# O REPREZENTACJACH – PÓŁ-PROSTO I PÓŁ-KOMPLETNIE
## (MAWF '23/24 1.XIII & 1.XIV [RRS])

FIG. 1. Reprezentacja Polski w piłce kopanej nogą na Mundial 1974, która zdobyła w tych mistrzostwach brązowy medal – przykład reprezentacji nietrywialnej, wiernej i – co w rodzimej piłce kopanej spektakularnie rzadkie – nie w pełni rozkładalnej (na sumę prostą łopatek: lewej i prawej).

Spis treści



Mając w garści kompletną i zarazem strukturalną klasyfikację algebr Clifforda stowarzyszonych ze skończenie wymiarowymi przestrzeniami kwadratowymi nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, możemy obecnie przystąpić do badania ich reprezentacji, co da nam punkt wyjścia do dyskusji spinorów, więc obiektów o bezpośrednim znaczeniu fizykalnym. Jak pokazaliśmy dowodnie w poprzednim wykładzie, interesujące nas zagadnienie wpisuje się w kadr teorii reprezentacji bardzo szczególnych algebr prostych i półprostych o (dwóch) tożsamych składnikach prostych. Nasze dociekania zaczniemy zatem od wyprowadzenia ogólnych stwierdzeń dotyczących takich obiektów.

## 1. Elementy teorii reprezentacji algebr (pół)prostych

Algebry i struktury pochodne niosące nietrywialną informację fizykalną (jak choćby tę o symetriach stanów i procesów przyrodniczych, czy wreszcie o samej ewolucji stanów) ujawniają swą obecność w opisie obiektów i zjawisk bądź to bezpośrednio, bądź też za pośrednictwem struktur generycznych stowarzyszonych z wyborem algebraicznego zbioru-modelu owych zjawisk i podlegających im obiektów – najbardziej oczywiste przykłady takich wyborów to: konstrukcja algebry (Poissona–)Liego funkcji gładkich na rozmaitości symplektycznej (z nawiasem Poissona określonym przez formę symplektyczną) wykorzystywana do opisu stanów klasycznego układu fizycznego, z którą stowarzyszona jest pojemna struktura algebry Liego symplektycznych pól wektorowych na tejże rozmaitości, oraz konstrukcja przestrzeni Hilberta wykorzystywana do opisu stanów kwantowych układu fizycznego, z którą stowarzyszona jest nie mniej pojemna struktura ($C^*$-)algebry ograniczonych operatorów liniowych. W tym drugim przypadku relacje konstytutywne rzeczonych algebr są spełniane przez pewien podzbiór elementów struktury generycznej i określają relacje równoważności na zbiorze-modelu będącym jej nośnikiem. Relacje te porządkują elementy zbioru-modelu według kryterium przynależności do ich klas abstrakcji, co zwykle zyskuje interpretację w terminach „opisów równoważnych", „rodzajów/rodzin obiektów elementarnych", „multipletów symetrii"' lub „sektorów nadwyboru" w zbiorze-modelu zjawisk i obiektów. Abstrakcyjnego aparatu konstrukcji i analizy takiego „zapośredniczonego" schematu manifestacji algebr o znaczeniu fizycznym dostarcza teoria reprezentacji algebr, którą zajmiemy się w niniejszym rozdziale. Zaczynamy zatem od podstawowej

**Definicja 1.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj $\big(\big((\mathfrak{A}+_{\mathfrak{A}}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \longmapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}}), \ell_{\mathfrak{A}}\big), m_{\mathfrak{A}}\big)$ będzie unitalną algebrą łączną nad pierścieniem przemiennym $R_1$, $\big((G, +_G, P_G, \bullet \longmapsto 0_G), \ell_G\big)$ zaś – modułem lewostronnym nad pierścieniem $R_2$, przy czym zakładamy, że oba pierścienie wiąże relacja $\mathscr{Z}(R_2) \supseteq R_1$. **Reprezentacja** (typu $R_1$) algebry $\mathfrak{A}$ na module $G$ to unitalny homomorfizm $R_1$-algebr

$$\rho \;:\; \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{R_2}(G)\,,$$

przy czym struktura $R_1$-algebry na $\mathrm{End}_{R_2}(G)$ jest tutaj indukowana przez włożenie kanoniczne $\jmath_{R_1} \;:\; R_1 \rightarrowtail R_2$. Moduł $G$ określamy w tym wypadku mianem **nośnika reprezentacji**. Kiedy jest on wolny, definiujemy **wymiar reprezentacji** jako rząd modułu $G$ i zapisujemy

$$\dim \rho \equiv \mathrm{rk}_{R_2} G\,.$$

Jeśli $\rho$ jest monomorfizmem, mówimy o reprezentacji **wiernej**. Centralizator obrazu reprezentacji (patrz: Przykł. (5-6.1.12)),

$$C_{\mathrm{End}_{R_2}(G)}\big(\rho(\mathfrak{A})\big) \subset \mathrm{End}_{R_2}(G)\,,$$

nazywamy **maksymalną podalgebrą komutującą** reprezentacji.

**Podmoduł $\rho$-niezmienniczy** to podmoduł $H \subseteq G$ o własności

$$\forall_{a\in\mathfrak{A}} \;:\; \rho(a)(H) \subset H\,.$$

Wyznacza on **podreprezentację** reprezentacji $\rho$, czyli reprezentację algebry $\mathfrak{A}$ na podmodule $H$ daną w postaci

$$\rho_{(H)} \;:\; \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{R_2}(H) \;:\; a \longmapsto \big(\jmath_H \restriction_{\mathrm{Image}\,\jmath_H}\big)^{-1} \circ \rho(a) \circ \jmath_H\,.$$

Ilekroć pierścień bazowy $R_2 = \mathbb{K}$ jest ciałem, mówimy o **podprzestrzeni $\rho$-niezmienniczej**. Reprezentacja, której jedynymi przestrzeniami niezmienniczymi są $G$ (cały nośnik) i $\{0_G\}$, nosi miano **nieprzywiedlnej**. Reprezentacja, która nie jest nieprzywiedlna, jest określana jako **przywiedlna**. Reprezentacja, której nośnik rozkłada się na sumę prostą przestrzeni niezmienniczych, to reprezentacja **w pełni przywiedlna**, **w pełni rozkładalna** lub **półprosta**. Wreszcie taką, której nośnik nie rozkłada się na sumę prostą *nietrywialnych* przestrzeni niezmienniczych, nazywamy **nierozkładalną**.

Dla dowolnej pary reprezentacji $\rho_\alpha \;:\; \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_R(G_\alpha)$, $\alpha \in \{1,2\}$ algebry $\mathfrak{A}$, **homomorfizm reprezentacji**, zwany także **splataczem reprezentacji**, to odwzorowanie $\chi \in \mathrm{Hom}_{R_2}(G_1, G_2)$ spełniające warunek

$$\forall_{a\in\mathfrak{A}} \;:\; \rho_2(a) \circ \chi = \chi \circ \rho_1(a)\,.$$

Ilekroć splatacz $\chi$ jest izomorfizmem, mówimy o **równoważności reprezentacji** $\rho_1$ i $\rho_2$, którą zapisujemy symbolem

$$\rho_2 \sim \rho_1\,.$$

Reprezentacje $R_1$-algebry $\mathfrak{A}$ na $R_2$-modułach lewostronnych wraz z odnośnymi splataczami tworzą kategorię, którą będziemy oznaczać symbolem $\mathbf{Rep}_{R_1\subseteq R_2}(\mathfrak{A})$.

**Uwaga 1.** Każda reprezentacja nieprzywiedlna jest w oczywisty sposób nierozkładalna. O tym, że w ogólności jest to wynikanie jednokierunkowe, przekonuje analiza prostego przykładu: Oto przestrzeń $\mathbb{R}$-liniowa $\mathbb{R}^{\times 2}$ jest nośnikiem nierozkładalnej, lecz przywiedlnej reprezentacji unitalnej $\mathbb{R}$-algebry łącznej $\mathbb{R}[\cdot]$ określonej (jednoznacznie) przez przyporządkowanie generatorowi $t \in \mathbb{R}[\cdot]$ (zmiennej) macierzy

$$\rho(t) := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) .$$

Jedyną podprzestrzenią $\rho$-niezmienniczą jest tutaj $\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle_{\mathbb{R}}$, przy czym podprzestrzeń ta nie ma $\rho$-niezmienniczego dopełnienia prostego w $\mathbb{R}^{\times 2}$, co wynika z rachunku

$$\forall_{r \in \mathbb{R}} \ : \ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \odot \left(\begin{smallmatrix} r \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + 2 \triangleright \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \notin \langle \left(\begin{smallmatrix} r \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle_{\mathbb{R}} .$$

**Przykłady 1.**

(1) **Reprezentacja trywialna** $R$-algebry $\mathfrak{A}$ na $R$-module $G$ to taka, która spełnia warunek $\forall_{a \in \mathfrak{A} \setminus \{\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}\}} \ : \ \rho(a) = 0$.
(2) **Reprezentacja lewa regularna** $R$-algebry $\mathfrak{A}$ na $R$-module $\mathfrak{A}$ to $l_{\cdot} : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_R(\mathfrak{A}) : a \longmapsto m_{\mathfrak{A}}(a, \cdot)$. Analogicznie definiujemy **reprezentację prawą regularną**. Ilekroć $\mathfrak{A}$ jest unitalna, reprezentacje te są wierne.
(3) **Reprezentacja zredukowana względem ideału** lewostronnego (wzgl. prawostronnego) $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$ $R$-algebry $\mathfrak{A}$ na $R$-module $\mathfrak{I}$ to odwzorowanie $l_{\cdot}^{\mathfrak{I}} : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{I})$ indukowane przez reprezentację lewą (wzgl. prawą) regularną wskutek ograniczenia wyjściowego $R$-modułu $\mathfrak{A}$ do jego podmodułu $\mathfrak{I}$. Reprezentacja ta jest w oczywisty sposób nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{I}$ jest minimalny, tj. gdy $\mathfrak{I}$ nie zawiera podideałów innych niż $\{0_{\mathfrak{A}}\}$ oraz $\mathfrak{I}$.
(4) Wybór bazy w $R$-module $G$ rzędu $\mathrm{rk}_R\, G = N \in \mathbb{N}$ określa reprezentację macierzową $\mathrm{End}_R(G) \xrightarrow{\cong} \mathrm{End}_R(R^{\times N}) \equiv \mathbb{R}(N)$.
(5) Reprezentacje ciała $\mathbb{K}$ traktowanego jako unitalna $\mathbb{Z}$-algebra to przestrzenie $\mathbb{K}$-liniowe.

