ENTER THE SPINOR,
CZYLI O MODUŁACH CLIFFORDA, SPINORACH CZYSTYCH I MOCACH NIECZYSTYCH
(MAWF '23/24 1.XV, 1.XVI & 1.XVII [RRS])

Fig. 1. Adaptacja plakatu do filmu pt. „Wejście smoka" z 1973 r. z Lee Jun-fanem (o pseudonimie aktorskim Bruce Lee Karate Miszcz) w roli głównej.

Spis treści

Wprowadzenie do ogólnej teorii reprezentacji algebr, z naciskiem na specyfikę algebr (pół)prostych wynikającym z ich pierwszoplanowej roli w klasyfikacji rzeczywistych i zespolonych algebr

Clifforda, stanowi punkt wyjścia do dyskusji obiektów algebro-geometryczych o ogromnym znaczeniu w matematycznym modelowaniu materii oddziałującej – spinorów, którymi zajmiemy się w poniższej, ostatniej już części algebraicznej składowej wykładu. Geometryczny aspekt przedstawionych tu konstrukcji otworzy przed nami drogę ku dalszym rozważaniom nad fizykalnie istotnymi geometryzacjami konstrukcji algebraicznych poznanych dotychczas.

1. Cliffordowskie realizacje izometrii

W niniejszym rozdziale zajmiemy się szczegółową rekonstrukcją funktorialnego podniesienia izometrycznych automorfizmów przestrzeni kwadratowej (V,Q) do jej algebry Clifforda $\mathrm{Cliff}(V,Q)$, co doprowadzi nas ostatecznie do identyfikacji – w odwołaniu do prezentacji grupy ortogonalnej w terminach generatorów (i relacji), którą precyzuje Twierdzenie Cartana–Dieudonnégo – podgrupy w algebrze Clifforda implementującej na kanonicznie zanurzonej w $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ wyjściowej przestrzeni V (poprzez ograniczenie doń odnośnych automorfizmów) transformacje ortogonalne. Nasze dociekania rozpoczniemy od

Definicja 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. **Multyplikatywna grupa jedności** algebry Clifforda to zbiór

$$\mathrm{Cliff}(V,Q)^\times := \left\{\ \gamma \in \mathrm{Cliff}(V,Q) \quad \middle| \quad \exists_{\gamma^{-1}\in\mathrm{Cliff}(V,Q)}\ :\ \gamma.\gamma^{-1} = e^{\mathrm{C}} = \gamma^{-1}.\gamma\ \right\}$$

odwracalnych elementów $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ ze strukturą grupy indukowaną z tejże algebry unitalnej (tj. w szczególności z operacją binarną daną przez mnożenie w algebrze Clifforda). **Reprezentacja dołączona** tej grupy to homomorfizm grup

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}.\quad &:\quad \mathrm{Cliff}(V,Q)^\times \longrightarrow \mathcal{I}nn\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)\\ &:\quad u \longmapsto \big(\ \mathrm{Cliff}(V,Q) \ni \gamma \longmapsto u.\gamma.u^{-1} \equiv \mathrm{Ad}_u(\gamma)\ \big)\,.\end{aligned}$$

Bywa on także nazywany **reprezentacją wektorową** $\mathrm{Cliff}(V,Q)^\times$.

W bezpośrednim nawiązaniu do uwagi wprowadzającej wysławiamy

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Dla dowolnego wektora nieizotropowego $v \in V \smallsetminus Q^{-1}(\{0_{\mathbb{K}}\})$ i dowolnego wektora $w \in V$ spełniona jest tożsamość

$$-\mathrm{Ad}_v(w) = w - 2\,\tfrac{\Phi_Q(w,v)}{Q(v)} \triangleright v\,,$$

więc też – w szczególności –

$$\mathrm{Ad}_v(V) = V\,,$$

przy czym utożsamiliśmy – jak zwykle – przestrzeń V z jej monomorficznym obrazem w $\mathrm{Cliff}(V,Q)$.

Dowód: Odwrotność wektora nieizotropowego v w $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ to

$$v^{-1} = Q(v)^{-1} \triangleright v\,,$$

stąd

$$-Q(v) \triangleright \mathrm{Ad}_v(w) = -v.w.v \equiv -v.\{w,v\} + v^2.w = -2\Phi_Q(w,v) \triangleright v + Q(v) \triangleright w\,.$$

$\square$

Uwaga 1. Działanie dołączone w ograniczeniu (obustronnym) do $V \subset \mathrm{Cliff}(V,Q)$ realizuje superpozycje przeciwności (odbicia wzgl. wektora zerowego) z odbiciami w płaszczyznach ortogonalnych (wzgl. Q) do wektorów nieizotropowych.

Powyższe obserwacje prowadzą nas wprost do

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i dla

$$V^\times := V \smallsetminus Q^{-1}(\{0_{\mathbb{K}}\})$$

zdefiniujmy grupę

$$P(V,Q) := \langle v \in V^\times \rangle \subset \mathrm{Cliff}(V,Q)^\times\,, \tag{1}$$

tj. grupę generowaną multyplikatywnie (wzgl. mnożenia indukowanego z algebry $\mathrm{Cliff}(V,Q)$) przez wektory nieizotropowe. Reprezentacja dołączona $\mathrm{Cliff}(V,Q)^\times$ na $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ ogranicza się do reprezentacji

$$\underline{\mathrm{Ad}}_\cdot \;:\; P(V,Q) \longrightarrow \mathrm{O}(V,Q) \;:\; u \longmapsto \mathrm{Ad}_u \restriction_{V \subset \mathrm{Cliff}(V,Q)}\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Homomorficzność $\underline{\mathrm{Ad}}_\cdot$ jest oczywista,

$$\forall_{u_1,u_2 \in P(V,Q)} \;:\; \underline{\mathrm{Ad}}_{u_1 . u_2} = \underline{\mathrm{Ad}}_{u_1} \circ \underline{\mathrm{Ad}}_{u_2}\,,$$

pozostaje zatem tylko sprawdzić, że endomorfizm $\underline{\mathrm{Ad}}_u$ zachowuje formę kwadratową Q, co czynimy – dla dowolnych $v \in V \smallsetminus Q^{-1}(\{0_{\mathbb{K}}\})$ i $w \in V$ – w bezpośrednim rachunku odwołującym się do Stw. 1,

$$\begin{aligned} Q \circ \underline{\mathrm{Ad}}_v(w) &\equiv Q(v.w.v^{-1}) = Q(-v.w.v^{-1}) = Q\big(w - 2\tfrac{\Phi_Q(w,v)}{Q(v)} \triangleright v\big) \\ &\equiv \Phi_Q\big(w - 2\tfrac{\Phi_Q(w,v)}{Q(v)} \triangleright v, w - 2\tfrac{\Phi_Q(w,v)}{Q(v)} \triangleright v\big) \\ &= \Phi_Q(w,w) - 4\tfrac{\Phi_Q(w,v)}{Q(v)} \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_Q(w,v) + 4\tfrac{\Phi_Q(w,v)^2}{Q(v)^2} \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v,v) \\ &= Q(w)\,. \end{aligned}$$

□

Reprezentacja dołączona, jakkolwiek przydatna przy wyrabianiu sobie pewnych elementarnych intuicji algebraicznych i geometrycznych, z których skorzystamy w dalszej części wywodu, ma jedną istotną niedoskonałość: Oto jej ograniczenie $\underline{\mathrm{Ad}}_\cdot$ nie zawiera w ogólności transformacji zmieniających orientację V na przeciwną, czyli – w świetle Tw. Cartana–Dieudonnégo 4 – zbioru generującego grupę $\mathrm{O}(V,Q)$, której emulacja jest naszym celem. Istotnie, w przypadku $\dim_{\mathbb{K}} V = 2n+1 \in 2\mathbb{N}+1$ endomorfizm $\mathrm{Ad}_v,\ v \in V^\times$ odwzorowuje wektor v w siebie, $\mathrm{Ad}_v(v) = v$, a dowolny wektor $w \in \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}$ – w wektor przeciwny, $\mathrm{Ad}_v(w) = -w$, co oznacza, że wyznacznik tego endomorfizmu ma wartość $\det \mathrm{Ad}_v = 1 \cdot (-1)^{2n} = 1$. Ażeby naprawić tę niedoskonałość, musimy w naszej rekonstrukcji funktorialnego podniesienia automorfizmów przestrzeni kwadratowej wyjść poza zbiór automorfizmów wewnętrznych, co czynimy w następnej

Definicja 2. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. **Reprezentacja dołączona zwichrowana** multyplikatywnej grupy jedności algebry Clifforda, zwana także **reprezentacją J_V-wektorową** multyplikatywnej grupy jedności, to homomorfizm grup

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{Ad}}_\cdot \;&:\; \mathrm{Cliff}(V,Q)^\times \longrightarrow \mathrm{Aut}\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) \\ &:\; u \longmapsto \big(\ \mathrm{Cliff}(V,Q) \ni \gamma \longmapsto J_V(u).\gamma.u^{-1} \equiv \widetilde{\mathrm{Ad}}_u(\gamma)\ \big)\,. \end{aligned}$$

Reprezentacja ta pozwala wyróżnić grupę

$$\Gamma(V,Q) := \big\{\ u \in \mathrm{Cliff}(V,Q)^\times \quad|\quad \widetilde{\mathrm{Ad}}_u(V) = V\ \big\} \supset P(V,Q)\,,$$

określaną mianem **grupy Clifforda**.

Punktu wyjścia do analizy grupy Clifforda dostarcza

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\big(((V,+_V,\mathsf{P}_V,\bullet \longmapsto 0_V),\ell_V),Q\big)$ będzie niezwyrodniałą przestrzenią kwadratową skończonego wymiaru nad ciałem $\mathbb{K}$ o charakterystyce $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$. Ograniczenie reprezentacji dołączonej zwichrowanej

$$\underline{\widetilde{\mathrm{Ad}}}_\cdot \;:\; \Gamma(V,Q) \longrightarrow \mathrm{GL}(V;\mathbb{K}) \equiv \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V) \;:\; u \longmapsto \widetilde{\mathrm{Ad}}_u \restriction_{V \subset \mathrm{Cliff}(V,Q)}\,.$$

zadaje ciąg dokładny grup

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{K}^\times \longrightarrow \Gamma(V,Q) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Ad}}_\cdot} \mathrm{GL}(V;\mathbb{K})\,, \tag{2}$$

w którym

$$\mathbb{K}^\times \equiv \mathbb{K} \smallsetminus \{0_{\mathbb{K}}\}$$

jest multyplikatywną grupą niezerowych elementów ciała $\mathbb{K}$.

<u>*Dowód:*</u> Przynależność do jądra $\widetilde{\mathrm{Ad}}_\cdot$ (obrazów) elementów $\mathbb{K}^\times$ jest rzeczą oczywistą,

$$\forall_{\lambda\in\mathbb{K}^\times}\ \forall_{v\in V}\ :\ \widetilde{\mathrm{Ad}}_{\lambda\triangleright e^{\mathrm{C}}}(v) \ = \ (\lambda\triangleright e^{\mathrm{C}}).v.(\lambda\triangleright e^{\mathrm{C}})^{-1} \equiv (\lambda\triangleright e^{\mathrm{C}}).v.(\lambda^{-1}\triangleright e^{\mathrm{C}}) = \lambda\cdot_{\mathbb{K}}\lambda^{-1}\triangleright v = v\,.$$

Wnioskując odwrotnie, wybierzmy bazę ortogonalną $\{v_i\}_{i\in\overline{1,N}}$, $N\equiv\dim_{\mathbb{K}}V$ w przestrzeni V,

$$\forall_{i,j\in\overline{1,N}}\ :\ \Phi_Q(v_i,v_j) = \lambda_i\,\delta^{\mathbb{K}}_{i,j}\,, \qquad \lambda_i\in\mathbb{K}^\times\,,$$

i rozważmy dowolny element $u\in\mathrm{Ker}\,\widetilde{\mathrm{Ad}}_\cdot$, który wprost na mocy definicji spełnia warunek

$$\forall_{v\in V}\ :\ J_V(u).v = v.u\,,$$

tj.

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_u(v) = v \equiv \mathrm{id}_V(v)\,.$$

Rozkładając $u = u_0 + u_1$ na składowe $u_k \in \mathrm{Cliff}(V,Q)^k$, $k\in\{0,1\}$, przepisujemy powyższe w postaci

$$u_0.v - u_1.v = v.u_0 + v.u_1\,,$$

czyli – wobec Równ. (5.8) – równoważnie w formie układu warunków

$$u_0.v = v.u_0 \qquad \wedge \qquad u_1.v = -v.u_1\,.$$

Redukcja stopnia 2 w $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ określona przez relacje

$$\forall_{i,j\in\overline{1,N}}\ :\ v_i.v_j = -v_j.v_i + 2\lambda_i\,\delta^{\mathbb{K}}_{i,j}$$

pozwala przy tym rozpisać

$$\begin{aligned} u_0 &= \alpha_0(v_2,v_3,\ldots,v_N) + v_1.\alpha_1(v_2,v_3,\ldots,v_N)\,,\\ u_1 &= \beta_1(v_2,v_3,\ldots,v_N) + v_1.\beta_0(v_2,v_3,\ldots,v_N) \end{aligned}$$

w terminach pewnych wielomianów α_k,β_k parzystości k. Kładąc $v=v_1$, otrzymujemy z pierwszego z powyższych warunków równość

$$\alpha_0(v_2,v_3,\ldots,v_N).v_1 + v_1.\alpha_1(v_2,v_3,\ldots,v_N).v_1 = v_1.\alpha_0(v_2,v_3,\ldots,v_N) + v_1^2.\alpha_1(v_2,v_3,\ldots,v_N)\,,$$

która sprowadza się ostatecznie do postaci

$$v_1.\alpha_0(v_2,v_3,\ldots,v_N) - v_1^2.\alpha_1(v_2,v_3,\ldots,v_N) = v_1.\alpha_0(v_2,v_3,\ldots,v_N) + v_1^2.\alpha_1(v_2,v_3,\ldots,v_N)\,,$$

czyli

$$2\lambda_1\triangleright\alpha_1(v_2,v_3,\ldots,v_N) = 0_{\mathbb{K}}\,.$$

Jako że Q jest niezwyrodniała, $\lambda_1\neq 0_{\mathbb{K}}$, przeto $\alpha_1(v_2,v_3,\ldots,v_N) = \mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}$, a zatem u_0 nie zależy od v_1. Powtarzając analogiczne rozumowanie dla v_j, $j\in\overline{2,N}$, stwierdzamy ostatecznie, że

$$u_0 = \lambda\triangleright e^{\mathrm{C}}\,,\quad \lambda\in\mathbb{K}\,.$$

W podobny sposób stwierdzamy, że także u_1 nie zależy od v_i, $i\in\overline{1,N}$, co wobec nieparzystości u_1 implikuje jego trywialność, $u_1 = \mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}$. W sumie zatem mamy

$$u = u_0 + u_1 = u_0 = \lambda\triangleright e^{\mathrm{C}}\,,$$

co z racji odwracalności u daje nam tezę dowodzonego stwierdzenia. □

Uwaga 2. Założenie o niezwyrodnieniu formy kwadratowej Q poczynione w ostatnim stwierdzeniu jest istotne, o czym przekonuje nas analiza przypadku $\mathrm{Cliff}(V,0) \equiv \bigwedge^\bullet V$. Oto więc dla dowolnych *niewspółliniowych* $v_1, v_2 \in V \setminus \{0_V\}$ sprawdzamy tożsamość

$$(1_{\mathbb{K}} + v_1 \wedge v_2)^{-1} = 1_{\mathbb{K}} - v_1 \wedge v_2 \,,$$

która oznacza, że $1_{\mathbb{K}} + v_1 \wedge v_2 \in \mathrm{Cliff}(V,Q)^\times$. Przy tym dla dowolnego $v \in V$ zachodzi

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_{1_{\mathbb{K}}+v_1\wedge v_2}(v) = J_V(1_{\mathbb{K}} + v_1 \wedge v_2) \wedge v \wedge (1_{\mathbb{K}} - v_1 \wedge v_2) = (1_{\mathbb{K}} + v_1 \wedge v_2) \wedge (v - v \wedge v_1 \wedge v_2)$$

$$= \quad v - v \wedge v_1 \wedge v_2 + v_1 \wedge v_2 \wedge v - v_1 \wedge v_2 \wedge v \wedge v_1 \wedge v_2 = v - v \wedge v_1 \wedge v_2 + v \wedge v_1 \wedge v_2 = v \,,$$

co pokazuje dowodnie, że $\mathrm{Ker}\,\widetilde{\mathrm{Ad}}.$ zawiera elementy nie-skalarne.

Zanim podejmiemy dalszą analizę relacji między grupą Clifforda a grupą automorfizmów przestrzeni kwadratowej (V,Q), wprowadzimy obecnie nader przydatną konstrukcję pomocniczą:

Definicja 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. **Norma spinorowa** na $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ to odwzorowanie

$$\mathsf{N} \;:\; \mathrm{Cliff}(V,Q) \circlearrowleft \;:\; \gamma \longmapsto \gamma.J_V \circ T_V(\gamma) \,,$$

o oczywistej własności

$$\forall_{v\in V} \;:\; \mathsf{N}(v) = -Q(v) \triangleright e^{\mathrm{C}} \,.$$

Kluczową własność określonego powyżej odwzorowania wysławia

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def. 3 oraz Stw. 3, zakładając przy tym, że przestrzeń kwadratowa (V,Q) jest skończenie wymiarowa i niezwyrodniała. Wówczas norma spinorowa ogranicza się do homomorfizmu grup

$$\mathsf{N}\restriction_{\Gamma(V,Q)} \;:\; \Gamma(V,Q) \longrightarrow \mathbb{K}^\times \triangleright e^{\mathrm{C}} \equiv \mathbb{K}^\times \,.$$

<u>*Dowód:*</u> Zauważmy na wstępie, że dla dowolnego $u \in \Gamma(V,Q)$ i wszystkich $v \in V$ zachodzi – wprost na mocy definicji grupy Clifforda – $J_V(u).v.u^{-1} \in V$, więc także

$$J_V(u).v.u^{-1} = T_V\big(J_V(u).v.u^{-1}\big) = T_V(u)^{-1}.T_V(v).T_V \circ J_V(u) = T_V(u)^{-1}.v.J_V \circ T_V(u) \,,$$

czyli

$$v = \big(T_V(u).J_V(u)\big).v.\big(J_V \circ T_V(u).u\big)^{-1} = J_V\big(J_V \circ T_V(u).u\big).v.\big(J_V \circ T_V(u).u\big)^{-1} \equiv \widetilde{\mathrm{Ad}}_{J_V\circ T_V(u).u}(v) \,,$$

co wynika z tego, że $\Gamma(V,Q)$ w reprezentacji $\widetilde{\mathrm{Ad}}$ zachowuje V, a przy tym jest grupą, i oznacza, że

$$J_V \circ T_V(u).u \in \mathrm{Ker}\,\widetilde{\mathrm{Ad}}.\restriction_V \,.$$

Przy tym wobec pierwszej z powyższych równości zachodzi

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_{J_V\circ T_V(u)}(v) \quad = \quad T_V(u).v.J_V \circ T_V(u)^{-1} \equiv T_V(u^{-1})^{-1}.v.J_V \circ T_V(u^{-1}) = J_V(u^{-1}).v.u$$

$$\equiv \quad J_V(u^{-1}).v.(u^{-1})^{-1} \equiv \widetilde{\mathrm{Ad}}_{u^{-1}}(v) \in V \,,$$

co pozwala stwierdzić, że $J_V \circ T_V(u) \in \Gamma(V,Q)$, czyli też

$$J_V \circ T_V(u).u \in \Gamma(V,Q) \cap \mathrm{Ker}\,\widetilde{\mathrm{Ad}}.\restriction_V \,,$$

a w takim razie na mocy Stw. 3 wyprowadzamy wniosek o istnieniu skalara $\lambda_u \in \mathbb{K}^\times$ spełniającego warunek

$$J_V \circ T_V(u).u = \lambda_u \triangleright e^{\mathrm{C}} \,.$$

To prowadzi do wniosku, że

$$\mathsf{N}\big(T_V(u)\big) \equiv T_V(u).J_V(u) = J_V\big(J_V \circ T_V(u).u\big) = J_V(\lambda_u \triangleright e^{\mathrm{C}}) = \lambda_u \triangleright e^{\mathrm{C}} \,.$$

