PRYNCYPIALNOŚĆ – CNOTA FAJNA I UŻYTECZNA
(MAWF '23/24 1.XXIII [RRS])

FIG. 1. *Sua Tremendità* (Jego Fajność) Giorgio I, z wykształcenia i pasji hodowca kwiatów, z urzędu i fantazji princeps *Principato di Seborga*, kraju uznawanego (wedle samych 297 Seborgan) przez Burkinę Faso i kwitnącego w cieniu pragmatycznego *motto*: *Sub umbra sedi!* (Siedź w cieniu!).

Spis treści

Na ostatnim wykładzie zetknęliśmy się z konstrukcją wiązki włóknistej kanonicznie stowarzyszonej z dowolną rozmaitością klasy C^1, jaką jest wiązka styczna nad tą rozmaitością. Wiązka ta okazała się być wyposażoną w naturalną i intuicyjnie antycypowaną strukturę liniową we włóknie, z której wyabstrahowaliśmy pojęcie wiązki wektorowej, czyli geometryzacji algebraicznej struktury przestrzeni wektorowej. Kanoniczność konstrukcji wiązki wektorowej stycznej (tj. brak jakichkolwiek obstrukcji topologicznych dla jej realizacji) dowodzi naturalności tego pojęcia w kategorii rozmaitości różniczkowalnych. Obecnie podążymy dalej tropem konstrukcji kanonicznych wprost ku celowi naszych dociekań, jaki stanowią wiązki stowarzyszone Clifforda i spinorowe. Rozważymy zatem kolejny przykład kanonicznej geometryzacji prostej struktury algebraicznej, aby następnie wyabstrahować z naszych rozważań definicję nowej klasy wiązek włóknistych.

1. Wstęp

Jedną z naturalnych konstrukcji na przestrzeni wektorowej jest wybór bazy $\{e_i\}_{i\in\overline{1,D}}$, $D = \dim_{\mathbb{K}} V$, tj. wybór izomorfizmu

$$\mathbb{K}^{\times D} \xrightarrow{\cong} V \;:\; (v^1, v^2, \ldots, v^D) \longmapsto v^i \triangleright e_i \,.$$

Konstrukcja ta ma swój nader istotny odpowiednik w teorii wiązek wektorowych, który teraz omówimy.

Definicja 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times r}, \pi_{\mathbb{V}})$ będzie wiązką wektorową rzędu $r \in \mathbb{N}^{\times}$, o trywializacjach lokalnych $\tau_i \ : \ \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times r}$ stowarzyszonych z pokryciem otwartym $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B. **Wiązka reperów** (zwana też **wiązką baz**) **wiązki wektorowej** $\mathbb{V}$ to wiązka włóknista

$$\big(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}, B, \mathrm{GL}(r;\mathbb{K}), \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}\big)$$

o składowych

- przestrzeń totalna
$$\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V} \coloneqq \bigsqcup_{x \in B} \mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times r}, \mathbb{V}_x\big)$$
o strukturze rozmaitości różniczkowalnej klasy C^∞ indukowanej przez trywializacje $\{\tau_i\}_{i \in I}$ i o włóknie $(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V})_x \equiv \mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times r}, \mathbb{V}_x)$ nad dowolnym punktem $x \in B$ będącym zbiorem baz $\beta_x \ : \ \mathbb{K}^{\times r} \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}_x$ włókna $\mathbb{V}_x$;
- włókno typowe $\mathrm{GL}(r;\mathbb{K}) \equiv \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times r})$;
- rzut na bazę $\pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}} \ : \ \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V} \longrightarrow B \ : \ (\beta_x, x) \longmapsto x$.

Przy tym bijekcje $\mathsf{F}\tau_i$ odwrotne do

$$\mathsf{F}\tau_i^{-1} \ : \ \mathcal{O}_i \times \mathrm{GL}(r;\mathbb{K}) \xrightarrow{\cong} \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \ : \ (x, \chi) \longmapsto \big(\tau_i^{-1}\big(x, \chi(\cdot)\big), x\big)$$

indukują na $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ mocną topologię cofnięciową z topologii produktowej (podprzestrzeni) na zbiorach $\mathcal{O}_i \times \mathrm{GL}(r;\mathbb{K})$ (gdzie topologia na $\mathrm{GL}(r;\mathbb{K})$ to topologia podprzestrzeni topologicznej przestrzeni wektorowej $\mathbb{K}(r) \cong \mathbb{K}^{\times r^2}$), tj. taką, w której podzbiór $\mathcal{U} \subset \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek

$$\forall_{i \in I} \ : \ \mathsf{F}\tau_i\big(\mathcal{U} \cap \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)\big) \in \mathscr{T}\big(\mathcal{O}_i \times \mathrm{GL}(r;\mathbb{K})\big).$$