Naturalne operacje na modułach i algebrach nad pierścieniem przemiennym są dziedziczone przez reprezentacje, czemu daje wyraz

**Definicja 2.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj $\rho_\alpha : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{R_2}(G_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą reprezentacjami $R_1$-algebry $\mathfrak{A}$ na $R_2$-modułach lewostronnych $G_\alpha$. **Suma prosta reprezentacji** $\rho_\alpha$ to reprezentacja

$$\rho_1 \oplus \rho_2 \ : \ \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_R(G_1) \oplus \mathrm{End}_R(G_2) \ : \ a \longmapsto \rho_1(a) \oplus \rho_2(a) .$$

**Iloczyn tensorowy reprezentacji** $\rho_\alpha$ to reprezentacja

$$\rho_1 \otimes \rho_2 \ : \ \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{R_2}(G_1) \otimes_{R_1} \mathrm{End}_{R_2}(G_2) \ : \ a \longmapsto \rho_1(a) \otimes_{R_1} \rho_2(a) .$$

Niechaj teraz $\rho : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{R_2}(G)$ będzie reprezentacją $R_1$-algebry $\mathfrak{A}$ na $R_2$-module $G$, przy czym zakładamy (dla uproszczenia), że także $R_2$ jest pierścieniem przemiennym. **Reprezentacja dwoista** (lub **dualna**) do $\rho$ to reprezentacja

$$\rho^* \ : \ \mathfrak{A}^{\mathrm{opp}} \longrightarrow \mathrm{End}_{R_2}(G^*) \ : \ a \longmapsto \rho(a)^* ,$$

gdzie

$$\rho(a)^* \ : \ G^* \circlearrowleft \ : \ \varphi \longmapsto \varphi \circ \rho(a) .$$

Mając na uwadze przyszłe konkretne zastosowania fizykalne teorii reprezentacji, uzupełnimy dotychczasową jej dyskusję o elementy nawiązujące bezpośrednio do konstrukcji przedstawionych w Def. 11-12.5 i Stw. 11-12.6. Oto więc mamy

**Definicja 3.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\mathfrak{A}$ będzie algebrą nad ciałem $\mathbb{R}$. Jej reprezentację nazwiemy **reprezentacją typu** $R$ dla $R \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ (tj. **rzeczywistego**, **zespolonego** lub – odpowiednio – **kwaternionowego**), jeśli jej przeciwdziedziną jest $\mathbb{R}$-algebra endomorfizmów $\mathrm{End}_{R^{\mathrm{opp}}}(G)$ modułu prawostronnego $G$ nad pierścieniem $R$, tj.

$$\rho \ : \ \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{R^{\mathrm{opp}}}(G) .$$

Równoważnego opisu reprezentacji typu $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$ dostarcza oczywiste, lecz zarazem wygodne

**Stwierdzenie 1.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Reprezentacja zespolona $\mathbb{R}$-algebry $\mathfrak{A}$ to taka jej reprezentacja rzeczywista, której maksymalna podalgebra komutująca spełnia warunek

$$C_{\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(G)}\big(\rho(\mathfrak{A})\big) \supset \langle \mathrm{id}_G, I \rangle_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C}\,.$$

Reprezentacja kwaternionowa $\mathbb{R}$-algebry $\mathfrak{A}$ to taka jej reprezentacja rzeczywista, której maksymalna podalgebra komutująca spełnia warunek

$$C_{\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(G)}\big(\rho(\mathfrak{A})\big) \supset \langle \mathrm{id}_G, I, J, K \rangle_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{H}\,.$$

*Dowód:* Bezpośrednia konsekwencja Def. 3 oraz oraz Stw. 11-12.6, podparta istnieniem monomorfizmów $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{H}$. □

O dodatkowych mechanizmach indukcji zespolonych reprezentacji algebr rzeczywistych i ich kompleksyfikacji opowiada

**Stwierdzenie 2.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj $\mathfrak{A} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alg}_{\mathbb{R}}$ oraz $V \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$ i $W \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{\mathbb{H}^{\mathrm{opp}}}$. Dowolna reprezentacja zespolona $\rho \;:\; \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ kanonicznie indukuje reprezentację

$$\rho^{\mathbb{C}} \;:\; \mathfrak{A}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$$

stanowiącą jedyne $\mathbb{C}$-liniowe rozszerzenie przyporządkowania

$$\rho^{\mathbb{C}}(a \otimes_{\mathbb{R}} z) \coloneqq \rho(a) \circ \ell_z \equiv \ell_z \circ \rho(a)\,,$$

zapisanego dla dowolnych $(a, z) \in \mathfrak{A} \times \mathbb{C}$. Ponadto dowolna reprezentacja kwaternionowa $\widetilde{\rho} \;:\; \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{H}^{\mathrm{opp}}}(W)$ kanonicznie (tożsamościowo) indukuje reprezentację zespoloną

$$\underline{\widetilde{\rho}} \;:\; \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)\,.$$

*Dowód:* Trywialny. □

Powracając do dyskusji ogólnych własności reprezentacji algebr unitalnych, wypowiemy obecnie wynik strukturalny o fundamentalnym znaczeniu dla całej teorii reprezentacji, mimo całą swą trywialność.

**Stwierdzenie 3** (Lematy Schura)**.** Przyjmijmy zapis Def. 1 i niechaj $\rho_\alpha \;:\; \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą dwiema reprezentacjami $\mathbb{K}$-algebry $\mathfrak{A}$ na odnośnych przestrzeniach wektorowych $V_\alpha$ nad ciałem $\mathbb{K}$, odwzorowanie $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ zaś – homomorfizmem reprezentacji. Wówczas $\mathrm{Ker}\,\chi$ jest podprzestrzenią $\rho_1$-niezmienniczą przestrzeni $V_1$, a $\mathrm{Image}\,\chi$ jest podprzestrzenią $\rho_2$-niezmienniczą przestrzeni $V_2$. Ilekroć $\rho_1$ jest nieprzywiedlna, zachodzi alternatywa

$$\mathrm{Ker}\,\chi = V_1 \qquad \vee \qquad \mathrm{Ker}\,\chi = \{0_{V_1}\}\,,$$

kiedy natomiast to $\rho_2$ jest nieprzywiedlna, zachodzi alternatywa

$$\mathrm{Image}\,\chi = \{0_{V_2}\} \qquad \vee \qquad \mathrm{Image}\,\chi = V_2\,.$$

*Dowód:* Oczywisty. □

Jego natychmiastową konsekwencją jest

**Stwierdzenie 4** (Lemat Schura nad ciałem algebraicznie domkniętym)**.** Przyjmijmy zapis Def. 1 i niechaj $\rho \;:\; \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ będzie nieprzywiedlną reprezentacją $\mathbb{K}$-algebry unitalnej $\mathfrak{A}$ na przestrzeni wektorowej $V$ nad ciałem algebraicznie domkniętym $\mathbb{K}$, odwzorowanie $\chi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ zaś – endomorfizmem reprezentacji $\rho$. Wówczas istnieje skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ spełniający warunek

$$\chi = \lambda \triangleright \mathrm{id}_V\,.$$

*Dowód:* Algebraiczna domkniętość $\mathbb{K}$ przesądza o istnieniu skalara $\lambda \in \mathrm{Sp}(\chi)$, którego możemy użyć do zdefiniowania endomorfizmu

$$\chi_\lambda := \chi - \lambda \triangleright \mathrm{id}_V$$

reprezentacji $\rho$. Niech $w_\chi \in \mathbb{K}[t]$ będzie wielomianem charakterystycznym $\chi$, a $P_{w_\chi} : \mathbb{K} \circlearrowleft$ – funkcją wielomianową z nim stowarzyszoną. Wobec tożsamości $\det(\chi_\lambda) \equiv P_{w_\chi}(\lambda) = 0_{\mathbb{K}}$ stwierdzamy, że $\chi_\lambda$ nie jest monomorfizmem, co w świetle Stw. 3 implikuje postulowaną tożsamość $\chi_\lambda = 0$. □

Na gruncie dotychczasowych rozważań natury ogólnej możemy obecnie przystąpić do szczegółowej dyskusji reprezentacji algebr o szczególnej strukturze, które napotkamy w dalszej części kursu. Jednym z wyróżników tej klasy algebr pośród innych obiektów kategorii $\mathbf{Alg}_{\mathbb{K}}$ jest szczególna prostota ich teorii reprezentacji, której świadectwa dostarcza poniższe

**Twierdzenie 1.** Wszystkie wierne reprezentacje nieprzywiedlne skończenie wymiarowej łącznej algebry prostej są wzajem równoważne.

*Dowód:* Niechaj $\mathfrak{A} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alg}_{\mathbb{K}}$ będzie algebrą prostą skończonego wymiaru. W przypadku $\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$ dowód jest banalny, załóżmy zatem, że $\mathfrak{A}$ jest nietrywialna. Zacznijmy od skonstruowania wyróżnionej reprezentacji referencyjnej. W tym celu wybierzmy dowolny minimalny (niezerowy) ideał lewostronny $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$, którego istnienie zapewnia skończoność wymiaru $\mathfrak{A}$ (wystarczy zacząć jego poszukiwania od ideału $\mathfrak{A}$, w którym w następnym kroku wybieramy dowolny nietrywialny podideał lewostronny, o ile takowy istnieje, i procedurę powtarzamy (co najwyżej $(\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{A} - 2)$-krotnie)), i rozważmy reprezentację $l^{\mathfrak{I}}_{\cdot}$ zredukowaną względem $\mathfrak{I}$ (w rozumieniu Przykł. 1 (3)). Reprezentacja ta jest nieprzywiedlna z racji minimalności $\mathfrak{I}$, pozostaje zatem zbadać jej wierność. Jeśli $\mathfrak{I} = \mathfrak{A}$, to $\mathfrak{I}.\mathfrak{I} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$ wprost na mocy definicji algebry prostej, a zatem możemy zastosować tezę Stw. 5-6.7, która pozwala stwierdzić, że $\mathfrak{I} = \mathfrak{A}.P \equiv \mathfrak{I}.P$ dla pewnego idempotenta $P \in \mathfrak{I} \equiv \mathfrak{A}$. Załóżmy, że $l^{\mathfrak{I}}_{\cdot}$ nie jest wierna, tj. $\mathrm{Ker}\, l^{\mathfrak{I}}_{\cdot} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$, a wtedy nieodzownie $\mathrm{Ker}\, l^{\mathfrak{I}}_{\cdot} = \mathfrak{A}$, gdyż $\mathrm{Ker}\, l^{\mathfrak{I}}_{\cdot}$ jest ideałem obustronnym. To wszakże oznacza, że $\forall_{a \in \mathfrak{A}, b \in \mathfrak{I} \equiv \mathfrak{A}} : a.b \equiv l^{\mathfrak{I}}_a(b) = 0_{\mathfrak{A}}$, czyli $\mathfrak{A}.\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$, w sprzeczności z założeniem o prostocie $\mathfrak{A}$. Pozostaje jeszcze rozpatrzeć przypadek $\mathfrak{I} \subsetneq \mathfrak{A}$. I w tym przypadku załóżmy, że $\mathrm{Ker}\, l^{\mathfrak{I}}_{\cdot} = \mathfrak{A}$. Wobec niezerowości $\mathfrak{I}$ możemy wybrać $x \in \mathfrak{I} \setminus \{0_{\mathfrak{A}}\}$, z którym następnie stowarzyszamy ideał prawostronny $x.\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}$. Poczynione założenie przesądza o tym, że jest to ideał obustronny, oto bowiem

$$\forall_{a \in \mathfrak{A}} : a.(x.\mathfrak{A}) = (a.x).\mathfrak{A} \equiv l^{\mathfrak{I}}_a(x).\mathfrak{A} = 0_{\mathfrak{A}}.\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\} \subset x.\mathfrak{A}\,.$$

Wobec prostoty $\mathfrak{A}$ wnioskujemy, że albo $x.\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$, albo też $x.\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$. Jeśli $x.\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$, to bez trudu stwierdzamy, że także $\langle x \rangle_{\mathbb{K}}$ jest ideałem obustronnym, gdyż

$$\forall_{(a,\lambda) \in \mathfrak{A} \times \mathbb{K}} : a.(\lambda \triangleright x) = \lambda \triangleright (a.x) \equiv \lambda \triangleright l^{\mathfrak{I}}_a(x) = \lambda \triangleright 0_{\mathfrak{A}} = 0_{\mathfrak{A}}$$

oraz

$$\forall_{(a,\lambda) \in \mathfrak{A} \times \mathbb{K}} : (\lambda \triangleright x).a = \lambda \triangleright (x.a) \in x.\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\}\,,$$

a ponieważ $\langle x \rangle_{\mathbb{K}} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$ (wszak $x \neq 0_{\mathfrak{A}}$), przeto koniecznie $\langle x \rangle_{\mathbb{K}} = \mathfrak{A}$. Wtedy jednak zachodzi równość $\mathfrak{A}.\mathfrak{A} \equiv \langle x \rangle_{\mathbb{K}}.\mathfrak{A} = x.\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$, co jest w sprzeczności z założeniem o prostocie $\mathfrak{A}$. Jeżeli natomiast $x.\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, to

$$\forall_{a, b = x.c \in \mathfrak{A}} : a.b \equiv a.(x.c) = (a.x).c \equiv l^{\mathfrak{I}}_a(x).c = 0_{\mathfrak{A}}.c = 0_{\mathfrak{A}}\,,$$

znów w sprzeczności z założeniem $\mathfrak{A}.\mathfrak{A} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$. Ostatecznie więc nieodzownie $\mathrm{Ker}\, l^{\mathfrak{I}}_{\cdot} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$, czyli mamy do czynienia z wierną i – jak pokazaliśmy wcześniej – nieprzywiedlną reprezentacją $l^{\mathfrak{I}}_{\cdot}$.