Zarazem

$$V = J_V(u).V.u^{-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad V = J_V(u)^{-1}.V.u \,,$$

przeto

$$V \equiv T_V(V) = T_V\big(J_V(u)^{-1}.V.u\big) = T_V(u).T_V(V).T_V \circ J_V(u)^{-1} = T_V(u).V.J_V \circ T_V(u)^{-1}\,,$$

więc ostatecznie

$$\begin{aligned} V \equiv -J_V(V) &= -J_V\big(T_V(u).V.J_V \circ T_V(u)^{-1}\big) = -J_V \circ T_V(u).J_V(V).J_V \circ J_V \circ T_V(u)^{-1} \\ &= J_V \circ T_V(u).V.T_V(u)^{-1} \equiv \widetilde{\mathrm{Ad}}_{T_V(u)}(V)\,. \end{aligned}$$

Widzimy zatem, że

$$u \in \Gamma(V,Q) \qquad \Longleftrightarrow \qquad T_V(u) \in \Gamma(V,Q)\,,$$

co pozwala wcześniejszą naszą konstatację przepisać w pożądanej postaci

$$\mathsf{N}(u) = \lambda_{T_V(u)} \triangleright e^{\mathrm{C}} \in \mathbb{K}^\times \triangleright e^{\mathrm{C}}\,,$$

czyli

$$\mathsf{N}\big(\Gamma(V,Q)\big) \subset \mathbb{K}^\times \triangleright e^{\mathrm{C}}\,.$$

Na koniec bez trudu sprawdzamy, dla dowolnych $u_1, u_2 \in \Gamma(V,Q)$, że

$$\begin{aligned} \mathsf{N}(u_1.u_2) &\equiv u_1.u_2.J_V \circ T_V(u_1.u_2) = u_1.\mathsf{N}(u_2).J_V \circ T_V(u_1) = u_1.\lambda_{T_V(u_2)} \triangleright e^{\mathrm{C}}.J_V \circ T_V(u_1) \\ &= u_1.J_V \circ T_V(u_1).\lambda_{T_V(u_2)} \triangleright e^{\mathrm{C}} \equiv \mathsf{N}(u_1).\mathsf{N}(u_2)\,. \end{aligned}$$

□

Wyposażeni w nowe narzędzie analizy strukturalnej, jakim jest norma spinorowa, możemy przyjrzeć się bliżej ciągowi dokładnemu grup (2). Czynimy to w poniższym

Stwierdzenie 5. Przyjmijmy zapis Stw. 3. Ograniczenie $\underline{\widetilde{\mathrm{Ad}}}_\cdot$ reprezentacji dołączonej zwichrowanej zadaje homomorfizm grup

$$\underline{\widetilde{\mathrm{Ad}}}_\cdot \;:\; \Gamma(V,Q) \longrightarrow \mathrm{O}(V,Q)\,.$$

Dowód: Zaczniemy od wyznaczenia – w odwołaniu do Stw. 4, a dla dowolnego $u \in \Gamma(V,Q)$ – normy

$$\begin{aligned} \mathsf{N}\big(J_V(u)\big) &\equiv J_V(u).J_V \circ T_V \circ J_V(u) = J_V(u).T_V(u) = J_V\big(u.J_V \circ T_V(u)\big) \equiv J_V\big(\mathsf{N}(u)\big) \\ &= J_V\big(\lambda_{T_V(u)} \triangleright e^{\mathrm{C}}\big) = \lambda_{T_V(u)} \triangleright e^{\mathrm{C}} \equiv \mathsf{N}(u)\,. \end{aligned}$$

Dla $u \in \Gamma(V,Q)$ mamy tożsamość (w oczywistym zapisie symbolicznym)

$$\begin{aligned} V &\equiv -V = J_V(V) = J_V\big(\widetilde{\mathrm{Ad}}_u(V)\big) \equiv J_V\big(J_V(u).V.u^{-1}\big) = -J_V\big(J_V(u)\big).V.J_V\big(u^{-1}\big) \\ &= -J_V\big(J_V(u)\big).V.J_V(u)^{-1}\,, \end{aligned}$$

z której wynika $J_V(u) \in \Gamma(V,Q)$. Uwzględniwszy powyższe oraz $u^{-1} \in \Gamma(V,Q)$, jak również treść Stw. 4, możemy następnie obliczyć, dla dowolnego (anizotropowego) $v \in V^\times \subset \Gamma(V,Q)$,

$$\begin{aligned} \mathsf{N}\big(\widetilde{\mathrm{Ad}}_u(v)\big) &\equiv \mathsf{N}\big(J_V(u).v.u^{-1}\big) = \mathsf{N}\big(J_V(u)\big).\mathsf{N}(v).\mathsf{N}(u^{-1}) = \mathsf{N}(u).\mathsf{N}(v).\mathsf{N}(u)^{-1} \\ &\equiv \lambda_{T_V(u)} \triangleright e^{\mathrm{C}}.\mathsf{N}(v).\lambda_{T_V(u)}^{-1} \triangleright e^{\mathrm{C}} = \mathsf{N}(v) \end{aligned}$$

i na tej podstawie – stwierdzić, że działanie dołączone zwichrowane zachowuje $Q(v)$ dla wszystkich anizotropowych wektorów $v \in V^\times$. Z drugiej strony ilekroć $Q(v) = 0_{\mathbb{K}}$ (a dowolny wektor jest albo anizotropowy, albo spełnia $Q(v) = 0_{\mathbb{K}}$), zachodzi $\widetilde{\mathrm{Ad}}_u(v) \notin V^\times$, gdyż w przeciwnym razie byłoby – w świetle wcześniejszych ustaleń – $v = \widetilde{\mathrm{Ad}}_{u^{-1}}\big(\widetilde{\mathrm{Ad}}_u(v)\big) \in \widetilde{\mathrm{Ad}}_u(V^\times) \subset V^\times$, co prowadziłoby do sprzeczności. Także zatem w przypadku izotropowym wartość (zerowa) formy kwadratowej jest zachowywana przez działanie $\widetilde{\mathrm{Ad}}$. □

Ostatnie stwierdzenie w połączeniu z definicją (1) podgrupy $P(V,Q) \subset \Gamma(V,Q)$ oraz tożsamością

$$\widetilde{\underline{\mathrm{Ad}}}_v \equiv \mathsf{P}_v \tag{3}$$

każe postawić pytanie o surjektywny charakter indukowanego przez reprezentację dołączoną zwichrowaną homomorfizmu

$$\widetilde{\underline{\mathrm{Ad}}}_{\cdot}\restriction_{P(V,Q)} \;:\; P(V,Q) \longrightarrow \mathrm{O}(V,Q)\,.$$

Odpowiedzi na to pytanie dostarcza

Stwierdzenie 6. Przyjmijmy zapis Def. 2 oraz Stw. 2. Ograniczenie reprezentacji dołączonej zwichrowanej

$$\widetilde{\underline{\mathrm{Ad}}}_{\cdot}\restriction_{P(V,Q)} \;:\; P(V,Q) \longrightarrow \mathrm{O}(V,Q)$$

jest epimorfizmem grup.

Dowód: Prosta konsekwencja definicji grupy $P(V,Q)$, tożsamość (3) oraz Tw. 4. □

Zanim postąpimy dalej w naszej eksploracji anatomii grupy Clifforda, wprowadzimy pewne wyróżnione jej podgrupy o absolutnie kluczowym znaczeniu dla naszych rozważań, zorientowanych ostatecznie na konstrukcję spinorów – ich obecność pozwoli wysubtelnić relację (2), dając nam wgląd w strukturę $\mathrm{Ker}\,\widetilde{\underline{\mathrm{Ad}}}\restriction_{P(V,Q)}$. Oto więc mamy

Definicja 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. **Grupa** Pin przestrzeni kwadratowej (V,Q) to podgrupa

$$\mathrm{Pin}(V,Q) := \big\langle v \in Q^{-1}(\{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}, \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\})\big\rangle \subset P(V,Q)\,.$$

Jej podgrupa

$$\mathrm{Spin}(V,Q) := \mathrm{Pin}(V,Q) \cap \mathrm{Cliff}(V,Q)^0$$

nosi miano **grupy** Spin przestrzeni kwadratowej (V,Q).

W kontekście poprzedniego stwierdzenia najogólniejsze własności wprowadzonych tu grup opisuje

Stwierdzenie 7. Przyjmijmy zapis Def. 4 oraz Stw. 3. Podgrupy

$$\widetilde{\underline{\mathrm{Ad}}}_{\cdot}\big(\mathrm{Pin}(V,Q)\big)\,, \widetilde{\underline{\mathrm{Ad}}}_{\cdot}\big(\mathrm{Spin}(V,Q)\big) \subset \mathrm{O}(V,Q)$$

są normalne.

Dowód: Izometryczne działanie definiujące grupy $\mathrm{O}(V,Q)$ na (V,Q)

$$\rho_{\mathrm{def}\,\cdot} \equiv \mathrm{id}_{\mathrm{O}(V,Q)} \;:\; \mathrm{O}(V,Q) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V,Q)$$

podnosi się funktorialnie do $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ na mocy Tw. 7-8.2, przy czym

$$\forall_{\chi \in \mathrm{O}(V,Q)} \;:\; [\mathrm{Cliff}(\chi), J_V] \equiv [\mathrm{Cliff}(\chi), \mathrm{Cliff}(P_V)] = \mathrm{Cliff}([\chi, P_V]) = \mathrm{Cliff}(0) = 0\,,$$

więc też dla dowolnych $v \in V^\times, w \in V$ oraz $\chi \in \mathrm{O}(V,Q)$ obliczamy

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\chi(v)}(w) &\equiv J_V \circ \chi(v).w.\chi(v)^{-1} = \chi \circ J_V(v).w.\chi(v^{-1}) = \mathrm{Cliff}(\chi)\big(J_V(v).\chi^{-1}(w).v^{-1}\big) \\ &= \mathrm{Cliff}(\chi) \circ \widetilde{\mathrm{Ad}}_v\big(\chi^{-1}(w)\big)\,,\end{aligned}$$

korzystając przy tym z tożsamości $\mathrm{Cliff}(\chi)(w) \equiv \chi(w)$ słusznej dla dowolnego $w \in V (\subset \mathrm{Cliff}(V,Q))$, czyli – wobec Równ (3) –

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\chi(v)}(w) = \chi \circ \widetilde{\mathrm{Ad}}_v \circ \chi^{-1}(w)\,,$$

co pozwala nam zapisać

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\chi(v)}\restriction_V = \mathrm{Ad}_\chi\big(\widetilde{\mathrm{Ad}}_v\restriction_V\big)$$

i na tej podstawie – w bezpośrednim odwołaniu do Def. 4 (obie grupy są generowane multyplikatywnie przez pewne wektory nieizotropowe w stosownej liczbie (parzystej dla $\mathrm{Spin}(V,Q)$), a nadto $Q\circ\chi(v) = Q(v)$) – ustalić pożądane relacje

$$\forall_{H\in\{\widetilde{\mathrm{Ad}}(\mathrm{Pin}(V,Q)),\widetilde{\mathrm{Ad}}(\mathrm{Spin}(V,Q))\}}\ \forall_{\chi\in\mathrm{O}(V,Q)}\ :\ \mathrm{Ad}_\chi(H)\subset H\,.$$

□

Tytułem ukierunkowania dalszej dyskusji, która pozwoli należycie wyeksponować grupy Pin i Spin, zauważmy, że dla dowolnego skalara $\lambda\in\mathbb{K}^\times$ (i dla każdego wektora $v\in V^\times$) spełniona jest tożsamość

$$\mathsf{P}_{\lambda\triangleright v} = \mathsf{P}_v\,,$$

jeśli zatem bylibyśmy w stanie przenormować wszystkie nieizotropowe wektory w V tak, by ich norma (spinorowa, tj. zadawana przez Q) była równa $\pm\mathbf{1}_\mathbb{K}$, to wówczas w świetle Tw. 4 reprezentacja dołączona zwichrowana ograniczałaby się w oczywisty sposób do epimorfizmów $\mathrm{Pin}(V,Q)\twoheadrightarrow\mathrm{O}(V,Q)$ oraz $\mathrm{Spin}(V,Q)\twoheadrightarrow\mathrm{SO}(V,Q)$. Kłopot w tym, że tego typu operacja wymaga rozwiązania (w $\mathbb{K}^\times$) równania

$$\{-\mathbf{1}_\mathbb{K},\mathbf{1}_\mathbb{K}\}\ni Q(\lambda\triangleright v) = \lambda^2\cdot_\mathbb{K} Q(v)$$

dla dowolnej wartości $Q(v)$, co tłumaczy się na warunek

$$\forall_{v\in V^\times}\ \exists_{\varepsilon_v\in\{-\mathbf{1}_\mathbb{K},\mathbf{1}_\mathbb{K}\}}\ :\ \tfrac{\varepsilon_v}{Q(v)}\in\{\ \lambda^2\in\mathbb{K}^\times\ \mid\ \lambda\in\mathbb{K}^\times\ \}\,.$$

Warunek ten jest (szczęśliwie) spełniony dla $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, w ogólności zaś dostarcza motywacji dla

Definicja 5. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i wprowadźmy oznaczenie

$$\left(\mathbb{K}^\times\right)^2\equiv\{\ \lambda^2\in\mathbb{K}^\times\ \mid\ \lambda\in\mathbb{K}^\times\ \}\,.$$

Ciało $\mathbb{K}$ o charakterystyce $\mathrm{char}(\mathbb{K})\neq 2$ nazywamy **spinowym**, jeśli spełnia warunek

$$\mathbb{K}^\times = \left(\mathbb{K}^\times\right)^2\cup\left(-\left(\mathbb{K}^\times\right)^2\right),$$

czyli

$$\forall_{\lambda\in\mathbb{K}^\times}\ \exists_{\mu\in\mathbb{K}^\times}\ :\ \mu^2\in\{-\lambda,\lambda\}\,.$$

Zwieńczeniem naszych dociekań jest

Twierdzenie 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Dla dowolnej skończenie wymiarowej niezwyrodniałej przestrzeni kwadratowej (V,Q) nad ciałem spinowym $\mathbb{K}$ istnieją krótkie ciągi dokładne grup

$$\mathbf{1}\longrightarrow\mathbb{F}\longrightarrow\mathrm{Pin}(V,Q)\xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Ad}}}\mathrm{O}(V,Q)\longrightarrow\mathbf{1}\,,$$

$$\mathbf{1}\longrightarrow\mathbb{F}\longrightarrow\mathrm{Spin}(V,Q)\xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Ad}}}\mathrm{SO}(V,Q)\longrightarrow\mathbf{1}\,,$$

przy czym

$$\mathbb{F} = \begin{cases}\{-\mathbf{1}_\mathbb{K},\mathbf{1}_\mathbb{K}\}\equiv\mathbb{Z}_2\,, & \text{gdy } \sqrt{-\mathbf{1}_\mathbb{K}}\notin\mathbb{K}\\ \{-\sqrt{-\mathbf{1}_\mathbb{K}},\sqrt{-\mathbf{1}_\mathbb{K}},-\mathbf{1}_\mathbb{K},\mathbf{1}_\mathbb{K}\}\equiv\mathbb{Z}_4 & \text{w p.p.}\end{cases}\,,$$

co pokazuje, że grupy Pin i Spin są centralnymi rozszerzeniami grup – odpowiednio – ortogonalnej i specjalnej ortogonalnej przestrzeni kwadratowej. W szczególności dla $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ i dowolnej sygnatury $(p,q)\in\mathbb{N}^{\times 2}\setminus\{(0,0)\}$, a przy oznaczeniach $G_\mathbb{R}(p,q)\equiv G(\mathbb{R}^{p,q})$, $G\in\{\mathrm{O},\mathrm{SO},\mathrm{Pin},\mathrm{Spin}\}$, otrzymujemy krótkie ciągi dokładne

$$\mathbf{1}\longrightarrow\mathbb{Z}_2\longrightarrow\mathrm{Pin}_\mathbb{R}(p,q)\xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Ad}}}\mathrm{O}_\mathbb{R}(p,q)\longrightarrow\mathbf{1}\,,$$

$$\mathbf{1}\longrightarrow\mathbb{Z}_2\longrightarrow\mathrm{Spin}_\mathbb{R}(p,q)\xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Ad}}}\mathrm{SO}_\mathbb{R}(p,q)\longrightarrow\mathbf{1}\,,$$

w których – o ile tylko $(p,q) \neq (1,1)$ – podwójne nakrycia grupy ortogonalnej (wzgl. specjalnej ortogonalnej) przez grupę Pin (wzgl. Spin) są topologicznie nietrywialne nad $\mathrm{O}_{\mathbb{R}}(p,q)$ – i tak np. podwójne nakrycie

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}_{\mathbb{R}}(n,0) \xrightarrow{\widetilde{\underline{\mathrm{Ad}}}.} \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(n,0) \longrightarrow \mathbf{1}$$

jest uniwersalne dla $n \geq 3$.

<u>*Dowód:*</u> Rozważmy dowolny element $u = v_1.v_2.\cdots.v_m \in \mathrm{Pin}(V,Q)$ z jądra homomorfizmu $\widetilde{\underline{\mathrm{Ad}}}.$ (określony przez wektory $v_i \in Q^{-1}(\{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}, \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\})$, $i \in \overline{1,m}$). Na mocy Stw. 3

$$u \in \mathbb{K}^\times \triangleright e^{\mathrm{C}},$$

zatem – w świetle Stw. 4 i samej Def. 3 –

$$\begin{aligned} u.u &= u.J_V \circ T_V(u) \equiv \mathsf{N}(u) = \mathsf{N}(v_1).\mathsf{N}(v_2).\cdots.\mathsf{N}(v_m) \\ &= \big(-Q(v_1)\big) \cdot_{\mathbb{K}} \big(-Q(v_2)\big) \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} \big(-Q(v_m)\big) \triangleright e^{\mathrm{C}} \in \mathbb{Z}_2 \triangleright e^{\mathrm{C}}. \end{aligned}$$

Mamy tutaj dwie wykluczające się wzajemnie ewentualności:

- albo $\mathbb{K} \not\ni \sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}}$, a wtedy nieodzownie $u^2 = e^{\mathrm{C}}$, czyli $u \in \{-e^{\mathrm{C}}, e^{\mathrm{C}}\}$, tj.

$$\mathrm{Ker}\,\widetilde{\underline{\mathrm{Ad}}}. \subseteq \{-e^{\mathrm{C}}, e^{\mathrm{C}}\},$$

  ponieważ jednak

$$\widetilde{\underline{\mathrm{Ad}}}_{\pm e^{\mathrm{C}}} = \mathrm{id}_V,$$

  przeto ostatecznie

$$\mathrm{Ker}\,\widetilde{\underline{\mathrm{Ad}}}. = \{-e^{\mathrm{C}}, e^{\mathrm{C}}\} \cong \mathbb{Z}_2,$$

- albo $\mathbb{K} \ni \sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}}$, a wtedy oba znaki w powyższej tożsamości są dopuszczalne, więc

$$\mathrm{Ker}\,\widetilde{\underline{\mathrm{Ad}}}. \subseteq \{-\sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}} \triangleright e^{\mathrm{C}}, \sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}} \triangleright e^{\mathrm{C}}, -e^{\mathrm{C}}, e^{\mathrm{C}}\},$$

  a że

$$\forall_{x \in \{-\sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}} \triangleright e^{\mathrm{C}}, \sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}} \triangleright e^{\mathrm{C}}, -e^{\mathrm{C}}, e^{\mathrm{C}}\}} \; : \; \widetilde{\underline{\mathrm{Ad}}}_x = \mathrm{id}_V,$$

  toteż

$$\mathrm{Ker}\,\widetilde{\underline{\mathrm{Ad}}}. = \{-\sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}} \triangleright e^{\mathrm{C}}, \sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}} \triangleright e^{\mathrm{C}}, -e^{\mathrm{C}}, e^{\mathrm{C}}\} \cong \mathbb{Z}_4.$$

Topologia podwójnych nakryć ma swój aspekt elementarny, który odróżnia nakrycia $\mathbb{Z}_2 \longrightarrow \widehat{B} \longrightarrow B$ postaci $\widehat{B} = B \times \mathbb{Z}_2$ (zwane trywialnymi) od nakryć przyjmujących postać trywialną jedynie lokalnie (nad bazą B), ale też – zwłaszcza w obecnym kontekście – aspekt wyższy, który odróżnia nakrycia n-spójne (dla $n \geq 1$) od nie-n-spójnych. Zanalizowanie tego ostatniego aspektu wymaga znajomości szczegółów topologii wszystkich grup uwikłanych w treść twierdzenia na poziomie wykraczającym dalece poza zakres niniejszego kursu – zainteresowanego Słuchacza odsyłamy do literatury źródłowej, jak choćby do doskonałej monografii S. Helgasona [Hel01]. W niniejszym dowodzie skupimy się natomiast na aspekcie elementarnym, wykazując, że podwójne nakrycia wymienione w drugiej części twierdzenia nie mają *globalnej* struktury podwójnej kopii bazy. W tym celu wystarczy połączyć krzywą ciągłą[1] punkty w przestrzeni totalnej nakrycia, które rzutują się na ten sam punkt bazy, a więc np. $-e^{\mathrm{C}}$ i e^{C} w $\mathrm{Spin}_{\mathbb{R}}(p,q)$. Jako że $(p,q) \neq (1,1)$ (na podstawie poczynionego tu założenia), zawsze znajdziemy wektory $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^{p+q}$ spełniające układ warunków

$$\delta^{(p,q)}_{\mathrm{E}}(e_1) = \delta^{(p,q)}_{\mathrm{E}}(e_2) =: \varepsilon \in \{-1,1\} \qquad \wedge \qquad e_1 \perp_{\delta^{(p,q)}_{\mathrm{E}}} e_2.$$

Dla dowolnej takiej pary wektorów definiujemy krzywą (ciągłą)

$$\gamma \; : \; [0, \tfrac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q} \; : \; t \longmapsto (\cos t \triangleright e_1 + \sin t \triangleright e_2).(\cos t \triangleright e_1 - \sin t \triangleright e_2).$$

[1] Przy naturalnych założeniach dotyczących topologii rozpatrywanych grup, znajdujących potwierdzenie w szczegółowych dociekaniach, np. na podstawie lektury rzeczonej monografii S. Helgasona.

