fizycznych, tj. nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

1. Rzeczywiste algebry Clifforda w skończonym wymiarze

Tytułem wstępu sformułujemy porządkujące, a oczywiste

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy, w szczególności niechaj $\mathbb{R}^{p,q} \equiv (\mathbb{R}^{p+q}, \delta_{\mathrm{E}}^{(p,q)} \equiv \delta_{\mathrm{E}}^{(p)} \oplus (-\delta_{\mathrm{E}}^{(q)}))$ będzie modelową pseudoeuklidesową przestrzenią kwadratową o sygnaturze (p,q). Algebra Clifforda dowolnej rzeczywistej przestrzeni kwadratowej wyposażonej w niezwyrodniałą formę kwadratową o sygnaturze (p,q) jest izomorficzna z algebrą Clifforda przestrzeni (pseudo)euklidesowej $\mathbb{R}^{p,q}$. Tę ostatnią algebrę Clifforda oznaczamy symbolem

$$\mathrm{Cliff}\big(\mathbb{R}^{p,q}\big) \equiv \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Natychmiastowa konsekwencja koniunkcji Twierdzenia Sylvestera o bezwładności i Stw. 7-8.8. □

Powyższe przygotowuje nas do klasyfikacji rzeczywistych algebr Clifforda, do której przejdziemy obecnie. Zaczynamy od

Twierdzenie 1 (Klasyfikacyjne I $\mathbb{R}$)**.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy i ustalmy (dowolnie) parę $(p,q)\in\mathbb{N}^{\times 2}$. Istnieją unitalne izomorfizmy $\mathbb{R}$-algebr

$$\begin{aligned}\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p+2,q} &\cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{q,p}\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{2,0}\,,\\ \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q+2} &\cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{q,p}\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,2}\,.\end{aligned}$$

W szczególności

$$\begin{aligned}\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p+2,0} &\cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,p}\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{2,0}\,,\\ \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,q+2} &\cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{q,0}\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,2}\,.\end{aligned}$$

<u>*Dowód:*</u> W świetle Stw. 8 i 9-10.2 w przypadku obu algebr: $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{2,0}$ i $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,2}$ istnieją wyznaczniki unormowane $\Delta\in\bigwedge^{\bullet}\mathbb{R}^{\times 2}$, dla których $\lambda_\Delta=1$, zachodzi więc tożsamość

$$e_\Delta^2=(-1)^{\frac{2(2-1)}{2}}\,\lambda_\Delta\triangleright e^{\mathrm{C}}=-e^{\mathrm{C}}=:\varepsilon_2\triangleright e^{\mathrm{C}}\,.$$

Oznaczmy

$$\varepsilon_2\,\mathbb{R}^{q,p}\equiv\Big(\mathbb{R}^q\oplus\mathbb{R}^p,\varepsilon_2\,\big(\delta^{(q)}_{\mathrm{E}}\oplus(-\delta^{(p)}_{\mathrm{E}})\big)\Big)=\Big(\mathbb{R}^q\oplus\mathbb{R}^p,(-\delta^{(q)}_{\mathrm{E}})\oplus\delta^{(p)}_{\mathrm{E}}\Big)=\mathbb{R}^{p,q}$$

i dokonajmy – jak w Tw. 9-10.3 – rozkładu ortogonalnego (względem $\delta^{(p+2,q)}_{\mathrm{E}}$)

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{p+2,q} &= \mathbb{R}^{2,0}\textcircled{\perp}_{\delta^{(p+2,q)}_{\mathrm{E}}}\mathbb{R}^{p,q}\equiv\mathbb{R}^{2,0}\textcircled{\perp}_{\delta^{(p+2,q)}_{\mathrm{E}}}\varepsilon_2\,\mathbb{R}^{q,p}\\ &\equiv \Big(\mathbb{R}^2\oplus\mathbb{R}^{p+q},\delta^{(2,0)}_{\mathrm{E}}\oplus\varepsilon_2\,\delta^{(q,p)}_{\mathrm{E}}\Big)\,,\end{aligned}$$

a następnie przywołajmy tezę Tw. 9-10.3 (oraz Tw. 3-4-5.5), aby zapisać

$$\begin{aligned}\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p+2,q} &\equiv \mathrm{Cliff}\big(\mathbb{R}^{2,0}\textcircled{\perp}_{\delta^{(p+2,q)}_{\mathrm{E}}}\varepsilon_2\,\mathbb{R}^{q,p}\big)\cong\mathrm{Cliff}\big(\mathbb{R}^{2,0}\big)\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{Cliff}\big(\mathbb{R}^{q,p}\big)\equiv\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{2,0}\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{q,p}\\ &\cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{q,p}\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{2,0}\,.\end{aligned}$$

Na podstawie analogicznego rozkładu

$$\mathbb{R}^{p,q+2} = \mathbb{R}^{0,2}\textcircled{\perp}_{\delta^{(p,q+2)}_{\mathrm{E}}}\varepsilon_2\,\mathbb{R}^{q,p}$$

otrzymujemy drugą z pożądanych tożsamości

$$\begin{aligned}\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q+2} &\equiv \mathrm{Cliff}\big(\mathbb{R}^{0,2}\textcircled{\perp}_{\delta^{(p,q+2)}_{\mathrm{E}}}\varepsilon_2\,\mathbb{R}^{q,p}\big)\cong\mathrm{Cliff}\big(\mathbb{R}^{0,2}\big)\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{Cliff}\big(\mathbb{R}^{q,p}\big)\equiv\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,2}\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{q,p}\\ &\cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{q,p}\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,2}\,.\end{aligned}$$

□

Mamy także

Twierdzenie 2 (Klasyfikacyjne II $\mathbb{R}$)**.** Przyjmijmy zapis Stw. 1. Ilekroć składowe sygnatury $(p,q)\in\mathbb{N}^{\times 2}$ spełniają relację $q\equiv p \mod 4$, istnieje unitalny izomorfizm $\mathbb{R}$-algebr

$$\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}\cong\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{q,p}\,.$$

W szczególności

$$\forall_{n\in 4\mathbb{N}}\ :\ \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{n,0}\cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,n}\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Zacznijmy od spostrzeżenia:

$$N=p+q=p-q+2q=4k+2q=2(2k+q)\in 2\mathbb{N}\,.$$

Jeśli zatem Δ jest wyznacznikiem unormowanym na $\mathbb{R}^{p,q}$, to

$$\lambda_\Delta=(-1)^q\equiv(-1)^{q+2k}=(-1)^{(q+2k)\,(2(2k+q)-1)}=(-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}\,,$$

możemy przeto zastosować Tw. 9-10.2, na mocy którego (w konwencji poprzedniego dowodu)

$$\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}\equiv \mathrm{Cliff}\big(\mathbb{R}^{p,q}\big)\cong \mathrm{Cliff}\big(-\mathbb{R}^{p,q}\big)\equiv \mathrm{Cliff}\big(\mathbb{R}^{q,p}\big)\equiv \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{q,p}\,.$$

□

W następnej kolejności napotykamy oczywiste, acz przydatne

Twierdzenie 3 (Klasyfikacyjne III $\mathbb{R}$)**.** Przyjmijmy zapis Stw. 1. Dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ istnieją unitalne izomorfizmy $\mathbb{R}$-algebr

$$\begin{aligned}\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{n+8,0} &\cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{n,0}\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{8,0}\,,\\ \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,n+8} &\cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,n}\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,8}\,,\end{aligned}$$

przy czym

$$\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{8,0}\cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,8}\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Wybrawszy na $\mathbb{R}^{8,0}$ (wzgl. $\mathbb{R}^{0,8}$) wyznacznik unormowany, otrzymujemy $\lambda_\Delta=1$, a zatem

$$e_\Delta^2=(-1)^{\frac{8(8-1)}{2}}\triangleright e^{\mathrm{C}}=e^{\mathrm{C}}=:\varepsilon_8\triangleright e^{\mathrm{C}}\,,$$

skąd – w świetle Tw. 9-10.3 (oraz Tw. 3-4-5.5) i w konwencji przyjętej wcześniej –

$$\begin{aligned}\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{n+8,0} &\equiv \mathrm{Cliff}\big(\mathbb{R}^{8,0}\oplus\varepsilon_8\,\mathbb{R}^{n,0}\big)\cong \mathrm{Cliff}\big(\mathbb{R}^{8,0}\big)\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{Cliff}\big(\mathbb{R}^{n,0}\big)\equiv \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{8,0}\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{n,0}\\ &\cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{n,0}\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{8,0}\,.\end{aligned}$$

Drugiej tożsamości dowodzimy analogicznie. Ostatnia część tezy dowodzonego twierdzenia jest implikowana przez Tw. 2. □

Do pełnej klasyfikacji rzeczywistych algebr Clifforda brakuje nam już tylko dyskusji ich struktury w przypadku sygnatury mieszanej – ten opisuje

Twierdzenie 4 (Klasyfikacyjne IV $\mathbb{R}$)**.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Dla dowolnych $p,q,r,s\in\mathbb{N}$ istnieją unitalne izomorfizmy $\mathbb{R}$-algebr

$$\begin{aligned}\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,p} &\cong \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\big(\textstyle\bigwedge^{\bullet}\mathbb{R}^{\times p}\big)\equiv\mathbb{R}(2^p)\,,\\ \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,p+r} &\cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,p}\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,r}\cong\mathbb{R}(2^p)\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,r}\,,\\ \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{q+s,q} &\cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{q,q}\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{s,0}\cong\mathbb{R}(2^p)\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{s,0}\,.\end{aligned}$$

<u>*Dowód:*</u> Istnienie dwóch ostatnich klas izomorfizmów jest bezpośrednią konsekwencją istnienia pierwszej rodziny izomorfizmów oraz tego, że element kanoniczny $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,p}$ stowarzyszony z wyznacznikiem unormowanym spełnia tożsamość

$$e_\Delta^2=(-1)^{\frac{2p(2p-1)}{2}}\cdot(-1)^p\triangleright e^{\mathrm{C}}=e^{\mathrm{C}}=:\varepsilon_{p,p}\triangleright e^{\mathrm{C}}\,,$$

co – w świetle Tw. 9-10.3 i w konwencji przyjętej wcześniej – daje nam

$$\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,p+r}\ \equiv\ \mathrm{Cliff}\big(\mathbb{R}^{p,p}\oplus\varepsilon_{p,p}\,\mathbb{R}^{0,r}\big)\cong \mathrm{Cliff}\big(\mathbb{R}^{p,p}\big)\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{Cliff}\big(\mathbb{R}^{0,r}\big)\equiv \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,p}\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,r}$$

i analogiczny wynik dla $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{q+s,q}$. Pozostaje zatem wykazać słuszność pierwszej części tezy. W tym celu dokonujemy rozkładu ortogonalnego

$$\mathbb{R}^{p,p} \quad = \quad \mathbb{R}^{p,0} \textcircled{\perp}_{\delta_{\mathrm{E}}^{(p,p)}} \mathbb{R}^{0,p}$$

i wybieramy bazy (pseudo)ortonormalne: $\{e_i^+\}_{i\in\overline{1,p}} \subset \mathbb{R}^{p,0}$ oraz $\{e_j^-\}_{j\in\overline{1,p}} \subset \mathbb{R}^{0,p}$,

$$\Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(p,p)}}(e_i^\pm, e_j^\pm) = \pm\delta_{i,j}\,, \qquad \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(p,p)}}(e_i^+, e_j^-) = 0\,, \qquad i,j \in \overline{1,p}\,.$$

Tych możemy użyć do zdefiniowania inwolucji $\omega \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2p})$ stanowiącej (jedyne) $\mathbb{R}$-liniowe rozszerzenie przyporządkowania elementów baz:

$$\omega(e_i^\pm) \coloneqq e_i^\mp\,, \qquad i \in \overline{1,p}\,.$$

Bez trudu upewniamy się, że inwolucja ta jest skośnie symetryczna,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(p,p)}}\big(\omega^*(e_i^\pm), e_j^\pm\big) &\equiv \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(p,p)}}\big(e_i^\pm, \omega(e_j^\pm)\big) = \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(p,p)}}\big(e_i^\pm, e_j^\mp\big) = 0 = \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(p,p)}}\big(-\omega(e_i^\pm), e_j^\pm\big)\,,\\
\Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(p,p)}}\big(\omega^*(e_i^\pm), e_j^\mp\big) &\equiv \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(p,p)}}\big(e_i^\pm, \omega(e_j^\mp)\big) = \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(p,p)}}\big(e_i^\pm, e_j^\pm\big) = \pm\delta_{i,j} = -\Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(p,p)}}\big(e_i^\mp, e_j^\mp\big)\\
&\equiv \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(p,p)}}\big(-\omega(e_i^\pm), e_j^\mp\big)\,,
\end{aligned}$$

i jako taka pozwala na odniesienie do pary $(\mathbb{R}^{p,p},\omega)$ tezy Stw. 9-10.4, która przesądza o istnieniu izomorfizmu

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,p} &\equiv \mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,p}) \cong \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\big(\textstyle\bigwedge^\bullet \mathrm{Ker}\,(\omega - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{p,p}})\big) \equiv \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\big(\textstyle\bigwedge^\bullet \displaystyle\bigoplus_{i=1}^p \langle e_i^+ + e_i^-\rangle_{\mathbb{R}}\big)\\
&\equiv \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\big(\textstyle\bigwedge^\bullet \mathbb{R}^{\times p}\big)\,.
\end{aligned}$$

□

W podsumowaniu dotychczasowych rozważań klasyfikacyjnych otrzymujemy

Twierdzenie 5 (Klasyfikacyjne V $\mathbb{R}$ – „Szachownica Clifforda"). Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Tablica 1 zawiera klasyfikację algebr Clifforda $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}$ dla $p,q \in \overline{0,8}$ i tym samym określa $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}$ dla dowolnej sygnatury (p,q). W szczególności odczytujemy z niej tożsamości

$$\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,p+8k} \cong \mathbb{R}(2^{p+4k})\,,$$

$$\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,p-1+8k} \cong \mathbb{R}(2^{p+4k}) \oplus \mathbb{R}(2^{p+4k})\,, \qquad \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,p+1+8k} \cong \mathbb{C}(2^{p+4k})\,,$$

$$\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,p-2+8k} \cong \mathbb{R}(2^{p-1+4k})\,, \qquad \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,p+2+8k} \cong \mathbb{H}(2^{p+4k})\,,$$

$$\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,p-3+8k} \cong \mathbb{C}(2^{p-1+4k})\,, \qquad \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,p+3+8k} \cong \mathbb{H}(2^{p+4k}) \oplus \mathbb{H}(2^{p+4k})\,,$$

$$\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,p-4+8k} \cong \mathbb{H}(2^{p-3+4k})\,,$$

słuszne dla dowolnych $p,k,l \in \mathbb{Z}$, dla których powyższe formuły mają sens.