Niechaj teraz $\rho : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ będzie wierną reprezentacją nieprzywiedlną na przestrzeni wektorowej $V$. Wierność $\rho$ oznacza, że $\forall_{a \in \mathfrak{I} \setminus \{0_{\mathfrak{A}}\}} : \rho(a) \neq 0$, czyli

$$\forall_{a \in \mathfrak{I} \setminus \{0_{\mathfrak{A}}\}} \exists_{v \in V} : \rho(a)(v) \neq 0_V\,.$$

Ustalmy $a_0 \in \mathfrak{I} \smallsetminus \{0_{\mathfrak{A}}\}$ oraz odnośny wektor $v_0 \in V$ (o powyższej własności) i zdefiniujmy odwzorowanie (jawnie) $\mathbb{K}$-liniowe

$$\chi_0 \;:\; \mathfrak{I} \longrightarrow V \;:\; a \longmapsto \rho(a)(v_0)\,.$$

Odwzorowanie to spełnia – dla dowolnych $(a,b) \in \mathfrak{A} \times (\mathfrak{I} \smallsetminus \{0_{\mathfrak{A}}\})$ – warunek

$$\chi_0 \circ l_a^{\mathfrak{I}}(b) \equiv \chi_0(a \cdot_{\mathfrak{A}} b) \equiv \rho(a \cdot_{\mathfrak{A}} b)(v_0) = \rho(a) \circ \rho(b)(v_0) \equiv \rho(a) \circ \chi_0(b)\,,$$

tj. splata ze sobą nieprzywiedlne reprezentacje $\mathfrak{A}$: reprezentację zredukowaną względem $\mathfrak{I}$ oraz $\rho$, patrz: Przykł. 1 (3). Ponieważ jednak zarówno $\operatorname{Ker}\chi_0 \neq \mathfrak{I}$ (gdyż $\chi_0(a_0) \neq 0_V$), jak i $\operatorname{Image}\chi_0 \neq \{0_V\}$ (z tego samego powodu), przeto – na mocy Stw. 3 – $\chi_0$ jest izomorfizmem. Na tej podstawie wnioskujemy, że każda wierna reprezentacja nieprzywiedlna $\rho \;:\; \mathfrak{A} \longrightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ jest równoważna reprezentacji zredukowanej $l_\cdot^{\mathfrak{I}}$ względem dowolnego (minimalnego) ideału lewostronnego $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$. □

Jego treść uzupełnia w nader istotny sposób

**Stwierdzenie 5.** Wszystkie nietrywialne reprezentacje unitalnej łącznej algebry prostej są wierne.

*Dowód:* Niechaj $\mathfrak{A} \in \operatorname{Ob}\mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}}$ będzie algebrą prostą, $\rho \;:\; \mathfrak{A} \longrightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ zaś – jej reprezentacją, przy czym zakładamy, że $\operatorname{Ker}\rho \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$. Wybierzmy dowolny element $a \in \operatorname{Ker}\rho \smallsetminus \{0_{\mathfrak{A}}\}$ i wygenerujmy zeń ideał obustronny

$$\langle a \rangle_{\mathfrak{A}} \coloneqq \Big\{ \sum_{i=1}^{N} b_i \cdot_{\mathfrak{A}} a \cdot_{\mathfrak{A}} c_i \quad | \quad b_i, c_i \in \mathfrak{A}\,,\; i \in \overline{1,N}\,,\; N \in \mathbb{N} \Big\}\,.$$

Ideał ów zawiera $a \neq 0_{\mathfrak{A}}$, gdyż $a \equiv \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}.a.\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$, a zatem z racji prostoty $\mathfrak{A}$ zachodzi równość $\langle a \rangle_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$, która jednak pociąga za sobą tożsamość (zapisaną symbolicznie)

$$\rho(\mathfrak{A}) \equiv \rho(\mathfrak{A}.a.\mathfrak{A}) = \rho(\mathfrak{A}) \circ \rho(a) \circ \rho(\mathfrak{A}) = 0\,,$$

więc też trywialność $\rho$. □

Z połączenia obu poprzednich wyników wyprowadzamy

**Corollarium 1.** Wszystkie nietrywialne reprezentacje nieprzywiedlne unitalnej łącznej algebry prostej są wzajem równoważne.

W kontekście Stw.5-6.5 i Def. 2 rodzi się naturalne pytanie o konsekwencje, jakie powyższe rozważania niosą dla teorii reprezentacji algebr będących sumami prostymi unitalnych algebr prostych (czyli szczególnymi przypadkami tzw. **algebr półprostych**), przy czym – jak niemal zawsze w niniejszym kursie – ostatecznej sankcji logicznej dla tego pytania dostarczają istotne fizykalne zastosowania owych algebr, jak choćby napotkana przez nas klasyfikacja rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda. Ilościowej odpowiedzi na nie udziela

**Stwierdzenie 6.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj $\{\mathfrak{A}\}_{i \in \overline{1,N}} \subset \operatorname{Ob}\mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}}$ będzie rodziną unitalnych algebr prostych nad ciałem $\mathbb{K}$ o odnośnych nietrywialnych reprezentacjach nieprzywiedlnych $\{\rho_i\}_{i \in \overline{1,N}}$, o których mowa w Cor. 1. Dowolna nietrywialna reprezentacja nieprzywiedlna algebry $\bigoplus_{i=1}^N \mathfrak{A}_i$ jest równoważna jednej z reprezentacji

$$\rho_{n.} \coloneqq \bigoplus_{i=1}^N n_i\,\rho_i\,,$$

$$n. \equiv (n_1, n_2, \ldots, n_N) \in \{(1,0,0,\ldots,0), (0,1,0,0,\ldots,0), \ldots, (0,0,\ldots,0,1)\}\,.$$

*Dowód:* Niechaj $\rho \;:\; \bigoplus_{i=1}^N \mathfrak{A}_i \longrightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ będzie nietrywialną reprezentacją nieprzywiedlną. Rozważmy kanoniczne włożenia $\jmath_{\mathfrak{A}_i} \;:\; \mathfrak{A}_i \rightarrowtail \bigoplus_{i=1}^N \mathfrak{A}_i$. Bez trudu przekonujemy się, że endomorfizmy

$$\pi_i \coloneqq \rho \circ \jmath_{\mathfrak{A}_i}(1_{\mathfrak{A}_i})\,, \quad i \in \overline{1,N}$$

tworzą zupełną rodzinę rzutów komplementarnych na $V$, zatem zadają rozkład

$$V = \bigoplus_{i=1}^{N} V_i\,, \qquad V_i := \pi_i(V)\,,$$

którego składnik prosty $V_i$ jest nośnikiem reprezentacji

$$\rho_i := \rho \circ \jmath_{\mathfrak{A}_i} \;:\; \mathfrak{A}_i \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_i)$$

o własności

$$\begin{aligned}\forall_{j\in\overline{1,N}\smallsetminus\{i\}} \;:\; \rho_j(\mathfrak{A}_j)(V_i) &\equiv \rho_j(\mathfrak{A}_j)\circ\rho\circ\jmath_{\mathfrak{A}_i}(1_{\mathfrak{A}_i})(V) = \rho\big(\jmath_{\mathfrak{A}_j}(\mathfrak{A}_j)\cdot_{\mathfrak{A}}\jmath_{\mathfrak{A}_i}(1_{\mathfrak{A}_i})\big)(V)\\ &= \rho(\{0_{\mathfrak{A}}\})(V) = \{0_V\}\,,\end{aligned}$$

która pozwala zapisać

$$\begin{aligned}\rho(\mathfrak{A})(V_i) &\equiv \rho\big(\bigoplus_{j=1}^{N}\jmath_{\mathfrak{A}_j}(\mathfrak{A}_j)\big)\circ(\rho\circ\jmath_{\mathfrak{A}_i})(1_{\mathfrak{A}_i})(V) = \rho\big(\jmath_{\mathfrak{A}_i}(\mathfrak{A}_i)\cdot_{\mathfrak{A}}\jmath_{\mathfrak{A}_i}(1_{\mathfrak{A}_i})\big)(V)\\ &= \rho\circ\jmath_{\mathfrak{A}_i}(\mathfrak{A}_i)(V_i) \equiv \rho_i(\mathfrak{A}_i)(V_i)\,.\end{aligned}$$

czyli – innymi słowy –

$$\rho \equiv \bigoplus_{i=1}^{N}\rho_i\circ\mathrm{pr}_i\,,$$

gdzie $\mathrm{pr}_i \;:\; \mathfrak{A} \twoheadrightarrow \mathfrak{A}_i$ jest rzutem kanonicznym na składową. I odwrotnie, rodzina reprezentacji $\rho_i \;:\; \mathfrak{A}_i \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_i)$, $i \in \overline{1,N}$ zadaje reprezentację

$$\rho := \bigoplus_{i=1}^{N}\jmath_{\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_i)}\circ\rho_i\circ\mathrm{pr}_i \;:\; \bigoplus_{i=1}^{N}\mathfrak{A}_i \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\bigoplus_{i=1}^{N}V_i\big)$$

sumy prostej algebr $\mathfrak{A}_i$ na (zewnętrznej) sumie prostej przestrzeni $V_i$. Wobec prostego charakteru rozkładu $\rho$ na składowe jest jasnym, że nietrywialność i nieprzywiedlność $\rho$ wymaga, iżby wszystkie poza jedną z podreprezentacji $\widetilde{\rho}_i := (\jmath_{\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_i)}\circ)\rho_i\circ\mathrm{pr}_i$ były trywialne, a do tego – iżby sama nietrywialna $\widetilde{\rho}_i$ była nieprzywiedlna, co w świetle Cor. 1 jest równoznaczne z dowodzoną tezą. □

Możemy już teraz przystąpić do konstruktywnego opisu (nietrywialnych) reprezentacji nieprzywiedlnych wyróżnionych algebr macierzowych wspomnianych w tezie Stw.5-6.3, które napotkaliśmy we wcześniejszej części wykładu.

**Twierdzenie 2.** Przyjmijmy zapis Def. 1. Wszystkie nietrywialne reprezentacje nieprzywiedlne dowolnej z $\mathbb{K}$-algebr $R(n)$, $n \in \mathbb{N}\smallsetminus\{0\}$, o których mowa w Stw.5-6.3 ($\mathbb{K}$ dowolne, gdy $R = \mathbb{K}$ jest ciałem, wzgl. $\mathbb{K} = \mathbb{R} \subset R$, gdy $R \in \{\mathbb{C},\mathbb{H}\}$), są równoważne odnośnej **reprezentacji definiującej**

$$\rho_{\mathrm{def}} := \mathrm{id}_{\mathrm{End}_{R^{\mathrm{opp}}}(R^{\times n})}\,.$$

Ponadto dowolna skończenie wymiarowa nietrywialna reprezentacja algebry $\mathbb{K}(n)$ nad ciałem $\mathbb{K}$ jest w pełni przywiedlna i równoważna skończonej sumie prostej kopii tejże reprezentacji definiującej.

<u>*Dowód:*</u> Zauważmy przede wszystkim, że reprezentacja $\rho_{\mathrm{def}}$ jest nietrywialna i nieprzywiedlna, gdyż $\rho_{\mathrm{def}}(\mathbf{1}_n) = \mathbf{1}_n \neq \mathbf{0}_n$ oraz

$$\forall_{\substack{v\in R^{\times n}\smallsetminus\{0\}\\ w\in R^{\times n}}}\;\exists_{a\in R(n)} \;:\; w = a\odot v\,.$$

Istotnie, dowolny wektor $v \neq 0_{R^{\times n}}$ ma różną od zera jedną ze składowych $v^i \neq 0$ w bazie standardowej $\mathcal{E} \equiv \{e_i\}_{i\in\overline{1,n}}$, można zatem dla ustalonego $w = w^i \triangleright e_i$ wybrać $a$ w postaci

$$a := \frac{w^j}{v^{\bar{i}}} \triangleright E^{(n)}_{j,\bar{i}}$$

gdzie $\{E^{(n)}_{i,j}\}_{i,j\in\overline{1,n}}$ jest bazą standardową pierścienia $R(n)$ wskazaną w Przykł. 5-6.1 (1) i gdzie kreska nad indeksem $i$ oznacza, że nie jest on wysumowany. Pierwsza część dowodzonej tezy jest zatem bezpośrednią konsekwencją Cor. 1.