Bez trudu wyznaczamy

$$\delta_{\mathrm{E}}^{(p,q)}(\cos t \triangleright e_1 + \sin t \triangleright e_2) = \cos^2 t \cdot \delta_{\mathrm{E}}^{(p,q)}(e_1) + \sin^2 t \cdot \delta_{\mathrm{E}}^{(p,q)}(e_2) + 2 \sin t \cdot \cos t \cdot \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(p,q)}}(e_1, e_2) = \varepsilon\,,$$

$$\delta_{\mathrm{E}}^{(p,q)}(\cos t \triangleright e_1 - \sin t \triangleright e_2) = \cos^2 t \cdot \delta_{\mathrm{E}}^{(p,q)}(e_1) + \sin^2 t \cdot \delta_{\mathrm{E}}^{(p,q)}(e_2) - 2 \sin t \cdot \cos t \cdot \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(p,q)}}(e_1, e_2) = \varepsilon$$

i na tej podstawie stwierdzamy, że krzywa leży w grupie Spin,

$$\gamma\big([0, \tfrac{\pi}{2}]\big) \subset \mathrm{Spin}_{\mathbb{R}}(p,q)\,,$$

będącej przestrzenią totalną rozpatrywanego nakrycia. Przy tym krzywa ta łączy ze sobą oba punkty w $\underline{\widetilde{\mathrm{Ad}}}^{-1}(\mathrm{id}_V)$,

$$\gamma(0) = e_1.e_1 = \varepsilon \triangleright e^{\mathrm{C}}\,, \qquad \gamma(\tfrac{\pi}{2}) = -e_2.e_2 = -\varepsilon \triangleright e^{\mathrm{C}}\,,$$

co nie byłoby możliwe w topologii $\mathrm{O}_{\mathbb{R}}(p,q) \times \mathbb{Z}_2$. □

2. Reprezentacje spinorowe – prosty obrazek matematyczny

Próba zrozumienia struktury podniesienia izometrycznych automorfizmów przestrzeni kwadratowej do jej algebry Clifforda, zrealizowana w poprzednim rozdziale, doprowadziła nas do konstrukcji centralnego rozszerzenia grupy obrotów zachowujących orientację przestrzeni kwadratowej i tym samym przygotowała grunt pod wieńczącą nasze dociekania algebraiczne (w obecnym kontekście)

Definicja 6. Przyjmijmy zapis dotychczasowy, przy czym niechaj $((V,Q),\mathbb{K}) \in \{(\mathbb{R}^{p,q},\mathbb{R}),(\mathbb{C}^{n,0},\mathbb{C})\}$, i niech $S \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$. **Reprezentacja spinorowa** grupy $\mathrm{Spin}(V,Q)$ to ograniczenie (nietrywialnej) nieprzywiedlnej reprezentacji

$$\rho\ :\ \mathrm{Cliff}(V,Q) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(S)$$

do tejże grupy

$$\mathrm{Spin}(V,Q) \subset \mathrm{Cliff}(V,Q)^0 \subset \mathrm{Cliff}(V,Q)\,, \tag{4}$$

przy czym w przypadku $((V,Q),\mathbb{K}) = (\mathbb{R}^{p,q},\mathbb{R})$ i ρ rzeczywistej mówimy o **rzeczywistej reprezentacji spinorowej** grupy $\mathrm{Spin}_{\mathbb{R}}(p,q)$, a w przypadku $((V,Q),\,\mathbb{K}) = (\mathbb{C}^{n,0},\mathbb{C})$ i ρ zespolonej – o **zespolonej reprezentacji spinorowej** grupy $\mathrm{Spin}_{\mathbb{C}}(n) \equiv \mathrm{Spin}(\mathbb{C}^{n,0})$.

Uwaga 3. Należy zwrócić uwagę, że reprezentacja spinorowa nie zstępuje do (czyli nie indukuje reprezentacji) $\mathrm{SO}(V,Q)$, oto bowiem $\rho(-e^{\mathrm{C}}) = -\mathrm{id}_S$.

W odwołaniu do wyników dotychczasowych naszych dociekań możemy bez trudu dokonać kompletnej klasyfikacji wprowadzonych tu obiektów.

Twierdzenie 2 (Klasyfikacyjne dla reprezentacji spinorowych $/\mathbb{R}$)**.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj

$$\rho\ :\ \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(S)$$

będzie (nietrywialną rzeczywistą) reprezentacją nieprzywiedlną. Reprezentacja spinorowa

$$\rho\restriction_{\mathrm{Spin}_{\mathbb{R}}(p,q)}\ :\ \mathrm{Spin}_{\mathbb{R}}(p,q) \longrightarrow \mathrm{GL}(S;\mathbb{R})$$

przyjmuje – w zależności od $(p,q) \in \mathbb{N}^{\times 2}$ – następującą postać

- dla $q = p \pm 1 + 8k$: nieprzywiedlna rzeczywista na $S = \mathbb{R}^{2^{l+4k}}$, gdzie

$$l = \begin{cases} p\,, & \text{gdy } q = p+1 \mod 8 \\ p-1\,, & \text{gdy } q = p-1 \mod 8 \end{cases}$$

  (**spinory Pauliego**);

- dla $q = p \pm 3 + 8k$: nieprzywiedlna kwaternionowa na $S = \mathbb{H}^{2^{l+4k}}$, gdzie
$$l = \begin{cases} p\,, & \text{gdy } q = p + 3 \mod 8 \\ p - 3\,, & \text{gdy } q = p - 3 \mod 8 \end{cases}$$
(spinory Pauliego);

- dla $q = p \pm 2 + 8k$: nieprzywiedlna zespolona na $S = \mathbb{C}^{2^{l+4k}}$, gdzie
$$l = \begin{cases} p\,, & \text{gdy } q = p + 2 \mod 8 \\ p - 1\,, & \text{gdy } q = p - 2 \mod 8 \end{cases}$$
(spinory Pauliego);

- dla $q = p{+}8k$: przywiedlna rzeczywista na $S = S_+ \oplus S_-$ ((**bi**)**spinory Diraca**) rozkładalna na dwie wzajem nierównoważne nieprzywiedlne rzeczywiste reprezentacje na $S_\pm = \mathbb{R}^{2^{p+4k}}$ (**chiralne spinory Weyla**);

- dla $q = p{+}4{+}8k$: przywiedlna rzeczywista na $S = S_+ \oplus S_-$ ((bi)spinory Diraca) rozkładalna na dwie wzajem nierównoważne nieprzywiedlne kwaternionowe reprezentacje na $S_\pm = \mathbb{H}^{2^{p+4k}}$ (chiralne spinory Weyla).

Przy tym w przypadku $q - p = 3 \mod 4$ wynik powyższej indukcji reprezentacji grupy Spin nie zależy od wyboru nieprzywiedlnej reprezentacji algebry półprostej $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}$.

<u>*Dowód:*</u> Zważywszy Równ. (4), kluczową rolę w dowodzie odgrywają izomorfizmy (zapisane dla dowolnych $p, k \in \mathbb{Z}$, dla których zapis ma sens)

$$\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,p+1+8k} \cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,p+8k} \cong \mathbb{R}(2^{p+4k})\,, \qquad \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,p-1+8k} \cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,p-2+8k} \cong \mathbb{R}(2^{p-1+4k})\,,$$

$$\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,p+3+8k} \cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,p+2+8k} \cong \mathbb{H}(2^{p+4k})\,, \qquad \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,p-3+8k} \cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,p-4+8k} \cong \mathbb{H}(2^{p-3+4k})\,,$$

$$\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,p+2+8k} \cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,p+1+8k} \cong \mathbb{C}(2^{p+4k})\,, \qquad \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,p-2+8k} \cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,p-3+8k} \cong \mathbb{C}(2^{p-1+4k})\,,$$

$$\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,p+8k} \cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,p-1+8k} \cong \mathbb{R}(2^{p+4k}) \oplus \mathbb{R}(2^{p+4k})\,, \qquad \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,p+4+8k} \cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,p+3+8k} \cong \mathbb{H}(2^{p+4k}) \oplus \mathbb{H}(2^{p+4k})\,,$$

odczytane wprost z (dowodu) Tw. 11-12.5 po przywołaniu tezy Stw. 11-12.3. Wobec powyższego pozostaje upewnić się, że ograniczenie nieprzywiedlnych reprezentacji odnośnych (prostych) algebr macierzowych do zawartych w nich w sposób właściwy grup Spin nie prowadzi do pojawienia się podprzestrzeni niezmienniczych względem obrazu ograniczenia w grupie liniowej przestrzeni reprezentacji w obrębie tychże przestrzeni, a ponadto – że w przypadku, gdy odnośne parzyste podalgebry Clifforda są półproste, ich nierównoważne reprezentacje pozostają nierównoważnymi po ograniczeniu ich do grup Spin. Oba te fakty wynikają jednak wprost z tego, że $\mathrm{Spin}_{\mathbb{R}}(p,q)$ zawiera addytywną bazę $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q}$, a określenie reprezentacji na takowej bazie w pełni charakteryzuje tę reprezentację, oto bowiem równoważność dwóch reprezentacji (ograniczonych) ewaluowanych na bazie addytywnej implikowałaby ich równoważność w ogólności, a do tego niezmienniczość S względem reprezentacji ograniczonej do podstruktury zawierającej ową bazę implikowałaby bezpośrednio jej niezmienniczość względem reprezentacji sprzed ograniczenia. Rozkłady reprezentacji nieprzywiedlnej algebry Clifforda na sumę prostą wzajem nierównoważnych reprezentacji spinorowych w przypadkach $q - p = 0 \mod 4$ jest bezpośrednią konsekwencją Stw. 13-14.12, które zarazem przynosi uzasadnienie użycia określenia „chiralny" w odniesieniu do spinorów.

Na koniec zajmiemy się niezależnością wyniku opisanej indukcji reprezentacji grupy $\mathrm{Spin}_{\mathbb{R}}(p,q)$ od wyboru nieprzywiedlnej reprezentacji algebry półprostej $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}$. Oznaczmy jako

$$\iota_3^\pm \;:\; \mathrm{Cl}^\pm_{p,p+3+8k} \xrightarrow{\cong} \mathbb{H}(2^{p+4k})\,, \qquad \iota_7^\pm \;:\; \mathrm{Cl}^\pm_{p,p-1+8k} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}(2^{p+4k})$$

izomorfizmy (11-12.8), po czym zauważmy, że w świetle Równ. (11-12.7) zachodzi tożsamość

$$\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q} = \left\{\; \gamma_+ + J_{\mathbb{R}^{p+q}}(\gamma_+) \quad | \quad \gamma_+ \in \mathrm{Cl}^+_{p,q} \;\right\},$$

a ponieważ na mocy Stw. 11-12.2 $J_{\mathbb{R}^{p+q}}$ jest izomorfizmem między algebrą $\mathrm{Cl}^+_{p,q}$ i $\mathrm{Cl}^-_{p,q}$, przeto reprezentacje

$$\rho_{\rm def} \circ \iota_3^- \circ J_{\mathbb{R}^{p+q}} \ : \ \mathrm{Cl}^+_{p,p+3+8k} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^{2^{p+4k}})$$

oraz

$$\rho_{\rm def} \circ \iota_7^- \circ J_{\mathbb{R}^{p+q}} \ : \ \mathrm{Cl}^+_{p,p-1+8k} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2^{p+4k}})$$

są nieprzywiedlne (wszak $\iota_k^- \circ J_{\mathbb{R}^{p+q}}$ są izomorfizmami $\mathbb{R}$-algebr), a zatem – wobec prostoty $\mathrm{Cl}^+_{p,q}$ – nieodzownie

$$\rho_{\rm def} \circ \iota_k^- \circ J_{\mathbb{R}^{p+q}} \sim \rho_{\rm def} \circ \iota_k^+, \quad k \in \{3, 7\},$$

mimo więc relację $\rho_+ \not\sim \rho_-$, orzeczoną w Stw. 13-14.11 (i), *w organiczeniu do* $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q}$ stwierdzamy istnienie splataczy $\chi_3 \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^{2^{p+4k}})$ oraz $\chi_7 \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2^{p+4k}})$ spełniających warunki

$$\rho_-\big(\gamma_+ + J_{\mathbb{R}^{p+q}}(\gamma_+)\big) = \rho_{\rm def} \circ \iota_k^- \circ J_{\mathbb{R}^{p+q}}(\gamma_+) = \chi_k \circ \rho_{\rm def} \circ \iota_k^+(\gamma_+) \circ \chi_k^{-1} \equiv \chi_k \circ \rho_+\big(\gamma_+ + J_{\mathbb{R}^{p+q}}(\gamma_+)\big) \circ \chi_k^{-1},$$

czyli

$$\rho_- \restriction_{\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q}} \sim \rho_+ \restriction_{\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q}} .$$

□

Twierdzenie 3 (Klasyfikacyjne dla reprezentacji spinorowych $/\mathbb{C}$)**.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj

$$\rho \ : \ \mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_n \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S)$$

będzie (nietrywialną zespoloną) reprezentacją nieprzywiedlną. Reprezentacja spinorowa

$$\rho\restriction_{\mathrm{Spin}_{\mathbb{C}}(n)} \ : \ \mathrm{Spin}_{\mathbb{C}}(n) \longrightarrow \mathrm{GL}(S; \mathbb{C})$$

przyjmuje – w zależności od $n \in \mathbb{N}$ – następującą postać

- dla $n \in 2\mathbb{N} + 1$: nieprzywiedlna zespolona na $S = \mathbb{C}^{2^{\frac{n-1}{2}}}$ (**spinory Pauliego**);
- dla $n \in 2\mathbb{N}$: przywiedlna zespolona na $S = S_+ \oplus S_-$ ((**bi**)**spinory Diraca**) rozkładalna na dwie wzajem nierównoważne nieprzywiedlne zespolone reprezentacje na $S_\pm = \mathbb{C}^{2^{\frac{n}{2}-1}}$ (**chiralne spinory Weyla**).

Przy tym w przypadku $n \in 2\mathbb{N} + 1$ wynik powyższej indukcji reprezentacji grupy Spin nie zależy od wyboru nieprzywiedlnej reprezentacji algebry półprostej $\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_n$.

Dowód: W pełni analogiczny do dowodu Tw. 2. □

Jest całkowicie jasnym, że przedstawiona tu dyskusja reprezentacji spinorowych stanowi ledwie wprowadzenie do teorii reprezentacji grupy Spin, przynoszącej – m.in. – odpowiedź na pytanie o kompletną klasyfikację *wszystkich* nierównoważnych nieprzywiedlnych jej reprezentacji oraz pierścienia tychże reprezentacji. Szczegółowe studium struktury tego ostatniego, które z racji fundamentalnej roli, jaką nieprzywiedlne reprezentacje grupy Spin odgrywają w modelowaniu pól fizycznych, powinno być przedmiotem każdego umotywowanego fizykalnie wykładu z teorii grup i algebr (Liego), pozwala wyróżnić reprezentację spinorową jako jego elementarny generator. Doskonałym źródłem intuicji i podstawowych konstrukcji w tym zakresie jest monografia Cartana [Car38a, Car38b].

3. Spinory czyste i flagi zerowe – studium przypadków

Konstrukcje algebraiczne napotykane w kategorii przestrzeni kwadratowych mają zazwyczaj naturalną i czytelną interpretację geometryczną, która zasadza się na intuicji dotyczącej pojęć „długości wektora", „kąta między wektorami", „obrotu wektora" i „odbicia wektora w hiperpłaszczyźnie". Idąc tym tropem, więc – na obecnym czysto algebraicznym etapie[2] naszych rozważań – nieco może arbitralnie wyposażając nośnik struktury przestrzeni kwadratowej w atrybut „geometryczności" (którego odmawiamy nośnikowi struktury reprezentacji odnośnej grupy Spin), możemy zadać pytanie o geometryczny aspekt konstrukcji spinora, rozumianego jako wektor z przestrzeni reprezentacji grupy Spin nakrywającej grupę obrotów przestrzeni kwadratowej. Pięknej w swej naturalności i prostocie odpowiedzi na tak postawione pytanie (choć nie wyczerpującej denotatu, a to z racji istnienia spinorów nie-czystych (*sic*!)) udzielił É. Cartan we wspominanej już wcześniej monografii [Car38a, Car38b] poświęconej spinorom. Odpowiedź tę doskonale uzupełnia konstrukcja R. Penrose'a przedstawiona w trakcie konferencji Battelle Rencontres, a spisana w [Pen68].

3.1. **Spinor czysty Cartana.** Na obecnym etapie mamy z jednej strony przestrzeń kawadratową (V,Q), zanurzoną w odnośnej algebrze Clifforda $\mathrm{Cliff}(V,Q)$, w której emulujemy izometrie za pośrednictwem grupy $\mathrm{Spin}(V,Q) \subset \mathrm{Cliff}(V,Q)$, a z drugiej – przestrzeń S reprezentacji spinorowej tej ostatniej, całkowicie niezależną *a priori* od V. Okazuje się, że w pewnych szczególnych okolicznościach można wprost „zrealizować" niezerowe wektory izotropowe z V w nośniku reprezentacji S i stowarzyszyć z nimi spinory. Taka jest idea konstrukcji Cartana, którą przedstawiamy poniżej. Całkowicie ogólna i szczegółowa jej analiza wykracza poza ramy niniejszego kursu, jednakowoż jej znaczenie w budowaniu konkretnej geometrycznej konotacji dla abstrakcyjnego pojęcia spinora stanowi dostateczną motywację choćby tylko dla wnikliwego prześledzenia tej konstrukcji na wybranym przykładzie, co czynimy poniżej. Konstrukcja ta jest zorganizowana wokół

Definicja 7. Przyjmijmy zapis Def. 1 i 6. **Spinor czysty** to wektor z przestrzeni reprezentacji spinorowej grupy $\mathrm{Spin}(V,Q)$ anihilowany przez obraz $\jmath_V^{\mathbb{C}}(W) \subset \mathrm{Cliff}(V,Q)$ dowolnej maksymalnej podprzestrzeni Q-zerowej $W \subset V$.