W tej topologii odwzorowania $\mathsf{F}\tau_i$ są homeomorficznymi trywializacjami lokalnymi o odwzorowaniach przejścia klasy C^∞:

$$\begin{aligned} g_{ij}^{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}} \equiv \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times r}, g_{ij}(\cdot)\big) \quad &: \quad \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\mathrm{GL}(r;\mathbb{K})\big) \\ &: \quad x \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times r}, g_{ij}(x)\big), \end{aligned}$$

gdzie

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times r}, g_{ij}(x)\big) \ : \ \mathrm{GL}(r;\mathbb{K}) \circlearrowleft \ : \ \chi \longmapsto g_{ij}(x) \circ \chi.$$

Struktura rozmaitości różniczkowej klasy C^∞ jest indukowana wzdłuż homeomorfizmów $\mathsf{F}\tau_i$ ze struktury produktowej na lokalnym modelu $\mathcal{O}_i \times \mathrm{GL}(r;\mathbb{K})$, trywialnej (klasy C^∞) w drugim czynniku i wyznaczanej przez przecięcie z atlasem $\widehat{\mathscr{A}}_B$ na rozmaitości B w czynniku pierwszym. Względem tak określonej struktury różniczkowalnej trywializacje lokalne $\mathsf{F}\tau_i$ są tautologicznie gładkie klasy C^∞, podobnie jak rzut kanoniczny na bazę, $\pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}} \equiv \mathrm{pr}_1 \circ \mathsf{F}\tau_i^{-1}$.

Powyższa definicja wymaga kilku słów komentarza. W pierwszej kolejności odnotujmy istnienie naturalnego prawego działania – włókno po włóknie – grupy $\mathrm{GL}(r;\mathbb{K})$ na przestrzeni totalnej $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ danego w postaci

$$r \ : \ \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V} \times \mathrm{GL}(r;\mathbb{K}) \longrightarrow \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V} \ : \ \big((\beta_x, x), \chi\big) \longmapsto (\beta_x \circ \chi, x) \equiv (\beta_x, x) \triangleleft \chi.$$

Działanie to jest w jawny sposób wolne (wobec odwracalności elementów włókna $\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times r}, \mathbb{V}_x)$), a nadto przechodnie nad dowolnym punktem $x \in B$ – wszak dla dowolnej pary $\beta_{x\,1}, \beta_{x\,2} \in \mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times r}, \mathbb{V}_x\big)$ spełniona jest tożsamość

$$\beta_{x\,2} \equiv \beta_{x\,1} \circ \big(\beta_{x\,1}^{-1} \circ \beta_{x\,2}\big),$$

a ponieważ $\beta_{x\,1}^{-1} \circ \beta_{x\,2} \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times r})$ jest odwzorowaniem o odwrotności $\beta_{x\,2}^{-1} \circ \beta_{x\,1}$, przeto możemy zapisać

$$(\beta_{x\,2}, x) = (\beta_{x\,1}, x) \triangleleft \big(\beta_{x\,1}^{-1} \circ \beta_{x\,2}\big),$$

konstatując przy tym, że $\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times r}, \mathbb{V}_x)$ jest torsorem grupy $\mathrm{GL}(r;\mathbb{K})$. Wybór dowolnego elementu $\beta_{x\,*} \in \mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times r}, \mathbb{V}_x)$ zadaje *niekanoniczny* ($\mathrm{GL}(r;\mathbb{K})$-ekwiwariantny) izomorfizm

$$\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times r}, \mathbb{V}_x\big) \xrightarrow{\cong} \mathrm{GL}(r;\mathbb{K}) \ : \ \beta_x \longmapsto \beta_{x\,*}^{-1} \circ \beta_x \,.$$