Niech dalej $\rho : \mathbb{K}(n) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ będzie reprezentacją $\mathbb{K}$-algebry $\mathbb{K}(n)$ na pewnej przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej $V$. Łatwo sprawdzamy, że endomorfizmy tej ostatniej dane wzorami

$$\pi_i := \rho\big(E^{(n)}_{i,i}\big)$$

tworzą zupełną rodzinę rzutów komplementarnych na $V$, oto bowiem na mocy Równ. (5-6.1) i (5-6.2) zachodzi

$$\pi_i \circ \pi_j \equiv \rho\big(E^{(n)}_{i,i} \odot E^{(n)}_{j,j}\big) = \delta^{\mathbb{K}}_{i,j} \triangleright \rho\big(E^{(n)}_{i,j}\big) = \delta^{\mathbb{K}}_{i,j} \triangleright \rho\big(E^{(n)}_{i,i}\big) \equiv \delta^{\mathbb{K}}_{i,j} \triangleright \pi_i$$

oraz

$$\sum_{i=1}^n \pi_i \equiv \rho\big(\sum_{i=1}^n E^{(n)}_{i,i}\big) = \rho(\mathbf{1}_n) = \mathrm{id}_V\,.$$

To jednak jest równoznaczne z istnieniem rozkładu

$$V = \bigoplus_{i=1}^n \pi_i(V)\,.$$

Rozważmy odwzorowania $\mathbb{K}$-liniowe

$$\tau_{1\to k} := \rho\big(E^{(n)}_{k,1}\big)\restriction_{\pi_1(V)} \; : \; \pi_1(V) \longrightarrow V$$

o własności

$$\tau_{1\to k} \circ \pi_1 \equiv \tau_{1\to k} \circ \pi_1 \circ \pi_1 \equiv \rho\big(E^{(n)}_{k,1} \odot E^{(n)}_{1,1}\big) \circ \pi_1 = \rho\big(E^{(n)}_{k,k} \odot E^{(n)}_{k,1}\big) \circ \pi_1 \equiv \pi_k \circ \tau_{1\to k}\,,$$

która implikuje relacje

$$\mathrm{Image}\,\tau_{1\to k} \subset \pi_k(V)\,.$$

Zdefiniowawszy odwzorowania $\mathbb{K}$-liniowe

$$\tau_{k\to 1} := \rho\big(E^{(n)}_{1,k}\big)\restriction_{\pi_k(V)} \; : \; \pi_k(V) \longrightarrow V$$

o własności

$$\tau_{k\to 1} \circ \pi_k \equiv \tau_{k\to 1} \circ \pi_k \circ \pi_k \equiv \rho\big(E^{(n)}_{1,k} \odot E^{(n)}_{k,k}\big) \circ \pi_k = \rho\big(E^{(n)}_{1,1} \odot E^{(n)}_{1,k}\big) \circ \pi_k \equiv \pi_1 \circ \tau_{k\to 1}\,,$$

z której wynikają relacje

$$\mathrm{Image}\,\tau_{k\to 1} \subset \pi_1(V)\,,$$

stwierdzamy bez trudu, że odwzorowania $\tau_{k\to 1}$ są obustronnymi odwrotnościami odwzorowań $\tau_{1\to k}$,

$$\begin{aligned}\tau_{1\to k} \circ \tau_{k\to 1} &\equiv \rho\big(E^{(n)}_{k,1} \odot E^{(n)}_{1,k}\big)\restriction_{\pi_k(V)} = \rho\big(E^{(n)}_{k,k}\big)\restriction_{\pi_k(V)} \equiv \pi_k\restriction_{\pi_k(V)} = \mathrm{id}_{\pi_k(V)}\,,\\ \tau_{k\to 1} \circ \tau_{1\to k} &\equiv \rho\big(E^{(n)}_{1,k} \odot E^{(n)}_{k,1}\big)\restriction_{\pi_1(V)} = \rho\big(E^{(n)}_{1,1}\big)\restriction_{\pi_1(V)} \equiv \pi_1\restriction_{\pi_1(V)} = \mathrm{id}_{\pi_1(V)}\,,\end{aligned}$$

co daje nam do ręki rodzinę izomorfizmów podprzestrzeni

$$\tau_{k\to 1} \; : \; \pi_k(V) \xrightarrow{\cong} \pi_1(V)\,, \quad k \in \overline{1,n}\,.$$

Określmy następnie odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe

$$T \equiv (\pi_1, \tau_{1\to 2}, \tau_{1\to 3}, \ldots, \tau_{1\to n}) \; : \; \pi_1(V) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n V$$

i oznaczmy – dla dowolnego wektora $v \in \pi_1(V)$ –

$$\big(\tau^v_1, \tau^v_2, \ldots, \tau^v_n\big) := T(v)\,.$$

Łatwo sprawdzamy, że przestrzeń $\langle T(v)\rangle_{\mathbb{K}} \subset V$ jest dla dowolnego $v \neq 0_V$ podprzestrzenią $\rho$-niezmienniczą – istotnie, układ $\mathcal{T} := \{\tau^v_k\}_{k\in\overline{1,n}}$ jest jawnie $\mathbb{K}$-liniowo niezależny (wszak jego elementy, będące izomorficznymi obrazami wektora niezerowego, należą do parami różnych składników prostych $V$), a przy tym wprost na mocy definicji rozpina przestrzeń $\langle T(v)\rangle_{\mathbb{K}}$, jest zatem jej bazą, w niej zaś stwierdzamy – dla dowolnej macierzy $M = M_{ij} \triangleright E^{(n)}_{i,j} \in \mathbb{K}(n)$ –

$$\begin{aligned}\rho(M)\big(\tau^v_k\big) &= M_{ij} \triangleright \rho\big(E^{(n)}_{i,j} \odot E^{(n)}_{k,1}\big)(v) = M_{ij} \cdot \delta^{\mathbb{K}}_{j,k} \triangleright \rho\big(E^{(n)}_{i,1}\big)(v) \\ &\equiv M_{i,k} \triangleright \tau^v_i \in \langle T(v)\rangle_{\mathbb{K}} \,.\end{aligned}$$

Przy tym zauważamy, że także w przypadku reprezentacji definiującej $\rho_{\rm def}$ są – w bazie standardowej $\mathcal{E}$ przestrzeni $\mathbb{K}^{\times n}$ – spełnione równości

$$\rho_{\rm def}(M)(e_k) = M_{ij} \triangleright E^{(n)}_{i,j} \odot e_k = M_{ij} \cdot \delta^{\mathbb{K}}_{j,k} \triangleright e_i \equiv M_{i,k} \triangleright e_i \,,$$

więc odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe

$$\iota_v \,:\, \langle T(v)\rangle_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times n}$$

będące rozszerzeniem przyporządkowania baz

$$\langle T(v)\rangle_{\mathbb{K}} \ni \tau^v_i \longmapsto e_i \in \mathbb{K}^{\times n} \,, \quad i \in \overline{1,n}$$

jest równoważnością reprezentacji

$$\rho\!\restriction_{\langle T(v)\rangle_{\mathbb{K}}} \sim \rho_{\rm def} \,.$$

Uwzględniając powyższe, wybierzmy w $\pi_1(V)$ dowolną bazę $\{v_i \equiv \tau^{v_i}_1\}_{i\in\overline{1,D}}$, $D \equiv \dim_{\mathbb{K}} \pi_1(V)$, a wówczas układy wektorów $\{\tau^{v_i}_k\}_{i\in\overline{1,D}} \subset \pi_k(V)$, $k \in \overline{1,n}$ są – jako izomorficzne obrazy układu bazowego – bazami w odnośnych składnikach $\pi_k(V) \subset V$, co w sumie daje nam rozkład

$$V = \bigoplus_{k=1}^n \pi_k(V) = \bigoplus_{k=1}^n \bigoplus_{i=1}^D \big\langle \tau^{v_i}_k \big\rangle_{\mathbb{K}} = \bigoplus_{i=1}^D \bigoplus_{k=1}^n \big\langle \tau^{v_i}_k \big\rangle_{\mathbb{K}} \equiv \bigoplus_{i=1}^D \langle T(v_i)\rangle_{\mathbb{K}} \xrightarrow{\ \oplus_{i=1}^D \iota_{v_i}\ } \bigoplus_{i=1}^D \mathbb{K}^{\times n} \,,$$

a wraz z nim – postulowaną równoważność

$$\rho \sim \bigoplus_{i=1}^D \rho_{\rm def} \,.$$

□

Powyższe twierdzenie stanowi zwieńczenie naszej wyczerpującej analizy teorii reprezentacji algebr prostych. Jednocześnie tworzy ono naturalny kontekst, w którym możliwe jest lepsze zrozumienie sensu Stw. 1. Oto więc mamy

**Stwierdzenie 7.** Przyjmijmy zapis Tw. 2 i ustalmy (dowolnie) $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Prawdziwe są następujące zdania:

(i) Reprezentacja definiująca $\mathbb{R}$-algebry $\mathbb{R}(n)$ jest rzeczywista i nie jest zespolona, więc tym bardziej nie jest też kwaternionowa.
(ii) Reprezentacja definiująca $\mathbb{R}$-algebry $\mathbb{C}(n)$ jest zespolona i nie jest kwaternionowa.
(iii) Reprezentacja definiująca $\mathbb{R}$-algebry $\mathbb{H}(n)$ jest kwaternionowa.

*Dowód:* Punktem wyjścia do udowodnienia tezy stwierdzenia jest zrozumienie strukturalnej różnicy między odwzorowaniem $\mathbb{R}$-liniowym i odwzorowaniem $R^{\rm opp}$-liniowym na $R^{\times n}$ dla pierścienia z dzieleniem $R \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, w którym pierścień $\mathbb{R}$ jest zanurzony poprzez monomorfizm

$$\jmath_R \,:\, \mathbb{R} \rightarrowtail R \equiv \mathbb{R}^{\times N} \,:\, r \longmapsto (r, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{N-1 \text{ razy}}) \,,$$

gdzie $N = 1$ dla $R = \mathbb{R}$, $N = 2$ dla $R = \mathbb{C}$ i $N = 4$ dla $R = \mathbb{H}$. Biorąc pod uwagę to zanurzenie, zapiszemy

$$R^{\times n} \equiv \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}^{\times N} \cong \mathbb{R}^{\times n} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times N} \,,$$

a wtedy

$$\mathrm{End}_{\mathbb{R}}\big(R^{\times n}\big) \cong \mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(N) \,.$$

Dalej zauważmy, że należące do $R$ współczynniki rozkładu dowolnej macierzy $M = E^{(n)}_{i,j} \otimes_{\mathbb{R}} M_{ij} \in R(n)$ w bazie standardowej należy przy powyższym rozkładzie rozumieć jako macierze

$$M_{ij} = \sum_{a=1}^{N} M^a_{ij} \triangleright I^R_a \in \mathbb{R}(N)$$

o współczynnikach rzeczywistych $M^k_{i,j}$, rozpięte na generatorach $I^R_a \in \mathbb{R}(N)$ realizujących działanie (poprzez mnożenie) elementów bazy standardowej $1$ (w przypadku $R = \mathbb{R}$) wzgl. $(1,0),(0,1)$ (w przypadku $R = \mathbb{C}$) wzgl. $(1,0,0,0),(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0),(0,0,0,1)$ (w przypadku $R = \mathbb{H}$) na $\mathbb{R}^{\times N} \equiv R$. Widzimy zatem, że

$$R(n) \cong \mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \bigoplus_{a=1}^{n} \langle I^R_a \rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(N) \cong \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\big(R^{\times n}\big)\,.$$