Przechodząc do konkretnej realizacji, rozważmy przestrzeń kwadratową $\mathbb{R}^{1,2}$, dla której $\mathrm{Cl}_{1,2}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C}(2) \equiv \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{\times 2})$, a skoro tak to $\rho_{\mathrm{s}} : \mathrm{Spin}(\mathbb{R}^{1,2}) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{\times 2})$, co pozwala traktować wektory z $\mathbb{C}^{\times 2}$ jako pinory $\mathbb{R}^{1,2}$ ($\mathrm{Pin}(\mathbb{R}^{1,2})$ zawiera addytywną bazę algebry Clifforda $\mathbb{C}(2)$). Wśród nich są spinory, odzworowywane w siebie nawzajem przez $\mathrm{Spin}(\mathbb{R}^{1,2}) \subset \mathrm{Pin}(\mathbb{R}^{1,2})$. Poszukamy ich w obrazie

$$I_{1,2}^{\times} := \delta_{\mathrm{E}}^{(1,2)\,-1}\big(\{0\}\big) \smallsetminus \{0\}$$

w $\mathbb{C}^{\times}$, który skonstruujemy w następnym kroku. Oto więc rozważmy wektory

$$v \equiv (t,x,y) \in \mathbb{R}^{1,2} \smallsetminus \{(0,0,0)\}$$

o „normie"

$$\delta_{\mathrm{E}}^{(1,2)}(v) = t^2 - x^2 - y^2 \,.$$

Ilekroć v jest izotropowy,

$$\delta_{\mathrm{E}}^{(1,2)}(v) = 0 \,,$$

możemy – wobec warunku $t \neq 0$ (którego niespełnienie implikowałoby równość $v = (0,0,0)$) – „wyciągnąć pierwiastek kwadratowy" z wektora v wprowadzając wektor

$$\xi \equiv \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

[2]Po przejściu do geometryzacji struktur algebraicznych dostrzeżemy zasadność takiego rozróżnienia ontologicznego, a to z tej racji, że struktura przestrzeni kwadratowej będzie pochodzić ze zmetryzowanej wiązki stycznej nad rozmaitością, gdy tymczasem nośnik reprezentacji będzie „ledwie" modelem przestrzeni wewnętrznych stopni swobody pola spinorowego.

o składowych zadanych formułami

$$\xi_1^2 = \tfrac{1}{2}\,(x,y)\,, \qquad\qquad \xi_2^2 = -\tfrac{1}{2}\,(x,-y)\,,$$

spełniających po uwzględnieniu warunku izotropowości v układ warunków

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_1^2 - \xi_2^2 = x \\ \xi_1^2 + \xi_2^2 = \mathrm{i}y \\ 2\xi_1\xi_2 = \mathrm{i}t \end{array}\right. . \tag{5}$$

Istotnie, otrzymujemy wówczas tożsamość

$$t^2 - x^2 - y^2 = -4\xi_1^2\xi_2^2 - (\xi_1^2 - \xi_2^2)^2 + (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 = 0\,.$$

Rozwiązanie ogólne powyższego układu ma postać

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+\mathrm{i}y}{2}} \\ \varepsilon_2 \sqrt{\frac{-x+\mathrm{i}y}{2}} \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}\,,$$

przy czym wybieramy wspólną dla obu składowych gałąź funkcji $\sqrt{\cdot}$, dla której $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$. Znaki $\varepsilon_\alpha,\ \alpha \in \{1,2\}$ związane są warunkiem

$$\mathrm{sign}(t)|t| \equiv t = -2\mathrm{i}\xi_1\xi_2 = -\mathrm{i}\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{-x^2-y^2} = \varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{t^2} = \varepsilon_1\varepsilon_2|t|\,,$$

z którego wyprowadzamy relację

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \cdot \mathrm{sign}(t)\,.$$

Ta pozwala ostatecznie zapisać rozwiązanie

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{x+\mathrm{i}y}{2}} \\ \mathrm{sign}(t)\sqrt{\frac{-x+\mathrm{i}y}{2}} \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon \in \{-1, 1\}\,, \tag{6}$$

czyli – jeśli wprowadzić pomocniczą notację zespoloną $z \equiv x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, w której $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$ –

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{z}{2}} \\ \mathrm{sign}(t)\,\mathrm{i}\sqrt{\frac{\overline{z}}{2}} \end{pmatrix} =: \xi(v)\,, \qquad \varepsilon \in \{-1, 1\}\,.$$

Zauważmy, że znak ε nie może być ustalony w sposób niesamosprzeczny jednocześnie dla *wszystkich* wektorów izotropowych, oto bowiem przy obrocie o kąt φ w płaszczyźnie $\{\ (0,x,y) \ \ | \ \ x,y \in \mathbb{R}\ \}$ (zachowującym zbiór wektorów izotropowych), przy którym składowe wektora v transformują się wedle formuł

$$v \equiv (t, z) \longmapsto (t, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \cdot_{\mathbb{C}} z) =: R_\varphi(v)\,,$$

składowe spinora podlegają transformacji

$$\xi(v) \longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \xi(v) \equiv \xi\big(R_\varphi(v)\big)\,.$$

W szczególności pod wpływem pełnego obrotu, $\varphi = 2\pi$, następuje odbicie

$$\xi(v) \longmapsto \lim_{\varphi \to 2\pi} \xi\big(R_\varphi(v)\big) = -\xi(v)\,.$$

Mamy przeto nieusuwalną niejednoznaczność

$$I_{1,2}^\times \ni v \longmapsto \pm\xi(v) \in \mathbb{C}^{\times 2}\,,$$

przy czym odwzorowanie ξ określa injekcję $I_{1,2}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^{\times 2}/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Jak scharakteryzować algebraicznie jego obraz?

Podane przez nas rozwiązanie problemu „wyciągnięcia pierwiastka kwadratowego z wektora" ma swoją zgrabną (i w pełni równoważną z powyższą) realizację macierzową, do której omówienia przejdziemy obecnie. Oto więc z wektorem v stowarzyszamy w sposób $\mathbb{R}$-liniowy macierz

$$\gamma(v) := \begin{pmatrix} t & \mathrm{i}z \\ \mathrm{i}\overline{z} & -t \end{pmatrix} \equiv t \triangleright \gamma(e_0) + x \triangleright \gamma(e_1) + y \triangleright \gamma(e_2)\,,$$

używając przy tej okazji trójki macierzy

$$\gamma(e_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

odpowiadających wektorom bazy standardowej. Zauważmy, że spełnione są tożsamości

$$\begin{aligned} \gamma(e_0)^2 &= \mathbf{1}_2 \equiv \delta_{\mathrm{E}}^{(1,2)}(e_0) \triangleright \mathbf{1}_2 , \\ \gamma(e_1)^2 &= -\mathbf{1}_2 \equiv \delta_{\mathrm{E}}^{(1,2)}(e_1) \triangleright \mathbf{1}_2 , \\ \gamma(e_2)^2 &= -\mathbf{1}_2 \equiv \delta_{\mathrm{E}}^{(1,2)}(e_2) \triangleright \mathbf{1}_2 \end{aligned}$$

oraz

$$\{\gamma(e_0), \gamma(e_1)\} = \mathbf{0}_2 , \qquad \{\gamma(e_0), \gamma(e_2)\} = \mathbf{0}_2 , \qquad \{\gamma(e_1), \gamma(e_2)\} = \mathbf{0}_2 ,$$

czyli w sumie – dla dowolnych wektorów $v_\alpha = v_\alpha^\mu \triangleright e_\mu \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \{1,2\}$ –

$$\{\gamma(v_1), \gamma(v_2)\} = v_1^\mu v_2^\nu \{\gamma(e_\mu), \gamma(e_\nu)\} = \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(1,2)}}(v_1, v_2) \triangleright \mathbf{1}_2 . \tag{7}$$

Stwierdzamy zatem, że γ jest kanonicznym odwzorowaniem Clifforda

$$\gamma \;:\; \mathbb{R}^{1,2} \longrightarrow \mathbb{C}(2) \cong \mathrm{Cl}_{1,2}^{\mathbb{R}} , \tag{8}$$

a do tego spełnia warunek strukturalny

$$\det{}_{(2)} \gamma = -\delta_{\mathrm{E}}^{(1,2)} .$$

Rozważmy następnie wektor $\xi(v) \in \mathbb{C}^2$ przyporządkowany – według opisanego schematu – wektorowi izotropowemu $v \in I_{1,2}^\times$ oraz macierz $\gamma(v)$ stowarzyszoną z tym ostatnim. Jak wynika wprost z konstrukcji, zachodzi równość

$$\gamma(v) \odot \xi(v) \equiv \begin{pmatrix} -2\mathrm{i}\xi_1\xi_2 & 2\mathrm{i}\xi_1^2 \\ -2\mathrm{i}\xi_2^2 & 2\mathrm{i}\xi_1\xi_2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

a ponieważ $\operatorname{Ker}\gamma(v) \neq \mathbb{C}^2$ (wszak $\gamma(v) \neq 0$), przeto dla ustalonego (dowolnie) izotropowego wektora $v \in \mathbb{R}^{1,2}$ równość

$$\gamma(v) \odot \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

wyznacza (kierunek) $\xi \in \mathbb{C}^2$. Istotnie, wobec równości

$$\det{}_{(2)} \gamma(v) = -\delta_{\mathrm{E}}^{(1,2)}(v) = 0$$

mamy nierówność

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker}\gamma(v) > 0 ,$$

a zarazem – jeśli tylko $v \neq (0,0,0)$ – prawdziwą jest też nierówność

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker}\gamma(v) < 2 ,$$

których koniunkcja daje nam pożądany wynik:

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker}\gamma(v) = 1 .$$

Przywoławszy Def. 7, domniemywamy, że powyższy $\xi \in \operatorname{Ker}\gamma(v) \setminus \{0_{\mathbb{C}^{\times 2}}\}$ jest spinorem czystym stowarzyszonym z maksymalną podprzestrzenią $\delta_{\mathrm{E}}^{(1,2)}$-zerową $\langle v \rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^{1,2}$ – istotnie, $\{\, \gamma(v) \;\;|\;\; v \in I_{1,2}^\times \,\}$ jest jej wiernym obrazem w $\mathrm{Cl}_{1,2}^{\mathbb{R}}$. Ażeby potwierdzić to przypuszczenie, musimy jeszcze przekonać się, że wektory tej postaci rozpinają przestrzeń reprezentacji grupy $\mathrm{Spin}_{\mathbb{R}}(1,2)$, czyli że działanie tej grupy nie wyprowadza nas poza zbiór wektorów w $\mathbb{C}^{\times 2}$ rozważanej postaci. W tym celu rozpatrzymy transformacje macierzy $\gamma(v)$ indukowane przez standardowe działanie grupy $\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)$ na (dowolnym) wektorze v za pośrednictwem odwzorowania (8). W świetle Tw. 4

wystarczy zbadać zachowanie tejże macierzy pod wpływem złożenia dwóch odbić v w płaszczyznach $\delta_{\rm E}^{(1,2)}$-ortogonalnych do dwóch wektorów nieizotropowych. Obliczamy zatem – dla dowolnego $\mu \in \{0,1,2\}$ –

$$\begin{aligned}\gamma\big(\mathsf{P}_{e_\mu}(v)\big) &= \gamma\big(v - 2\delta_{\rm E}^{(1,2)}(e_{\overline{\mu}})^{-1}\cdot\Phi_{\delta_{\rm E}^{(1,2)}}(v,e_{\overline{\mu}})\triangleright e_{\overline{\mu}}\big) = \gamma(v) - 2\delta_{\rm E}^{(1,2)}(e_{\overline{\mu}})^{-1}\cdot\Phi_{\delta_{\rm E}^{(1,2)}}(v,e_{\overline{\mu}})\triangleright\gamma(e_{\overline{\mu}})\\ &= \gamma(v) - \delta_{\rm E}^{(1,2)}(e_{\overline{\mu}})^{-1}\triangleright\{\gamma(v),\gamma(e_{\overline{\mu}})\}\odot\gamma(e_{\overline{\mu}})\\ &\equiv \gamma(v) - \delta_{\rm E}^{(1,2)}(e_{\overline{\mu}})^{-1}\triangleright\big(\gamma(v)\odot\gamma(e_{\overline{\mu}})\odot\gamma(e_{\overline{\mu}}) + \gamma(e_{\overline{\mu}})\odot\gamma(v)\odot\gamma(e_{\overline{\mu}})\big)\\ &= \gamma(v) - \delta_{\rm E}^{(1,2)}(e_{\overline{\mu}})^{-1}\triangleright\big(\delta_{\rm E}^{(1,2)}(e_{\overline{\mu}})\triangleright\gamma(v) + \gamma(e_{\overline{\mu}})\odot\gamma(v)\odot\gamma(e_{\overline{\mu}})\big)\\ &= -\delta_{\rm E}^{(1,2)}(e_{\overline{\mu}})^{-1}\triangleright\gamma(e_{\overline{\mu}})\odot\gamma(v)\odot\gamma(e_{\overline{\mu}}) \equiv -{\rm Ad}_{\gamma(e_{\overline{\mu}})}\big(\gamma(v)\big) \equiv \widetilde{\rm Ad}_{\gamma(e_{\overline{\mu}})}\big(\gamma(v)\big)\end{aligned}$$

i na tej podstawie

$$\gamma\big(\mathsf{P}_{e_\mu}\circ\mathsf{P}_{e_\nu}(v)\big) = {\rm Ad}_{\gamma(e_\mu)\odot\gamma(e_\nu)}\big(\gamma(v)\big)$$

($\mathsf{P}_{e_\mu}\circ\mathsf{P}_{e_\nu}\in{\rm O}_{\mathbb{R}}(1,2)$, zatem $\mathsf{P}_{e_\mu}\circ\mathsf{P}_{e_\nu}(v)\in I^\times_{1,2}$, ilekroć $v\in I^\times_{1,2}$, więc zapis powyższy ma sens), co oznacza, że dla dowolnego $\xi\equiv\xi(v)\in{\rm Ker}\,\gamma(v)$ jak wyżej jest

$$\gamma(e_\mu)\odot\gamma(e_\nu)\,\xi(v)\in{\rm Ker}\left({\rm Ad}_{\gamma(e_\mu)\odot\gamma(e_\nu)}\big(\gamma(v)\big)\right)\equiv{\rm Ker}\,\gamma\big(\mathsf{P}_{e_\mu}\circ\mathsf{P}_{e_\nu}(v)\big)\,,$$

tj. ${\rm Spin}_{\mathbb{R}}(1,2)$-przetransformowany ξ-obraz wektora jest wyróżnionej przez nas postaci.

Uwzględniając równość (9) definiującą kierunek $\xi(v)$, postulujemy

$$\xi\big(\mathsf{P}_{e_\mu}(v)\big) = \lambda(\mathsf{P}_{e_{\overline{\mu}}})\triangleright\gamma(e_{\overline{\mu}})\odot\xi(v) \tag{10}$$

dla pewnego przyporządkowania

$$\lambda\ :\ \{\mathsf{P}_{e_0},\mathsf{P}_{e_1},\mathsf{P}_{e_2}\}\longrightarrow\mathbb{C}^\times/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

(rozumianego – w oczywisty sposób – jako odzwierciedlenie nieusuwalnej niejednoznaczności znaku spinora). Postulat sprawdzamy w bezpośrednim rachunku:

$$\begin{aligned}&\gamma\big(\mathsf{P}_{e_{\overline{\mu}}}(v)\big)\odot\big(\lambda(\mathsf{P}_{e_{\overline{\mu}}})\triangleright\gamma(e_{\overline{\mu}})\odot\xi(v)\big) = -\lambda(\mathsf{P}_{e_{\overline{\mu}}})\triangleright{\rm Ad}_{\gamma(e_{\overline{\mu}})}\big(\gamma(v)\big)\odot\gamma(e_{\overline{\mu}})\odot\xi(v)\\ &= -\lambda(\mathsf{P}_{e_{\overline{\mu}}})\triangleright\gamma(e_{\overline{\mu}})\odot\gamma(v)\odot\xi(v) = -\lambda(\mathsf{P}_{e_{\overline{\mu}}})\triangleright\gamma(e_{\overline{\mu}})\odot\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

z którego – zgodnie z oczekiwaniem – wynika

$$\forall_{v\in\delta_{\rm E}^{(1,2)\,-1}(\{0\})}\ \forall_{\xi\in{\rm Ker}\,\gamma(v)}\ :\ \lambda(\mathsf{P}_{e_{\overline{\mu}}})\triangleright\gamma(e_{\overline{\mu}})\odot\xi(v)\in{\rm Ker}\,\gamma\big(\mathsf{P}_{e_{\overline{\mu}}}(v)\big)\,,$$

a ponieważ, jak uzasadniliśmy wcześniej,

$$\dim_{\mathbb{C}}{\rm Ker}\,\gamma\big(\mathsf{P}_{e_{\overline{\mu}}}(v)\big) = 1\,,$$

przeto poszukiwane skalary $\lambda(\mathsf{P}_{e_{\overline{\mu}}})$ istnieją. Naturalnym wydaje się przy tym pytanie, czy przyporządkowanie λ rozszerza się do homomorfizmu grup

$$\widetilde{\lambda}\ :\ {\rm O}_{\mathbb{R}}(1,2)\longrightarrow\mathbb{C}^\times/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

ciągłego względem standardowej topologii na grupie Liego ${\rm O}_{\mathbb{R}}(1,2)$, dziedziczonej z ${\rm GL}_{\mathbb{R}}(3)\subset\mathbb{R}(3)\cong\mathbb{R}^{\times 9}$. Przypomnijmy: grupa ta ma cztery spójne składowe: podgrupę ${\rm SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+\equiv\langle\mathsf{P}_{e_1}\circ\mathsf{P}_{e_2}\rangle$ odwzorowań zachowujących kierunek czasu e_0 oraz orientację w przestrzeni $\langle e_1,e_2\rangle_{\mathbb{R}}$ (tzw. **ortochroniczną specjalną grupę Lorentza**) oraz jej translaty $\mathsf{P}_{e_0}^{n_0}\cdot\mathsf{P}_{e_1}^{n_1}\cdot{\rm SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+$, $(n_0,n_1)\in\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$, tj.

$${\rm O}_{\mathbb{R}}(1,2) = {\rm SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+\sqcup\mathsf{P}_{e_0}\cdot{\rm SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+\sqcup\mathsf{P}_{e_1}\cdot{\rm SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+\sqcup\mathsf{P}_{e_0}\cdot\mathsf{P}_{e_1}\cdot{\rm SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+\,.$$

Na tym etapie możemy przywołać tożsamość

$$\mathsf{P}_{e_{\overline{\mu}}}\circ\mathsf{P}_{e_{\overline{\mu}}} = {\rm id}_{\mathbb{R}^{1,2}}\,, \tag{11}$$

aby wyznaczyć

$$\xi(v) = \xi\big(\mathsf{P}_{e_{\overline{\mu}}}\circ\mathsf{P}_{e_{\overline{\mu}}}(v)\big) = \lambda(\mathsf{P}_{e_{\overline{\mu}}})^2\triangleright\gamma(e_{\overline{\mu}})\odot\gamma(e_{\overline{\mu}})\odot\xi(v) = \lambda(\mathsf{P}_{e_{\overline{\mu}}})^2\cdot\delta_{\rm E}^{(1,2)}(e_{\overline{\mu}})\triangleright\xi(v)\,.$$

Zważywszy nieusuwalną $\mathbb{Z}_2$-niejednoznaczność w formule (6), wywodzimy stąd warunek

$$\lambda^2 \in \{-1, 1\}\,.$$

Przyjęte wcześniej założenie o ciągłym charakterze poszukiwanego rozszerzenia $\widetilde{\lambda}$ implikuje stałość tego ostatniego na każdej z czterech spójnych składowych $\mathrm{O}_{\mathbb{R}}(1,2)$. Ażeby wyznaczyć $\widetilde{\lambda}$ dla poszczególnych składowych, wystarczy zbadać warunek (10) w bezpośrednim odwołaniu do relacji (5). Na podstawie oczywistych równości

$$\gamma(e_0) \odot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ -\xi_2 \end{pmatrix} =: \xi^{(0)}\,,$$

$$\gamma(e_1) \odot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{i}\,\xi_2 \\ \mathsf{i}\,\xi_1 \end{pmatrix} =: \xi^{(1)}\,, \qquad \gamma(e_2) \odot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix} =: \xi^{(2)}\,,$$

z których wyprowadzamy reguły transformacyjne

$$(t,x,y) \overset{\xi\mapsto\xi^{(0)}}{\longmapsto} (-t,x,y) \equiv \mathsf{P}_{e_0}(t,x,y)\,,$$

$$(t,x,y) \overset{\xi\mapsto\xi^{(1)}}{\longmapsto} (-t,x,-y) \equiv -\mathsf{P}_{e_1}(t,x,y)\,,$$

$$(t,x,y) \overset{\xi\mapsto\xi^{(2)}}{\longmapsto} (-t,-x,y) \equiv -\mathsf{P}_{e_2}(t,x,y)\,,$$

stwierdzamy, że

$$\lambda(\mathsf{P}_{e_0}) = 1 = -\lambda(\mathsf{P}_{e_1}) = -\lambda(\mathsf{P}_{e_2})\,,$$

a stąd już wprost wyprowadzamy

$$\widetilde{\lambda}\restriction_{\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+} = 1 = \widetilde{\lambda}\restriction_{\mathsf{P}_{e_0}\cdot\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+}\,, \qquad \widetilde{\lambda}\restriction_{\mathsf{P}_{e_1}\cdot\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+} = -1 = \widetilde{\lambda}\restriction_{\mathsf{P}_{e_0}\cdot\mathsf{P}_{e_1}\cdot\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+}\,,$$

przy czym zamiast e_1 moglibyśmy z jednakim skutkiem użyć e_2, co niezależnie potwierdza sensowność przyjętego przyporządkowania. Takie przypisanie wartości generatorom grupy $\mathrm{O}_{\mathbb{R}}(1,2)$ jest spójne z poczynionym przez nas na wstępie założeniem o homomorficznym charakterze $\widetilde{\lambda}$, oto bowiem dla dowolnych par $(m_0,m_1),(n_0,n_1) \in \{0,1\}^{\times 2}$ z jednej strony zachodzą relacje algebraiczne (wynikające wprost z relacji przemienności $[\mathsf{P}_{e_\mu}, \mathsf{P}_{e_\nu}] = 0$ w połączeniu z tożsamością (11))

$$\mathsf{P}_{e_0}^{m_0} \cdot \mathsf{P}_{e_1}^{m_1} \cdot \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+ \cdot \mathsf{P}_{e_0}^{n_0} \cdot \mathsf{P}_{e_1}^{n_1} \cdot \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+ \subset \mathsf{P}_{e_0}^{m_0+n_0} \cdot \mathsf{P}_{e_1}^{m_1+n_1} \cdot \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+\,,$$

z drugiej zaś – homomorficzność $\widetilde{\lambda}$ wymaga

$$\begin{aligned} &\widetilde{\lambda}\restriction_{\mathsf{P}_{e_0}^{m_0}\cdot\mathsf{P}_{e_1}^{m_1}\cdot\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+\cdot\mathsf{P}_{e_0}^{n_0}\cdot\mathsf{P}_{e_1}^{n_1}\cdot\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+} = \widetilde{\lambda}\restriction_{\mathsf{P}_{e_0}^{m_0}\cdot\mathsf{P}_{e_1}^{m_1}\cdot\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+} \cdot \widetilde{\lambda}\restriction_{\mathsf{P}_{e_0}^{n_0}\cdot\mathsf{P}_{e_1}^{n_1}\cdot\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+} \\ = \;& (-1)^{m_1} \cdot (-1)^{n_1} = (-1)^{m_1+n_1} \equiv \widetilde{\lambda}\restriction_{\mathsf{P}_{e_0}^{m_0+n_0}\cdot\mathsf{P}_{e_1}^{m_1+n_1}\cdot\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+}\,. \end{aligned}$$

Na zakończenie zauważmy, że transformacje $\xi(v) \longmapsto \pm\gamma(e_\mu) \odot \xi(v)$, indukowane przez odbicia $\mathsf{P}_{\pm e_\mu}$, są nierozróżnialne na poziomie wektorowym, oto bowiem

$$\begin{aligned} \gamma\big(\mathsf{P}_{-e_\mu}(v)\big) &= \gamma\big(v - 2\delta_{\mathrm{E}}^{(1,2)}(-e_{\overline{\mu}})^{-1} \cdot \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(1,2)}}(v, -e_{\overline{\mu}}) \triangleright (-e_{\overline{\mu}})\big) \\ &= \gamma\big(v - 2\delta_{\mathrm{E}}^{(1,2)}(e_{\overline{\mu}})^{-1} \cdot \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(1,2)}}(v, e_{\overline{\mu}}) \triangleright e_{\overline{\mu}}\big) \equiv \gamma\big(\mathsf{P}_{e_\mu}(v)\big)\,. \end{aligned}$$

To samo dotyczy każdej innej pary odwzorowań indukowanych przez transformacje ortogonalne w $\mathbb{R}^{1,2}$, a różniących się o znak. Fakt ten stanowi jawne odzwierciedlenie istnienia obu krótkich ciągów dokładnych grup, o których mówi Tw. 1.