<u>*Dowód:*</u> Zawartość tabeli jest prostą konsekwencją Twierdzeń Klasyfikacyjnych I-IV $\mathbb{R}$, Stw. 9 oraz 7-8.2. Poniżej przedstawimy kilka spośród 81 rachunków szczegółowych, pozostawiając Czytelnika z elementarnym zadaniem sprawdzenia wszystkich pozostałych. Oto więc postać trywialnej algebry $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,0}$ wynika wprost z definicji algebry Clifforda, natomiast postać $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}$ dla $0 < p+q \leq 2$ odczytujemy ze Stw. 7-8.2. Zaczynamy więc od wyprowadzenia

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{3,0} &\equiv \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{1+2,0} \underset{1}{\cong} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{2,0} \underset{7\text{-}8.2\,(\mathrm{ii,iii})}{\cong} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \underset{3\text{-}4\text{-}5.5}{\cong} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \underset{9\,(\mathrm{i})}{\cong} \mathbb{C}(2)\,,\\
\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,3} &\equiv \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,1+2} \underset{1}{\cong} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{1,0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,2} \underset{7\text{-}8.2\,(\mathrm{i,iv})}{\cong} (\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \underset{3\text{-}4\text{-}5.7}{\cong} (\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H}) \oplus (\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H})\\
&\underset{9\,(\mathrm{i})}{\cong} \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\,,
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{4,0} \underset{2}{\cong} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,4} \equiv \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,2+2} \underset{1}{\cong} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{2,0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,2} \underset{7\text{-}8.2\,(\mathrm{iii,iv})}{\cong} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \underset{9\,(\mathrm{i})}{\cong} \mathbb{H}(2)\,.$$

(1)

Na podstawie powyższego wyznaczamy dalej

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{5,0} &\equiv \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{3+2,0} \underset{1}{\cong} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,3} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{2,0} \underset{(1),7\text{-}8.2\,(\mathrm{iii})}{\cong} (\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \\
&\underset{3\text{-}4\text{-}5.7}{\cong} \big(\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2)\big) \oplus \big(\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2)\big) \underset{3\text{-}4\text{-}5.5}{\cong} \big(\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}\big) \oplus \big(\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}\big) \\
&\underset{9\,(\mathrm{i})}{\cong} \mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)\,, \\
\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,5} &\equiv \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,3+2} \underset{1}{\cong} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{3,0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,2} \underset{(1),7\text{-}8.2\,(\mathrm{iv})}{\cong} \mathbb{C}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \underset{9\,(\mathrm{iii})}{\cong} (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \\
&\underset{3\text{-}4\text{-}5.6}{\cong} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \underset{9\,(\mathrm{iv})}{\cong} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(4) \underset{3\text{-}4\text{-}5.5}{\cong} \mathbb{R}(4) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \underset{9\,(\mathrm{i})}{\cong} \mathbb{C}(4)\,, \\
\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{6,0} &\equiv \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{4+2,0} \underset{1}{\cong} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,4} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{2,0} \underset{(1),7\text{-}8.2\,(\mathrm{iii})}{\cong} \mathbb{H}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \\
&\underset{3\text{-}4\text{-}5.5}{\cong} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}(2) \underset{9\,(\mathrm{i})}{\cong} \mathbb{H}(4)\,, \\
\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,6} &\equiv \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,4+2} \underset{1}{\cong} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{4,0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,2} \underset{(1),7\text{-}8.2\,(\mathrm{iv})}{\cong} (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \\
&\underset{3\text{-}4\text{-}5.6}{\cong} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \underset{9\,(\mathrm{iv})}{\cong} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(4) \underset{9\,(\mathrm{i})}{\cong} \mathbb{R}(8)\,.
\end{aligned}$$

(2)

Biorąc pod uwagę rezultaty ostatniego rachunku, otrzymujemy następnie

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{7,0} &\equiv \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{5+2,0} \underset{1}{\cong} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,5} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{2,0} \underset{(2),7\text{-}8.2\,(\mathrm{iii})}{\cong} \mathbb{C}(4) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \underset{3\text{-}4\text{-}5.5}{\cong} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}(4) \\
&\underset{9\,(\mathrm{i})}{\cong} \mathbb{C}(8)\,, \\
\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,7} &\equiv \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,5+2} \underset{1}{\cong} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{5,0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,2} \underset{(2),7\text{-}8.2\,(\mathrm{iv})}{\cong} \Big[\big(\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}\big) \oplus \big(\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}\big)\Big] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \\
&\underset{3\text{-}4\text{-}5.7}{\cong} \Big[\big(\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}\big) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}\Big] \oplus \Big[\big(\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}\big) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}\Big] \\
&\underset{3\text{-}4\text{-}5.6}{\cong} \big(\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H})\big) \oplus \big(\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H})\big) \\
&\underset{9\,(\mathrm{iv})}{\cong} \big(\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(4)\big) \oplus \big(\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(4)\big) \underset{9\,(\mathrm{i})}{\cong} \mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)\,, \\
\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,8} &\underset{2}{\cong} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{8,0} \equiv \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{6+2,0} \underset{1}{\cong} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,6} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{2,0} \underset{(2),7\text{-}8.2\,(\mathrm{iii})}{\cong} \mathbb{R}(8) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \underset{9\,(\mathrm{i})}{\cong} \mathbb{R}(16)\,.
\end{aligned}$$

(3)

Ostatnia składowa tezy dowodzonego twierdzenia broni się na podstawie następującej obserwacji, opartej na Tw. 1 (jak również 3-4-5.5 i 3-4-5.6), Stw. 7-8.2 (iii) i (iv) oraz 9 (i) i Równ. (3),

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p+8,q} &\cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{q,p+6} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{2,0} \cong \big(\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p+4,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,2}\big) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{2,0} \cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p+4,q} \otimes_{\mathbb{R}} \big(\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{2,0}\big) \\
&\cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \Big(\big(\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{2,0}\big) \otimes_{\mathbb{R}} \big(\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{2,0}\big)\Big) \cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{8,0} \\
&\cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(16)\,, \\
\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q+8} &\cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{q+6,p} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,2} \cong \big(\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q+4} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{2,0}\big) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,2} \cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q+4} \otimes_{\mathbb{R}} \big(\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{2,0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,2}\big) \\
&\cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \Big(\big(\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{2,0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,2}\big) \otimes_{\mathbb{R}} \big(\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{2,0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,2}\big)\Big) \cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{0,8} \\
&\cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(16)\,.
\end{aligned}$$

□

Rzut oka na Tablicę 1 przekonuje nas, że wszystkie rzeczywiste algebry Clifforda są – w świetle Stw. 5-6.3 – proste lub półproste, przy czym w tym drugim przypadku mamy do czynienia z sumami prostymi dwóch algebr prostych. Łatwo dostrzegalne prawidłowości w lokalizacji algebr półprostych pośród rzeczywistych algebr Clifforda (i w szczególności w obrębie „szachownicy Clifforda") oraz ich strukturę można bez trudu wyjaśnić w odwołaniu do konstrukcji elementu kanonicznego. Wprowadźmy pojęcie

Definicja 1. Przyjmijmy zapis Stw. 1 i niechaj $\{e_i\}_{i\in\overline{1,p+q}}$ będzie bazą standardową $\mathbb{R}^{\times p}\oplus\mathbb{R}^{\times q}$, (pseudo)ortonormalną względem formy kwadratowej $\delta_{\rm E}^{(p,q)}$. **Element objętości** w $\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ to wektor

$$\omega_{\mathbb{R}} \coloneqq e_1.e_2.\cdots.e_{p+q}\,.$$

Możemy już teraz wysłowić wyjaśniające zaobserwowane regularności

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Dla dowolnej pary $(p,q)\in\mathbb{N}^{\times 2}$ prawdziwą jest równoważność

$$\omega_{\mathbb{R}}^2 = e^{\rm C} \qquad\Longleftrightarrow\qquad (p+q+1)(p+q)-2p\in 4\mathbb{N}\,.$$

W jej konsekwencji dla dowolnej sygnatury spełniającej warunek

$$q-p=3 \mod 4 \tag{4}$$

istnieje rozkład

$$\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} = \mathrm{Cl}_{p,q}^{+}\oplus\mathrm{Cl}_{p,q}^{-} \tag{5}$$

algebry Clifforda $\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ na sumę prostą jej podalgebr (zredukowanych)

$$\mathrm{Cl}_{p,q}^{\pm} \coloneqq P_{\omega_{\mathbb{R}}}^{\pm}.\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}\,,$$

o elementach spełniających warunki – odpowiednio – **samodwoistości** (lub inaczej **samodualności**)

$$\forall_{\gamma\in\mathrm{Cl}_{p,q}^{+}}\;:\;\omega_{\mathbb{R}}.\gamma=\gamma\,,$$

wzgl. **skośnej samodwoistości** (lub inaczej **antysamodualności**)

$$\forall_{\gamma\in\mathrm{Cl}_{p,q}^{-}}\;:\;\omega_{\mathbb{R}}.\gamma=-\gamma\,.$$

Zachodzą relacje:

$$J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}\big(\mathrm{Cl}_{p,q}^{\pm}\big)=\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mp} \tag{6}$$

oraz

$$\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}\,0}=\big(\mathrm{id}_{\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}}+J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}\big)\big(\mathrm{Cl}_{p,q}^{\pm}\big)\,. \tag{7}$$

Rozkład ten pokrywa się z rozkładem półprostej $\mathbb{R}$-algebry $\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ na składowe proste wynikającym z Tw. 5 (ukazanym w Tablicy 1), tj. dla dowolnych $k,l\in\mathbb{Z}$ o własnościach $p+3+8k, p+7+8l\geq 0$ istnieją izomorfizmy $\mathbb{R}$-algebr prostych

$$\mathrm{Cl}_{p,p+3+8k}^{\pm}\cong\mathbb{H}\big(2^{p+4k}\big)\,,\qquad\qquad \mathrm{Cl}_{p,p+7+8l}^{\pm}\cong\mathbb{R}\big(2^{p+3+4l}\big)\,. \tag{8}$$

<u>*Dowód:*</u> Pierwszą część tezy sprawdzamy w bezpośrednim rachunku, wykorzystującym ortonormalność bazy standardowej,

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbb{R}}^2 &= e_1.e_2.\cdots.e_{p+q}.e_1.e_2.\cdots.e_{p+q} = (-1)^{\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}}\,e_1^2.e_2^2.\cdots.e_{p+q}^2\\ &= (-1)^{\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}+q}\,e^{\rm C} = (-1)^{\frac{(p+q)^2-p+q}{2}}\,e^{\rm C}\,,\end{aligned}$$

z którego wynika wprost dowodzony postulat. Przy tym zgodnie z tezą Tw. 9-10.1 $\omega_{\mathbb{R}}$ jest elementem centralnym tylko dla $p+q \in 2\mathbb{N}+1$, co w świetle Stw. 5-6.6 prowadzi do rozkładu jak w Równ. (5), kiedy dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ spełniony jest układ warunków

$$p+q = 2k+1 \qquad \wedge \qquad 2k+2q \in 4\mathbb{N}\,.$$

Po podstawieniu pierwszego z nich do drugiego otrzymujemy warunek (4) jako rozwiązanie układu. Relacja (6) jest następstwem oczywistej tożsamości

$$J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}\big(P^{\pm}_{\omega_{\mathbb{R}}}\big) = P^{\mp}_{\omega_{\mathbb{R}}} \qquad \Longleftarrow \qquad J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\omega_{\mathbb{R}}) = -\omega_{\mathbb{R}}\,.$$

Istotnie, na jej podstawie wyprowadzamy relacje

$$J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}\big(\mathrm{Cl}^{\pm}_{p,q}\big) \subset \mathrm{Cl}^{\mp}_{p,q}\,,$$

a ewaluując na tych ostatnich obustronnie $J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}$ – także relacje odwrotne

$$\mathrm{Cl}^{\pm}_{p,q} \subset J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}\big(\mathrm{Cl}^{\mp}_{p,q}\big)\,.$$

Z kolei relację (7) wyprowadzamy z następujących obserwacji. Z jednej strony zachodzi

$$J_{\mathbb{R}^{\times p+q}} \circ \big(\mathrm{id}_{\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}} + J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}\big) = \big(\mathrm{id}_{\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}} + J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}\big)$$

$$\Longrightarrow \qquad \big(\mathrm{id}_{\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}} + J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}\big)\big(\mathrm{Cl}^{\pm}_{p,q}\big) \subset \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q}\,.$$