Wobec powyższego bez trudu stwierdzamy, że odwzorowania $\mathsf{F}\tau_i^{-1}$ są bijektywne, oto bowiem przyporządkowują w sposób jawnie injektywny elementom zbioru $\{x\}\times\mathrm{GL}(r;\mathbb{K})$, $x \in \mathcal{O}_i$ elementy zbioru $\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times r}, \mathbb{V}_x) \times \{x\}$. Są więc odwracalne, a konkretnie

$$\mathsf{F}\tau_i \ : \ \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathrm{GL}(r;\mathbb{K}) \ : \ (\beta_x, x) \longmapsto \big(x, \mathrm{pr}_2 \circ \tau_i \beta_x\big)\,,$$

co pozwala użyć ich do zaindukowania topologii na $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ według opisanego schematu. Ich identyfikacja jako trywializacji lokalnych zasadza się na bezpośrednim rachunku:

$$\begin{aligned} \mathsf{F}\tau_i \circ \mathsf{F}\tau_j^{-1} \quad &: \quad \mathcal{O}_{ij} \times \mathrm{GL}(r;\mathbb{K}) \circlearrowleft \\ &: \quad (x,\chi) \longmapsto \mathsf{F}\tau_i\big(\tau_j^{-1}\big(x,\chi(\cdot)\big), x\big) \equiv \mathsf{F}\tau_i\big(\tau_i^{-1} \circ \tau_i \circ \tau_j^{-1}\big(x,\chi(\cdot)\big), x\big) \\ &\qquad = \mathsf{F}\tau_i\big(\tau_i^{-1}\big(x, g_{ij}(x) \circ \chi(\cdot)\big), x\big) \equiv \mathsf{F}\tau_i \circ \mathsf{F}\tau_i^{-1}\big(x, g_{ij}(x) \circ \chi(\cdot)\big) \\ &\qquad = \big(x, g_{ij}(x) \circ \chi(\cdot)\big)\,, \end{aligned}$$

w którym $g_{ij} \in C^\infty(\mathcal{O}_{ij}, \mathrm{GL}(r;\mathbb{K}))$ są odwzorowaniami przejścia wiązki $\mathbb{V}$, a który ukazuje gładki charakter odwzorowań $\mathsf{F}\tau_i \circ \mathsf{F}\tau_j^{-1}$.

Na koniec zauważmy, że odwzorowania $\mathsf{F}\tau_i^{-1}$ (więc także trywializacje lokalne $\mathsf{F}\tau_i$) są ekwiwariantne względem prawostronnego działania grupy $\mathrm{GL}(r;\mathbb{K})$: regularnego $\wp$ na drugim czynniku kartezjańskim ich dziedziny oraz opisanego powyżej r na przeciwdziedzinie. Istotnie, obliczamy wprost – dla dowolnego elementu $\gamma \in \mathrm{GL}(r;\mathbb{K})$ –

$$\begin{aligned} \mathsf{F}\tau_i^{-1} \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{O}_i} \times \wp_\gamma)(x,\chi) \quad &= \quad \mathsf{F}\tau_i^{-1}(x, \chi \circ \gamma) = \big(\tau_i^{-1}\big(x, \chi \circ \gamma(\cdot)\big), x\big) \equiv \big(\tau_i^{-1}\big(x,\chi(\cdot)\big) \circ \gamma(\cdot), x\big) \\ &\equiv \quad \big(\tau_i^{-1}\big(x,\chi(\cdot)\big), x\big) \triangleleft \gamma \equiv r_\gamma \circ \mathsf{F}\tau_i^{-1}(x,\chi)\,. \end{aligned}$$

Trywializacje lokalne są zatem zgodne z zaobserwowaną wcześniej strukturą torsora grupy $\mathrm{GL}(r;\mathbb{K})$ na włóknie wiązki reperów.