W podsumowaniu naszego studium możemy skonstatować, że oto naturalną geometryzacją algebraicznej konstrukcji spinora (czystego) w sygnaturze $(1,2)$ (będącego spinorem wśród pinorów $\mathbb{C}^{\times 2}$) jest wektor izotropowy, który jednoznacznie reprezentuje klasę spinora w $\mathbb{C}^{\times 2}/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ względem relacji $\xi \sim -\xi$.

3.2. **Flaga zerowa Penrose'a.** Zagadnienie do samodzielnego opracowania. Kto pierwszy?

4. Fizyczne (krypto-prohilbertowskie) realizacje spinorów

Dotychczasowe nasze rozważania były prowadzone spójnie z prostym obrazkiem *matematycznym*, w którym pinory to elementy przestrzeni reprezentacji nieprzywiedlnej grupy $\mathrm{Pin}(V,Q)$, spinory zaś – elementy przestrzeni reprezentacji nieprzywiedlnej grupy $\mathrm{Spin}(V,Q)$ (patrz chociażby: [Har90]). W szczególności spinory skrętne – tak nad $\mathbb{R}$, jak nad $\mathbb{C}$ – pojawiają się naturalnie w rozkładzie przestrzeni pinorów, które określiliśmy uprzednio tradycyjnym mianem (bi)spinorów Diraca. W tej sytuacji znajduje odzwierciedlenie ogólniejsza zasada: Spinory możemy indukować z pinorów poprzez ograniczenie do przestrzeni niezmienniczej względem działania parzystej podalgebry odnośnej algebry Clifforda.

Fizycy mają oczywistą namiętność do kategorii $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ i, konsekwentnie, zespolonych reprezentacji rozważanych algebr. Z tego to powodu najczęściej rozpatrują odmienny od beznamiętnego (a logicznie czystszego) matematycznego schemat konstrukcji reprezentacji grupy[3] $\mathrm{Spin}(\mathbb{R}^{p,q})$, który przedstawiamy poniżej (zasadniczo) za [BT88]. Punktem wyjścia jest przywołanie funktora kompleksyfikacji z Tw. 11-12.6:

$$\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \longmapsto \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathrm{Cliff}\big(\mathbb{R}^{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\big) \equiv \mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_{p+q}\,,$$

który pozwala nam utożsamić rzeczywistą algebrę Clifforda $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}$ z jej wiernym obrazem $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)$ w modelu $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ zespolonej algebry Clifforda $\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_{p+q}$ i, w zgodzie z tym utożsamieniem, indukować reprezentacje grup: $\mathrm{Pin}(\mathbb{R}^{p,q}) \subset \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}$ z reprezentacji $\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_{p+q}$ i $\mathrm{Spin}(\mathbb{R}^{p,q}) \subset \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q}$ z reprezentacji $\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}\,0}_{p+q}$. Oczywistym fizykalnym awantażem tej konstrukcji jest jej immanentna zespoloność. W rzeczy samej, reprezentacja zespolona algebry $\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}\,(0)}_{p+q}$ to homomorfizm algebr $\rho : \mathrm{Cl}^{\mathbb{C}\,(0)}_{p+q} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, czyli taki homomorfizm algebr $\rho : \mathrm{Cl}^{\mathbb{C}\,(0)}_{p+q} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$, którego obraz jest w komutancie struktury zespolonej $I \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$. Do tego ostatniego należą w szczególności endomorfizmy realizujące elementy podzbioru[4] $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,(0)}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) \subset \mathrm{Cl}^{\mathbb{C}\,(0)}_{p+q}$. Ponadto ilekroć ρ jest wierna (czyli $\mathrm{Ker}\,\rho = \{0\}$), własność tę ma także

$$\rho_{\mathrm{ind}} \equiv \rho\restriction_{\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,(0)}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)}\,.$$

Analogiczny wniosek dotyczy (nie)przywiedlności: Istotnie, zachowywanie podprzestrzeni $\mathbb{C}$-liniowej $W \subset V$ przez $\rho\big(\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,(0)}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)\big)$ implikuje

$$\rho\big(\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}\,(0)}_{p+q}\big)(W) \equiv \rho\big(\mathbb{C} \triangleright \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,(0)}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)\big)(W) = \mathbb{C} \triangleright \rho\big(\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,(0)}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)\big)(W) \subset \mathbb{C} \triangleright W \equiv W\,.$$

Zyskujemy zatem naturalny mechanizm indukcji zespolonych reprezentacji wiernych i nieprzywiedlnych $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,(0)}_{p,q}$ z takichże reprezentacji $\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}\,(0)}_{p,q}$.

Ażeby móc postąpić dalej w naszych rozważaniach, czyniąc je ilościowymi, wprowadzimy

Definicja 8. Niechaj $\mathfrak{A} \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Alg}_{\mathbb{R}}$ i $V \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$, a nadto niech $\rho : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ będzie reprezentacją zespoloną. **Reprezentacja zespolenie sprzężona (względem** ρ) to reprezentacja

$$\overline{\rho} \;:\; \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\overline{V}\,,$$

określona na przestrzeni $\mathbb{C}$-liniowej $\overline{V} \equiv V$ wyposażonej w działanie

$$\overline{\triangleright} \;:\; \mathbb{C} \times \overline{V} \longrightarrow \overline{V} \;:\; (\lambda, v) \longmapsto \overline{\lambda} \triangleright v \equiv \lambda \overline{\triangleright} v\,,$$

dana wzorem – zapisanym dla dowolnego $a \in \mathfrak{A}$ –

$$\overline{\rho}(a) := \overline{\rho(a)}\,,$$

w którym stosujemy następującą notację: Dowolnemu $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)$ odpowiada $\overline{\chi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\overline{V},\overline{W})$ o własności definiującej $\overline{\chi}(v) = \chi(v)$.

[3] W przypadku grupy $\mathrm{Spin}(\mathbb{C}^n)$ od samego początku wszystko jest w najlepszym porządku.

[4] *Nie* jest to, rzecz jasna, podalgebra nad $\mathbb{C}$, lecz nad $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Przyjąwszy na przyszłość bardziej przejrzysty zapis, w którym element v przestrzeni V z działaniem $\overline{\triangleright}$ jest oznaczany jako $\overline{v}$, powyższą własność zapiszemy jako $\overline{\chi}(\overline{v}) = \overline{\chi(v)}$. Warto zwrócić uwagę, że dowolna baza $\{e_i\}_{i\in\overline{1,D}}$, $D = \dim_{\mathbb{C}} V$ przestrzeni $\mathbb{C}$-liniowej V jest zarazem bazą $\overline{V}$, której wybór pozwala ustalić prostą relację między macierzami χ i $\overline{\chi}$ na podstawie bezpośredniego rachunku:

$$\overline{\chi}_{ij}\overline{\triangleright}\overline{e}_j \equiv \overline{\chi}(\overline{e}_i) \equiv \overline{\chi(e_i)} \equiv \overline{\chi_{ij} \triangleright e_j} = \overline{\chi_{ij}}\overline{\triangleright}\overline{e}_j\,.$$

Ta relacja to relacja sprzężenia zespolonego,

$$[\overline{\chi}]_{\{\overline{e}_i\}_{i\in\overline{1,D}}} = \overline{[\chi]}_{\{e_i\}_{i\in\overline{1,D}}}\,. \tag{12}$$

Jest też – dla dowolnych $\lambda\in\mathbb{C}$ i $v\in V$ –

$$\overline{\lambda\triangleright\chi}(\overline{v}) \equiv \overline{(\lambda\triangleright\chi)(v)} = \overline{\lambda\triangleright\chi(v)} = \overline{\lambda}\overline{\triangleright}\overline{\chi(v)} \equiv \overline{\lambda}\overline{\triangleright}\overline{\chi}(\overline{v})\,,$$

czyli

$$\overline{\lambda\triangleright\chi} = \overline{\lambda}\overline{\triangleright}\overline{\chi}\,. \tag{13}$$

Powyższa definicja pozwala stowarzyszyć z reprezentacją indukowaną $\rho_{\rm ind}$ z danej wiernej reprezentacji nieprzywiedlnej

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \equiv \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}\otimes_{\mathbb{R}}(1,0) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\rho_{\rm ind}"'] & \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_{p+q} \arrow[d, "\rho"] \\
& \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(P)
\end{tikzcd}$$

na przestrzeni $\mathbb{C}$-liniowej (zespolonych pinorów) P *dwie* reprezentacje $\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_{p+q}$: kompleksyfikację jej samej (patrz: Stw. 13-14.2)

$$\rho^{\mathbb{C}}_{\rm ind}\ :\ \big(\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}\otimes_{\mathbb{R}}(1,0)\big)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_{p+q} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(P)$$

oraz kompleksyfikację reprezentacji względem niej zespolenie sprzężonej

$$\overline{\rho_{\rm ind}}^{\mathbb{C}}\ :\ \mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_{p+q} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\overline{P})\,.$$

Pierwsza z nich okazuje się być tożsamą z ρ, oto bowiem dla dowolnych $\gamma^i\in\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}$ i $\lambda_i\in\mathbb{C}$ indeksowanych przez zbiór (skończony) $\overline{1,N}\ni i$ zachodzi

$$\rho^{\mathbb{C}}_{\rm ind}\big(\gamma^i\otimes\lambda_i\big) \equiv \lambda_i\triangleright\rho_{\rm ind}\big(\gamma^i\big) \equiv \lambda_i\triangleright\rho\big(\gamma^i\otimes_{\mathbb{R}}(1,0)\big) = \rho\big(\lambda_i\triangleright\big(\gamma^i\otimes_{\mathbb{R}}(1,0)\big)\big) = \rho\big(\gamma^i\otimes\lambda_i\big)\,,$$

a to z tej racji, że ρ jest homomorfizmem $\mathbb{C}$-algebr. W następnej kolejności przekonujemy się o wierności i nieprzywiedlności $\overline{\rho_{\rm ind}}^{\mathbb{C}}$. W tym celu liczymy, dla γ^i i λ_i jak wyżej a wobec (13) i dopiero co udowodnionej tożsamości,

$$\begin{aligned}
\overline{\rho_{\rm ind}}^{\mathbb{C}}\big(\gamma^i\otimes\lambda_i\big) &= \lambda_i\overline{\triangleright}\overline{\rho_{\rm ind}}\big(\gamma^i\big) \equiv \lambda_i\overline{\triangleright}\overline{\rho_{\rm ind}\big(\gamma^i\big)} \equiv \lambda_i\overline{\triangleright}\overline{\rho\big(\gamma^i\otimes_{\mathbb{R}}(1,0)\big)} = \overline{\overline{\lambda_i}\triangleright\rho\big(\gamma^i\otimes_{\mathbb{R}}(1,0)\big)} \\
&= \overline{\rho\big(\gamma^i\otimes_{\mathbb{R}}\overline{\lambda_i}\big)}
\end{aligned}$$

i na tej podstawie stwierdzamy:

- $\overline{\rho_{\rm ind}}^{\mathbb{C}}(\gamma^i\otimes\lambda_i) = 0 \iff \overline{\rho(\gamma^i\otimes_{\mathbb{R}}\overline{\lambda_i})} = 0 \iff \rho(\gamma^i\otimes_{\mathbb{R}}\overline{\lambda_i}) = 0 \iff \gamma^i\otimes_{\mathbb{R}}\overline{\lambda_i} = 0$ (wobec wierności ρ), ale to $\iff \mathrm{Re}(\lambda_i)\triangleright\gamma^i = 0 = -\mathrm{Im}(\lambda_i)\triangleright\gamma^i \iff \gamma^i\otimes_{\mathbb{R}}\lambda_i = 0$;
- $\overline{\rho_{\rm ind}}^{\mathbb{C}}(\gamma^i\otimes\lambda_i)(\overline{W}) = \overline{\rho\big(\gamma^i\otimes_{\mathbb{R}}\overline{\lambda_i}\big)}(\overline{W}) \equiv \overline{\rho\big(\gamma^i\otimes_{\mathbb{R}}\overline{\lambda_i}\big)(W)} \subset \overline{W} \iff \rho\big(\gamma^i\otimes_{\mathbb{R}}\overline{\lambda_i}\big)(W) \subset W$.

W dalszej części naszych rozważań kładziemy $p+q\in 2\mathbb{N}$ (pozostawiając analogiczną analizę dla $p+q\in 2\mathbb{N}+1$ do wykonania zainteresowanemu Czytelnikowi). W tym przypadku nasz model $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \cong \mathbb{C}^{\mathbb{C}}_{p+q} \cong \mathbb{C}(2^{\frac{p+q}{2}})$ jest pełną algebrą macierzową i $\rho\sim\rho_{\rm def}$ na $\mathbb{C}^{2^{\frac{p+q}{2}}}$, patrz: Tw. 13-14.2. Zauważmy też, że wierność i nieprzywiedlność $\rho_{\rm def}\sim\rho\equiv\rho^{\mathbb{C}}_{\rm ind}$ implikuje – w świetle powyższego

– wierność i nieprzywiedlność $\overline{\rho_{\rm ind}}^{\mathbb{C}}$, stąd zaś wywodzimy – na gruncie Tw. 13-14.1 (i konstatacji prostoty $\mathbb{C}(2^{\frac{p+q}{2}})$) – istnienie $\mathbb{C}$-liniowego izomorfizmu

$$\mathsf{C}\ :\ P \xrightarrow{\cong} \overline{P}$$

o własności

$$\forall_{\gamma\in{\rm Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}}\ :\ \mathsf{C}\circ\rho^{\mathbb{C}}_{\rm ind}(\gamma) = \overline{\rho_{\rm ind}}^{\mathbb{C}}(\gamma)\circ\mathsf{C}\,, \tag{14}$$

czyli splatacza dla tej pary reprezentacji. Wobec tożsamości

$$\overline{\chi_2\circ\chi_1} = \overline{\chi_2}\circ\overline{\chi_1}\,,$$

której słuszności dla dowolnych $\chi_A\in{\rm Hom}_{\mathbb{C}}(V_A,V_{A+1}),\ A\in\{1,2\}$ dowodzimy w bezpośrednim rachunku (w którym $\overline{v}\in\overline{V_1}$):

$$\overline{\chi_2\circ\chi_1}(\overline{v}) \equiv \overline{\chi_2\circ\chi_1(v)} = \overline{\chi_2\big(\chi_1(v)\big)} \equiv \overline{\chi_2}\big(\overline{\chi_1(v)}\big) \equiv \overline{\chi_2}\big(\overline{\chi_1}(\overline{v})\big) \equiv \overline{\chi_2}\circ\overline{\chi_1}(\overline{v})\,,$$

splatacz ten spełnia równość

$$\overline{\mathsf{C}}\circ\overline{\rho^{\mathbb{C}}_{\rm ind}(\gamma)} = \overline{\mathsf{C}\circ\rho^{\mathbb{C}}_{\rm ind}(\gamma)} = \overline{\overline{\rho_{\rm ind}}^{\mathbb{C}}(\gamma)\circ\mathsf{C}} = \overline{\overline{\rho_{\rm ind}}^{\mathbb{C}}(\gamma)}\circ\overline{\mathsf{C}}\,,$$

a ponieważ – jak pokazaliśmy wcześniej –

$$\overline{\rho_{\rm ind}}^{\mathbb{C}}\big(\gamma^i\otimes\lambda_i\big) = \overline{\rho\big(\gamma^i\otimes_{\mathbb{R}}\overline{\lambda_i}\big)} \equiv \overline{\rho^{\mathbb{C}}_{\rm ind}\big(\gamma^i\otimes_{\mathbb{R}}\overline{\lambda_i}\big)}\,,$$

przeto oznaczywszy $\gamma^i\otimes_{\mathbb{R}}\overline{\lambda_i}\equiv\widetilde{\gamma}$, przepisujemy tę ostatnią w postaci

$$\overline{\mathsf{C}}\circ\overline{\rho_{\rm ind}}^{\mathbb{C}}\big(\widetilde{\gamma}\big) = \overline{\overline{\rho^{\mathbb{C}}_{\rm ind}\big(\widetilde{\gamma}\big)}}\circ\overline{\mathsf{C}} = \rho^{\mathbb{C}}_{\rm ind}\big(\widetilde{\gamma}\big)\circ\overline{\mathsf{C}}\,.$$

W sumie więc zachodzi

$$\rho^{\mathbb{C}}_{\rm ind}(\gamma)\circ\big(\overline{\mathsf{C}}\circ\mathsf{C}\big) = \overline{\mathsf{C}}\circ\overline{\rho_{\rm ind}}^{\mathbb{C}}(\gamma)\circ\mathsf{C} = \big(\overline{\mathsf{C}}\circ\mathsf{C}\big)\circ\rho^{\mathbb{C}}_{\rm ind}(\gamma)\,,$$

czyli $\overline{\mathsf{C}}\circ\mathsf{C}$ splata $\rho^{\mathbb{C}}_{\rm ind}$ z sobą samą, ta wszakże jest nieprzywiedlna, co na mocy Stw. 13-14.4 pozwala wnioskować o istnieniu liczby $\lambda\in\mathbb{C}^\times$ spełniającej warunek

$$\overline{\mathsf{C}}\circ\mathsf{C} = \lambda\triangleright{\rm id}_P\,.$$

Oznaczmy, dla dowolnego $\mu\in\mathbb{C}^\times$,

$$\mathsf{C}_\mu := \mu^{-1}\overline{\triangleright}\mathsf{C}\ :\ P\longrightarrow\overline{P}\ :\ v\longmapsto\mu^{-1}\overline{\triangleright}\mathsf{C}(v)\,,$$

a wtedy – wobec $\mathbb{C}$-liniowości $\overline{\mathsf{C}}$ –

$$\overline{\mathsf{C}_\mu}\circ\mathsf{C}_\mu \equiv \overline{\mu^{-1}\overline{\triangleright}\mathsf{C}}\circ\big(\mu^{-1}\overline{\triangleright}\mathsf{C}\big) = \overline{\mu^{-1}}\triangleright\overline{\mathsf{C}}\circ\big(\mu^{-1}\overline{\triangleright}\mathsf{C}\big) = |\mu|^{-2}\triangleright\overline{\mathsf{C}}\circ\mathsf{C} = \tfrac{\lambda}{|\mu|^2}\triangleright{\rm id}_P\,,$$

jeśli zatem wybierzemy $\mu\in\sqrt{\lambda}$, to otrzymamy

$$\overline{\mathsf{C}_\mu}\circ\mathsf{C}_\mu = \tfrac{\lambda}{|\lambda|}\triangleright{\rm id}_P\,,$$

skoro jednak

$$\mathsf{C}\circ\overline{\mathsf{C}} = \overline{\overline{\mathsf{C}}\circ\mathsf{C}} = \overline{\lambda\triangleright{\rm id}_P} = \overline{\lambda}\overline{\triangleright}{\rm id}_{\overline{P}}\,,$$

to jest

$$\lambda\overline{\triangleright}\mathsf{C} = \mathsf{C}\circ\big(\lambda\triangleright{\rm id}_P\big) \equiv \mathsf{C}\circ\big(\overline{\mathsf{C}}\circ\mathsf{C}\big) = \big(\mathsf{C}\circ\overline{\mathsf{C}}\big)\circ\mathsf{C} = \overline{\lambda}\overline{\triangleright}{\rm id}_{\overline{P}}\circ\mathsf{C} = \overline{\lambda}\overline{\triangleright}\mathsf{C}\,,$$

czyli

$$\lambda = \overline{\lambda}\,,$$

a zatem

$$\overline{\mathsf{C}_\mu}\circ\mathsf{C}_\mu = \varepsilon\triangleright{\rm id}_P\,,\qquad \varepsilon\in\{-1,1\}\,.$$

Rozważymy teraz po kolei oba możliwe przypadki, biorąc pod uwagę powyższy splatacz znormalizowany i opuszczając w dalszych rozważaniach indeks μ.