Z drugiej strony niechaj $\gamma_0 = (\gamma_0^+, \gamma_0^-)$ będzie rozkładem elementu $\gamma_0 \in \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q}$ na składowe z $\mathrm{Cl}^{\pm}_{p,q} \ni \gamma_0^{\pm}$, a wówczas – wobec (6) – otrzymujemy równość

$$(\gamma_0^+, \gamma_0^-) = \gamma_0 = J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\gamma_0) = \big(J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\gamma_0^-), J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\gamma_0^+)\big)\,,$$

z której już wprost wynika wniosek, że

$$\gamma_0 = (\gamma_0^+, \gamma_0^-) = \big(\gamma_0^+, J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\gamma_0^+)\big) \in \big(\mathrm{id}_{\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}} + J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}\big)\big(\mathrm{Cl}^{+}_{p,q}\big)$$

oraz

$$\gamma_0 = (\gamma_0^+, \gamma_0^-) = \big(J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\gamma_0^-), \gamma_0^-\big) \in \big(\mathrm{id}_{\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}} + J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}\big)\big(\mathrm{Cl}^{-}_{p,q}\big)\,.$$

Ażeby przekonać się, że wskazany rozkład pokrywa się z rozkładem algebry Clifforda na podalgebry proste, wystarczy zauważyć, że przewidziane przez Tw. 5 (w połączeniu z powyższymi ustaleniami) izomorfizmy $\mathbb{R}$-algebr

$$\imath_3 \quad : \quad \mathbb{H}\big(2^{p+4k}\big) \oplus \mathbb{H}\big(2^{p+4k}\big) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Cl}^{+}_{p,p+8k+3} \oplus \mathrm{Cl}^{-}_{p,p+8k+3}\,,$$

$$\imath_7 \quad : \quad \mathbb{R}\big(2^{p+4l+3}\big) \oplus \mathbb{R}\big(2^{p+4l+3}\big) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Cl}^{+}_{p,p+8l+7} \oplus \mathrm{Cl}^{-}_{p,p+8l+7}$$

odwzorowują *proste* składniki $\mathbb{H}\big(2^{p+4k}\big)$ wzgl. $\mathbb{R}\big(2^{p+4l+3}\big)$ dziedziny w *takież* podalgebry przeciwdziedziny, gdyby zatem istniały nietrywialne rozkłady

$$\mathfrak{M}_3 \quad := \quad \imath_3\big(\mathbb{H}\big(2^{p+4k}\big) \oplus \{\mathbf{0}_{2^{p+4k}}\}\big) = \mathfrak{M}_3 \cap \mathrm{Cl}^{+}_{p,p+8k+3} \oplus \mathfrak{M}_3 \cap \mathrm{Cl}^{-}_{p,p+8k+3}\,,$$

$$\mathfrak{M}_7 \quad := \quad \imath_7\big(\mathbb{R}\big(2^{p+4l+3}\big) \oplus \{\mathbf{0}_{2^{p+4l+3}}\}\big) = \mathfrak{M}_7 \cap \mathrm{Cl}^{+}_{p,p+8l+7} \oplus \mathfrak{M}_7 \cap \mathrm{Cl}^{-}_{p,p+8l+7}\,,$$

to każdy ze składników prostych po prawej stronie powyższych równości byłby nietrywialnym obustronnym ideałem w odnośnej algebrze $\mathfrak{M}_m$, $m \in \{3,7\}$, a to z tej racji, że składniki proste w rozkładzie (5) są podalgebrami, zatem

$$\big(\mathfrak{M}_m \cap \mathrm{Cl}^{\pm}_{p,p+8k+m}\big).\big(\mathfrak{M}_m \cap \mathrm{Cl}^{\pm}_{p,p+8k+m}\big) \subseteq \mathfrak{M}_m \cap \mathrm{Cl}^{\pm}_{p,p+8k+m}\,,$$

$$\big(\mathfrak{M}_m \cap \mathrm{Cl}^{\pm}_{p,p+8k+m}\big).\big(\mathfrak{M}_m \cap \mathrm{Cl}^{\mp}_{p,p+8k+m}\big) = \{0_{\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,p+8k+m}}\}$$

$$\subseteq \big(\mathfrak{M}_m \cap \mathrm{Cl}^{\pm}_{p,p+8k+m}\big) \cap \big(\mathfrak{M}_m \cap \mathrm{Cl}^{\mp}_{p,p+8k+m}\big)\,.$$

To jednak leży w sprzeczności z prostotą $\mathfrak{M}_m$, wnioskujemy zatem, że albo $\mathfrak{M}_m \subseteq \mathrm{Cl}^{+}_{p,p+8k+m}$, albo też $\mathfrak{M}_m \subseteq \mathrm{Cl}^{-}_{p,p+8k+m}$. Teza jest teraz natychmiastową konsekwencją rachunku wymiarów. $\square$

Zanim przejdziemy do dyskusji zespolonych algebr Clifforda, zatrzymamy się nad jednym jeszcze wynikiem strukturalnym dotyczącym algebr rzeczywistych, który odegra niebagatelną rolę w rachunku spinorowym. Oto więc mamy

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Dla dowolnej sygnatury $(p,q) \in \mathbb{N}^{\times 2}$ istnieje unitalny izomorfizm $\mathbb{R}$-algebr

$$\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q+1}\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Wybierzmy w $\mathbb{R}^{p,q+1}$ (o formie kwadratowej $Q = \delta_{\mathrm{E}}^{(p,q+1)}$) bazę standardową (pseudo)ortonormalną $\{e_i\}_{i\in\overline{1,p+q+1}}$ uporządkowaną tak, że wektory $e_j,\ j\in\overline{1,p}$ rozpinają podprzestrzeń o sygnaturze $(p,0)$, a pozostałe wektory $e_k,\ k\in\overline{p+1,p+q+1}$ – podprzestrzeń o sygnaturze $(0,q+1)$. Następnie zdefiniujmy podprzestrzeń

$$\mathbb{R}^{p+q} := \bigoplus_{i=1}^{p+q} \langle e_i \rangle_{\mathbb{R}}\,,$$

a na niej – odwzorowanie

$$\varphi\ :\ \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q+1}\ :\ v \longmapsto v.e_{p+q+1}\,,$$

które ma własność Clifforda, co pokazujemy – dla dowolnego wektora $v := \sum_{i=1}^{p+q} \lambda^i \triangleright e_i \in \mathbb{R}^{p+q}$ – w bezpośrednim rachunku:

$$\begin{aligned}\varphi(v)^2 &= \sum_{i,j=1}^{p+q} \lambda^i\cdot\lambda^j \triangleright e_i.e_{p+q+1}.e_j.e_{p+q+1} = -\sum_{i,j=1}^{p+q} \lambda^i\cdot\lambda^j \triangleright e_i.e_j.e_{p+q+1}^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{p+q} \lambda^i\cdot\lambda^j \triangleright e_i.e_j \equiv \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p+q} \lambda^i\cdot\lambda^j \triangleright \{e_i,e_j\} = Q(v)\triangleright e^{\mathrm{C}}\,.\end{aligned}$$

To gwarantuje istnienie unitalnego homomorfizmu $\mathbb{R}$-algebr

$$\widetilde{\varphi}\ :\ \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \longrightarrow \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q+1}\,,$$

przy czym dowolny generator $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q+1}$ otrzymujemy z elementu dziedziny w następujący sposób: dla $1\le i<j\le p+q$ mamy

$$e_i.e_j = \widetilde{\varphi}(e_i).\widetilde{\varphi}(e_j) = \widetilde{\varphi}(e_i.e_j)\,,$$

a dla $1\le k\le p+q$ jest

$$e_k.e_{p+q+1} = \widetilde{\varphi}(e_k)\,.$$

Jest zatem $\widetilde{\varphi}$ epimorfizmem, a ponieważ $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q+1} = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}$, co wynika wprost z równości (słusznej dla $\dim_{\mathbb{K}} V = N$, a stosującej się tutaj dla $N = p+q+1$)

$$\begin{aligned}0 &= (1-1)^N = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k\, 1^{N-k} \binom{N}{k} = \sum_{k\in\overline{0,N}\cap 2\mathbb{N}} \binom{N}{k} - \sum_{k\in\overline{0,N}\cap 2\mathbb{N}+1} \binom{N}{k} \\ &\equiv \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Cliff}(V,Q)^0 - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Cliff}(V,Q)^1\,,\end{aligned}$$

przeto odwzorowanie to jest poszukiwanym izomorfizmem. □

Poklasyfikowawszy rzeczywiste algebry Clifforda, przejdziemy obecnie do analizy ich zespolonych odpowiedników.

2. Zespolone algebry Clifforda w skończonym wymiarze

Bestiarium niezwyrodniałych algebr Clifforda nad zespolonymi przestrzeniami kwadratowymi oswaja i systematyzuje poniższe

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Algebra Clifforda dowolnej zespolonej przestrzeni kwadratowej wyposażonej w niezwyrodniałą formę kwadratową rzędu $n \in \mathbb{N}$ jest izomorficzna z algebrą Clifforda przestrzeni $\mathbb{C}^{\times n}$ z euklidesową formą kwadratową $\delta_{\mathrm{E}}^{(n)}$. Tę ostatnią algebrę Clifforda oznaczamy symbolem

$$\mathrm{Cliff}\big(\mathbb{C}^{\times n}, \delta_{\mathrm{E}}^{(n)}\big) \equiv \mathrm{Cl}_n^{\mathbb{C}}\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Wynika wprost z istnienia izometrycznej izometrii pomiędzy dowolnymi dwiema niezwyrodniałymi przestrzeniami kwadratowymi tego samego wymiaru oraz ze Stw. 7-8.8. □

Stwierdzenie to pozwala udzielić natychmiastowej odpowiedzi na pytanie o postać zespolonych algebr Clifforda na gruncie dotychczasowych naszych rezultatów dotyczących rzeczywistych algebr Clifforda, co dowodnie pokazuje

Twierdzenie 6 (O naturalności kompleksyfikacji algebr Clifforda)**.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\mathbf{CliffAlg}_{\mathbb{K}}$ będzie kategorią algebr Clifforda nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, stanowiącą podkategorię kategorii $\mathbf{uAssAlg}_{\mathbb{K}}$. Istnieje izomorfizm naturalny

$$\begin{tikzcd} \square\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \arrow[r, "(\cdot)^{\mathbb{C}}"] \arrow[d, "\mathrm{Cliff}"'] & \square\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}} \arrow[d, "\mathrm{Cliff}"] \arrow[dl, Rightarrow, "\eta."'] \\ \mathbf{CliffAlg}_{\mathbb{R}} \arrow[r, "(\cdot)^{\mathbb{C}}\restriction_{\mathbf{CliffAlg}_{\mathbb{R}}}"'] & \mathbf{CliffAlg}_{\mathbb{C}} \end{tikzcd}\,.$$

W szczególności więc dla dowolnego $p \in \overline{0,n}$ istnieje unitalny izomorfizm $\mathbb{C}$-algebr

$$\mathrm{Cl}_n^{\mathbb{C}} \cong \mathrm{Cl}_{p,n-p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Kanoniczny monomorfizm przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowych

$$\jmath_V \;:\; V \rightarrowtail V^{\mathbb{C}} \equiv V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \;:\; v \longmapsto v \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)$$

jest izometrią (w odniesieniu do stosownego ograniczenia skompleksyfikowanej formy kwadratowej $Q^{\mathbb{C}}$ z Def. 3) na obraz, niosący naturalną strukturę przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowej. Istotnie,

$$Q^{\mathbb{C}} \circ \jmath_V(v) \equiv \jmath_{\mathbb{R}} \circ Q(v) \cdot (1,0)^2 = \jmath_{\mathbb{R}} \circ Q(v) \equiv Q(v)\,.$$

W świetle Stw. 7-8.8 istnieje zatem funktorialne podniesienie $\jmath_V\restriction$ (ko-obciętego do swego obrazu, co oznaczamy symbolem $\restriction$) do unitalnego izomorfizmu $\mathbb{R}$-algebr

$$\mathrm{Cliff}(\jmath_V\restriction) \;:\; \mathrm{Cliff}(V,Q) \rightarrowtail \mathrm{Cliff}\big(\mathrm{Image}\,\jmath_V, Q^{\mathbb{C}}\restriction_{\mathrm{Image}\,\jmath_V}\big) \subset \mathrm{Cliff}\big(V^{\mathbb{C}}, Q^{\mathbb{C}}\big)\,,$$

który naturalnie (trywialnie) rozszerza się do monomorfizmu $\mathbb{R}$-algebr

$$\underline{\varphi}_{(V,Q)} \;:\; \mathrm{Cliff}(V,Q) \rightarrowtail \mathrm{Cliff}\big(V^{\mathbb{C}}, Q^{\mathbb{C}}\big)\,,$$

jako że $\mathrm{Image}\,\jmath_V$ generuje podalgebrę (unitalną, nad $\mathbb{R}$) w $\mathrm{Cliff}\big(V^{\mathbb{C}}, Q^{\mathbb{C}}\big)$. To rozszerzenie możemy następnie wykorzystać do skonstruowania odwzorowania $\mathbb{C}$-liniowego

$$\varphi_{(V,Q)} \;:\; \mathrm{Cliff}(V,Q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{Cliff}\big(V^{\mathbb{C}}, Q^{\mathbb{C}}\big)\,,$$

określonego na tensorach prostych $\gamma \otimes_{\mathbb{R}} z \in \mathrm{Cliff}(V,Q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ wzorem

$$\varphi_{(V,Q)}(\gamma \otimes_{\mathbb{R}} z) \coloneqq z \triangleright \underline{\varphi}_{(V,Q)}(\gamma)\,.$$