Bez trudu znajdujemy jawną postać wyróżnionych macierzy $I^R_a$ (z której wynika ich liniowa niezależność) w bezpośrednim rachunku,

$$1 \cdot_{\mathbb{R}} a = a \qquad \Longrightarrow \qquad I^{\mathbb{R}}_1 = 1\,,$$

$$(1,0) \cdot_{\mathbb{C}} (a,b) = (a,b) \qquad \Longrightarrow \qquad I^{\mathbb{C}}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \equiv \widetilde{\sigma}_0\,,$$

$$(0,1) \cdot_{\mathbb{C}} (a,b) = (-b,a) \qquad \Longrightarrow \qquad I^{\mathbb{C}}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \equiv \widetilde{\sigma}_2\,,$$

$$(1,0,0,0) \cdot_{\mathbb{H}} (a,b,c,d) = (a,b,c,d) \qquad \Longrightarrow \qquad I^{\mathbb{H}}_1 = \widetilde{\sigma}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \widetilde{\sigma}_0\,,$$

$$(0,1,0,0) \cdot_{\mathbb{H}} (a,b,c,d) = (-b,a,-d,c) \qquad \Longrightarrow \qquad I^{\mathbb{H}}_2 = \widetilde{\sigma}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \widetilde{\sigma}_2\,,$$

$$(0,0,1,0) \cdot_{\mathbb{H}} (a,b,c,d) = (-c,d,a,-b) \qquad \Longrightarrow \qquad I^{\mathbb{H}}_3 = \widetilde{\sigma}_2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{i} \triangleright \widetilde{\sigma}_3\,,$$

$$(0,0,0,1) \cdot_{\mathbb{H}} (a,b,c,d) = (-c,d,a,-b) \qquad \Longrightarrow \qquad I^{\mathbb{H}}_4 = \widetilde{\sigma}_2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{i} \triangleright \widetilde{\sigma}_1\,,$$

przy czym $\widetilde{\sigma}_\mu$, $\mu \in \{0,1,2,3\}$ są osławionymi **macierzami Pauliego** (w matematycznie raczej niż fizycznie umotywowanej konwencji[1]) o prostych regułach (anty-)komutacji

$$[\widetilde{\sigma}_i, \widetilde{\sigma}_j] = 2\varepsilon_{ijk} \triangleright \widetilde{\sigma}_k\,, \qquad \{\widetilde{\sigma}_i, \widetilde{\sigma}_j\} = -2\delta_{i,j} \triangleright \widetilde{\sigma}_0\,,$$

zapisanych przy użyciu **symbolu Levi-Civitty**

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} \mathrm{sign}(\sigma)\,, & \text{gdy } (i,j,k) = \big(\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3)\big) \text{ dla } \sigma \in \mathfrak{S}_{\{1,2,3\}} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}\,.$$

Na tym etapie możemy już wygodnie przeformułować pytanie o postać centralizatora $C_{\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(R^{\times n})}(R(n))$ – w wybranej przez nas wygodnej prezentacji $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(R^{\times n})$ tworzą go macierze

$$C = C_{ij,ab} \triangleright E^{(n)}_{i,j} \otimes_{\mathbb{R}} E^{(N)}_{a,b} \in \mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(N)$$

przemienne ze wszystkimi generatorami wiernego obrazu $R(n)$ w $\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(N)$, tj. spełniające układ warunków

$$\forall_{(i,j,a) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n} \times \overline{1,N}} \;:\; [C, E^{(n)}_{i,j} \otimes_{\mathbb{R}} I^R_a] = \mathbf{0}_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_N\,. \tag{1}$$

Wykorzystując algebrę (5-6.2), możemy przepisać powyższe warunki w postaci

$$\forall_{(i,j,a) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n} \times \overline{1,N}} \;:\; C_{ki,bc} \triangleright E^{(n)}_{k,j} \otimes_{\mathbb{R}} E^{(N)}_{b,c} \odot I^R_a = C_{jk,bc} \triangleright E^{(n)}_{i,k} \otimes_{\mathbb{R}} I^R_a \odot E^{(N)}_{b,c}\,.$$

Dla $a = 1$, a wobec liniowej niezależności wektorów $E^{(N)}_{b,c}$ wnioskujemy na tej podstawie, że

$$\forall_{(i,j,b,c) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n} \times \overline{1,N} \times \overline{1,N}} \;:\; C_{ki,bc} \triangleright E^{(n)}_{k,j} = C_{jk,bc} \triangleright E^{(n)}_{i,k}\,.$$

[1]Macierze $\widetilde{\sigma}_i$, $i \in \{1,2,3\}$ stanowią bazę algebry Liego $\mathfrak{su}_2$, którą w zgodzie z tradycją matematyczną wybieramy w postaci skośnie hermitowskiej.

Łatwo widać, że obecność dowolnego niezerowego wyrazu $C_{ki,bc}$ o indeksach $k \neq i$ prowadziłaby do sprzeczności, gdyż oznaczałaby, że wektor $E^{(n)}_{k,j}$ należy do powłoki $\mathbb{R}$-liniowej wektorów $E^{(n)}_{l,m}$, $l \neq k$, stwierdzamy więc, że niechybnie

$$\forall_{(i,j,a,b)\in\overline{1,n}\times\overline{1,n}\times\overline{1,N}\times\overline{1,N}} \ : \ C_{ij,ab} = \delta_{i,j}\, c_{ab}$$

dla pewnych liczb $c_{ab} \in \mathbb{R}$, czyli – innymi słowy – że

$$C = \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} c$$

dla pewnej macierzy $c \in \mathbb{R}(N)$, która w świetle (1) spełnia układ warunków przemienności

$$\forall_{a\in\overline{2,N}} \ : \ [c, I^R_a] = \mathbf{0}_N \,. \tag{2}$$

To pozwala zapisać równość

$$C_{\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times n})}\big(\mathbb{R}(n)\big) = \langle \mathbf{1}_n \rangle_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}\,,$$

co kończy dowód punktu (i).

W przypadku $R = \mathbb{C}$ mamy do czynienia z macierzą

$$c := \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}(2)$$

o własności

$$\left(\begin{smallmatrix} \beta & -\alpha \\ \delta & -\gamma \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \odot \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \overset{!}{=} \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \odot \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -\gamma & -\delta \\ \alpha & \beta \end{smallmatrix}\right)\,,$$

a zatem

$$c = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{smallmatrix}\right)$$

i ostatecznie

$$C_{\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^{\times n})}\big(\mathbb{C}(n)\big) = \langle \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} \widetilde{\sigma}_0, \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} \widetilde{\sigma}_2 \rangle_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C}\,,$$

co pokazuje słuszność punktu (ii). Odnotujmy na marginesie, że $\mathbb{R}$-liniowy endomorfizm $\mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} \widetilde{\sigma}_2$ przestrzeni $\mathbb{C}^{\times n}$ realizuje działanie skalara $(0,1)$, tj. – w zapisie Stw. 11-12.6 – jest strukturą zespoloną na $\mathbb{C}^{\times n}$, co pozwala nadać nowy (i równoważny poprzedniemu) sens pojęciu endomorfizmu $\mathbb{C}$-liniowego tejże przestrzeni: oto macierze $\mathbb{C}(n)$ są przemienne z tymi i tylko tymi odwzorowaniami $\mathbb{R}$-*liniowymi* na $\mathbb{C}^{\times n}$, które realizują działanie ciała $\mathbb{C}$.

Przechodząc do ostatniego przypadku, $R = \mathbb{H}$, zapisujemy macierz $c$ w postaci

$$c := \left(\begin{smallmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ \Gamma & \Delta \end{smallmatrix}\right)\,, \qquad \mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \Delta \in \mathbb{R}(2)\,,$$

$$\mathsf{A} := \left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{smallmatrix}\right)\,, \qquad \mathsf{B} := \left(\begin{smallmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{smallmatrix}\right)\,, \qquad \Gamma := \left(\begin{smallmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{smallmatrix}\right)\,, \qquad \Delta := \left(\begin{smallmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \delta_3 & \delta_4 \end{smallmatrix}\right)\,,$$

po czym nakładamy po kolei warunki z (2). Z warunku dla $a = 2$ wyprowadzamy zależności

$$\forall_{x\in\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}} \ : \ (x_3, x_4) = (-x_2, x_1)\,,$$

a z warunku dla $a = 3$ – relacje

$$\Gamma = -\mathsf{B}^{\mathrm{T}}\,, \qquad \Delta = \mathsf{A}^{\mathrm{T}}\,.$$

Warunek dla $a = 4$ jest teraz spełniony tożsamościowo i koniec końców otrzymujemy oczekiwaną równość

$$C_{\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^{\times n})}\big(\mathbb{H}(n)\big)$$

$$= \langle \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (\widetilde{\sigma}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \widetilde{\sigma}_0), \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (\mathsf{i} \triangleright \widetilde{\sigma}_3 \otimes_{\mathbb{R}} \widetilde{\sigma}_2), \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (\widetilde{\sigma}_2 \otimes_{\mathbb{R}} \widetilde{\sigma}_0), \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (\mathsf{i} \triangleright \widetilde{\sigma}_1 \otimes_{\mathbb{R}} \widetilde{\sigma}_2) \rangle_{\mathbb{R}}\,,$$

przy czym raz jeszcze przekonujemy się, że wyróżnione $\mathbb{R}$-liniowy endomorfizmy $\mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (\mathsf{i} \triangleright \widetilde{\sigma}_3 \otimes_{\mathbb{R}} \widetilde{\sigma}_2), \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (\widetilde{\sigma}_2 \otimes_{\mathbb{R}} \widetilde{\sigma}_0)$ i $\mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (\mathsf{i} \triangleright \widetilde{\sigma}_1 \otimes_{\mathbb{R}} \widetilde{\sigma}_2)$ realizują na $\mathbb{H}^{\times n}$ naturalne działanie *prawostronne* (czyli z prawej strony – patrz: Def. 11-12.3) elementów – odpowiednio – $(0,1,0,0), (0,0,1,0)$ i $(0,0,0,1)$ pierścienia bazowego $\mathbb{H}$, więc definiują nań strukturę kwaternionową w rozumieniu Stw. 11-12.6. Macierze $\mathbb{H}(n)$ (po raz wtóry) zyskują interpretację endomorfizmów utworzonej w ten sposób kwaternionowej przestrzeni wektorowej jako wyróżnione odwzorowania $\mathbb{R}$-liniowe na

$\mathbb{H}^{\times n}$, które są przemienne wyłącznie z odwzorowaniami $\mathbb{R}$-*liniowymi* na $\mathbb{H}^{\times n}$ realizującymi (prawostronne) działanie pierścienia $\mathbb{H}$. □

## 2. Ogólne własności modułów Clifforda

W dalszej części wykładu skrupulatnie wykorzystamy wszystkie dotychczasowe nasze obserwacje dotyczące struktury rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda w celu przeprowadzenia wyczerpującej klasyfikacji ich reprezentacji, co będzie stanowiło fundamentalny przyczynek do zrozumienia fizykalnie istotnych tzw. reprezentacji spinorowych pewnych wyróżnionych grup zanurzonych w tychże algebrach Clifforda. Punktem wyjścia do dalszej dyskusji jest

**Definicja 4.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\big(((V,+_V,\mathsf{P}_V,\bullet\longmapsto 0_V),\ell_V\big),Q_V\big)$ będzie przestrzenią kwadratową nad ciałem $\mathbb{K}$. **Moduł Clifforda** algebry $\mathrm{Cliff}(V,Q_V)$ to para $\big(((W,+_W,\mathsf{P}_W,\bullet\longmapsto 0_W),\ell_W\big),\rho\big)$ złożona z przestrzeni wektorowej $\big((W,+_W,\mathsf{P}_W,\bullet\longmapsto 0_W),\ell_W\big)$ nad ciałem $\mathbb{K}$ oraz reprezentacji

$$\rho\ :\ \mathrm{Cliff}(V,Q_V)\longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(W)\,.$$

Najbardziej elementarnej (re)interpretacji (algebraicznej) powyższej definicji na gruncie leżącej u jej podstaw definicji algebry Clifforda dostarcza

**Stwierdzenie 8.** Przyjmijmy zapis Def. 4. Ilekroć forma kwadratowa $Q_V$ jest niezwyrodniała, ograniczenie (dziedziny) reprezentacji algebry Clifforda do przestrzeni wektorowej $V\subset \mathrm{Cliff}(V,Q_V)$ jest wierne (tj. injektywne).

<u>*Dowód:*</u> Dla dowolnych: $v\in\mathrm{Ker}\,\rho$ i $w\in W$ obliczamy – wobec homomorficzności $\rho$ –

$$2_{\mathbb{K}}\,\Phi_{Q_V}(v,w)\triangleright \mathrm{id}_W\equiv 2_{\mathbb{K}}\,\Phi_{Q_V}(v,w)\triangleright \rho\big(e^{\mathrm{C}}\big)=\rho\big(\{v,w\}\big)=\{\rho(v),\rho(w)\}=\{0,\rho(w)\}=0\,,$$

co wobec dowolności $w$ a z racji niezwyrodnienia $Q_V$ implikuje równość $v=0_V$. □

**Uwaga 2.** W świetle powyższego stwierdzenia możemy postrzegać moduł Clifforda jako wierną realizację przestrzeni wektorowej $V$ w przestrzeni wektorowej $W$, transportującą strukturę algebry (Clifforda) na $V$ indukowaną w obecności formy kwadratowej $Q_V$.