4.1. **Przypadek** $\varepsilon = +1$**.** Dowolny pinor $w \in P$ ma rozkład

$$w = w_+ + w_- , \qquad w_\pm = \tfrac{1}{2}\big(w \pm \overline{\mathsf{C}}(\overline{w})\big) ,$$

w którym – gwoli przypomnienia – $\overline{w}$ jest tożsamy z wektorem $w \in P$, ale jest elementem modułu zespolenie sprzężonego $\overline{P}$. Zarazem

$$\mathsf{C}(w_+) = \tfrac{1}{2}\big(\mathsf{C}(w) + \overline{w}\big) \equiv \tfrac{1}{2}\big(\overline{w} + \overline{\overline{\mathsf{C}}(\overline{w})}\big) = \overline{w_+}$$

i, analogicznie,

$$\mathsf{C}(w_-) = -\overline{w_-} ,$$

czyli

$$w_\pm \in S^\pm = \{\ w \in P \mid \mathsf{C}(w) = \pm\overline{w}\ \} .$$

Przy tym należy zauważyć, że operator

$$\mathsf{K} := \mathsf{i} \triangleright \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(P)$$

spełnia – z racji $\mathbb{C}$-liniowości C – tożsamości:

$$\mathsf{C}\big(\mathsf{K}(w_\pm)\big) \equiv \mathsf{C}(\mathsf{i} \triangleright w_\pm) = \mathsf{i}\,\overline{\triangleright}\,\mathsf{C}(w_\pm) \equiv \overline{-\mathsf{i}}\,\overline{\triangleright}\,\overline{\overline{\mathsf{C}}(\overline{w_\pm})} = \overline{-\mathsf{i} \triangleright \overline{\mathsf{C}}(\overline{w_\pm})} = \overline{-\mathsf{i} \triangleright \overline{\overline{\mathsf{C}(w_\pm)}}} = \overline{\mp\mathsf{i} \triangleright \overline{\overline{\overline{w_\pm}}}} = \overline{\mp\mathsf{i} \triangleright w_\pm} = \overline{\mp\mathsf{K}(w_\pm)} ,$$

przeto ogranicza się do odwzorowania $\mathbb{R}$-liniowego

(15) $$\mathsf{K}\restriction_{S^\pm}\ :\ S^\pm \xrightarrow{\cong} S^\mp ,$$

a wobec tego mamy rozkład

(16) $$P = S^+ \oplus_{(\mathbb{R})} S^-$$

nad $\mathbb{R}$. Tym sposobem istnienie C indukuje **realifikację** przestrzeni pinorów

$$P = S^+ \oplus \mathsf{i} \triangleright S^+$$

w rozumieniu Stw. 11-12.7. Zauważmy dalej, że dla $w_\pm \in S^\pm$ a przy poprzednich oznaczeniach otrzymujemy, na gruncie wcześniejszych wyników, relacje

$$\begin{aligned}
\mathsf{C}\big(\lambda_i \triangleright \rho\big(\gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)\big)(w_\pm)\big) &= \mathsf{C} \circ \rho\big(\gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} \lambda_i\big)(w_\pm) \equiv \mathsf{C} \circ \rho^{\mathbb{C}}_{\mathrm{ind}}(\gamma)(w_\pm) = \overline{\rho_{\mathrm{ind}}}^{\mathbb{C}}(\gamma) \circ \mathsf{C}(w_\pm) \\
&= \pm\overline{\rho_{\mathrm{ind}}}^{\mathbb{C}}(\gamma)\big(\overline{w_\pm}\big) = \pm\lambda_i\overline{\triangleright}\,\overline{\rho_{\mathrm{ind}}}\big(\gamma^i\big)\big(\overline{w_\pm}\big) = \pm\overline{\overline{\lambda_i}}\,\overline{\triangleright}\,\overline{\rho_{\mathrm{ind}}\big(\gamma^i\big)}\big(\overline{w_\pm}\big) \\
&= \pm\overline{\overline{\lambda_i} \triangleright \rho_{\mathrm{ind}}\big(\gamma^i\big)}\big(\overline{w_\pm}\big) = \pm\overline{\overline{\lambda_i} \triangleright \rho_{\mathrm{ind}}\big(\gamma^i\big)(w_\pm)} \\
&\equiv \pm\overline{\overline{\lambda_i} \triangleright \rho\big(\gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)\big)(w_\pm)} ,
\end{aligned}$$

ilekroć więc $\overline{\lambda_i} = \lambda_i$, i tylko wówczas

$$\mathsf{C}\big(\lambda_i \triangleright \rho\big(\gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)\big)(w_\pm)\big) = \pm\overline{\lambda_i \triangleright \rho\big(\gamma^i \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)\big)(w_\pm)} ,$$

czyli

$$\rho^\pm_{\mathrm{ind}}(\gamma) \equiv \rho_{\mathrm{ind}}(\gamma)\restriction_{S^\pm} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(S^\pm)$$

dla $\gamma \in \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}$. Konstatujemy, że względem rozkładu (16) zachodzi

$$\rho_{\mathrm{ind}} = \rho^+_{\mathrm{ind}} \oplus \rho^-_{\mathrm{ind}} ,$$

gdzie

$$\rho^\pm_{\mathrm{ind}}\ :\ \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(S^\pm) ,$$

przy czym zarówno dziedzina, jak i przeciwdziedzina są tutaj $\mathbb{R}$-algebrami, zatem konstatacja ma sens w $\mathbf{Alg}_{\mathbb{R}}$. Zarazem stwierdzamy, że

$$\begin{aligned}
\rho^-_{\mathrm{ind}}(\gamma) \circ \mathsf{K}(w_+) &\equiv \rho_{\mathrm{ind}}(\gamma) \circ \mathsf{K}(w_+) \equiv \rho\big(\gamma \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)\big)(\mathsf{i} \triangleright w_+) = \mathsf{i} \triangleright \rho\big(\gamma \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)\big)(w_+) \\
&\equiv \mathsf{i} \triangleright \rho_{\mathrm{ind}}(\gamma)(w_+) \equiv \mathsf{i} \triangleright \rho^+_{\mathrm{ind}}(\gamma)(w_+) \equiv \mathsf{K} \circ \rho^+_{\mathrm{ind}}(\gamma)(w_+) ,
\end{aligned}$$

a ponieważ $\mathsf{K} \in \mathrm{Iso}_{\mathbb{R}}(S^+, S^-)$, przeto mamy równoważność

$$\rho_{\mathrm{ind}}^- \sim \rho_{\mathrm{ind}}^+$$

z K w roli splatacza. Ostatecznie zatem *zespolona* reprezentacja ρ_{ind} rozkłada się w obrazie realifikacji P na dwie kopie reprezentacji *rzeczywistej* ρ_{ind}^+,

$$\rho_{\mathrm{ind}} \cong \rho_{\mathrm{ind}}^+ \oplus \rho_{\mathrm{ind}}^+$$

i – co za tym idzie – ρ_{ind}^+ jest reprezentacją (rzeczywistą) wymiaru

$$\dim \rho_{\mathrm{ind}}^+ = \tfrac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} P = \dim_{\mathbb{C}} P \,.$$

Tym sposobem pinory zespolone zyskują status bi-pinorów rzeczywistych. W rozpatrywanych okolicznościach: $p + q \in 2\mathbb{N}$ bez trudu identyfikujemy na podstawie wcześniejszych wyników klasyfikacyjnych sygnatury, dla których możliwa jest pojedyncza rzeczywista reprezentacja pinorowa – są to sygnatury spełniające warunki

$$q - p \equiv 0, 6 \mod 8 \,.$$

To dla nich zatem mamy relację

$$\overline{\mathsf{C}} \circ \mathsf{C} = +\mathrm{id}_P \,.$$

4.2. **Przypadek $\varepsilon = -1$.** Równość

$$\overline{\mathsf{C}} \circ \mathsf{C} = -\mathrm{id}_P$$

implikuje

$$|\det_{(\dim_{\mathbb{C}} P)} \mathsf{C}|^2 = (-1)^{\dim_{\mathbb{C}} P} \,,$$

z której wyprowadzamy ograniczenie

$$\dim_{\mathbb{C}} P \overset{!}{\in} 2\mathbb{N} \,.$$

Jak się okazuje, C indukuje wówczas na P strukturę kwaternionową...

Ażeby się o tym przekonać, potraktujemy P jako $4n$-wymiarową przestrzeń $\mathbb{R}$-liniową (czyli ten sam zbiór, na którym działa ciało bazowe $\mathbb{R}$ i w którym $w \in P$ i $\mathsf{i} \triangleright w$ są ($\mathbb{R}$-)liniowo niezależne), a na niej określimy odwzorowania $\mathbb{R}$-liniowe

$$\mathsf{J} \,:\, P \circlearrowleft \,:\, w \longmapsto \overline{\mathsf{C}(w)} \,, \qquad\qquad \mathsf{K} \,:\, P \circlearrowleft \,:\, w \longmapsto \mathsf{i} \triangleright w \,.$$

Bez trudu sprawdzamy pożądane relacje:

$$\mathsf{J}^2(w) \equiv \overline{\mathsf{C}\big(\mathsf{J}(w)\big)} = \overline{\mathsf{C}}\big(\overline{\mathsf{J}(w)}\big) \equiv \overline{\mathsf{C}}\big(\overline{\overline{\mathsf{C}(w)}}\big) = \overline{\mathsf{C}} \circ \mathsf{C}(w) = -\mathrm{id}_P(w) \,,$$

czyli

$$\mathsf{J}^2 = -\mathrm{id}_P \,,$$

oraz

$$\mathsf{K}^2(w) \equiv \mathsf{i} \triangleright \big(\mathsf{K}(w)\big) \equiv \mathsf{i} \triangleright \big(\mathsf{i} \triangleright w\big) = \mathsf{i}^2 \triangleright w \equiv -\mathrm{id}_P(w) \,,$$

czyli także

$$\mathsf{K}^2 = -\mathrm{id}_P \,,$$

a nadto

$$\mathsf{J} \circ \mathsf{K}(w) \equiv \mathsf{J}\big(\mathsf{i} \triangleright w\big) \equiv \overline{\mathsf{C}\big(\mathsf{i} \triangleright w\big)} = \overline{\mathsf{i} \triangleright \mathsf{C}(w)} = \bar{\mathsf{i}} \triangleright \overline{\mathsf{C}(w)} = -\mathsf{i} \triangleright \overline{\mathsf{C}(w)} \equiv -\mathsf{K} \circ \mathsf{J}(w) \,,$$

tj.

$$\mathsf{J} \circ \mathsf{K} + \mathsf{K} \circ \mathsf{J} = 0 \,.$$

Czwórka endomorfizmów ($\mathbb{R}$-liniowych):

$$\{\mathrm{id}_P, \mathsf{I} \coloneqq \mathsf{J} \circ \mathsf{K}, \mathsf{J}, \mathsf{K}\}$$

zadaje zatem na P zaanonsowaną wcześniej strukturę kwaternionową. Ta pozwala określić działanie

$$P \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \;:\; \big(w, (a,b,c,d) \equiv q\big) \longmapsto a \triangleright w + b \triangleright \mathsf{I}(w) + c \triangleright \mathsf{J}(w) + d \triangleright \mathsf{K}(w) \equiv w \triangleleft q\,,$$

patrz: Dodatek 11-12.A, które wyróżnia klasę **endomorfizmów kwaternionowych** $\mathrm{End}_{\mathbb{H}^{\mathrm{opp}}}(P) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(P)$ poprzez narzucenie warunku

$$\begin{aligned} & a \triangleright \chi(w) + b \triangleright \chi \circ \mathsf{I}(w) + c \triangleright \chi \circ \mathsf{J}(w) + d \triangleright \mathsf{K}(w) \equiv \chi(w \triangleleft q) \stackrel{!}{=} \chi(w) \triangleleft q \\ \equiv\quad & a \triangleright \chi(w) + b \triangleright \mathsf{I} \circ \chi(w) + c \triangleright \mathsf{J} \circ \chi(w) + d \triangleright \mathsf{K} \circ \chi(w) \end{aligned}$$

dla dowolnego $q = (a,b,c,d) \in \mathbb{H}$. Warunek ten jest równoważny koniunkcji warunków

$$\chi \circ \mathsf{J} = \mathsf{J} \circ \chi \qquad \wedge \qquad \chi \circ \mathsf{K} = \mathsf{K} \circ \chi$$

(implikujących $\chi \circ \mathsf{I} = \mathsf{I} \circ \chi$), które przepisują się w postaci

$$\begin{cases} \chi \circ \overline{\mathsf{C}}(\overline{w}) \equiv \chi\big(\overline{\mathsf{C}(w)}\big) = \overline{\mathsf{C} \circ \chi(w)} = \overline{\mathsf{C}}\big(\overline{\chi(w)}\big) = \overline{\mathsf{C}} \circ \overline{\chi}(\overline{w}) \\ \chi(\mathsf{i} \triangleright w) = \mathsf{i} \triangleright \chi(w)\,. \end{cases}$$

Z tej ostatniej odczytujemy zwięzłą charakterystykę tej klasy endomorfizmów:

$$\chi \in \mathrm{End}_{\mathbb{H}^{\mathrm{opp}}}(P) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big(\quad \chi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(P) \quad \wedge \quad \mathsf{C} \circ \chi = \overline{\chi} \circ \mathsf{C} \quad \big)\,,$$

w której wyprowadzeniu wykorzystaliśmy równoważność

$$\chi \circ \overline{\mathsf{C}} = \overline{\mathsf{C}} \circ \overline{\chi} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathsf{C} \circ \chi = \overline{\chi} \circ \mathsf{C}\,,$$

otrzymaną przez sprzężenie zespolone. Ale dla dowolnego $\gamma \in \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}$ jest – wprost z definicji – $\rho_{\mathrm{ind}} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(P)$ i – na mocy (14) –

$$\mathsf{C} \circ \rho_{\mathrm{ind}}(\gamma) \equiv \mathsf{C} \circ \rho^{\mathbb{C}}_{\mathrm{ind}}\big(\gamma \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)\big) = \overline{\rho_{\mathrm{ind}}}^{\mathbb{C}}\big(\gamma \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)\big) \circ \mathsf{C} \equiv \overline{\rho_{\mathrm{ind}}}(\gamma) \circ \mathsf{C} \equiv \overline{\rho_{\mathrm{ind}}(\gamma)} \circ \mathsf{C}\,,$$

przeto w oczywisty sposób reprezentacja indukowana ρ_{ind} jest *kwaternionowa*. I tym razem łatwo odnajdujemy odnośne sygnatury – to te, które spełniają warunki

$$q - p \equiv 2, 4 \mod 8\,.$$

W uznaniu roli, jaką w dyskusji fizykalnej konstrukcji reprezentacji pinorowych odgrywa wyróżnione odwzorowanie C, a w związku z jego dalszymi zastosowaniami w modelowaniu pól fermionowych, poświęcamy mu osobną

Definicja 9. Przyjmijmy dotychczasowe oznaczenia. Odwzorowanie $\mathsf{C} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(P, \overline{P})$ określamy mianem **sprzężenia ładunkowego**.

4.3. **Spinory.** Na obecnym etapie pozostaje jeszcze odpowiedzieć sobie na pytanie o to, jak w opisaną złożoną strukturę algebraiczną wpisują się *s*pinory. Fizyk poszuka ich w ograniczeniu reprezentacji $\rho^{\mathbb{C}}_{\mathrm{ind}}$ do $\mathbb{R}$-podalgebry

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) \arrow[r, hook] \arrow[drr, hook] & \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0) \arrow[r, hook] & \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}_{p+q} \\ & & \mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathrm{Cl}^{\mathbb{C}\,0}_{p+q} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}\,.$$

W zanalizowanym szczegółowo przypadku $p + q \in 2\mathbb{N}$ przywołajmy znany nam z Tw. 3 rozkład przestrzeni pinorów

$$P = S_+ \oplus_{(\mathbb{C})} S_- \tag{17}$$

nad $\mathbb{C}$ na przestrzenie własne operatora chiralności, którego realizację na P możemy w świetle Wykładów XI i XII zapisać w postaci

$$\Gamma \equiv \rho\big(\omega_{\mathbb{C}}\big) \equiv \rho\big(\omega_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{i}^{f(p,q)}\big) \equiv \mathsf{i}^{f(p,q)} \triangleright \rho_{\mathrm{ind}}(\omega_{\mathbb{R}})\,,$$

gdzie $f(p,q) = p+q+E(\frac{p+q+1}{2})+q \in \mathbb{N}$ (patrz: Def. 11-12.2; ostatni składnik w $f(p,q)$ bierze się z przepisania elementów bazy *pseudo*-ortonormalnej $e_{p+k},\ k \in \overline{1,q}$ przestrzeni $\mathbb{R}^{p,q}$ odpowiadających ujemnej składowej sygnatury rzeczywistej (p,q) na odnośne elementy $e_{p+k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{i}$ bazy ortonormalnej przestrzeni $\mathbb{C}^{\times p+q} \equiv \mathbb{R}^{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$) jest takie, że

$$\Gamma^2 = \mathrm{id}_P\,,$$

por. Stw. 11-12.5. Należy przy tym podkreślić, że ilekroć $f(p+q) \notin 2\mathbb{N}$, czyli $\mathsf{i}^{f(p,q)} = \mathsf{i}\,r(p,q) \in \mathsf{i}\,\mathbb{R}^\times$ przy $q-p \equiv 0,6 \mod 8$, tj. ilekroć $q-p \equiv 6 \mod 8$, rozpatrywany uprzednio rozkład (16) nie jest naturalny z punktu widzenia rekonstrukcji *s*pinorów, oto bowiem w tej sytuacji $\Gamma \equiv r(p,q) \triangleright \mathsf{K} \circ \rho_{\mathrm{ind}}(\omega_{\mathbb{R}})$ przeprowadza nas między S^+ i S^-, por. (15), czyli przestrzenie własne Γ są postaci (zapisanej przy użyciu $w_\pm \in S^\pm$)

$$\begin{aligned}
\big\langle (w_+ + w_-) + \Gamma(w_+ + w_-) \big\rangle_{\mathbb{C}} &= \Big\langle (w_+ + w_-) + \mathsf{i}^{f(p,q)} \triangleright \big(\rho_{\mathrm{ind}}(\omega_{\mathbb{R}})(w_+) + \rho_{\mathrm{ind}}(\omega_{\mathbb{R}})(w_-)\big)\Big\rangle_{\mathbb{C}} \\
&= \Big\langle (w_+ + w_-) + \mathsf{i}\,r(p,q) \triangleright \big(\rho_{\mathrm{ind}}(\omega_{\mathbb{R}})(w_+) + \rho_{\mathrm{ind}}(\omega_{\mathbb{R}})(w_-)\big)\Big\rangle_{\mathbb{C}} \\
&= \Big\langle \big(w_+ + \mathsf{K} \circ \rho^-_{\mathrm{ind}}\big(r(p,q) \triangleright \omega_{\mathbb{R}}\big)(w_-)\big) + \big(w_- + \mathsf{K} \circ \rho^+_{\mathrm{ind}}\big(r(p,q) \triangleright \omega_{\mathbb{R}}\big)(w_+)\big)\Big\rangle_{\mathbb{C}}\,,
\end{aligned}$$

nie możemy zatem ograniczyć się do którejkolwiek z podprzestrzeni $\mathbb{R}$-liniowych $S^\pm$. Wobec tego miast transportować strukturę modułu z $\overline{P}$ do P za pośrednictwem $\overline{\mathsf{C}}$ (co wcześniej doprowadziło nas do realifikacji pinorów zespolonych), rozważamy raczej relacje pomiędzy $(P, \rho^{\mathbb{C}}_{\mathrm{ind}})$ i $(\overline{P}, \overline{\rho_{\mathrm{ind}}}^{\mathbb{C}})$.