Odwzorowanie to spełnia warunek

$$\begin{aligned} \varphi_{(V,Q)} \circ m_{\otimes}\big((\gamma_1 \otimes_{\mathbb{R}} z_1), (\gamma_2 \otimes_{\mathbb{R}} z_2)\big) &= \varphi_{(V,Q)}(\gamma_1.\gamma_2 \otimes_{\mathbb{R}} z_1 \cdot_{\mathbb{C}} z_2) = (z_1 \cdot_{\mathbb{C}} z_2) \triangleright \underline{\varphi}_{(V,Q)}(\gamma_1.\gamma_2) \\ &= (z_1 \cdot_{\mathbb{C}} z_2) \triangleright \big(\underline{\varphi}_{(V,Q)}(\gamma_1) \cdot_{\mathbb{C}} \underline{\varphi}_{(V,Q)}(\gamma_2)\big) \\ &= \big(z_1 \triangleright \underline{\varphi}_{(V,Q)}(\gamma_1)\big) . \big(z_2 \triangleright \underline{\varphi}_{(V,Q)}(\gamma_2)\big) \end{aligned}$$

$$\equiv \quad \varphi_{(V,Q)}\big(\gamma_1 \otimes_{\mathbb{R}} z_1\big).\varphi_{(V,Q)}\big(\gamma_2 \otimes_{\mathbb{R}} z_2\big)\,,$$

jest zatem (jawnie unitalnym) homomorfizmem $\mathbb{C}$-algebr. Punktem wyjścia do konstrukcji jego odwrotności jest odwzorowanie $\mathbb{C}$-liniowe

$$\begin{aligned}\psi_{(V,Q)} \quad &: \quad V^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{Cliff}(V,Q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\ &: \quad v \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) \longmapsto \jmath_V^{\mathrm{C}}(v) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) + \jmath_V^{\mathrm{C}}(w) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)\,,\end{aligned}$$

spełniające warunek Clifforda,

$$\begin{aligned}&\psi_{(V,Q)}\big(v \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)\big)^2 \\ = \quad &\big(\jmath_V^{\mathrm{C}}(v) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) + \jmath_V^{\mathrm{C}}(w) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)\big).\big(\jmath_V^{\mathrm{C}}(v) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) + \jmath_V^{\mathrm{C}}(w) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)\big) \\ = \quad &v^2 \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)^2 + \{v,w\} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) \cdot_{\mathbb{C}} (0,1) + w^2 \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)^2 \\ = \quad &\big(Q(v) - Q(w)\big) \triangleright e^{\mathrm{C}} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) + 2\Phi_Q(v,w) \triangleright e^{\mathrm{C}} \otimes_{\mathbb{R}} (0,1) \\ = \quad &e^{\mathrm{C}} \otimes_{\mathbb{R}} \big(Q(v) - Q(w), 2\Phi_Q(v,w)\big) \\ = \quad &Q^{\mathbb{C}}\big(v \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)\big) \triangleright \big(e^{\mathrm{C}} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)\big) \\ \equiv \quad &Q^{\mathbb{C}}\big(v \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)\big) \triangleright e_{\otimes}^{\mathrm{C}}\,,\end{aligned}$$

w którego wyprowadzeniu korzystamy z tożsamości

$$\begin{aligned}&Q^{\mathbb{C}}\big(v \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)\big) \\ \equiv \quad &\Phi_{Q^{\mathbb{C}}}\big(v \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0,1), v \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)\big) \\ = \quad &\Phi_{Q^{\mathbb{C}}}\big(v \otimes_{\mathbb{R}} (1,0), v \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)\big) + \Phi_{Q^{\mathbb{C}}}\big(w \otimes_{\mathbb{R}} (0,1), w \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)\big) \\ &+2\Phi_{Q^{\mathbb{C}}}\big(v \otimes_{\mathbb{R}} (1,0), w \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)\big) \\ \equiv \quad &Q^{\mathbb{C}}\big(v \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)\big) + Q^{\mathbb{C}}\big(w \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)\big) + 2\Phi_{Q^{\mathbb{C}}}\big(v \otimes_{\mathbb{R}} (1,0), w \otimes_{\mathbb{R}} (0,1)\big) \\ = \quad &(1,0)^2 \cdot_{\mathbb{C}} Q(v) + (0,1)^2 \cdot_{\mathbb{C}} Q(w) + (1,0) \cdot_{\mathbb{C}} (0,1) \cdot_{\mathbb{C}} 2\Phi_Q(v,w) \\ = \quad &\big(Q(v) - Q(w), 2\Phi_Q(v,w)\big)\,.\end{aligned}$$

Powyższe przesądza o istnieniu (jedynego) unitalnego homomorfizmu $\mathbb{C}$-algebr

$$\widetilde{\psi}_{(V,Q)} \;:\; \mathrm{Cliff}\big(V^{\mathbb{C}}, Q^{\mathbb{C}}\big) \longrightarrow \mathrm{Cliff}(V,Q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

o własności

$$\widetilde{\psi}_{(V,Q)} \circ \jmath_{V^{\mathbb{C}}}^{\mathrm{C}}(v \otimes_{\mathbb{R}} z) = \jmath_V^{\mathrm{C}}(v) \otimes_{\mathbb{R}} z\,.$$

Ten ostatni w oczywisty sposób spełnia tożsamości

$$\widetilde{\psi}_{(V,Q)} \circ \varphi_{(V,Q)} = \mathrm{id}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}}\,, \qquad \varphi_{(V,Q)} \circ \widetilde{\psi}_{(V,Q)} = \mathrm{id}_{\mathrm{Cliff}\left(V^{\mathbb{C}},Q^{\mathbb{C}}\right)}\,,$$

które bez trudu sprawdzamy na generatorach, i tym samym zyskuje interpretację odwrotności $\varphi_{(V,Q)}$. Dla dowolnej rzeczywistej przestrzeni kwadratowej otrzymujemy zatem unitalny izomorfizm $\mathbb{C}$-algebr

$$\eta_{(V,Q)} := \widetilde{\psi}_{(V,Q)} \;:\; \mathrm{Cliff}\big(V^{\mathbb{C}}, Q^{\mathbb{C}}\big) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Cliff}(V,Q)^{\mathbb{C}}\,.$$

Łatwo sprawdzamy (na generatorach $v \otimes_{\mathbb{R}} z \in V_1 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$) jego naturalność licząc – dla dowolnej izometrii $\chi : V_1 \longrightarrow V_2$ między parą rzeczywistych przestrzeni kwadratowych (o odnośnych formach kwadratowych Q_1 i Q_2) –

$$\begin{aligned}
\eta_{(V_2,Q_2)} \circ \mathrm{Cliff}\big(\chi^{\mathbb{C}}\big) \circ \jmath^{\mathrm{C}}_{V_1^{\mathbb{C}}}(v \otimes_{\mathbb{R}} z) &= \eta_{(V_2,Q_2)} \circ \jmath^{\mathrm{C}}_{V_2^{\mathbb{C}}} \circ \chi^{\mathbb{C}}(v \otimes_{\mathbb{R}} z) \\
&= \eta_{(V_2,Q_2)} \circ \jmath^{\mathrm{C}}_{V_2^{\mathbb{C}}}\big(\chi(v) \otimes_{\mathbb{R}} z\big) = \jmath^{\mathrm{C}}_{V_2} \circ \chi(v) \otimes_{\mathbb{R}} z \\
&\equiv \mathrm{Cliff}(\chi) \circ \jmath^{\mathrm{C}}_{V_1}(v) \otimes_{\mathbb{R}} z \\
&= \mathrm{Cliff}(\chi)^{\mathbb{C}}\big(\jmath^{\mathrm{C}}_{V_1}(v) \otimes_{\mathbb{R}} z\big) \\
&\equiv \mathrm{Cliff}(\chi)^{\mathbb{C}} \circ \eta_{(V_1,Q_1)} \circ \jmath^{\mathrm{C}}_{V_1^{\mathbb{C}}}(v \otimes_{\mathbb{R}} z)\,.
\end{aligned}$$

□

Powyższe twierdzenie pozwala ustalić postać niskowymiarowych zespolonych algebr Clifforda i sformułować reguły (pseudo)okresowości ich struktury na podstawie wcześniejszych twierdzeń klasyfikacyjnych z dziedziny rzeczywistej. Nie daje nam ono natomiast wglądu w dodatkowe strukturalne relacje między zespolonymi algebrami Clifforda nie będące prostą pochodną relacji między ich rzeczywistymi odpowiednikami. Ta konstatacja każe nam poświęcić więcej jeszcze czasu i uwagi na bezpośrednie zbadanie interesującej nas struktury i zarezerwować dla powyższego twierdzenia rolę wyniku porządkującego i wyjaśniającego ledwie część prawidłowości, jakie wyłonią się ostatecznie z naszych rozważań. Oto więc mamy

Twierdzenie 7 (Klasyfikacyjne I $\mathbb{C}$)**.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ istnieje unitalny izomorfizm $\mathbb{C}$-algebr

$$\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_{2m+n} \cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_{2m} \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_{n}\,.$$

Dowód: Zauważmy przede wszystkim, że wobec algebraicznej domkniętości $\mathbb{C}$ na dowolnej przestrzeni $\mathbb{C}^{\times N}$, $N \in \mathbb{N}$ istnieje wyznacznik (unormowany) o własności $\lambda_\Delta = 1$, przy czym jest on określony z dokładnością do znaku. Na mocy Stw. 6.2 odnośny element kanoniczny $\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_N$ spełnia tożsamość

$$e_\Delta^2 = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}\, e^{\mathrm{C}}\,,$$

wobec czego dla $N = 2m+n$ otrzymujemy – w świetle Stw. 4 i Tw. 6.3 – pożądany ciąg izomorfizmów

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_{2m+n} &\equiv \mathrm{Cliff}\big(\mathbb{C}^{\times 2m+n}, \delta_{\mathrm{E}}^{(2m+n)}\big) = \mathrm{Cliff}\big(\mathbb{C}^{\times 2m} \oplus \mathbb{C}^{\times n}, \delta_{\mathrm{E}}^{(2m)} \oplus \delta_{\mathrm{E}}^{(n)}\big) \\
&\cong \mathrm{Cliff}\big(\mathbb{C}^{\times 2m} \oplus \mathbb{C}^{\times n}, \delta_{\mathrm{E}}^{(2m)} \oplus (-1)^{\frac{2m(2m-1)}{2}}\, \delta_{\mathrm{E}}^{(n)}\big) \\
&\cong \mathrm{Cliff}\big(\mathbb{C}^{\times 2m}, \delta_{\mathrm{E}}^{(2m)}\big) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Cliff}\big(\mathbb{C}^{\times n}, \delta_{\mathrm{E}}^{(n)}\big) \equiv \mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_{2m} \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_{n}\,.
\end{aligned}$$

□

Ostatnie stwierdzenie w połączeniu ze Stw. 7-8.2 (vi) pozwala nam sprowadzić zadanie klasyfikacji zespolonych algebr Clifforda do konstrukcji modelu algebry Clifforda (dowolnej) euklidesowej przestrzeni $\mathbb{C}$-liniowej parzystego wymiaru. Tę oczywistą tezę precyzuje

Twierdzenie 8 (Klasyfikacyjne II $\mathbb{C}$)**.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ istnieje unitalny izomorfizm $\mathbb{C}$-algebr

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_{2m} &\cong \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\big(\textstyle\bigwedge^\bullet \mathbb{C}^{\times m}\big) \equiv \mathbb{C}(2^m)\,, \\
\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_{2m+1} &\cong \mathbb{C}(2^m) \oplus \mathbb{C}(2^m)\,.
\end{aligned}$$

Dowód: Drugi z postulowanych izomorfizmów jest bezpośrednim następstwem pierwszego z nich, Tw. 7 (dla $n = 1$) oraz Stw. 7-8.2 (vi), wystarczy zatem udowodnić istnienie pierwszego z nich. W tym celu dokonujemy (dowolnego) rozkładu $\delta_{\rm E}^{(2m)}$-ortogonalnego

$$\mathbb{C}^{\times 2m} \cong \mathbb{C}^{\times m} \textcircled{\perp}_{\delta_{\rm E}^{(2m)}} \mathbb{C}^{\times m}\,,$$

wybierając przy tym bazy ortonormalne $\{e_i^A\}_{i\in\overline{1,m}}$, $A \in \{1,2\}$ w każdej z kopii $\mathbb{C}^{\times m}$ w tym rozkładzie. Następnie definiujemy inwolucję $\omega \in {\rm End}_{\mathbb{C}}\big(\mathbb{C}^{\times 2m}\big)$ jako (jedyne) $\mathbb{C}$-liniowe rozszerzenie przyporządkowania elementów baz:

$$\begin{aligned} \omega \quad &: \quad e_i^1 \longmapsto (0,1) \triangleright e_i^2\,, \\ &: \quad e_i^2 \longmapsto (0,-1) \triangleright e_i^1\,, \qquad i \in \overline{1,m}\,. \end{aligned}$$