Jako że prowadzimy nasze rozważania w kategorii przestrzeni kwadratowych, zasadnym wydaje się wyróżnienie tych reprezentacji algebr Clifforda, które – w przypadku istnienia struktury przestrzeni kwadratowej na nośniku reprezentacji – wykazują proste własności względem obu struktur przestrzeni kwadratowej: na przestrzeni $V$ określającej reprezentowaną algebrę oraz na nośniku reprezentacji $W$. Ten sposób myślenia formalizuje

**Definicja 5.** Przyjmijmy zapis Def. 4, zakładając przy tym, że także nośnik reprezentacji $W$ jest przestrzenią kwadratową z formą kwadratową $Q_W$. Ustaliwszy skalar $\varepsilon\in\{-1_{\mathbb{K}},1_{\mathbb{K}}\}$, reprezentację algebry Clifforda $\rho\ :\ \mathrm{Cliff}(V,Q_V)\longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(W)$ określimy mianem **$\varepsilon$-ortogonalnej**, jeśli dla dowolnych $(v,w_1,w_2)\in V\times W^{\times 2}$ jest spełniony warunek

$$\Phi_{Q_W}\big(\rho\circ \jmath_V^{\mathrm{C}}(v)(w_1),\rho\circ \jmath_V^{\mathrm{C}}(v)(w_2)\big)=\varepsilon\cdot_{\mathbb{K}} Q_V(v)\cdot_{\mathbb{K}}\Phi_{Q_W}(w_1,w_2)\,,\tag{3}$$

w którego zapisie $\jmath_V^{\mathrm{C}}\ :\ V\longrightarrow \mathrm{Cliff}(V,Q)$ jest kanonicznym odwzorowaniem Clifforda.

Przy pewnych dodatkowych założeniach, uzyskujemy proste przeformułowanie własności $\varepsilon$-ortogonalności:

**Stwierdzenie 9.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy, zakładając dodatkowo, że $Q_W$ jest niezwyrodniała. Jeśli wspólne ciało bazowe $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ lub $(V,Q_V)$ jest nie*osobliwa*, tj. nie istnieją wektory

$v \in V \setminus \{0_V\}$ o własności $Q_V(v) = 0_{\mathbb{K}}$, reprezentacja $\rho : \mathrm{Cliff}(V, Q_V) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(W)$ jest $\varepsilon$-ortogonalna wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe $\rho \circ \jmath_V^{\mathrm{C}}(v) \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(W)$ jest dla dowolnego $v \in V$ **$\varepsilon$-hermitowskie**, tj. spełnia warunek

$$\big(\rho \circ \jmath_V^{\mathrm{C}}\big)(v)^\dagger = \varepsilon \big(\rho \circ \jmath_V^{\mathrm{C}}\big)(v)\,,$$

gdzie $(\cdot)^\dagger$ jest sprzężeniem hermitowskim określonym względem $\Phi_{Q_W}$.

*Dowód:* Założenie o niezwyrodnieniu $Q_W$, implikujące niezwyrodnienie indukowanej przez nią formy dwuliniowej $\Phi_{Q_W}$, pozwala przepisać warunek (3) definiujący reprezentację $\varepsilon$-ortogonalną w równoważnej postaci

$$\forall_{v \in V} \;:\; \big(\rho \circ \jmath_V^{\mathrm{C}}\big)(v)^\dagger \circ \big(\rho \circ \jmath_V^{\mathrm{C}}\big)(v) = \varepsilon\, Q_V(v) \triangleright \mathrm{id}_W\,.$$

Ponieważ zachodzi także równość

$$\big(\rho \circ \jmath_V^{\mathrm{C}}\big)(v) \circ \big(\rho \circ \jmath_V^{\mathrm{C}}\big)(v) = \rho\big(\jmath_V^{\mathrm{C}}(v).\jmath_V^{\mathrm{C}}(v)\big) = \rho\big(Q_V(v) \triangleright e^{\mathrm{C}}\big) = Q_V(v) \triangleright \mathrm{id}_W\,,$$

przeto otrzymujemy tożsamość

$$Q_V(v) \triangleright \big(\rho \circ \jmath_V^{\mathrm{C}}\big)(v)^\dagger \equiv \big(\rho \circ \jmath_V^{\mathrm{C}}\big)(v)^\dagger \circ \big(\rho \circ \jmath_V^{\mathrm{C}}\big)(v) \circ \big(\rho \circ \jmath_V^{\mathrm{C}}\big)(v) = \varepsilon\, Q_V(v) \triangleright \big(\rho \circ \jmath_V^{\mathrm{C}}\big)(v)\,.$$

Jeśli teraz założyć, że $Q_V$ jest nieosobliwa, to dla dowolnego $v \neq 0_V$ otrzymujemy tezę skracając obustronnie $Q_V(v) \neq 0_{\mathbb{K}}$. (Liniowość $\rho \circ \jmath_V^{\mathrm{C}}$ gwarantuje słuszność tezy dla $v = 0_V$.) Jeśli natomiast $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, to powyższą tożsamość odnosimy do dowolnej bazy (pseudo)ortonormalnej $\{e_i\}_{i \in \overline{1, \dim_{\mathbb{R}} V}}$, dla której mamy $Q_V(e_i) = \varepsilon_i \in \{-1, 1\}$. Tym sposobem wyprowadzamy równości

$$\varepsilon_i \triangleright \big(\rho \circ \jmath_V^{\mathrm{C}}\big)(e_i)^\dagger = \varepsilon \cdot \varepsilon_i \triangleright \big(\rho \circ \jmath_V^{\mathrm{C}}\big)(e_i)\,, \qquad i \in \overline{1, \dim_{\mathbb{R}} V}\,,$$

więc też

$$\big(\rho \circ \jmath_V^{\mathrm{C}}\big)(e_i)^\dagger = \varepsilon \triangleright \big(\rho \circ \jmath_V^{\mathrm{C}}\big)(e_i)\,, \qquad i \in \overline{1, \dim_{\mathbb{R}} V}\,.$$

Na tej podstawie dla dowolnego wektora $v = v^i \triangleright e_i$ obliczamy (wobec $v^i \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \big(\rho \circ \jmath_V^{\mathrm{C}}\big)(v)^\dagger &= \big(v^i \triangleright \rho \circ \jmath_V^{\mathrm{C}}\big)(e_i)^\dagger = v^i \triangleright \big(\rho \circ \jmath_V^{\mathrm{C}}\big)(e_i)^\dagger = v^i \cdot \varepsilon \triangleright \big(\rho \circ \jmath_V^{\mathrm{C}}\big)(e_i) = \varepsilon \triangleright \big(\rho \circ \jmath_V^{\mathrm{C}}\big)\big(v^i \triangleright e_i\big) \\ &\equiv \varepsilon \triangleright \big(\rho \circ \jmath_V^{\mathrm{C}}\big)(v)\,. \end{aligned}$$

Implikacja odwrotna jest w tym przypadku trywialna. □

Naturalności dokonanego przez nas wyróżnienia dowodzi

**Stwierdzenie 10.** Przyjmijmy zapis Def. 5. Dowolna reprezentacja algebry Clifforda rzeczywistej przestrzeni kwadratowej (wymiaru $d_V = \dim_{\mathbb{R}} V$) o (pseudo)euklidesowej formie kwadratowej $Q_V = \varepsilon_V \triangleright \delta_{\mathrm{E}}^{(d_V)}$, $\varepsilon_V \in \{-1, +1\}$ na rzeczywistej przestrzeni kwadratowej (wymiaru $d_W = \dim_{\mathbb{R}} W$) o (pseudo)euklidesowej formie kwadratowej $Q_W = \varepsilon_W \triangleright \delta_{\mathrm{E}}^{(d_W)}$, $\varepsilon_W \in \{-1, +1\}$ jest równoważna pewnej reprezentacji $\varepsilon_V$-ortogonalnej.

*Dowód:* Wybierzmy bazę $\varepsilon_V$-ortonormalną $\mathcal{E} := \{e_i\}_{i \in \overline{1, d_V}}$ w przestrzeni $V$, a wówczas w $\mathrm{Cliff}(V, Q_V)$ są spełnione relacje

$$\{e_i, e_j\} = 2\varepsilon_V\, \delta_{i,j} \triangleright e^{\mathrm{C}}\,, \quad i, j \in \overline{1, d_V}\,.$$

Zdefiniujmy grupę

$$\Gamma := \big\langle e_i \,|\, i \in \overline{1, d_V} \big\rangle\,,$$

generowaną multyplikatywnie przez $\jmath_V^{\mathrm{C}}$-obrazy elementów bazy $\mathcal{E}$ w $\mathrm{Cliff}(V, Q_V)$ (dla odciążenia zapisu pomijamy symbol $\jmath_V^{\mathrm{C}}$). Grupa ta jest w oczywisty sposób skończona, ma zatem sens poniższa definicja odwzorowania dwuliniowego:

$$(\cdot|\cdot)^\Gamma \;:\; W \times W \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; (w_1, w_2) \longmapsto \tfrac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \Phi_{Q_W}\big(\rho(\gamma)(w_1), \rho(\gamma)(w_2)\big)\,.$$

Przy tym ($\varepsilon_W$-)określoność formy $\Phi_{Q_W}$ implikuje (takąż) określoność odwzorowania $(\cdot|\cdot)^\Gamma$, a nadto – dla dowolnych $\gamma \in \Gamma$ i $w_1, w_2 \in W^{\times 2}$ – stwierdzamy $\Gamma$-niezmienniczość tego ostatniego,

$$\begin{aligned}\big(\rho(\gamma)(w_1)\,|\,\rho(\gamma)(w_2)\big)^\Gamma &\equiv \tfrac{1}{|\Gamma|}\sum_{\widetilde{\gamma}\in\Gamma}\Phi_{Q_W}\big(\rho(\widetilde{\gamma}.\gamma)(w_1),\rho(\widetilde{\gamma}.\gamma)(w_2)\big)\\ &= \tfrac{1}{|\Gamma|}\sum_{\widetilde{\gamma}.\gamma\in\Gamma}\Phi_{Q_W}\big(\rho(\widetilde{\gamma}.\gamma)(w_1),\rho(\widetilde{\gamma}.\gamma)(w_2)\big)\equiv(w_1\,|\,w_2)^\Gamma\,.\end{aligned}$$

Pierwsza z tych cech pozwala stwierdzić istnienie odwzorowania $\chi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(W)$ o własności

$$\forall_{w_1,w_2\in W}\ :\ (w_1\,|\,w_2)^\Gamma = \Phi_{Q_W}\big(\chi(w_1),\chi(w_2)\big)\,.$$

Istotnie, wystarczy wybrać w $W$ – w zgodzie z Twierdzeniem Lagrange'a o diagonalizacji formy kwadratowej – bazę $\{f_A\}_{A\in\overline{1,d_W}}$ $\varepsilon_W$-ortonormalną względem formy kwadratowej $Q_W$ oraz bazę $\{g_A\}_{A\in\overline{1,d_W}}$ $\varepsilon_W$-ortonormalną względem formy kwadratowej

$$Q_W^\Gamma\ :\ W\longrightarrow\mathbb{R}\ :\ w\longmapsto(w\,|\,w)^\Gamma\,,$$

a następnie dokonać (jedynego) $\mathbb{R}$-liniowego rozszerzenia przyporządkowania

$$\chi(g_A) := f_A\,,\quad A\in\overline{1,d_W}\,,$$

gdyż wtedy

$$\begin{aligned}(w_1\,|\,w_2)^\Gamma &= w_1^A\cdot_{\mathbb{R}} w_2^B\cdot_{\mathbb{R}}(g_A\,|\,g_B)^\Gamma = \varepsilon_W\, w_1^A\cdot_{\mathbb{R}} w_2^B\cdot_{\mathbb{R}}\delta^{\mathbb{R}}_{A,B}\equiv w_1^A\cdot_{\mathbb{R}} w_2^B\cdot_{\mathbb{R}}\Phi_{Q_W}(f_A,f_B)\\ &= w_1^A\cdot_{\mathbb{R}} w_2^B\cdot_{\mathbb{R}}\Phi_{Q_W}\big(\chi(g_A),\chi(g_B)\big)=\Phi_{Q_W}\big(\chi(w_1),\chi(w_2)\big)\,.\end{aligned}$$