Wracamy przeto do rozkładu (17) nad $\mathbb{C}$ wyznaczonego przez Γ, przy czym zauważamy, że operator

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma} &\equiv \overline{\mathsf{i}^{f(p,q)} \triangleright \rho\big(\omega_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)\big)} = (-1)^{f(p,q)} \mathsf{i}^{f(p,q)} \overline{\triangleright} \overline{\rho\big(\omega_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)\big)} \equiv (-1)^{f(p,q)} \mathsf{i}^{f(p,q)} \overline{\triangleright} \rho\big(\omega_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \overline{(1,0)}\big) \\
&\equiv (-1)^{f(p,q)} \mathsf{i}^{f(p,q)} \overline{\triangleright}\, \overline{\rho_{\mathrm{ind}}}^{\mathbb{C}}\big(\omega_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)\big) = (-1)^{f(p,q)} \overline{\triangleright}\, \overline{\rho_{\mathrm{ind}}}^{\mathbb{C}}\big(\omega_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{i}^{f(p,q)}\big)
\end{aligned}$$

spełnia tożsamość

$$\overline{\Gamma} \circ \overline{\Gamma} = \overline{\Gamma \circ \Gamma} = \overline{\mathrm{id}_P} = \mathrm{id}_{\overline{P}}\,,$$

zatem zadaje rozkład

$$\overline{P} = \overline{S}_+ \oplus_{(\mathbb{C})} \overline{S}_-$$

na przestrzenie własne

$$\overline{S}_\pm = \{\ \overline{v} \in \overline{P} \mid \overline{\Gamma}(\overline{v}) = \pm\overline{v}\ \}\,,$$

przy czym wprost na mocy tożsamości (14) dostajemy

$$\overline{\Gamma} \circ \mathsf{C} = (-1)^{f(p,q)} \overline{\triangleright}\, \overline{\rho_{\mathrm{ind}}}^{\mathbb{C}}\big(\omega_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{i}^{f(p,q)}\big) \circ \mathsf{C} = (-1)^{f(p,q)} \overline{\triangleright} \mathsf{C} \circ \rho^{\mathbb{C}}_{\mathrm{ind}}\big(\omega_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{i}^{f(p,q)}\big) \equiv (-1)^{f(p,q)} \overline{\triangleright} \mathsf{C} \circ \Gamma\,.$$

Na tej podstawie stwierdzamy, że sprzężenie ładunkowe C zadaje równoważność pomiędzy reprezentacjami

$$\rho^0_{\mathrm{ind}\,(\pm)} \equiv \big(\rho_{\mathrm{ind}} \restriction_{\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q}}\big) \restriction_{S_\pm}\,, \qquad \overline{\rho}^0_{\mathrm{ind}\,(\pm)} \equiv \big(\overline{\rho}_{\mathrm{ind}} \restriction_{\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}\,0}_{p,q}}\big) \restriction_{\overline{S}_\pm}$$

według schematu:

- $\rho^0_{\mathrm{ind}\,(\pm)} \sim \overline{\rho}^0_{\mathrm{ind}\,(\pm)}$, gdy $f(p,q) \in 2\mathbb{N}$ (C nie zmienia chiralności);
- $\rho^0_{\mathrm{ind}\,(\pm)} \sim \overline{\rho}^0_{\mathrm{ind}\,(\mp)}$, gdy $f(p,q) \in 2\mathbb{N}+1$ (C zmienia chiralność).

Przy tym godnym odnotowania jest fakt: $\rho^0_{\mathrm{ind}\,(+)} \nsim \rho^0_{\mathrm{ind}\,(-)}$ jako reprezentacje zespolone, gdyż $\rho^0_{\mathrm{ind}\,(\pm)}(\omega_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} (1,0)) = (-\mathsf{i})^{f(p,q)} \triangleright \Gamma\restriction_{S_\pm} = \pm(-\mathsf{i})^{f(p,q)} \triangleright \mathrm{id}_{S_\pm}$. Okazuje się wszakże, że ich formy *rzeczywiste* są równoważne, co odpowiada temu, że wówczas $\mathrm{Cl}^{\mathbb{R}}_{p,q}$ jest $\mathbb{R}$-algebrą prostą.

Dodatek A. Uzupełnienie z teorii przestrzeni kwadratowych

Dyskusja cliffordowskiej realizacji grupy izometrii bazuje na Twierdzeniu Cartana–Dieudonnégo, zawierającym identyfikację prostego układu generującego tejże grupy. Ażeby je wysłowić, będziemy potrzebowali nieco elementarnego substratu z zakresu algebry liniowej.

Zacznijmy *adagio*...

Stwierdzenie 8. Niechaj (V, Q) będzie skończenie wymiarową niezwyrodniałą przestrzenią kwadratową nad ciałem $\mathbb{K}$, a $W \subset V$ – jej dowolną podprzestrzenią o dopełnieniu ortogonalnym $W^{\perp_Q}$. Wówczas zachodzi równość

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W + \dim_{\mathbb{K}} W^{\perp_Q} \tag{18}$$

oraz tożsamość

$$W = \left(W^{\perp_Q}\right)^{\perp_Q} .$$

<u>*Dowód:*</u> Izomorfizm $\mathbb{K}$-liniowy

$$l_{\Phi_Q} \;:\; V \xrightarrow{\cong} V^* \;:\; v \longmapsto \Phi_Q(v, \cdot)\,,$$

o którego istnieniu przesądza niezwyrodnienie Q, indukuje epimorfizm

$$_W|l_{\Phi_Q} \;:\; V \twoheadrightarrow W^* \;:\; v \longmapsto \Phi_Q(v, \cdot)\restriction_W\,,$$

dla którego możemy wypisać standardowy bilans wymiarów:

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}_W|l_{\Phi_Q} + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}_W|l_{\Phi_Q} = \dim_{\mathbb{K}} W^{\perp_Q} + \dim_{\mathbb{K}} W^* \equiv \dim_{\mathbb{K}} W + \dim_{\mathbb{K}} W^{\perp_Q}\,,$$

dowodzący słuszności postulowanej równości dla $\dim_{\mathbb{K}} W \leq \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$. Skoro zaś

$$W \subset \left(W^{\perp_Q}\right)^{\perp_Q}\,,$$

co oczywiste, to ta sama równość odniesiona do podprzestrzeni $W^{\perp_Q}$ daje

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W^{\perp_Q} + \dim_{\mathbb{K}}\left(W^{\perp_Q}\right)^{\perp_Q}\,,$$

więc też po obustronnym skróceniu (skończonego) składnika $\dim_{\mathbb{K}} W^{\perp_Q}$ w obu reprezentacjach $\dim_{\mathbb{K}} V$,

$$\dim_{\mathbb{K}}\left(W^{\perp_Q}\right)^{\perp_Q} = \dim_{\mathbb{K}} W\,,$$

a to już implikuje postulowaną tożsamość. □

W następnej kolejności wprowadzimy

Definicja 10. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Przestrzeń wektorowa V nad ciałem $\mathbb{K}$ wyposażona w formę symetryczną γ jest nazywana **płaszczyzną hiperboliczną**, jeżeli jest niezwyrodniała (względem γ), $\dim_{\mathbb{K}} V = 2$ i istnieje w niej niezerowy wektor izotropowy $v \in V$,

$$v \neq 0_V \quad \wedge \quad \gamma(v, v) = 0_{\mathbb{K}}\,.$$

Przestrzeń hiperboliczna to suma ortogonalna dowolnej rodziny płaszczyzn hiperbolicznych. Forma symetryczna dwuliniowa (wzgl. kwadratowa) na przestrzeni hiperbolicznej jest określana mianem **formy hiperbolicznej**.

Bazę $\{v, w\}$ płaszczyzny hiperbolicznej V spełniającą układ warunków

$$\gamma(v, v) = 0_{\mathbb{K}} = \gamma(w, w) \quad \wedge \quad \gamma(v, w) = 1_{\mathbb{K}} \tag{19}$$

nazywamy **parą hiperboliczną**.

Elementarnego opisu przestrzeni hiperbolicznych dostarcza

Stwierdzenie 9. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Każda płaszczyzna hiperboliczna nad ciałem $\mathbb{K}$ o charakterystyce $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$ ma parę hiperboliczną. I odwrotnie, dowolna dwuwymiarowa przestrzeń symetryczna o bazie spełniającej warunki (19) jest płaszczyzną hiperboliczną.

Dowód: Niech V będzie płaszczyzną hiperboliczną o wektorze $v \neq 0_V$ izotropowym względem formy symetrycznej γ. Wobec $\mathrm{Ker}\,\gamma = \{0_V\}$ musi istnieć wektor $w \notin \langle v \rangle_{\mathbb{K}}$ spełniający warunek

$$\gamma(v, w) \neq 0_{\mathbb{K}}\,,$$

gdyż w przeciwnym razie $v \in \mathrm{Ker}\,\gamma$. Położywszy

$$u := \lambda \triangleright_V v +_V w\,, \qquad \lambda := -2_{\mathbb{K}}^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} \gamma(v, w)^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} \gamma(w, w)\,,$$

bez trudu sprawdzamy, że układ $\{\gamma(v, w)^{-1} \triangleright_{\mathbb{K}} u, v\}$ jest parą hiperboliczną dla V, oto bowiem $u \notin \langle v \rangle_{\mathbb{K}}$, a ponadto

$$\begin{aligned}\gamma\big(\gamma(v, w)^{-1} \triangleright_{\mathbb{K}} u, \gamma(v, w)^{-1} \triangleright_{\mathbb{K}} u\big) &\equiv \big(\gamma(v, w)^{-1}\big)^2 \cdot_{\mathbb{K}} \gamma(\lambda \triangleright_V v +_V w, \lambda \triangleright_V v +_V w) \\ &= \big(\gamma(v, w)^{-1}\big)^2 \cdot_{\mathbb{K}} \big(\lambda^2 \cdot_{\mathbb{K}} \gamma(v, v) +_{\mathbb{K}} 2\lambda \cdot_{\mathbb{K}} \gamma(v, w) +_{\mathbb{K}} \gamma(w, w)\big) \\ &= \big(\gamma(v, w)^{-1}\big)^2 \cdot_{\mathbb{K}} (2\lambda \cdot_{\mathbb{K}} \gamma(v, w) +_{\mathbb{K}} \gamma(w, w)) = 0_{\mathbb{K}}\end{aligned}$$

oraz

$$\gamma\big(\gamma(v, w)^{-1} \triangleright_{\mathbb{K}} u, v\big) \equiv \gamma(v, w)^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} \gamma(\lambda \triangleright_V v +_V w, v)$$

$$= \gamma(v, w)^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} (\lambda \cdot_{\mathbb{K}} \gamma(v, v) +_{\mathbb{K}} \gamma(w, v)) = \gamma(v, w)^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} \gamma(v, w) = 1_{\mathbb{K}}\,.$$

I odwrotnie, jeżeli elementy bazy $\{v, w\}$ przestrzeni V spełniają relacje (19), to γ ma w tej bazie macierz

$$[\gamma]_{\{v,w\}} = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} \\ 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{pmatrix},$$

która jest odwracalna ($\det_{(2)}([\gamma]_{\{v,w\}}) = -1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$). To pokazuje, że forma γ jest niezwyrodniała (wszak zerowość wyznacznika formy kwadratowej jest *niezmiennikiem* wyboru bazy), a zatem V jest w istocie płaszczyzną hiperboliczną. □

Przestrzenie hiperboliczne są naturalnym elementem opisu zwyrodniałych ograniczeń niezwyrodniałych form symetrycznych (lub – równoważnie – niezwyrodniałych rozszerzeń zwyrodniałych form symetrycznych) i jako takie pozwalają lepiej zrozumieć geometrię zanurzeń podprzestrzeni izotropowych w niezwyrodniałych przestrzeniach symetrycznych. Doskonałej ilustracji tej tezy dostarcza

Stwierdzenie 10 (O rozszerzeniu hiperbolicznym przestrzeni izotropowej)**.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ o charakterystyce $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$ wyposażoną w niezwyrodniałą formę symetryczną γ i niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią V. Oznaczmy $\gamma_W := \gamma\restriction_{W \times W}$ i $W_0 := \mathrm{Ker}\,\gamma_W$. Wybierzmy w W_0 bazę $\{w_i\}_{i \in \overline{1,K}}$, $K \equiv \dim_{\mathbb{K}} W_0$ i niech D będzie dopełnieniem ortogonalnym W_0 w W,

$$W = W_0 \circled{\perp} D\,.$$

Wówczas istnieją wektory $\{v_i\}_{i \in \overline{1,K}} \subset D^\perp \subset V$ o tej własności, że dla każdego indeksu $i \in \overline{1,K}$ układ $\{v_i, w_i\}$ jest parą hiperboliczną rozpinającą płaszczyznę hiperboliczną $H_i := \langle v_i, w_i \rangle_{\mathbb{K}}$. Pary te zadają rozkład ortogonalny podprzestrzeni

$$\widetilde{W} := \langle v_1, v_2, \ldots, v_K, w_1, w_2, \ldots, w_K \rangle_{\mathbb{K}} +_V D \subset V$$

dany wzorem

$$\widetilde{W} = H_1 \circled{\perp} H_2 \circled{\perp} \cdots \circled{\perp} H_K \circled{\perp} D\,.$$

Dowód: Oznaczmy

$$D_1 := \langle w_2, w_3, \ldots, w_K \rangle_{\mathbb{K}} \oplus D\,.$$

Z inkluzji właściwej podprzestrzeni

$$D_1 \subsetneq W_0 \oplus D$$

wynika inkluzja właściwa ich anihilatorów,

$$D_1^{\perp_\gamma} \supsetneq (W_0 \oplus D)^{\perp_\gamma} ,$$

a stąd dalej – istnienie wektora $v_1 \in D_1^{\perp_\gamma} \setminus (W_0 \oplus D)^{\perp_\gamma}$, tj. takiego, który spełnia warunki

$$\forall_{j\in\overline{2,K}} \ : \ \gamma(v_1, w_j) = 0_{\mathbb{K}} , \qquad \forall_{v\in D} \ : \ \gamma(v_1, v) = 0_{\mathbb{K}}$$

oraz

$$\gamma(v_1, w_1) \neq 0_{\mathbb{K}} .$$

Wobec izotropowości wektora w_1 i niezwyrodnienia $\gamma\restriction_{\langle v_1,w_1\rangle_{\mathbb{K}}}$ podprzestrzeń $H_1 \coloneqq \langle v_1, w_1\rangle_{\mathbb{K}}$ jest zatem płaszczyzną hiperboliczną, co w świetle Stw. 9 oznacza istnienie takiego wektora $u_1 \in H_1$, który tworzy wraz z w_1 parę hiperboliczną. Przy tym oczywiście

$$\widetilde{W}_1 \coloneqq \langle v_1, w_1, w_2, w_3, \ldots, w_K\rangle_{\mathbb{K}} +_V D = H_1 \textcircled{\perp} \langle w_2, w_3, \ldots, w_K\rangle_{\mathbb{K}} \textcircled{\perp} D .$$

Jądrem formy symetrycznej $\gamma_{\widetilde{W}_1} \coloneqq \gamma|_{\widetilde{W}_1\times\widetilde{W}_1}$ jest

$$\mathrm{Ker}\,\gamma_{\widetilde{W}_1} = \langle w_2, w_3, \ldots, w_K\rangle_{\mathbb{K}} ,$$

wobec czego całą opisaną procedurę możemy powtórzyć w odniesieniu do podprzestrzeni izotropowej

$$\widetilde{W}_1 = \mathrm{Ker}\,\gamma_{\widetilde{W}_1} \textcircled{\perp} \widetilde{D}_1 , \qquad \widetilde{D}_1 \coloneqq H_1 \textcircled{\perp} D .$$

□

Oczywistą konsekwencją powyższego jest

Corollarium 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy, przy czym zakładamy, że V jest niezwyrodniałą przestrzenią kwadratową wymiaru $n \in \mathbb{N}$ nad ciałem $\mathbb{K}$ o charakterystyce $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$, $W \subset V$ zaś – jej podprzestrzenią Q-zerową. Wówczas

$$\dim_{\mathbb{K}} W \leq E\left(\tfrac{n}{2}\right) .$$

Podprzestrzeń, której wymiar wysyca powyższą nierówność, określamy mianem **maksymalnej podprzestrzeni Q-zerowej**.

Mamy także wygodne

Stwierdzenie 11. Przyjmijmy zapis dotychczasowy, przy czym zakładamy, że (V, Q) jest (skończenie wymiarową) **przestrzenią hiperboliczną**, tj. sumą (Q-)ortogonalną skończonej liczby płaszczyzn hiperbolicznych. Niechaj $W_0 \subset V$ będzie dowolną maksymalną podprzestrzenią Q-zerową. Każda izometria $\chi \in \mathrm{O}(V, Q)$ o własności

$$\chi\restriction_{W_0} = \mathrm{id}_{W_0}$$

jest obrotem,

$$\chi \in \mathrm{SO}(V, Q) .$$

Dowód: Utożsamiwszy podprzestrzeń W_0 z treści Stw. 10 z maksymalną podprzestrzenią Q-zerową, o której mowa w treści twierdzenia dowodzonego, stwierdzamy istnienie (maksymalnie) Q-zerowego dopełnienia *prostego* $\Delta \subset V$ tejże podprzestrzeni,

$$W_0 \oplus \Delta = V ,$$

rozpiętego na wektorach v_i, $i \in \overline{1,n}$, $2n \equiv \dim_{\mathbb{K}} V$ dopełniających elementy (dowolnej) bazy $\{w_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ do odnośnych par hiperbolicznych $\{w_i, v_i\}$. Istotnie, wektory v_i są parami ortogonalne (wszak $H_i \perp H_j$, ilekroć $i \neq j$), a do tego – izotropowe. Wprost na mocy założenia zachodzi przy tym

$$\forall_{i\in\overline{1,n}} \ : \ \chi(w_i) = w_i ,$$

a zatem także – dla dowolnych $(w,x) \in W_0 \times \Delta$ –

$$\begin{aligned}\Phi_Q\big(w,\chi(x)-x\big) &= \Phi_Q\big(w,\chi(x)\big)-\Phi_Q(w,x) \equiv \Phi_Q\big(\chi(w),\chi(x)\big)-\Phi_Q(w,x) = \Phi_Q(w,x)-\Phi_Q(w,x)\\ &= \mathbf{0}_{\mathbb{K}}\,,\end{aligned}$$

skąd wniosek:

$$\forall_{x\in\Delta}\ :\ \chi(x)-x \in W_0^{\perp_Q}\,.$$

Q-zerowość W_0 implikuje inkluzję

$$W_0 \subseteq W_0^{\perp_Q}\,,$$

która w konsekwencji równości (18), zapisanej dla W_0:

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W_0 + \dim_{\mathbb{K}} W_0^{\perp_Q}\,,$$

a słusznej wobec niezwyrodnienia V, oraz w konsekwencji maksymalności W_0, pociągających za sobą równość

$$\dim_{\mathbb{K}} W_0^{\perp_Q} = \dim_{\mathbb{K}} V - \dim_{\mathbb{K}} W_0 = 2n-n = n \equiv \dim_{\mathbb{K}} W_0\,,$$

sprowadza się do tożsamość

$$W_0 = W_0^{\perp_Q}\,.$$

Możemy zatem przepisać wcześniejszy wniosek w postaci

$$\forall_{x\in\Delta}\ :\ \chi(x)-x \in W_0\,,$$

otrzymując tym sposobem w szczególności relacje

$$\forall_{i\in\overline{1,n}}\ \exists_{\mu_i^1,\mu_i^2,\ldots,\mu_i^n\in\mathbb{K}}\ :\ \chi(v_i) = v_i +_V \mu_i^j \triangleright w_j\,,$$

które przesądzają o górnotrójkątnej postaci macierzy endomorfizmu χ względem bazy $\mathscr{B} := \{w_1,w_2,\ldots,w_n,v_1,v_2,\ldots,v_n\}$

$$[\chi]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & (\mu_i^j)^{j\in\overline{1,n}}_{i\in\overline{1,n}} \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n \end{pmatrix}.$$

Licząc wyznacznik χ w tej właśnie bazie, otrzymujemy pożądany wynik

$$\det\chi = \det{}_{(2n)}\,[\chi]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}} = \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\,.$$

□

Konsekwencją dużo mniej oczywistą, a fundamentalną dla teorii przestrzeni kwadratowych i teorii spinorów, jest[5]

Twierdzenie 4 (Cartana–Dieudonnégo)**.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy, zakładając dodatkowo, że przestrzeń kwadratowa (V,Q) nad ciałem $\mathbb{K}$ o charakterystyce $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$ jest skończonego wymiaru, $N := \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, i jest niezwyrodniała. Wówczas

$$\forall_{\chi\in\mathrm{O}(V,Q)}\ \exists_{n\in\overline{0,N}}\ \exists_{v_1,v_2,\ldots,v_n\in V^\times}\ :\ \chi = \mathsf{P}_{v_1}\circ\mathsf{P}_{v_2}\circ\cdots\circ\mathsf{P}_{v_n}\,,$$

przy czym

$$\chi\in\mathrm{SO}(V,Q) \qquad\Longleftrightarrow\qquad n\in 2\mathbb{N}\,.$$

[5] W swojej wersji pierwotnej, sformułowanej i udowodnionej dla $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, twierdzenie to pochodzi od É.J. Cartana [Car38a, Car38b]. Jego wersję ogólną oraz takiż dowód podał następnie J.A. Dieudonné w monografii [Die55]. Dowód przedstawiony w niniejszym skrypcie pochodzi zasadniczo od E. Artina [Art61].