Bez trudu stwierdzamy, że odwzorowanie to jest skośnie symetryczne, oto bowiem – dla dowolnych $i,j \in \overline{1,m}$ –

$$\begin{aligned} \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(\omega^*\big(e_i^1\big), e_j^1\big) \quad &\equiv \quad \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(e_i^1, \omega\big(e_j^1\big)\big) = \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(e_i^1, (0,1) \triangleright e_j^2\big) = (0,1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(e_i^1, e_j^2\big) = 0 \\ &= \quad -(0,1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(e_i^2, e_j^1\big) = \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(-(0,1) \triangleright e_i^2, e_j^1\big) \equiv \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(-\omega\big(e_i^1\big), e_j^1\big)\,, \\ \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(\omega^*\big(e_i^2\big), e_j^2\big) \quad &\equiv \quad \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(e_i^2, \omega\big(e_j^2\big)\big) = \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(e_i^2, (0,-1) \triangleright e_j^1\big) = (0,-1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(e_i^2, e_j^1\big) \\ &= \quad 0 = (0,1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(e_i^1, e_j^2\big) = \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big((0,1) \triangleright e_i^1, e_j^2\big) \equiv \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(-\omega\big(e_i^2\big), e_j^2\big) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(\omega^*\big(e_i^1\big), e_j^2\big) \quad &\equiv \quad \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(e_i^1, \omega\big(e_j^2\big)\big) = \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(e_i^1, (0,-1) \triangleright e_j^1\big) = (0,-1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(e_i^1, e_j^1\big) \\ &= \quad (0,-1) \triangleright \delta_{ij} = (0,-1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(e_i^2, e_j^2\big) = \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big((0,-1) \triangleright e_i^2, e_j^2\big) \\ &\equiv \quad \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(-\omega\big(e_i^1\big), e_j^2\big)\,, \\ \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(\omega^*\big(e_i^2\big), e_j^1\big) \quad &\equiv \quad \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(e_i^2, \omega\big(e_j^1\big)\big) = \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(e_i^2, (0,1) \triangleright e_j^2\big) = (0,1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(e_i^2, e_j^2\big) \\ &= \quad (0,1) \cdot_{\mathbb{C}} \delta_{ij} = (0,1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(e_i^1, e_j^1\big) = \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big((0,1) \triangleright e_i^1, e_j^1\big) \\ &\equiv \quad \Phi_{\delta_{\rm E}^{(2m)}}\big(-\omega\big(e_i^2\big), e_j^1\big)\,. \end{aligned}$$

Wobec tej jego własności możemy przywołać tezę Stw. 9-10.4, która w obecnej sytuacji daje nam izomorfizm

$$C_{2m}^{\mathbb{C}} \equiv {\rm Cliff}\big(\mathbb{C}^{\times 2m}, \delta_{\rm E}^{(2m)}\big) \cong {\rm End}_{\mathbb{C}}\big(\textstyle\bigwedge^\bullet {\rm Ker}\,(\omega - {\rm id}_{\mathbb{C}^{\times 2m}})\big)\,.$$

Ten z racji oczywistej równości

$$\dim_{\mathbb{C}} {\rm Ker}\,(\omega - {\rm id}_{\mathbb{C}^{\times 2m}}) \equiv \dim_{\mathbb{C}} \big(\bigoplus_{i=1}^m \big\langle e_i^1 + (0,1) \triangleright e_i^2 \big\rangle_{\mathbb{C}}\big) = m$$

jest izomorfizmem, o którym mowa w treści dowodzonego twierdzenia. □

Dyskusję naszą rekapituluje

Twierdzenie 9 (Klasyfikacyjne III $\mathbb{C}$)**.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Tablica 2 zawiera klasyfikację algebr Clifforda ${\rm Cl}_n^{\mathbb{C}}$ dla $n \in \overline{0,8}$ i tym samym określa ${\rm Cl}_n^{\mathbb{C}}$ dla dowolnego n. Istnieją zatem – dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ – izomorfizmy $\mathbb{C}$-algebr

$${\rm Cl}_{2m}^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}(2^m)\,, \qquad\qquad {\rm Cl}_{2m+1}^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}(2^m) \oplus \mathbb{C}(2^m)\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Teza twierdzenia wynika bezpośrednio z Tw. 8. Można ją też wyprowadzić z Tw. 5, przywoławszy na pomoc Tw. 6. □

Prawidłowości w rozmieszczeniu algebr półprostych pośród zespolonych algebr Clifforda (i w szczególności w Tablicy 2) oraz ich strukturę tłumaczymy – tak jak w przypadku rzeczywistym – przy użyciu stosownego elementu kanonicznego.

Definicja 2. Przyjmijmy zapis Stw. 4 i niechaj $\{e_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ będzie bazą standardową $\mathbb{C}^{\times n}$, ortonormalną względem formy kwadratowej $\delta_{\mathrm{E}}^{(n)}$. **Element objętości** w $\mathrm{Cl}_n^{\mathbb{C}}$ to wektor

$$\omega_{\mathbb{C}} := \mathsf{i}^{n+E(\frac{n+1}{2})} \triangleright e_1.e_2.\cdots.e_n\,,$$

w którego definicji $E\ :\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{Z}$ jest częścią całkowitą (funkcją *entier*).

Możemy już teraz wysłowić wyjaśniające zaobserwowane regularności

Stwierdzenie 5. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Dla dowolnej liczby $n\in\mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\omega_{\mathbb{C}}^2 = e^{\mathrm{C}}\,.$$

W jej konsekwencji ilekroć $n\in 2\mathbb{N}+1$, istnieje rozkład

$$\mathrm{Cl}_n^{\mathbb{C}} = \mathrm{Cl}_n^{+}\oplus\mathrm{Cl}_n^{-} \tag{9}$$

algebry Clifforda $\mathrm{Cl}_n^{\mathbb{C}}$ na sumę prostą jej podalgebr (zredukowanych)

$$\mathrm{Cl}_n^{\pm} := P_{\omega_{\mathbb{C}}}^{\pm}.\mathrm{Cl}_n^{\mathbb{C}}\,,$$

o elementach spełniających warunki – odpowiednio – samodwoistości (czyli samodualności)

$$\forall_{\gamma\in\mathrm{Cl}_n^{+}}\ :\ \omega_{\mathbb{C}}.\gamma = \gamma\,,$$

wzgl. skośnej samodwoistości (lub inaczej antysamodualności)

$$\forall_{\gamma\in\mathrm{Cl}_n^{-}}\ :\ \omega_{\mathbb{C}}.\gamma = -\gamma\,.$$

Zachodzą relacje:

$$J_{\mathbb{C}^{\times n}}\big(\mathrm{Cl}_n^{\pm}\big) = \mathrm{Cl}_n^{\mp}$$

oraz

$$\mathrm{Cl}_n^{\mathbb{C}\,0} = \big(\mathrm{id}_{\mathrm{Cl}_n^{\mathbb{C}}} + J_{\mathbb{C}^{\times n}}\big)\big(\mathrm{Cl}_n^{\pm}\big)\,.$$

Rozkład ten pokrywa się z rozkładem półprostej $\mathbb{C}$-algebry $\mathrm{Cl}_n^{\mathbb{C}}$ na składowe proste opisanym w Tw. 9, tj. dla dowolnego $m\in\mathbb{N}$ istnieje izomorfizm $\mathbb{C}$-algebr prostych

$$\mathrm{Cl}_{2m+1}^{\pm}\cong\mathbb{C}(2^m)\,.$$

<u>*Dowód:*</u> W pełni analogiczny do dowodu Stw. 2. □

Dodatek A. Uzupełnienie (przypomnienie?) z algebry liniowej

Istotnym zastosowaniem iloczynu tensorowego modułów jest kanoniczna konstrukcja modułów nad pierścieniami liczbowymi $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$, o szczególnym znaczeniu w modelowaniu zjawisk, na bazie struktur z kategorii $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$.

Definicja 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Wyposażmy grupy przemienne $\mathbb{C}\equiv\mathbb{R}^{\times 2}$ oraz $\mathbb{H}\equiv\mathbb{R}^{\times 4}$ w naturalną strukturę przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowych („po współrzędnych"). **Kompleksyfikacja** rzeczywistej przestrzeni wektorowej to funktor kowariantny

$$(\cdot)^{\mathbb{C}}\ :\ \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}\longrightarrow\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$$

o składowej obiektowej

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ob}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}\longrightarrow\mathrm{Ob}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}\\ &:\ \big((V,+_V,\mathsf{P}_V,\bullet\longmapsto 0_V),\ell_V\big)\longmapsto\big((V\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C},+_\otimes,\mathsf{P}_\otimes,\bullet\longmapsto 0_\otimes),\ell_V^{\mathbb{C}}\big)\,,\end{aligned} \tag{10}$$

przyporządkowującej przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowej V iloczyn tensorowy tej ostatniej z przestrzenią $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^{\times 2}$ nad $\mathbb{R}$ wyposażony w działanie

$$\ell_V^{\mathbb{C}} \;:\; \mathbb{C} \times (V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

określone na tensorach prostych formułą

$$\ell_V^{\mathbb{C}}(\widetilde{z}, v \otimes_{\mathbb{R}} z) \coloneqq v \otimes_{\mathbb{R}} (\widetilde{z} \cdot_{\mathbb{C}} z)\,,$$

oraz o składowej morfizmowej

$$\mathrm{Mor}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}} \;:\; \chi \longmapsto \chi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}}\,. \tag{11}$$

Kompleksyfikacja rzeczywistej przestrzeni kwadratowej to funktor kowariantny

$$(\cdot)^{\mathbb{C}} \;:\; \Box\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \Box\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$$

stanowiący rozszerzenie funktora określonego na kategorii przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowych, tj. taki, który przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowej będącej nośnikiem struktury kwadratowej przyporządkowuje jej kompleksyfikację w rozumieniu Równ. (10), a izometrii między przestrzeniami – jej kompleksyfikację w rozumieniu Równ. (11), przy czym istotą rozszerzenia jest odwzorowanie formy kwadratowej $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ w formę kwadratową $Q^{\mathbb{C}} : V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ zadaną na tensorach prostych wzorem

$$\forall_{(v,z)\in V\times\mathbb{C}} \;:\; Q^{\mathbb{C}}(v \otimes_{\mathbb{R}} z) \coloneqq \jmath_{\mathbb{R}} \circ Q(v) \cdot z^2\,.$$

Kwaternionifikacja rzeczywistej przestrzeni wektorowej to funktor kowariantny

$$(\cdot)^{\mathbb{H}} \;:\; \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{H}^{\mathrm{opp}}}$$

o składowej obiektowej

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ob}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{\mathbb{H}^{\mathrm{opp}}} \\ &: \quad \big((V, +_V, \mathsf{P}_V, \bullet \longmapsto 0_V), \ell_V\big) \longmapsto \big((V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}, +_\otimes, \mathsf{P}_\otimes, \bullet \longmapsto 0_\otimes), \wp_V^{\mathbb{H}}\big)\,, \end{aligned} \tag{12}$$

przyporządkowującej przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowej V iloczyn tensorowy tej ostatniej z przestrzenią $\mathbb{H} \equiv \mathbb{R}^{\times 4}$ nad $\mathbb{R}$ wyposażony w (prawostronne) działanie

$$\wp_V^{\mathbb{H}} \;:\; (V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \times \mathbb{H} \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$$

określone na tensorach prostych formułą

$$\wp_V^{\mathbb{H}}(v \otimes_{\mathbb{R}} q, \widetilde{q}) \coloneqq v \otimes_{\mathbb{R}} (q \cdot_{\mathbb{H}} \widetilde{q})\,,$$

oraz o składowej morfizmowej

$$\mathrm{Mor}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathbf{Mod}_{\mathbb{H}^{\mathrm{opp}}} \;:\; \chi \longmapsto \chi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{H}}\,. \tag{13}$$

Jako że kwaterniony są pierścieniem z dzieleniem, (prawe[1]) moduły nad tym pierścieniem (nieodzownie wolne) określa się mianem **kwaternionowych przestrzeni wektorowych**.

Na marginesie powyższych rozważań warto wspomnieć o istnieniu wygodnej alternatywy dla standardowej definicji zespolonej oraz kwaternionowej przestrzeni wektorowej[2], którą opisuje

Stwierdzenie 6. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj $(V, +_V, \mathsf{P}_V, \bullet \longmapsto 0_V)$ będzie grupą przemienną. Poniższe dwa zdania są wzajem równoważne:

(C1) na V określone jest działanie $\mathbb{C}$, które czyni z V przestrzeń wektorową nad $\mathbb{C}$;

(C2) na V określone jest działanie $\mathbb{R}$, które czyni z V przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$, przy czym istnieje endomorfizm $I \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ o własności

$$I \circ I = -\mathrm{id}_V\,, \tag{14}$$

zwany **strukturą zespoloną** na V.

[1] Wybór ten jest kwestią konwencji – w tej przyjętej przez nas odwzorowaniami $\mathbb{H}$-liniowymi przestrzeni modelowych $\mathbb{H}^{\times n}$, $n \in \mathbb{N}$ stają się macierze o współczynnikach kwaternionowych obliczające się na wektorach w standardowy sposób, tj. z lewej strony.

[2] Ta alternatywa definicja poddaje się wygodnej geometryzacji, prowadzącej do konstrukcji zespolonych i kwaternionowych rozmaitości różniczkowych.

To samo dotyczy poniższych dwóch zdań:

(H1) na V określone jest działanie $\mathbb{H}$, które czyni z V kwaternionową przestrzeń wektorową;

(H2) na V określone jest działanie $\mathbb{R}$, które czyni z V przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$, przy czym istnieje trójka endomorfizmów $I, J, K \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ o własnościach

$$I \circ I = J \circ J = K \circ K = -\mathrm{id}_V \,, \qquad I \circ J = K \,, \tag{15}$$

zwanych **strukturą kwaternionową** na V, które przesądzają o tym, że endomorfizmy I, J, K spełniają algebrę (5-6.3).

<u>*Dowód:*</u> Przeprowadzimy dowód równoważności orzeczeń dotyczących struktury $\mathbb{C}$-liniowej. Dowód równoważności orzeczeń dotyczących struktury $\mathbb{H}$-liniowej jest w pełni analogiczny i stanowi elementarne ćwiczenie, które pozostawiamy do wykonania Czytelnikowi.