Na tym etapie możemy już zadać reprezentację

$$\rho_\chi := \chi\circ\rho(\cdot)\circ\chi^{-1}\ :\ \mathrm{Cliff}\big(V,\varepsilon_V\rhd\delta_{\mathrm{E}}^{(d_V)}\big)\longrightarrow\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W)\ :\ x\longmapsto\chi\circ\rho(x)\circ\chi^{-1}\,,$$

wprost na mocy definicji równoważną $\rho$. Obrazy elementów grupy $\Gamma$ względem tej reprezentacji są izometriami $Q_W$, oto bowiem dla dowolnych $(\gamma,w_1,w_2)\in\Gamma\times W^{\times 2}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\Phi_{Q_W}\big(\rho_\chi(\gamma)(w_1),\rho_\chi(\gamma)(w_2)\big) &\equiv \Phi_{Q_W}\big(\chi\big(\rho(\gamma)\circ\chi^{-1}(w_1)\big),\chi\big(\rho(\gamma)\circ\chi(w_2)\big)\big)\\ &= \big(\rho(\gamma)\big(\chi^{-1}(w_1)\big)\,|\,\rho(\gamma)\big(\chi^{-1}(w_2)\big)\big)^\Gamma\\ &= \big(\chi^{-1}(w_1)\,|\,\chi^{-1}(w_2)\big)^\Gamma = \Phi_{Q_W}(w_1,w_2)\,.\end{aligned}$$

Zdefiniujmy rodzinę endomorfizmów

$$\sigma_i := \rho_\chi(e_i)\,,\quad i\in\overline{1,d_V}\,.$$

Te spełniają – dla dowolnych $w_1,w_2\in W$ oraz $i\in\overline{1,d_V}$ – tożsamość

$$\Phi_{Q_W}\big(\sigma_i^\dagger\circ\sigma_i(w_1),w_2\big)=\Phi_{Q_W}\big(\sigma_i(w_1),\sigma_i(w_2)\big)=\Phi_{Q_W}(w_1,w_2)\,,$$

przeto – wobec dowolności $w_1$ i $w_2$ – jest

$$\sigma_i^\dagger\circ\sigma_i=\mathrm{id}_W\,,$$

ale też

$$\sigma_i\circ\sigma_i=\rho_\chi\big(e_i^2\big)=\varepsilon_V\rhd\rho_\chi\big(e^{\mathrm{C}}\big)=\varepsilon_V\rhd\mathrm{id}_W\,,$$

więc ostatecznie

$$\sigma_i^\dagger=\varepsilon_V\rhd\sigma_i\,,$$

co pozwala zapisać – dla dowolnego wektora $v=v^i\rhd e_i\in V$ – tożsamość

$$\rho_\chi(v)^\dagger=v^i\rhd\sigma_i^\dagger=\varepsilon_V\,v^i\rhd\sigma_i\equiv\varepsilon_V\rhd\rho_\chi(v)\,,$$

która w świetle Stw. 9 przesądza o $\varepsilon_V$-ortogonalności reprezentacji $\rho_\chi$, jawnie równoważnej $\rho$. $\square$

Powyższe wprowadzenie przygotowało nas należycie do zmierzenia się z wyzwaniem, jakim jest kompletna klasyfikacja (nieprzywiedlnych i nietrywialnych) reprezentacji rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda – wyzwanie to podejmujemy w następnym rozdziale.

## 3. Reprezentacje rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda

Wyczerpująca klasyfikacja rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda, przeprowadzona w ramach Wykładów XI i XII, w połączeniu z wiedzą dotyczącą reprezentacji algebr prostych i półprostych zgromadzoną pierwszej części wykładu niniejszego, stanowi solidną podstawę do sformułowania kompletnego opisu reprezentacji (nieprzywiedlnych) wszystkich algebr Clifforda nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$. Tytułem jej uzupełnienia w sposób pozwalający na wysłowienie twierdzeń klasyfikacyjnych wyartykułujemy istotne

**Stwierdzenie 11.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Dla dowolnych liczb $p, q \in \mathbb{N}$ spełniających warunek $q - p = 3 \mod 4$ i dowolnej liczby $n \in 2\mathbb{N} + 1$ zachodzi, co następuje:

(i) w dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ na przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowej $V$ zachodzi

$$\rho(\omega_{\mathbb{R}}) = \varepsilon \triangleright \mathrm{id}_V , \quad \varepsilon \in \{-1, +1\} ,$$

przy czym reprezentacje odpowiadające obu wartościom $\varepsilon$ istnieją i są wzajem nierównoważne – w dalszej części dyskusji będziemy je oznaczać symbolem $\rho^{p,q}_{\varepsilon}$;

(ii) w dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : \mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_n \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\widetilde{V})$ na przestrzeni $\mathbb{C}$-liniowej $\widetilde{V}$ zachodzi

$$\rho(\omega_{\mathbb{C}}) = \widetilde{\varepsilon} \triangleright \mathrm{id}_{\widetilde{V}} , \quad \widetilde{\varepsilon} \in \{-1, +1\} ,$$

przy czym reprezentacje odpowiadające obu ewentualnościom istnieją i są wzajem nierównoważne – w dalszej części dyskusji będziemy je oznaczać symbolem $\rho^{n}_{\varepsilon}$.

<u>*Dowód:*</u> Niechaj $\rho : \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ będzie dowolną (nietrywialną) reprezentacją nieprzywiedlną. Wobec tożsamości

$$\rho(\omega_{\mathbb{R}})^2 = \rho\big(\omega_{\mathbb{R}}^2\big) = \rho\big(e^{\mathrm{C}}\big) = \mathrm{id}_V ,$$

wynikającej ze Stw. 11-12.2, endomorfizm $\rho(\omega_{\mathbb{R}})$ definiuje zupełną parę rzutów komplementarnych:

$$P_{\pm} \coloneqq \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{id}_V \pm \rho(\omega_{\mathbb{R}})\big) ,$$

która wyznacza rozkład nośnika reprezentacji na sumę prostą

$$V = V_+ \oplus V_- , \quad V_{\pm} \coloneqq P_{\pm}(V) ,$$

przy czym zachodzi

$$\rho(\omega_{\mathbb{R}}) \restriction_{V_{\pm}} = \pm \mathrm{id}_{V_{\pm}} .$$

Jako że element objętości należy do centrum $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}$ (wszak $p + q \in 2\mathbb{N} + 1$), przeto podprzestrzenie własne $V_{\pm}$ są $\rho$-niezmiennicze, co wobec założonej nieprzywiedlności $\rho$ ogranicza możliwą rozkłady jak niżej:

$$(V_+, V_-) = \big(V, \{0_V\}\big) \qquad \vee \qquad (V_+, V_-) = \big(\{0_V\}, V\big) .$$

Załóżmy, że otrzymane tą drogą reprezentacje $\rho_{\pm} : \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_{\pm})$ o własności $\rho_{\pm}(\omega_{\mathbb{R}}) = \pm \mathrm{id}_{V_{\pm}}$ są równoważne, czyli istnieje izomorfizm $\chi : V_+ \longrightarrow V_-$ spełniający warunek

$$\forall_{\gamma \in \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}} : \chi \circ \rho_+(\gamma) = \rho_-(\gamma) \circ \chi .$$

Zachodzi wówczas – w szczególności – tożsamość

$$\chi \equiv \chi \circ \rho_+(\omega_{\mathbb{R}}) = \rho_-(\omega_{\mathbb{R}}) \circ \chi = -\chi ,$$

która prowadzi do sprzeczności, skąd ostateczny wniosek o nierównoważności wzajemnej obu reprezentacji.

Na koniec pokażemy, że obie reprezentacje istnieją. W tym celu odwołamy się do Stw. 6 oraz 11-12.2, aby stwierdzić istnienie dwóch (nietrywialnych) reprezentacji nieprzywiedlnych algebry $R(2^m) \oplus R(2^m) \cong \mathrm{Cl}^+_{p,q} \oplus \mathrm{Cl}^-_{p,q} \equiv \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}$, $R \in \{\mathbb{R}, \mathbb{H}\}$, $m \in \mathbb{N}$, o strukturze

$$\widetilde{\rho}_+ := \rho_{\mathrm{def}} \circ \mathrm{pr}_1 \ : \ R(2^m) \oplus R(2^m) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\big(R^{2^m}\big)$$

i

$$\widetilde{\rho}_- := \rho_{\mathrm{def}} \circ \mathrm{pr}_2 \ : \ R(2^m) \oplus R(2^m) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\big(R^{2^m}\big)$$

odpowiednio. Zważywszy (unitalny charakter $\mathrm{Cl}^+_{p,q} \cong R(2^m)$ oraz) słuszność tożsamości

$$\forall_{\gamma_\pm \in \mathrm{Cl}^\pm_{p,q}} \ : \ \omega_{\mathbb{R}} . \gamma_\pm = \pm \gamma_\pm \,,$$

wynikających wprost z definicji podalgebr $\mathrm{Cl}^\pm_{p,q}$, wyprowadzamy stąd wniosek, że w obrazie odwrotnym izomorfizmów $\iota_k$, $k \in \{3, 7\}$ z dowodu Stw. 11-12.2 otrzymujemy

$$\iota_k^{-1}(\omega_{\mathbb{R}}) = \mathbf{1}_{2^m} \oplus (-\mathbf{1}_{2^m}) \,,$$

a zatem także dla nieprzywiedlnych reprezentacji

$$\rho_\pm := \widetilde{\rho}_\pm \circ \iota_k^{-1} \ : \ \mathrm{Cl}^+_{p,q} \oplus \mathrm{Cl}^-_{p,q} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\big(R^{2^m}\big)$$

oczekiwane tożsamości

$$\rho_\pm(\omega_{\mathbb{R}}) = \pm \mathrm{id}_{R^{2^m}} \,.$$

Dowód dla przypadku zespolonego przebiega analogicznie, przy czym odwołuje się do Stw. 11-12.5 zamiast Stw. 11-12.2. □

Tak przygotowani możemy już przejść do sklasyfikowania reprezentacji algebr Clifforda, co w przypadku algebr rzeczywistych podsumowuje

**Twierdzenie 3** (Klasyfikacyjne dla reprezentacji nieprzywiedlnych /$\mathbb{R}$)**.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy, a następnie wprowadźmy oznaczenia

$$(q_{\mathbb{R}}, q_{\mathbb{C}}, q_{\mathbb{H}}) := (0, 1, 2)$$

oraz – dla dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho \ : \ \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ –

$$d^{\mathbb{R}}_{p,q} := \dim_{\mathbb{R}} V \,, \qquad \mathfrak{C}^{\mathbb{R}}_{p,q} := C_{\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)}\big(\rho(\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q})\big) \,.$$

Wreszcie też niechaj $\nu^{\mathbb{R}}_{p,q}$ będzie liczbą nierównoważnych (nietrywialnych) reprezentacji nieprzywiedlnych algebry $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}$. Wówczas prawdziwe są równości

$$\nu^{\mathbb{R}}_{p,q} = \begin{cases} 2 \,, & \text{gdy } \ q - p = 3 \mod 4 \\ 1 & \text{w p.p.} \end{cases} \,,$$

a ponadto ilekroć izotyp $\mathbb{R}$-algebry $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}$ przedstawiony w Tablicy 11-12.1 jest postaci

$$\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \cong R(2^n) \qquad \text{lub} \qquad \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \cong R(2^n) \oplus R(2^n) \,,$$

to spełnione są relacje (te same dla obu reprezentacji nierównoważnych w przypadku $q - p = 3 \mod 4$)

$$d^{\mathbb{R}}_{p,q} = 2^{n + q_R} \,, \qquad \mathfrak{C}^{\mathbb{R}}_{p,q} \cong R \,.$$

*Dowód:* Na podstawie Tw. 11-12.5 i Stw.5-6.3 wnioskujemy, że algebra $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}$ jest albo półprosta (w przypadku $q - p = 3 \mod 4$), albo prosta (w przeciwnym przypadku), co w świetle Stw. 6 i Tw. 2 prowadzi do postulowanego wzoru na $d^{\mathbb{R}}_{p,q}$ oraz – po uwzględnieniu punktu (i) Stw. 11 – wzoru na $\nu^{\mathbb{R}}_{p,q}$. Typ reprezentacji nieprzywiedlnych (każdorazowo jest to $R$) ustala Stw. 7. □

W przypadku algebr zespolonych mamy analogiczne

**Twierdzenie 4** (Klasyfikacyjne dla reprezentacji nieprzywiedlnych $/\mathbb{C}$)**.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy i wprowadźmy – dla dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : \mathrm{Cl}_n^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ – oznaczenia

$$d_n^{\mathbb{C}}(\rho) := \dim_{\mathbb{C}} V\,, \qquad \mathfrak{C}_n^{\mathbb{C}}(\rho) := C_{\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)}\big(\rho(\mathrm{Cl}_n^{\mathbb{C}})\big)\,.$$

Wreszcie też niechaj $\nu_n^{\mathbb{C}}$ będzie liczbą nierównoważnych (nietrywialnych) reprezentacji nieprzywiedlnych algebry $\mathrm{Cl}_n^{\mathbb{C}}$. Wówczas prawdziwe są równości

$$\nu_n^{\mathbb{C}} = \begin{cases} 2\,, & \text{gdy } \ n \in 2\mathbb{N}+1 \\ 1 & \text{w p.p.} \end{cases}\,,$$

a ponadto spełnione są relacje (te same dla obu reprezentacji nierównoważnych w przypadku $n \in 2\mathbb{N}+1$)

$$d_n^{\mathbb{C}} = 2^{E(\frac{n}{2})}\,, \qquad \mathfrak{C}_n^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}\,,$$

tj. – w szczególności – wszystkie rozważane reprezentacje są zespolone.