<u>*Dowód:*</u> Zauważmy na wstępie, że dowolne odbicie elementarne P_v przyjmuje względem rozkładu Q-ortogonalnego

$$V = \langle v \rangle_{\mathbb{K}} \textcircled{\perp}_Q \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q}$$

postać

$$\mathsf{P}_v = \left(-\mathrm{id}_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}}\right) \textcircled{\perp}_Q \mathrm{id}_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q}} ,$$

zatem spełnia warunek

$$\det \mathsf{P}_v = -\mathbf{1}_{\mathbb{K}} .$$

Przy założeniu słuszności pierwszej części tezy dowodzonego twierdzenia obserwacja ta implikuje natychmiast drugą jej część.

Dowód części pierwszej przeprowadzimy metodą indukcji silnej względem N, zauważając natychmiast oczywistość tezy w przypadku $N = 1$ – istotnie, jeśli $V = \langle v \rangle_{\mathbb{K}}$, to mamy koniecznie $\chi(v) = \lambda \triangleright v$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{K}^\times$, a przy tym $\mathbf{0}_{\mathbb{K}} \neq Q(v) = Q \circ \chi(v) = \lambda^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v)$ implikuje $\lambda \in \{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}, \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\}$, więc albo $\chi = \mathrm{id}_V \in \mathrm{SO}(V,Q)$, albo $\chi = \mathsf{P}_v \in \mathrm{O}(V,Q) \smallsetminus \mathrm{SO}(V,Q)$. Poczyniwszy założenie indukcyjne o słuszności dowodzonej tezy dla $N \in \overline{1, N_0 - 1}$, $N_0 > 1$, rozbijemy następnie dowód jej słuszności dla $N = N_0$ na składowe odpowiadające wykluczającym się nawzajem ewentualnościom:

(i) $\exists_{v \in V^\times} \ : \ \chi(v) = v$;
(ii) $\forall_{v \in V^\times} \ : \ \chi(v) - v \neq 0_V \quad \wedge \quad \exists_{w \in V^\times} \ : \ \chi(w) - w \in V^\times$;
(iii) $\forall_{v \in V^\times} \ : \ \chi(v) - v \in Q^{-1}(\{0_{\mathbb{K}}\}) \smallsetminus \{0_V\}$.

W przypadku (i) przywołujemy tezę twierdzenia o istnieniu dopełnienia ortogonalnego dowolnej skończenie wymiarowej podprzestrzeni niezwyrodniałej w przestrzeni kwadratowej (na co pozwala nieizotropowość v) i dokonujemy rozkładu

$$V = \langle v \rangle_{\mathbb{K}} \textcircled{\perp}_Q \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q} , \tag{20}$$

odnotowując przy tym rozkład rozważanego endomorfizmu

$$\chi = \mathrm{id}_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}} \oplus \chi\restriction_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q}} .$$

Wobec równości

$$\dim_{\mathbb{K}} \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q} = N_0 - 1$$

założenie indukcyjne pozwala nam rozłożyć $\chi\restriction_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q}}$ na co najwyżej $N_0 - 1$ odbić elementarnych $\mathsf{P}_x^{(N_0-1)}$ w hiperpłaszczyznach $Q\restriction_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q}} \equiv Q_{\perp v}$-ortogonalnych do wyróżnionych wektorów nieizotropowych $x \in \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q}$. Odbicie $\mathsf{P}_x^{(N_0-1)}$ przyjmuje względem odnośnego rozkładu

$$\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q} = \langle x \rangle_{\mathbb{K}} \textcircled{\perp}_{Q_{\perp v}} \langle x \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q_{\perp v}} ,$$

postać blokowo-diagonalną

$$\mathsf{P}_x^{(N_0-1)} = (-\mathrm{id}_{\langle x \rangle_{\mathbb{K}}}) \oplus \mathrm{id}_{\langle x \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q_{\perp v}}} ,$$

a jego trywialne rozszerzenie do całej przestrzeni V zapisuje się względem rozkładu (20) jako

$$\mathrm{id}_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}} \oplus \mathsf{P}_x^{(N_0-1)} \equiv \mathrm{id}_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}} \oplus (-\mathrm{id}_{\langle x \rangle_{\mathbb{K}}}) \oplus \mathrm{id}_{\langle x \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q_{\perp v}}} ,$$

czyli sprowadza się do odbicia elementarnego w hiperpłaszczyźnie

$$\langle x \rangle^{\perp Q} = \langle v \rangle_{\mathbb{K}} \textcircled{\perp}_Q \langle x \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q_{\perp v}} ,$$

tj. spełnia tożsamość

$$\mathrm{id}_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}} \oplus \mathsf{P}_x^{(N_0-1)} \equiv \mathsf{P}_x .$$

To rozumowanie przekonuje, że w przypadku (i) izometria χ rozkłada się na co najwyżej $N_0 - 1 < N_0$ odbić elementarnych.

W przypadku (ii) nieizotropowość $\chi(w)-w$ pozwala rozpatrzyć odbicie elementarne $\mathsf{P}_{\chi(w)-w}$, które spełnia tożsamość

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_{\chi(w)-w}(w) &= w-\tfrac{2\Phi_Q(w,\chi(w)-w)}{Q(\chi(w)-w)}\triangleright\big(\chi(w)-w\big)\\ &= w-\tfrac{2(\Phi_Q(w,\chi(w))-Q(w))}{2Q(w)-2\Phi_Q(w,\chi(w))}\triangleright\big(\chi(w)-w\big)=\chi(w)\,.\end{aligned}$$

Na jej podstawie stwierdzamy, że izometria $\chi_w:=\mathsf{P}_{\chi(w)-w}\circ\chi$ zachowuje nieizotropowy wektor w, co w świetle poprzedniej części naszego dowodu oznacza, że χ_w jest superpozycją co najwyżej N_0-1 odbić elementarnych. Co za tym idzie, wyjściowa izometria χ jest superpozycją co najwyżej $N_0-1+1=N_0$ odbić elementarnych, zgodnie z tezą indukcyjną.

W przypadku (iii) przekonujemy się, że $N_0=2k$, $k\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ oraz że $\chi\in\mathrm{SO}(V,Q)$, co pozwala przeprowadzić następujące proste rozumowanie. Nieizotropowość wektora $v\in V^\times$ (wybranego dowolnie, a wybór taki istnieje z racji niezwyrodnienia V i założenia dotyczącego charakterystyki $\mathbb{K}$ – gdyby było $Q(v)=0$ dla dowolnego $v\in V$, to mielibyśmy $\Phi_Q\equiv 0$ (formuła polaryzacyjna), więc sprzeczność) oznacza, że przynajmniej jeden z wektorów $\chi(v)\pm v$ jest nieizotropowy, gdyż

$$\begin{aligned}&Q\big(\chi(v)+v\big)=\mathbf{0}_{\mathbb{K}}=Q\big(\chi(v)-v\big)\\ \Longleftrightarrow\quad &Q(v)+\Phi_Q(v,\chi(v))=\mathbf{0}_{\mathbb{K}}=Q(v)-\Phi_Q(v,\chi(v))\quad\Longrightarrow\quad Q(v)=\mathbf{0}_{\mathbb{K}}\,.\end{aligned}$$

W rozważanym przypadku (iii) oznacza to niechybnie $\chi(v)+_V v\in V^\times$ przy jednoczesnym $\chi(v)\neq v$, ponieważ zaś

$$\mathsf{P}_{\chi(v)+_V v}(v)=v-\tfrac{2\Phi_Q(v,\chi(v)+_V v)}{Q(\chi(v)+_V v)}\triangleright\big(\chi(v)+_V v\big)=-\chi(v)\,,$$

przeto $\widetilde{\chi}_v:=\mathsf{P}_v\circ\mathsf{P}_{\chi(v)+_V v}\circ\chi$ zachowuje wektor nieizotropowy v. Rozumując jak poprzednio, stwierdzamy, że $\widetilde{\chi}_v$ jest superpozycją co najwyżej N_0-1 odbić elementarnych, przy czym jeśli przyjąć, że – jak pokażemy lada chwila – N_0 jest liczbą parzystą, a χ jest obrotem, to mamy do czynienia z sytuacją, w której *obrót* $\widetilde{\chi}_v$ rozkłada się na co najwyżej $N_0-1\in 2\mathbb{N}+1$ odbić (elementarnych), czyli koniecznie w rozkładzie tym jest co najwyżej $N_0-2\in 2\mathbb{N}$ czynników, to zaś – koniec końców – prowadzi do wniosku, że χ jest superpozycją co najwyżej $N_0-2+2=N_0$ odbić elementarnych, w zgodzie z tezą indukcyjną. Pozostaje przeto dowieść, że endomorfizm ten przy spełnionych warunkach z punktu (iii) jest w istocie obrotem w parzystowymiarowej (niezwyrodniałej) przestrzeni kwadratowej. Jasno widać, że $N_0\neq 1$, oto bowiem w przypadku $N_0=1$ jest – jak pokazaliśmy wcześniej – $\chi(v)=-v$ (wszak $\chi(v)\neq v$), więc też $\chi(v)-v=-2_{\mathbb{K}}\triangleright v\in V^\times$, przeciwnie do założenia (iii). Gdyby natomiast było $N_0=2$, to wówczas mielibyśmy $\chi(v)\notin\langle v\rangle_{\mathbb{K}}$, gdyż w przeciwnym przypadku byłoby albo $\chi(v)=v$, niezgodnie z założeniem (iii), albo $\chi(v)=-v$ ($\{-1_{\mathbb{K}},1_{\mathbb{K}}\}$ to jedyne dopuszczalne wartości własne izometrii χ), a wtedy $\chi(v)-v=-2_{\mathbb{K}}\triangleright v\in V^\times$, również w sprzeczności z założeniem (iii). Skoro jednak $\chi(v)\notin\langle v\rangle_{\mathbb{K}}$, to $\{v,\chi(v)\}$ jest bazą V, w której wprost na mocy założenia (iii) znika gramian

$$\begin{aligned}\det{}_{(2)}\begin{pmatrix}\Phi_Q(v,v) & \Phi_Q(v,\chi(v))\\ \Phi_Q(v,\chi(v)) & \Phi_Q\big(\chi(v),\chi(v)\big)\end{pmatrix}&=\det{}_{(2)}\begin{pmatrix}Q(v) & \Phi_Q(v,\chi(v))\\ \Phi_Q(v,\chi(v)) & Q(v)\end{pmatrix}\\ &=Q(v)^2-\Phi_Q\big(v,\chi(v)\big)^2=2_{\mathbb{K}}^{-1}\cdot_{\mathbb{K}}Q\big(\chi(v)-v\big)\cdot_{\mathbb{K}}2_{\mathbb{K}}^{-1}\cdot_{\mathbb{K}}Q\big(\chi(v)+_V v\big)=\mathbf{0}_{\mathbb{K}}\,,\end{aligned}$$

co oznacza, że V jest zwyrodniała, wbrew założeniu. Ostatecznie więc $N_0\geq 3$. Rozważmy następnie izotropowy wektor $w\in V$ (taki istnieje, gdyż istnieją $v\in V^\times$ (wszak Q jest niezwyrodniała), a dla takich $\chi(v)-v\in Q^{-1}(\{0_{\mathbb{K}}\})$ jest niezerowy). W świetle Stw. 10 istnieje niepuste (wszak $\dim_{\mathbb{K}}V>2$) dopełnienie Q-ortogonalne płaszczyzny hiperbolicznej zawierającej w, czyli też – wektor nieizotropowy $v\in V^\times$ o własności $\Phi_Q(v,w)=\mathbf{0}_{\mathbb{K}}$. Istotnie, $W_0\equiv W:=\langle w\rangle_{\mathbb{K}}$ uzupełnia się – wedle schematu ze Stw. 10 – do płaszczyzny hiperbolicznej H, której nizwyrodnienie jako podprzestrzeni V przesądza o istnieniu rozkładu ortogonalnego $V=H\textcircled{\perp}_Q H^{\perp_Q}$ z $H^{\perp_Q}\neq\{0_V\}$, a to z racji nierówności $\dim_{\mathbb{K}}V-\dim_{\mathbb{K}}H=N_0-2\geq 1$. Przy tym $H^{\perp_Q}$ jest koniecznie niezwyrodniała, gdyby bowiem taką nie była, to wobec ortogonalności rozkładu $V=H\textcircled{\perp}_Q H^{\perp_Q}$ sama nadprzestrzeń V byłaby zwyrodniała, niezgodnie z założeniem. Nieizotropowy wektor v wybieramy z

$H^{\perp_Q}$ właśnie, a wówczas dla dowolnego $\varepsilon \in \mathbb{K}^\times$ otrzymujemy wektor nieizotropowy $w +_V \varepsilon \triangleright v \in V$,

$$\begin{aligned} Q(w +_V \varepsilon \triangleright v) &\equiv \Phi_Q(w +_V \varepsilon \triangleright v, w +_V \varepsilon \triangleright v) = Q(w) + \varepsilon^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) + 2_{\mathbb{K}} \cdot_{\mathbb{K}} \varepsilon \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v, w) \\ &= \varepsilon^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{K}} , \end{aligned}$$

a zatem także – wprost na mocy (iii) – niezerowy wektor izotropowy $\chi(w +_V \varepsilon \triangleright v) - (w +_V \varepsilon \triangleright v)$, przy czym warunek izotropowości tego ostatniego daje nam – w połączeniu z warunkiem izotropowości $\chi(v) - v$ – tożsamość

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_{\mathbb{K}} &= Q\big(\chi(w +_V \varepsilon \triangleright v) - (w +_V \varepsilon \triangleright v)\big) \equiv Q\big(\chi(w) - w +_V \varepsilon \triangleright \big(\chi(v) - v\big)\big) \\ &= Q\big(\chi(w) - w\big) +_{\mathbb{K}} \varepsilon^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q\big(\chi(v) - v\big) +_{\mathbb{K}} 2_{\mathbb{K}} \cdot_{\mathbb{K}} \varepsilon \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_Q\big(\chi(w) - w, \chi(v) - v\big) \\ &= Q\big(\chi(w) - w\big) +_{\mathbb{K}} 2_{\mathbb{K}} \cdot_{\mathbb{K}} \varepsilon \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_Q\big(\chi(w) - w, \chi(v) - v\big) . \end{aligned}$$

Dodając do siebie obie strony powyższej równości dla $\varepsilon = -\mathbf{1}_{\mathbb{K}}$ i $\varepsilon = \mathbf{1}_{\mathbb{K}}$, otrzymujemy równość

$$Q\big(\chi(w) - w\big) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}} ,$$

słuszną dla *dowolnego* izotropowego wektora w. W konkluzji możemy zapisać, w rozpatrywanym tu przypadku (iii),

$$V_1 := \mathrm{Image}\,(\chi - \mathrm{id}_V) \subset Q^{-1}\big(\{0_{\mathbb{K}}\}\big)$$

(zawieranie to jest implikowane wprost przez (iii) dla wektorów nieizotropowych, a dla izotropowych zostało właśnie udowodnione). Zauważmy przy tym, że

(21) $$\forall_{x,y \in V_1} \;:\; \Phi_Q(x, y) = 2_{\mathbb{K}}^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} \big(Q(x +_V y) - Q(x) - Q(y)\big) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}$$

(wszak V_1 jest podgrupą), więc V_1 jest podprzestrzenią Q-zerową,

$$V_1 \subseteq V_1^{\perp_Q} .$$

Wybierzmy $x \in V$ oraz $y \in V_1^{\perp_Q}$, a wtedy – w świetle powyższego –

$$\begin{aligned} \Phi_Q\big(x, \chi(y) - y\big) &= \Phi_Q\big(\chi(x), \chi(y) - y\big) - \Phi_Q\big(\chi(x) - x, \chi(y) - y\big) = \Phi_Q\big(\chi(x), \chi(y) - y\big) \\ &= \Phi_Q(x, y) - \Phi_Q\big(\chi(x), y\big) = -\Phi_Q\big(\chi(x) - x, y\big) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}} , \end{aligned}$$

czyli – wobec dowolności x i niezwyrodnienia Q –

$$\forall_{y \in V_1^{\perp_Q}} \;:\; \chi(y) - y = 0_V ,$$

to zaś oznacza, że

(22) $$\chi\restriction_{V_1^{\perp_Q}} = \mathrm{id}_{V_1^{\perp_Q}} .$$

Przywołując raz jeszcze warunek (iii), konkludujemy, że

$$V_1^{\perp_Q} \subset Q^{-1}(\{\mathbf{0}_{\mathbb{K}}\})$$

(gdyby $v \in V_1^{\perp_Q}$ miał $Q(v) \neq 0$, czyli $v \in V^\times$, to wówczas byłoby także $v - v \equiv \chi(v) - v \neq 0_V$, więc sprzeczność), a że $V_1^{\perp_Q} \subset V$ jest podgrupą, przeto jest też automatycznie podprzestrzenią Q-zerową (por. (21)), a zatem

$$V_1^{\perp_Q} \subseteq \big(V_1^{\perp_Q}\big)^{\perp_Q} .$$

Ostatecznie otrzymujemy ciąg inkluzji

$$V_1 \subseteq V_1^{\perp_Q} \subseteq \big(V_1^{\perp_Q}\big)^{\perp_Q} = V_1 ,$$

w którym ostatnia równość wynika wprost ze Stw. 8. Powyższe implikuje już wprost równość

$$V_1 = V_1^{\perp_Q} ,$$

a z niej – na mocy Równ. (18) – parzystość $N_0 \equiv \dim_{\mathbb{K}} V$. Obecność w niej podprzestrzeni Q-zerowej V_1 wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V_1 = \frac{N_0}{2}$, czyli maksymalnego, przesądza – w świetle Stw. 10 – o hiperboliczności V i tym samym pozwala nam odnieść tezę Stw. 11 do izometrii χ o własności (22), tj.

ograniczającej się trywialnie do maksymalnej podprzestrzeni Q-zerowej $V_1^{\perp_Q} = V_1$. Tym sposobem wnioskujemy, że χ jest w istocie obrotem, co kończy dowód. $\square$

(Ceci n'est pas) La Fin

Literatura

[Art61] E. Artin, *Geometric algebra*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, vol. 3, Interscience Publishers, 1961.

[BT88] P. Budinich and A.M. Trautman, *The Spinorial Chessboard*, Trieste Notes in Physics, Springer, 1988.

[Car38a] É. J. Cartan, *Leçons sur la théorie des spineurs. I : les spineurs de l'espace à trois dimensions*, Actualités scientifiques et industrielles: Exposés de géométrie, vol. 9, Hermann & cie., 1938.

[Car38b] ———, *Leçons sur la théorie des spineurs. II : les spineurs de l'espace à $n > 3$ dimensions, les spineurs en géométrie riemannienne*, Actualités scientifiques et industrielles: Exposés de géométrie, vol. 11, Hermann & cie., 1938.

[Die55] J.A. Dieudonné, *La géométrie des groupes classiques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 5, Springer, 1955.

[Har90] F.R. Harvey, *Spinors and Calibrations*, Elsevier Science, 1990.

[Hel01] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Graduate studies in mathematics, vol. 34, American Mathematical Society, 2001.

[Pen68] R. Penrose, *"Structure of Space-Time"*, pp. 121–235, W.A. Benjamin, 1968.