(C1)⇒(C2) Działanie $\ell_\cdot \,:\, \mathbb{C}\times V \longrightarrow V$ indukuje działanie $\ell_\cdot^{\mathbb{R}} := \ell_{\jmath_{\mathbb{R}}(\cdot)} \,:\, \mathbb{R}\times V \longrightarrow V$, a nadto wyróżnia endomorfizm $I := \ell_{(0,1)} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ o pożądanej własności. Istotnie,

$$\forall_{(r,v)\in\mathbb{R}\times V} \;:\; I \circ \ell_r^{\mathbb{R}}(v) \equiv \ell_{(0,1)} \circ \ell_{(r,0)}(v) = \ell_{(0,r)}(v) = \ell_{(r,0)} \circ \ell_{(0,1)}(v) \equiv \ell_r^{\mathbb{R}} \circ I(v) \,,$$

$$I \circ I \equiv \ell_{(0,1)} \circ \ell_{(0,1)} = \ell_{(0,1)^2} = \ell_{-(1,0)} = -\mathrm{id}_V \,.$$

(C1)⇐(C2) Działanie $\ell_\cdot \,:\, \mathbb{R}\times V \longrightarrow V$ wraz z wyróżnionym endomorfizmem $I \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ o własności (14) pozwalają zdefiniować odwzorowanie

$$\ell_\cdot^{\mathbb{C}} \;:\; \mathbb{C}\times V \longrightarrow V \;:\; \big((x,y),v\big) \longmapsto \ell_x(v) +_V I \circ \ell_y(v) \,,$$

którego rozdzielność względem $+_V$ i $+_{\mathbb{C}}$ jest oczywista i które ponadto spełnia – dla dowolnych $\big((x_1,y_1),(x_2,y_2),v\big) \in \mathbb{C}^{\times 2}\times V$ – warunek

$$\begin{aligned}
\ell^{\mathbb{C}}_{(x_1,y_1)\cdot_{\mathbb{C}}(x_2,y_2)}(v) &= \ell^{\mathbb{C}}_{(x_1x_2-y_1y_2,\,x_1y_2+x_2y_1)}(v) = \ell_{x_1x_2-y_1y_2}(v) +_V I \circ \ell_{x_1y_2+x_2y_1}(v) \\
&= \ell_{x_1x_2}(v) +_V \mathsf{P}_V \circ \ell_{y_1y_2}(v) +_V I \circ \ell_{x_1y_2}(v) +_V I \circ \ell_{x_2y_1}(v) \\
&= \ell_{x_1} \circ \ell_{x_2}(v) +_V (I \circ \ell_{y_1}) \circ (I \circ \ell_{y_2})(v) +_V \ell_{x_1} \circ (I \circ \ell_{y_2})(v) \\
&\quad +_V (I \circ \ell_{y_1}) \circ \ell_{x_2}(v) \equiv \ell^{\mathbb{C}}_{(x_1,y_1)} \circ \ell^{\mathbb{C}}_{(x_2,y_2)}(v) \,.
\end{aligned}$$

□

Powyższa alternatywa okazuje się być przydatną m.in. w dyskusji uprzywilejowanej (w istocie wyjątkowej) pozycji, jaką pośród hilbertowskich realizacji algebr zdań (logicznych) reprezentujących – w duchu teorii Pirona – wyniki doświadczeń elementarnych zajmują zespolone przestrzenie wektorowe. Znajdziemy dla niej także nieco bardziej elementarne zastosowanie w kontekście teorii reprezentacji algebr Clifforda.

W konkretnych sytuacjach (w szczególności w kontekście teorii reprezentacji algebr właśnie) wygodną bywa logika odmienna, w której punktem wyjścia do dalszych rozważań algebraicznych jest istnienie struktury zespolonej, a przedmiotem poszukiwań staje się struktura rzeczywista wzgl. kwaternionowa.

Definicja 4. Przyjmijmy zapis dotychchczasowy i niechaj $\big((V, +_V, \mathsf{P}_V, \bullet \longmapsto 0_V), \ell_V\big)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{C}$. Odwzorowanie $\varepsilon \,:\, V \circlearrowleft$ określamy mianem **struktury rzeczywistej**, jeśli spełnione są następujące warunki:

(SR1) ε jest **odwzorowaniem anty-$\mathbb{C}$-liniowym**, tj.

$$\forall_{(\lambda,v)\in\mathbb{C}\times V} \;:\; \varepsilon(\lambda \triangleright v) = \overline{\lambda} \triangleright \varepsilon(v) \,;$$

(SR2) $\varepsilon^2 = \mathrm{id}_V$.

Podobnie, odwzorowanie $J \,:\, V \circlearrowleft$ określamy mianem **struktury kwaternionowej**, jeśli spełnione są następujące warunki:

(SK1) J jest odwzorowaniem anty-$\mathbb{C}$-liniowym;

(SK2) $J^2 = -\mathrm{id}_V$.

Formalne podobieństwo obu par warunków maskuje istotną różnicę ich znaczeń, o ile bowiem pierwszy układ w istocie określa operację sprzężenia zespolonego i pozwala wyodrębnić podprzestrzeń, której kompleksyfikacja odtwarza V, o tyle drugi układ pozwala określić działanie pierścienia $\mathbb{H}$. Obserwację tę precyzuje

Stwierdzenie 7. Przyjmijmy zapis Def. 3 oraz 4 i niechaj $\big((V,+_V,\mathsf{P}_V,\bullet\longmapsto 0_V),\ell_V\big)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{C}$. Poniższe dwa zdania są wzajem równoważne:

(R1) na V jest określona struktura rzeczywista ε;

(R2) w V istnieje podprzestrzeń $\mathbb{R}$-liniowa V_+ (będąca podzbiorem względem struktury $\mathbb{C}$-liniowej) o własnościach
$$V = V_+ +_V (0,1)\triangleright V_+ \qquad\wedge\qquad V_+\cap(0,1)\triangleright V_+ = \{0_V\}\,,$$
z których wynika istnienie kanonicznego izomorfizmu przestrzeni $\mathbb{C}$-liniowych
$$V_+^{\mathbb{C}}\cong V\,.$$

To samo dotyczy poniższych dwóch zdań:

(K1) na V jest określona struktura kwaternionowa J;

(K2) na V określone jest działanie $\mathbb{H}$, które czyni z V kwaternionową przestrzeń wektorową.

Dowód: (częściowy)

(R1)⇒(R2) Niechaj ε będzie strukturą rzeczywistą na V, a wtedy $\mathrm{Sp}(\varepsilon)\subset\{-1,1\}$. Zdefiniujmy odwzorowania
$$P_\pm := \tfrac{1}{2}\triangleright(\mathrm{id}_V\pm\varepsilon)$$
i oznaczmy symbolem $V_\pm$ zbiór wszystkich wektorów własnych ε odpowiadających wartości własnej ±1. Oba zbiory są niepuste, oto bowiem dla dowolnego wektora $v\in V$ zachodzi $v_\pm := P_\pm(v)\in V_\pm$. Ponadto każdy wektor $v\in V$ możemy zapisać w postaci $v\equiv P_+(v)+_V P_-(v)$, zatem $V = V_+ +_V V_-$, przy czym – rzecz jasna – $v=\varepsilon(v)=-v$ jest równoznaczne z $v=0_V$, więc $V_+\cap V_-=\{0_V\}$. Anty-$\mathbb{C}$-liniowość ε prowadzi do tożsamości $\varepsilon((0,1)\triangleright v) = \overline{(0,1)}\triangleright\varepsilon(v) = -(0,1)\triangleright\varepsilon(v)$, która implikuje relacje $(0,1)\triangleright V_+\subset V_-$ oraz $(0,1)\triangleright V_-\subset V_+$, z tych zaś wynika tożsamość zbiorów $V_- = (0,1)\triangleright V_+$. Mamy też oczywistą inkluzję $\forall_{r\in\mathbb{R}}\ :\ r\triangleright V_\pm\subset V_\pm$. Możemy teraz wypisać izomorfizm
$$\iota\ :\ V_+\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\xrightarrow{\cong}V$$
w jawnej i jawnie $\mathbb{C}$-liniowej postaci (na tensorach prostych):
$$\iota\big(v_+\otimes_{\mathbb{R}}(x,y)\big) := (x,y)\triangleright v_+\,.$$
Jego odwrotnością jest odwzorowanie
$$\iota^{-1}\ :\ V\xrightarrow{\cong}V_+\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\ :\ v\longmapsto P_+(v)\otimes_{\mathbb{R}}(1,0)+_V(0,-1)\triangleright P_-(v)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1)\,.$$
Istotnie,
$$\begin{aligned}\iota^{-1}\circ\iota\big(v_+\otimes_{\mathbb{R}}(x,y)\big) &= \tfrac{1}{2}\triangleright\big((x,y)\triangleright v_+ +_V (x,-y)\triangleright\varepsilon(v_+)\big)\otimes_{\mathbb{R}}(1,0)\\ &\quad +_V\tfrac{1}{2}(0,-1)\triangleright\big((x,y)\triangleright v_+ +_V(-x,y)\triangleright\varepsilon(v_+)\big)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1)\\ &= \tfrac{1}{2}\triangleright\big((x,y)\triangleright v_+ +_V (x,-y)\triangleright v_+\big)\otimes_{\mathbb{R}}(1,0)\\ &\quad +_V\tfrac{1}{2}(0,-1)\triangleright\big((x,y)\triangleright v_+ +_V(-x,y)\triangleright v_+\big)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1)\\ &= (x,0)\triangleright v_+\otimes_{\mathbb{R}}(1,0)+_V(y,0)\triangleright v_+\otimes_{\mathbb{R}}(0,1) = v_+\otimes_{\mathbb{R}}(x,y)\end{aligned}$$
oraz
$$\iota\circ\iota^{-1}(v) = (1,0)\triangleright P_+(v)+_V(0,1)\triangleright\big((0,-1)\triangleright P_-(v)\big) = (P_+ + P_-)(v) = v\,.$$

Bez trudu przekonujemy się także o $\mathbb{C}$-liniowości ι^{-1},

$$\begin{aligned}
\iota^{-1}\big((x,y)\triangleright v\big) &= \tfrac{1}{2}\triangleright\big((x,y)\triangleright v +_V (x,-y)\triangleright\varepsilon(v)\big)\otimes_{\mathbb{R}}(1,0) \\
&\quad +_V \tfrac{1}{2}(0,-1)\triangleright\big((x,y)\triangleright v +_V (-x,y)\triangleright\varepsilon(v)\big)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1) \\
&= (x,0)\triangleright P_+(v)\otimes_{\mathbb{R}}(1,0) +_V (-y,0)\cdot_{\mathbb{C}}(0,-1)\triangleright P_-(v)\otimes_{\mathbb{R}}(1,0) \\
&\quad +_V (x,0)\cdot_{\mathbb{C}}(0,-1)\triangleright P_-(v)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1) +_V (y,0)\triangleright P_+(v)\otimes_{\mathbb{R}}(0,1) \\
&= P_+(v)\otimes_{\mathbb{R}}(x,y) +_V (0,-1)\triangleright P_-(v)\otimes_{\mathbb{R}}(-y,x) \\
&= P_+(v)\otimes_{\mathbb{R}}(x,y)\cdot_{\mathbb{C}}(1,0) +_V (0,-1)\triangleright P_-(v)\otimes_{\mathbb{R}}(x,y)\cdot_{\mathbb{C}}(0,1) \\
&\equiv (x,y)\triangleright\iota^{-1}(v)\,.
\end{aligned}$$

□

Dodatek B. Uzupełnienie z teorii przestrzeni kwadratowych – cd.

Stwierdzenie 8. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Na dowolnej rzeczywistej przestrzeni kwadratowej (wymiaru $\dim_{\mathbb{R}} V = p+q$) wyposażonej w formę kwadratową Q o sygnaturze (p,q) istnieje **wyznacznik unormowany** $\Delta\in\bigwedge^\bullet V^*$, tj. taki, który spełnia warunek

$$\lambda_\Delta = (-1)^q\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Wybierzmy w V bazę (pseudo)ortogonalną $\mathscr{E}=\{e_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ i rozważmy stowarzyszony z nią wyznacznik $\Delta_{\mathscr{E}}$. Obliczamy bezpośrednio

$$\begin{aligned}
\lambda_{\Delta_{\mathscr{E}}} &\equiv \lambda_{\Delta_{\mathscr{E}}}\cdot\Delta_{\mathscr{E}}(\mathscr{E})^2 = \det_{(N)}\big(\Phi_Q(e_i,e_j)\big)_{i,j\in\overline{1,N}} \\
&\equiv \det_{(N)}\big(\mathrm{diag}(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{p\ \text{razy}},\underbrace{-1,-1,\ldots,-1}_{q\ \text{razy}})\big) = (-1)^q\,.
\end{aligned}$$

□

Dodatek C. Uzupełnienie z teorii algebr

Zaczniemy od uogólnienia konstrukcji z Def. 3 do kategorii algebr.

Definicja 5. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niech $\mathfrak{A}\in\mathrm{Ob}\,\mathbf{Alg}_{\mathbb{R}}$. **Kompleksyfikacja** algebry rzeczywistej to funktor kowariantny

$$(\cdot)^{\mathbb{C}}\ :\ \mathbf{Alg}_{\mathbb{R}}\longrightarrow\mathbf{Alg}_{\mathbb{C}}$$

stanowiący rozszerzenie (w duchu Def. 3) funktora określonego na kategorii przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowych, przy czym istotą rozszerzenia jest odwzorowanie mnożenia $m_{\mathfrak{A}}\ :\ \mathfrak{A}\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{A}$ w mnożenie $m_\otimes\ :\ (\mathfrak{A}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})\otimes_{\mathbb{C}}(\mathfrak{A}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})\longrightarrow\mathfrak{A}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$, o którym mowa w Stw. 5-6.8.

W następnej kolejności wyprowadzimy kilka przydatnych konkretnych izomorfizmów algebr nad ciałem liczb rzeczywistych.

Stwierdzenie 9. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Istnieją unitalne izomorfizmy $\mathbb{R}$-algebr:

(i) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \forall_{\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}\}}\ :\ \mathbb{R}(m)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{K}(n)\cong\mathbb{K}(m\cdot n)$;
(ii) $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\cong\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$;
(iii) $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H}\cong\mathbb{C}(2)$;
(iv) $\mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H}\cong\mathbb{R}(4)$.