<u>*Dowód:*</u> Tezy Tw. 11-12.9 i Stw.5-6.3 przesądzają o tym, że algebra $\mathrm{Cl}_n^{\mathbb{C}}$ jest albo prosta (w przypadku $n \in 2\mathbb{N}$), albo półprosta (w przypadku $n \in 2\mathbb{N}+1$), co pozwala uzyskać postulowany wzór na $d_{p,q}^{\mathbb{R}}$ oraz – po uwzględnieniu punktu (ii) Stw. 11 – wzór na $\nu_{p,q}^{\mathbb{R}}$ na gruncie Stw. 6 i Tw. 2. Zespolony typ reprezentacji nieprzywiedlnych wyznacza teza Stw. 7. □

Ostatnie dwa twierdzenia wyczerpują zagadnienie klasyfikacji nieprzywiedlnych reprezentacji algebr Clifforda $\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ i $\mathrm{Cl}_n^{\mathbb{C}}$. Zanim jednak zamkniemy ten rozdział naszych dociekań, zatrzymamy się nad pewną szczególną własnością strukturalną rozpatrywanych przez nas reprezentacji, która odegra istotną rolę w dyskusji reprezentacji spinorowych w dalszej części kursu. Oto więc mamy

**Stwierdzenie 12.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Dla dowolnych liczb $(p,q) \in \mathbb{N}^{\times 2} \setminus \{(0,0)\}$ spełniających warunek $q-p=0 \mod 4$ i dowolnej liczby $n \in 2\mathbb{N} \setminus \{0\}$ zachodzi, co następuje:

(i) nośnik $V$ dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : \mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ma rozkład

$$V = V_+ \oplus V_-\,, \quad V_\pm := \rho\big(P_{\omega_{\mathbb{R}}}^{\pm}\big)(V)$$

na podprzestrzenie własne endomorfizmu $\rho(\omega_{\mathbb{R}})$ stowarzyszone z wartościami własnymi $\pm 1$, przy czym dowolny wektor $v \in \mathbb{R}^{\times p+q}$ o własności $\delta_{\mathrm{E}}^{(p,q)}(v) \neq 0$ zadaje izomorfizm

$$v_\pm := \rho \circ \jmath_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(v)\restriction_{V_\pm} \ :\ V^\pm \xrightarrow{\cong} V^\mp\,,$$

a nadto podprzestrzenie $V_\pm$ są zachowywane przez podalgebrę $\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}\,0}$, której reprezentacje indukowane tym sposobem na $V_\pm$ są nieprzywiedlne i spełniają relację

$$\rho\big(\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}\,0}\big)\restriction_{V_\pm} \sim \rho_{\pm 1}^{p,q-1}\big(\mathrm{Cl}_{p,q-1}^{\mathbb{R}}\big)\,,$$

jeśli $q \geq 1$, lub

$$\rho\big(\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}\,0}\big)\restriction_{V_\pm} \sim \rho_{\pm 1}^{p-1,q}\big(\mathrm{Cl}_{p-1,q}^{\mathbb{R}}\big)\,,$$

jeśli $p \geq 1$;

(ii) nośnik $V$ dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : \mathrm{Cl}_n^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ma rozkład

$$V = V_+ \oplus V_-\,, \quad V_\pm := \rho\big(P_{\omega_{\mathbb{C}}}^{\pm}\big)(V)$$

na podprzestrzenie własne endomorfizmu $\rho(\omega_{\mathbb{C}})$ stowarzyszone z wartościami własnymi $\pm 1$, przy czym dowolny wektor $v \in \mathbb{C}^{\times n}$ o własności $\delta_{\mathrm{E}}^{(n)}(v) \neq 0$ zadaje izomorfizm

$$v_\pm := \rho \circ \jmath_{\mathbb{C}^{\times n}}(v)\restriction_{V_\pm} \ :\ V^\pm \xrightarrow{\cong} V^\mp\,,$$

a nadto podprzestrzenie $V_\pm$ są zachowywane przez podalgebrę $\mathrm{Cl}_n^{\mathbb{C}\,0}$, której reprezentacje indukowane tym sposobem na $V_\pm$ są nieprzywiedlne i spełniają relację

$$\rho\big(\mathrm{Cl}_n^{\mathbb{C}\,0}\big)\restriction_{V_\pm} \sim \rho_{\pm 1}^{n-1}\big(\mathrm{Cl}_{n-1}^{\mathbb{C}}\big)\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Zajmiemy się punktem (i) tezy stwierdzenia – punkt (ii) jest dowodzony w pełni analogicznie. Załóżmy dla ustalenia uwagi, że $q \geq 1$, w przeciwnym wypadku zachodzi $p \geq 1$ i dowód przebiega podobnie. Przywoławszy (pierwszą część) Stw. 11-12.2, konstatujemy istnienie rozkładu prostego $V$, o którym mowa w stwierdzeniu, dla dowolnej pary $(p,q)$ spełniającej warunek $(p+q+1)(p+q)-2p \in 4\mathbb{N}$, zatem w szczególności dla par związanych warunkiem $q-p=0$ mod 4. O tym, że odwzorowania $\mathbb{R}$-liniowe $v_\pm$ są poprawnie określone, przekonuje bezpośredni rachunek:

$$v_\pm \circ \rho\big(P^\pm_{\omega_\mathbb{R}}\big) \equiv \rho\big(\jmath_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(v).P^\pm_{\omega_\mathbb{R}}\big) = \rho\big(P^\mp_{\omega_\mathbb{R}}.\jmath_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(v)\big) = \rho\big(P^\mp_{\omega_\mathbb{R}}\big)\circ v_\pm\,,$$

znajdujący uzasadnienie w antycentralności $\omega_\mathbb{R}$, wynikającej z $p+q \in 2\mathbb{N}$. Bijektywność $v_\pm$ wynika wprost z tożsamości

$$v_\pm \circ v_\mp = \rho\big(\jmath_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(v)^2\big) = \rho\big(\delta_\mathrm{E}^{(p,q)}(v) \triangleright e^\mathrm{C}\big) = \delta_\mathrm{E}^{(p,q)}(v) \triangleright \mathrm{id}_{V_\mp}\,,$$

w połączeniu z założniem o nieizotropowości $v$. Wreszcie też niezmienniczość $V_\pm$ względem $\rho\big(\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}\,0}\big)$ jest następstwem relacji przemienności

$$\forall_{\gamma \in \mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}\,0}} \; : \; \omega_\mathbb{R}.\gamma = \gamma.\omega_\mathbb{R}\,,$$

które są implikowane przez wzmiankowaną wcześniej antycentralność $\omega_\mathbb{R}$. Na tym etapie pozostaje wykazać nieprzywiedlność reprezentacji $\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}\,0}$ indukowanych – poprzez ograniczenie – na $V_\pm$ oraz istnienie równoważności reprezentacji

$$\rho\big(\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}\,0}\big)\restriction_{V_\pm} \sim \rho_{\pm 1}\big(\mathrm{Cl}_{p,q-1}^{\mathbb{R}}\big)\,.$$

W ramach dowodu pierwszej części tezy poprzez *reductio ad absurdum* przyjmijmy, że istnieje nietrywialna podprzestrzeń $\rho\big(\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}\,0}\big)$-niezmiennicza $W \subsetneq V_+$ (dowód dla $W \subset V_-$ przebiega analogicznie), a następnie rozważmy jej obrazy względem odwzorowań $\mathbb{R}$-liniowych $\sigma_i \equiv \rho\circ \jmath^\mathrm{C}_{\mathbb{R}^{p+q}}(e_i)$ określonych dla dowolnej bazy (pseudo)ortonormalnej $\{e_i\}_{i\in\overline{1,p+q}}$ w $\mathbb{R}^{p,q}$, tj. podprzestrzenie $\sigma_i(W) \subset V_-$ (wszak $e_i$ są nieizotropowe). Bez trudu przekonujemy się o $\rho$-niezmienniczości sumy algebraicznej podprzestrzeni $\widehat{W} \equiv W + \sum_{i=1}^{p+q} \sigma_i(W) \subsetneq V_+ \oplus V_- \equiv V$, oto bowiem dla (nietrywialnych) generatorów $\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ zachodzi

$$\begin{aligned}\sigma_j\big(\widehat{W}\big) &= \sigma_j(W) + \sum_{i=1}^{p+q}\sigma_j\circ\sigma_i(W) = \sigma_j(W) + \sum_{i=1}^{p+q}\rho\big(\jmath^\mathrm{C}_{\mathbb{R}^{p+q}}(e_j).\jmath^\mathrm{C}_{\mathbb{R}^{p+q}}(e_i)\big)(W)\\ &\subset \sum_{i=1}^{p+q}\sigma_i(W) + \rho\big(\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}\,0}\big)(W) \subset \sum_{i=1}^{p+q}\sigma_i(W) + W \equiv \widehat{W}\,.\end{aligned}$$

Wobec powyższego $\widehat{W}$ jawi się jako nietrywialna podprzestrzeń $\rho$-niezmiennicza, co jest sprzeczne z założeniem o nieprzywiedlności $\rho$.

W celu wykazania słuszności drugiej części tezy wykorzystamy treść i dowód Stw. 11-12.3, na podstawie których otrzymujemy – oznaczywszy na potrzeby poniższego rachunku element objętości algebry $\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ symbolem $\omega_\mathbb{R}^{p,q}$ –

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}\big(\omega_\mathbb{R}^{p,q-1}\big) &= e_1.e_{p+q}.e_2.e_{p+q}.\cdots.e_{p+q-1}.e_{p+q} = (-1)^{\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}}\,e_1.e_2.\cdots.e_{p+q-1}.e_{p+q}.e_{p+q}^{p+q-2}\\ &\equiv (-1)^{\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}}\,\omega_\mathbb{R}^{p,q}.\big(e_{p+q}^2\big)^{\frac{p+q}{2}-1} = (-1)^{\frac{(p+q-1)(p+q-2)+p+q}{2}-1}\,\omega_\mathbb{R}^{p,q}\\ &\equiv (-1)^{\frac{(p+q)(p+q-2)}{2}}\,\omega_\mathbb{R}^{p,q}\,,\end{aligned}$$

i ostatecznie – wobec założeń poczynionych w odniesieniu do $(p,q)$ –

$$\widetilde{\varphi}\big(\omega_\mathbb{R}^{p,q-1}\big) = \omega_\mathbb{R}^{p,q}\,,$$

stąd zaś

$$\rho \circ \widetilde{\varphi}\big(\omega_{\mathbb{R}}^{p,q-1}\big)\restriction_{V_\pm} = \rho\big(\omega_{\mathbb{R}}^{p,q}\big)\restriction_{V_\pm} \equiv \pm\mathrm{id}_{V_\pm}\,.$$

Równość $(q-1)-p = 3 \mod 4k$ pozwala nam następnie sięgnąć do Stw. 11-12.2, które w połączeniu z udowodnionym na początku tego rozdziału Stw. 11 doprowadza nas do pożądanej konkluzji. □