<u>*Dowód:*</u>

Ad (i) W szczególnym przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ izomorfizm przybiera postać

$$E^{(m)}_{i,j} \otimes_{\mathbb{R}} E^{(n)}_{k,l} \longmapsto E^{(m\cdot n)}_{n(i-1)+k,n(j-1)+l}\,, \qquad i,j \in \overline{1,m}\,,\ k,l \in \overline{1,n}$$

na bazie standardowej z Przykł. 5-6.1 (1). Z kolei dla $n = 1$ jest on postaci

$$E^{(m)}_{i,j} \otimes_{\mathbb{R}} k \longmapsto k \triangleright \widetilde{\jmath}_{\mathbb{R}}\big(E^{(m)}_{i,j}\big)\,, \qquad i,j \in \overline{1,m}\,,\ k \in \mathbb{K}\,,$$

także na naturalnej bazie i w konwencji, w której $\widetilde{\jmath}_{\mathbb{R}} \,:\, \mathbb{R}(m) \rightarrowtail \mathbb{K}(m)$ jest kanonicznym podniesieniem monomorfizmu $\jmath_{\mathbb{R}} \,:\, \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{C} \,:\, r \longmapsto (r,0)$ (wzgl. $\jmath_{\mathbb{R}} \,:\, \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{H} \,:\, r \longmapsto (r,0,0,0)$) do przestrzeni $\mathbb{R}(m) \equiv \mathbb{R}^{m^2}$ (oraz $\mathbb{C}(m) \equiv \mathbb{C}^{m^2}$ wzgl. $\mathbb{H}(m) \equiv \mathbb{H}^{m^2}$). Uzyskane tym sposobem izomorfizmy

$$\mathbb{R}(m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(n) \cong \mathbb{R}(m\cdot n)\,, \qquad\qquad \mathbb{R}(m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K} \cong \mathbb{K}(m)$$

pozwalają wyprowadzić izomorfizm w postaci najogólniejszej (w odwołaniu do Tw. 3-4-5.6)

$$\begin{aligned}\mathbb{R}(m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}(n) &\cong \mathbb{R}(m) \otimes_{\mathbb{R}} \big(\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}\big)\\ &\cong \big(\mathbb{R}(m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(n)\big) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}\\ &\cong \mathbb{R}(m\cdot n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K} \cong \mathbb{K}(m\cdot n)\,.\end{aligned}$$

Ad (ii) Izomorfizm stanowi (jedyne) $\mathbb{R}$-liniowe rozszerzenie przyporządkowania baz

$$1 \otimes_{\mathbb{R}} 1 \longmapsto (1,1)\,, \qquad 1 \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{i} \longmapsto (-\mathsf{i},\mathsf{i})\,, \qquad \mathsf{i} \otimes_{\mathbb{R}} 1 \longmapsto (\mathsf{i},\mathsf{i})\,, \qquad \mathsf{i} \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{i} \longmapsto (1,-1)\,.$$

Ad (iii) Na gruncie zwięzłej dyskusji konstrukcji Cayleya–Dicksona przedstawionej w Przykł. 5-6.1 (4) możemy dokonać utożsamienia przestrzeni $\mathbb{C}$-liniowych

$$\mathbb{H} \equiv \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\,.$$

W tym ujęciu algebra kwaternionów zyskuje naturalną strukturę $\mathbb{C}$-modułu z działaniem

$$\begin{aligned}&\mathbb{C} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}\\ &:\ \big(x+y\mathsf{i}, (a+b\mathsf{i}) \triangleright 1 + (c+d\mathsf{i}) \triangleright \mathsf{j}\big) \longmapsto \big((x+y\mathsf{i}) \cdot_{\mathbb{C}} (a+b\mathsf{i})\big) \triangleright 1\\ &\qquad\qquad + \big((x+y\mathsf{i}) \cdot_{\mathbb{C}} (c+d\mathsf{i})\big) \triangleright \mathsf{j}\,.\end{aligned}$$

Wobec powyższego możemy również utożsamić odnośne ($\mathbb{C}$-, więc też $\mathbb{R}$-)algebry endomorfizmów

$$\mu_{\mathbb{C}} \,:\, \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \equiv \mathbb{C}(2)\,.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie (por. Równ. (5-6.4))

$$\Phi \,:\, \mathbb{C} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}(2) \,:\, (z,q) \longmapsto \mu_{\mathbb{C}}\big(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q^*) \circ m_{\mathbb{H}}\big(\jmath^{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}(z), \cdot\big)\big) \equiv \Phi_{z,q}\,,$$

gdzie

$$m_{\mathbb{H}}(\cdot, q^*) \circ m_{\mathbb{H}}\big(\jmath^{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}(z), \cdot\big) \,:\, \mathbb{H} \circlearrowleft \,:\, q_0 \longmapsto \jmath^{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}(z) \cdot_{\mathbb{H}} q_0 \cdot_{\mathbb{H}} q^*\,.$$

Będąc jawnie dwu-$\mathbb{R}$-liniowym, indukuje ono (jedyne) odwzorowanie

$$\widetilde{\Phi} \,:\, \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}(2)$$

o własności

$$\forall_{(z,q)\in\mathbb{C}\times\mathbb{H}} \,:\, \widetilde{\Phi}(z \otimes_{\mathbb{R}} q) = \Phi_{z,q}\,,$$

przy czym dla dowolnej pary $(z_1,q_1),(z_2,q_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{H}$ zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Phi}(z_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_1) \circ \widetilde{\Phi}(z_2 \otimes_{\mathbb{R}} q_2)\\ \equiv\ &\mu_{\mathbb{C}}\big(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_1^*) \circ m_{\mathbb{H}}\big(\jmath^{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}(z_1), \cdot\big)\big) \circ \mu_{\mathbb{C}}\big(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_2^*) \circ m_{\mathbb{H}}\big(\jmath^{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}(z_2), \cdot\big)\big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu_{\mathbb{C}}\big(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_1^*) \circ m_{\mathbb{H}}(\jmath_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_1), \cdot) \circ m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_2^*) \circ m_{\mathbb{H}}(\jmath_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_2), \cdot)\big) \\
&= \mu_{\mathbb{C}}\big(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_1^*) \circ m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_2^*) \circ m_{\mathbb{H}}(\jmath_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_1), \cdot) \circ m_{\mathbb{H}}(\jmath_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_2), \cdot)\big) \\
&= \mu_{\mathbb{C}}\big(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_2^* \cdot_{\mathbb{H}} q_1^*) \circ m_{\mathbb{H}}(\jmath_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_1) \cdot_{\mathbb{H}} \jmath_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_2), \cdot)\big) \\
&= \mu_{\mathbb{C}}\big(m_{\mathbb{H}}(\cdot, (q_1 \cdot_{\mathbb{H}} q_2)^*) \circ m_{\mathbb{H}}(\jmath_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_1 \cdot_{\mathbb{C}} z_2), \cdot)\big) \\
&\equiv \widetilde{\Phi}\big((z_1 \cdot_{\mathbb{C}} z_2) \otimes_{\mathbb{R}} (q_1 \cdot_{\mathbb{H}} q_2)\big) = \widetilde{\Phi} \circ m_{\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H}}(z_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_1, z_2 \otimes_{\mathbb{R}} q_2)\,,
\end{aligned}
$$

mamy przeto do czynienia z homomorfizmem $\mathbb{R}$-algebr. W bezpośrednim rachunku sprawdzamy, że przeprowadza on naturalną bazę swej dziedziny w bazę przeciwdziedziny,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}\big((1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0,0,0)\big) &= \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) \end{pmatrix}, \\
\widetilde{\Phi}\big((1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1,0,0)\big) &= \begin{pmatrix} (0,-1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) \end{pmatrix}, \\
\widetilde{\Phi}\big((1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (0,0,1,0)\big) &= \begin{pmatrix} (0,0) & (1,0) \\ (-1,0) & (0,0) \end{pmatrix}, \\
\widetilde{\Phi}\big((1,0) \otimes_{\mathbb{R}} (0,0,0,1)\big) &= \begin{pmatrix} (0,0) & (0,-1) \\ (0,-1) & (0,0) \end{pmatrix}, \\
\widetilde{\Phi}\big((0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (1,0,0,0)\big) &= \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) \end{pmatrix}, \\
\widetilde{\Phi}\big((0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (0,1,0,0)\big) &= \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (-1,0) \end{pmatrix}, \\
\widetilde{\Phi}\big((0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (0,0,1,0)\big) &= \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) \\ (0,-1) & (0,0) \end{pmatrix}, \\
\widetilde{\Phi}\big((0,1) \otimes_{\mathbb{R}} (0,0,0,1)\big) &= \begin{pmatrix} (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

co oznacza, że jest (pożądanym) izomorfizmem.

Ad (iv) Tym razem potraktujemy kwaterniony jako elementy $\mathbb{R}$-algebry

$$\iota_{\mathbb{H}} \;:\; \mathbb{H} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3} \;:\; q \equiv a + b\mathsf{i} + c\mathsf{j} + d\mathsf{k} \longmapsto \big(a, (b,c,d)\big) \equiv (\underline{q}, \vec{q})\,,$$

w zgodzie z Równ. (4.5), wykorzystując monomorfizm $\mathbb{R}$-algebr

$$\jmath_1 \;:\; \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3} \;:\; r \longmapsto \big(r, (0,0,0)\big)$$

do wyindukowania na $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}$ działania

$$
\begin{aligned}
\ell_{\cdot} := m_{\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^{\times 3}} \circ (\jmath_1 \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^{\times 3}}) \quad &: \quad \mathbb{R} \times \big(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}\big) \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3} \\
&: \quad \big(r, (s,v)\big) \longmapsto (r \cdot s, r \triangleright v)\,.
\end{aligned}
$$

Istnienie izomorfizmu $\mathbb{R}$-algebr (będącego w szczególności izomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowych) pozwala utożsamić odnośne ($\mathbb{R}$-)algebry endomorfizmów

$$\mu_{\mathbb{R}} \;:\; \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\big(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}\big) \equiv \mathbb{R}(4)\,.$$

Definiujemy odwzorowanie

$$\Psi \;:\; \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}(4) \;:\; (q_1, q_2) \longmapsto \mu_{\mathbb{R}}\big(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_2^*) \circ m_{\mathbb{H}}(q_1, \cdot)\big) \equiv \Psi_{q_1,q_2}\,,$$

gdzie

$$m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_2^*) \circ m_{\mathbb{H}}(q_1, \cdot) \;:\; \mathbb{H} \circlearrowleft \;:\; \widetilde{q} \longmapsto q_1 \cdot_{\mathbb{H}} \widetilde{q} \cdot_{\mathbb{H}} q_2^*\,,$$

które z racji swej dwu-$\mathbb{R}$-liniowości indukuje (jedyne) odwzorowanie

$$\widetilde{\Psi} \;:\; \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}(4)$$

o własności

$$\forall_{(q_1,q_2)\in\mathbb{H}\times\mathbb{H}} \;:\; \widetilde{\Psi}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2) = \Psi_{q_1,q_2}\,,$$

przy czym z tych samych powodów co w przypadku odwzorowania $\widetilde{\Psi}$ z dowodu punktu (iii) odwzorowanie indukowane $\widetilde{\Psi}$ jawi się homomorfizmem $\mathbb{R}$-algebr. Dowód jego bijektywności można z powodzeniem przeprowadzić według schematu z punktu poprzedniego, my jednak – gwoli rozbudowania arsenału formalnego – pójdziemy drogą odmienną. Jej początek wyznacza wskazanie na obu rozważanych przestrzeniach $\mathbb{R}$-liniowych, $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ i $\mathbb{R}(4)$, niezwyrodniałych form kwadratowych:

$$Q_\otimes := m_{\mathbb{R}} \circ (\delta_{\mathbb{H}} \otimes \delta_{\mathbb{H}}) \ : \ \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$

gdzie

$$\delta_{\mathbb{H}} \ : \ \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ q \longmapsto q \cdot_{\mathbb{H}} q^* \equiv \|q\|_{\mathbb{H}}^2\,,$$

więc też

$$Q_\otimes(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2) = \|q_1\|_{\mathbb{H}}^2 \cdot \|q_2\|_{\mathbb{H}}^2 = \|q_1 \cdot_{\mathbb{H}} q_2\|_{\mathbb{H}}^2\,,$$

oraz

$$Q_{\mathrm{Mat}} \ : \ \mathbb{R}(4) \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ M \longmapsto \tfrac{1}{4}\,\mathrm{tr}_{(4)}\big(M^{\mathrm{T}} \odot M\big)\,,$$

gdzie $(\cdot)^{\mathrm{T}}$ jest transpozycją macierzy, $\mathrm{tr}_{(4)}$ zaś – śladem macierzowym na $\mathbb{R}(4)$. W następnym kroku zbadamy izometryczne własności homomorfizmu $\widetilde{\Psi}$. W tym celu policzymy bezpośrednio transpozycję $\Psi_{q_1,q_2}^{\mathrm{T}}$, czyli – innymi słowy – sprzężenie endomorfizmu Ψ_{q_1,q_2} względem standardowego euklidesowego iloczynu skalarnego

$$\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathrm{E}} \ : \ \big(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}\big)^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ \big((r,v),(s,w)\big) \longmapsto r \cdot s + \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}}(v,w)\,,$$

por.: Równ. (5-6.6), przy czym wygodnie będzie przepisać macierz poddawaną transpozycji w postaci

$$\Psi_{q_1,q_2} \equiv r_{(\underline{q}_2,-\vec{q}_2)} \odot l_{(\underline{q}_1,\vec{q}_1)}\,,$$

gdzie użyliśmy skrótowego zapisu

$$l_{(\underline{q}_1,\vec{q}_1)} := m_{\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^{\times 3}}\big((\underline{q}_1,\vec{q}_1),\cdot\big)\,, \qquad r_{(\underline{q}_2,-\vec{q}_2)} := m_{\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^{\times 3}}\big(\cdot,(\underline{q}_2,-\vec{q}_2)\big)\,.$$

Teraz już bez trudu wyznaczamy – dla dowolnych $(r,v),(s,w) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}$, a korzystając z interpretacji geometrycznej wyrażenia $\Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}}(v,\vec{q}_1 \times w)$ jako (zorientowanej) objętości równoległościanu rozpiętego na trójce wektorów $(v,\vec{q}_1,w)$, tożsamego z równoległościanem rozpiętym na trójce $(w,v,\vec{q}_1)$ –

$$\begin{aligned}
\Big\langle(r,v)|l_{(\underline{q}_1,\vec{q}_1)}(s,w)\Big\rangle_{\mathrm{E}} &= \Big\langle(r,v)|\big(\underline{q}_1 \cdot s - \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}}(\vec{q}_1,w),\vec{q}_1 \times w + \underline{q}_1 \rhd w + s \rhd \vec{q}_1\big)\Big\rangle_{\mathrm{E}} \\
&= r \cdot (\underline{q}_1 \cdot s) - r \cdot \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}}(\vec{q}_1,w) + \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}}(v,\vec{q}_1 \times w) + \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}}(v,\underline{q}_1 \rhd w) + \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}}(v,s \rhd \vec{q}_1) \\
&= (\underline{q}_1 \cdot r) \cdot s - \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}}(-\vec{q}_1,v) \cdot s + \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}}\big((-\vec{q}_1) \times v,w\big) + \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}}\big(\underline{q}_1 \rhd v,w\big) + \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}}\big(r \rhd (-\vec{q}_1),w\big) \\
&= \Big\langle\big(\underline{q}_1 \cdot r - \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}}(-\vec{q}_1,v),(-\vec{q}_1) \times v + \underline{q}_1 \rhd v + r \rhd (-\vec{q}_1)\big)|(s,w)\Big\rangle_{\mathrm{E}} \\
&\equiv \Big\langle l_{(\underline{q}_1,-\vec{q}_1)}(r,v)|(s,w)\Big\rangle_{\mathrm{E}}\,,
\end{aligned}$$

czyli też – wobec niezwyrodnienia rozpatrywanego iloczynu skalarnego na $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}$ –

$$l_{(\underline{q}_1,\vec{q}_1)}^{\mathrm{T}} = l_{(\underline{q}_1,-\vec{q}_1)}\,,$$

oraz, analogicznie,

$$\begin{aligned}
\Big\langle(r,v)|r_{(\underline{q}_2,-\vec{q}_2)}(s,w)\Big\rangle_{\mathrm{E}} &= \Big\langle(r,v)|\big(s \cdot \underline{q}_2 - \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}}(w,-\vec{q}_2),w \times (-\vec{q}_2) + s \rhd (-\vec{q}_2) + \underline{q}_2 \rhd w\big)\Big\rangle_{\mathrm{E}} \\
&= r \cdot (s \cdot \underline{q}_2) - r \cdot \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}}(w,-\vec{q}_2) + \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}}\big(v,w \times (-\vec{q}_2)\big) + \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}}\big(v,s \rhd (-\vec{q}_1)\big) + \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}}(v,\underline{q}_2 \rhd w) \\
&= (r \cdot \underline{q}_2) \cdot s - \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}}(v,\vec{q}_2) \cdot s + \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}}(v \times \vec{q}_2,w) + \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}}\big(r \rhd \vec{q}_2,w\big) + \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}}\big(\underline{q}_2 \rhd v,w\big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big\langle \big(r \cdot \underline{q}_2 - \Phi_{\delta^{(3)}_{\mathrm{E}}}(v, \vec{q}_2), v \times \vec{q}_2 + r \triangleright \vec{q}_2 + \underline{q}_2 \triangleright v\big) \big| (s, w) \Big\rangle_{\mathrm{E}} \\
&\equiv \quad \Big\langle r_{(\underline{q}_2, \vec{q}_2)}(r, v) \big| (s, w) \Big\rangle_{\mathrm{E}} \,,
\end{aligned}
$$

przeto

$$
r^{\mathrm{T}}_{(\underline{q}_2, -\vec{q}_2)} = r_{(\underline{q}_2, \vec{q}_2)} \,,
$$

Koniec końców, biorąc pod uwagę powyższe wyniki oraz przemienność obu czynników macierzy Ψ_{q_1, q_2}, wyznaczamy

$$
\Psi^{\mathrm{T}}_{q_1, q_2} \equiv l^{\mathrm{T}}_{(\underline{q}_1, \vec{q}_1)} \odot r^{\mathrm{T}}_{(\underline{q}_2, -\vec{q}_2)} = l_{(\underline{q}_1, -\vec{q}_1)} \odot r_{(\underline{q}_2, \vec{q}_2)} = r_{(\underline{q}_2, \vec{q}_2)} \odot l_{(\underline{q}_1, -\vec{q}_1)} \equiv \Psi_{q_1^*, q_2^*}
$$

i na tej podstawie także

$$
\begin{aligned}
\Phi_{Q_{\mathrm{Mat}}}\big(\widetilde{\Psi}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2), \widetilde{\Psi}(q_3 \otimes_{\mathbb{R}} q_4)\big) &= \tfrac{1}{4} \operatorname{tr}_{(4)} \big(\Psi^{\mathrm{T}}_{q_1, q_2} \odot \Psi_{q_3, q_4}\big) \\
&= \tfrac{1}{4} \operatorname{tr}_{(4)} \big(\widetilde{\Psi}(q_1^* \otimes_{\mathbb{R}} q_2^*) \odot \widetilde{\Psi}(q_3 \otimes_{\mathbb{R}} q_4)\big) \\
&= \tfrac{1}{4} \operatorname{tr}_{(4)} \big(\widetilde{\Psi} \circ m_{\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}}(q_1^* \otimes_{\mathbb{R}} q_2^*, q_3 \otimes_{\mathbb{R}} q_4)\big) \\
&= \tfrac{1}{4} \operatorname{tr}_{(4)} \big(\widetilde{\Psi}(q_1^* \cdot_{\mathbb{H}} q_3 \otimes_{\mathbb{R}} q_2^* \cdot_{\mathbb{H}} q_4)\big) \,.
\end{aligned}
$$

Rachunek pomocniczy, poprowadzony w bazie standardowej $\{E_0 := (1, 0), E_k := (0, e_k)\}_{k \in \{1,2,3\}}$ przestrzeni $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}$ i dwoistej do niej $\{E_l^*\}_{l \in \{0,1,2,3\}}$, w bezpośrednim odwołaniu do Def. 7-8.5 oraz Uwagi 7-8.4 i z uwzględnieniem relacji $v \times e_k \in \langle e_l \rangle_{\mathbb{R}}^{l \in \{1,2,3\} \setminus \{k\}}$,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}_{(4)} \big(\widetilde{\Psi}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2)\big) &= \operatorname{tr}_{(4)} \big(r_{(\underline{q}_2, -\vec{q}_2)} \odot l_{(\underline{q}_1, \vec{q}_1)}\big) \equiv \sum_{l=0}^{3} E_l^*\big((\underline{q}_1, \vec{q}_1).E_l.(\underline{q}_2, -\vec{q}_2)\big) \\
&= E_1^*\big((\underline{q}_1, \vec{q}_1).(\underline{q}_2, -\vec{q}_2)\big) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{3} (0, e_k^*)\big((\underline{q}_1, \vec{q}_1).\big(\Phi_{\delta^{(3)}_{\mathrm{E}}}(e_k, \vec{q}_2), -e_k \times \vec{q}_2 + \underline{q}_2 \triangleright e_k\big)\big) \\
&= \underline{q}_1 \cdot \underline{q}_2 + \Phi_{\delta^{(3)}_{\mathrm{E}}}(\vec{q}_1, \vec{q}_2) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{3} e_k^*\big(-\vec{q}_1 \times (e_k \times \vec{q}_2) + \underline{q}_2 \triangleright (\vec{q}_1 \times e_k) - \underline{q}_1 \triangleright (e_k \times \vec{q}_2) \\
&\qquad + \underline{q}_1 \cdot \underline{q}_2 \triangleright e_k + \Phi_{\delta^{(3)}_{\mathrm{E}}}(e_k, \vec{q}_2) \triangleright \vec{q}_1\big) \\
&= \underline{q}_1 \cdot \underline{q}_2 \cdot \big(1 + \sum_{k=1}^{3} e_k^*(e_k)\big) + \Phi_{\delta^{(3)}_{\mathrm{E}}}(\vec{q}_1, \vec{q}_2) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{3} \Phi_{\delta^{(3)}_{\mathrm{E}}}(e_k, \vec{q}_2) \cdot \Phi_{\delta^{(3)}_{\mathrm{E}}}(e_k, \vec{q}_1) - \sum_{k=1}^{3} e_k^*\big(\vec{q}_1 \times (e_k \times \vec{q}_2)\big) \\
&= 4\underline{q}_1 \cdot \underline{q}_2 + 2\Phi_{\delta^{(3)}_{\mathrm{E}}}(\vec{q}_1, \vec{q}_2) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{3} e_k^*\big(\Phi_{\delta^{(3)}_{\mathrm{E}}}(\vec{q}_1, \vec{q}_2) \triangleright e_k - \Phi_{\delta^{(3)}_{\mathrm{E}}}(\vec{q}_1, e_k) \triangleright \vec{q}_2\big) \\
&= 4\underline{q}_1 \cdot \underline{q}_2 \equiv 4\Phi_{\delta_{\mathbb{H}}}(q_1, 1) \cdot \Phi_{\delta_{\mathbb{H}}}(q_2, 1) \,,
\end{aligned}
$$

pozwala ostatecznie zapisać

$$
\begin{aligned}
\Phi_{Q_{\mathrm{Mat}}}\big(\widetilde{\Psi}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2), \widetilde{\Psi}(q_3 \otimes_{\mathbb{R}} q_4)\big) &= \Phi_{\delta_{\mathbb{H}}}\big(q_1^* \cdot_{\mathbb{H}} q_3, 1\big) \cdot \Phi_{\delta_{\mathbb{H}}}\big(q_2^* \cdot_{\mathbb{H}} q_4, 1\big) \\
&= \tfrac{1}{2} \big(\big(q_1^* \cdot_{\mathbb{H}} q_3\big).1^* + 1.\big(q_1^* \cdot_{\mathbb{H}} q_3\big)^*\big) \\
&\quad \cdot \tfrac{1}{2} \big(\big(q_2^* \cdot_{\mathbb{H}} q_4\big).1^* + 1.\big(q_2^* \cdot_{\mathbb{H}} q_4\big)^*\big)
\end{aligned}
$$

$$\equiv \quad \Phi_{\delta_{\mathbb{H}}}(q_1, q_3) \cdot \Phi_{\delta_{\mathbb{H}}}(q_2, q_4)$$

$$\equiv \quad \Phi_{Q_{\otimes}}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2, q_3 \otimes_{\mathbb{R}} q_4)\,.$$

Jest zatem $\widetilde{\Psi}$ izometrią, przeto także – wobec niezwyrodnienia obu form kwadratowych – injekcją, oto bowiem równość $\widetilde{\Psi}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2) = \mathbf{0}_4$ implikuje

$$\|q_1\|_{\mathbb{H}}^2 \cdot \|q_2\|_{\mathbb{H}}^2 = Q_{\otimes}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2) = Q_{\rm Mat} \circ \widetilde{\Psi}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2) \equiv Q_{\rm Mat}(\mathbf{0}_4) = 0\,,$$

a wtedy $q_1 = 0$ lub $q_2 = 0$, więc zawsze $q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2 = 0$. Porównanie wymiarów rzeczywistych dziedziny i przeciwdziedziny $\widetilde{\Psi}$ na gruncie Stw. 3-4-5.10,

$$\dim_{\mathbb{R}} (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) = \big(\dim_{\mathbb{R}} (\mathbb{H})\big)^2 = 4^2 = \dim_{\mathbb{K}} \big(\mathbb{R}(4)\big)\,,$$

przesądza o tym, że jest on izomorfizmem.

□

Table 1. Niskowymiarowe rzeczywiste algebry Clifforda.

$C^{\mathbb{R}}_{p,q}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\xrightarrow{q}$
0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8)\oplus\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	
1	$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2)\oplus\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16)\oplus\mathbb{R}(16)$	
2	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{R}(2)\oplus\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(4)\oplus\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{R}(32)$	
3	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{R}(4)\oplus\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(8)\oplus\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{C}(32)$	
4	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8)\oplus\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(16)\oplus\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(32)$	
5	$\mathbb{H}(2)\oplus\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16)\oplus\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(32)$	$\mathbb{C}(32)$	$\mathbb{H}(32)$	$\mathbb{H}(32)\oplus\mathbb{H}(32)$	
6	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(4)\oplus\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{R}(32)$	$\mathbb{R}(32)\oplus\mathbb{R}(32)$	$\mathbb{R}(64)$	$\mathbb{C}(64)$	$\mathbb{H}(64)$	
7	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(8)\oplus\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{C}(32)$	$\mathbb{R}(64)$	$\mathbb{R}(64)\oplus\mathbb{R}(64)$	$\mathbb{R}(128)$	$\mathbb{C}(128)$	
8	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(16)\oplus\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(32)$	$\mathbb{C}(64)$	$\mathbb{R}(128)$	$\mathbb{R}(128)\oplus\mathbb{R}(128)$	$\mathbb{R}(256)$	
$p\ \downarrow$										

Table 2. Niskowymiarowe zespolone algebry Clifforda.

$\xrightarrow{n}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$C^{\mathbb{C}}_n$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(2)\oplus\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(4)\oplus\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(8)\oplus\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(16)$