Abstrakcja pojęcia wiązki głównej z powyższej konstrukcji kanonicznej wymaga[1] mariażu algebraicznej struktury grupy i struktury topologicznej oraz różniczkowej, który opisuje

Definicja 2. Grupa topologiczna to grupa

$$\big(\mathrm{G}, m \equiv \cdot, \mathrm{Inv} \equiv (\cdot)^{-1}, \bullet \longmapsto e\big)\,,$$

której nośnik G jest przestrzenią topologiczną, a odwzorowania strukturalne m i Inv są ciągłe. **Podgrupa topologiczna** grupy topologicznej $(\mathrm{G}, m, \mathrm{Inv}, \bullet \longmapsto e)$ to grupa topologiczna $(\mathrm{H}, m\restriction_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}}, \mathrm{Inv}\restriction_{\mathrm{H}}, \bullet \longmapsto e)$, której nośnik H jest podprzestrzenią topologiczną przestrzeni G. **Homomorfizm topologiczny** między grupami topologicznymi $(\mathrm{G}_1, m_1, \mathrm{Inv}_1, \bullet_1 \longmapsto e_1)$ i $(\mathrm{G}_2, m_2, \mathrm{Inv}_2, \bullet_2 \longmapsto e_2)$ to homomorfizm grup ciągły względem topologii dziedziny i przeciwdziedziny.

Grupa Liego to grupa

$$\big(\mathrm{G}, m \equiv \cdot, \mathrm{Inv} \equiv (\cdot)^{-1}, \bullet \longmapsto e\big)\,,$$

której nośnik jest rozmaitością gładką, a odwzorowania strukturalne m i Inv są klasy C^∞. **Podgrupa Liego** grupy Liego $(\mathrm{G}, m, \mathrm{Inv}, \bullet \longmapsto e)$ to grupa Liego $(\mathrm{H}, m\restriction_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}}, \mathrm{Inv}\restriction_{\mathrm{H}}, \bullet \longmapsto e)$, której nośnik H jest podrozmaitością klasy C^∞ rozmaitości G. **Homomorfizm grup Liego** to homomorfizm grup gładki względem struktury różniczkowej dziedziny i przeciwdziedziny.

Bogatym źródłem przykładów grup Liego jest poniższe twierdzenie, które podajemy bez dowodu (dowód jest prezentowany na kursie Teorii Grup II).

[1] W interesujących nas zastosowaniach będziemy mieć zawsze do czynienia ze strukturą różniczkowalną zarówno na grupie, jak i na zbiorze, na którym ta działa, jednakowoż dla zachowania pełnej kontroli nad założeniami, których przyjęcie jest niezbędnym w rozmaitych rozpatrywanych przez nas okolicznościach, warto wprowadzić pojemniejsze pojęcie grupy i jej działania w kategorii topologicznej, co też czynimy poniżej.

Twierdzenie 1 (Cartana o podgrupie domkniętej)**.** Każda podgrupa domknięta grupy Liego jest tej ostatniej podrozmaitością i grupą Liego (a zatem w sumie podgrupą Liego). I odwrotnie, każda podgrupa grupy Liego będąca jej podrozmaitością jest domkniętą podgrupą Liego tejże grupy.

Przykłady 1.

(1) dowolna $V \in \mathrm{Obj}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{(<\infty)}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ jest przemienną grupą Liego z $(m, \mathrm{Inv}, e) = (+_V, \mathsf{P}_V, \mathbf{0}_V)$;

(2) dla V z poprzedniego przykładu $\mathrm{GL}(V;\mathbb{K}) = \{\ \chi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)\ \ |\ \ \exists\ \chi^{-1}\ \}$ jako otwarty podzbiór przestrzeni wektorowej $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ jest grupą Liego (z superpozycją endomorfizmów jako mnożeniem) zwaną **grupą główną liniową** V – jest ona izomorficzna z **grupą główną liniową** $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) = \{\ A \in \mathbb{K}(n)\ \ |\ \ \det_{(n)} A \neq 0\ \}$ dziedziczącą topologię i strukturę różniczkową z przestrzeni wektorowej $\mathbb{K}(n) \equiv \mathbb{K}^{\times n^2}$, w której jest zanurzona jako podzbiór otwarty $\det_{(n)}^{-1}(\mathbb{K}^\times)$ (wszak $\det_{(n)}\ :\ \mathbb{K}(n) \longrightarrow \mathbb{K}$ jest odwzorowaniem wielomianowo zależnym od wyrazów macierzy, więc ciągłym);

(3) wszechobecne w fizyce „małe” grupy Liego $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \equiv \mathrm{U}(1) \cong \mathbb{S}^1$ i $\mathrm{SU}(2) \cong \mathbb{S}^3$ oraz **grupa Poincarégo** $\mathrm{ISO}(3,1) = \mathbb{R}^4 \rtimes \mathrm{SO}(3,1)$ o topologii będącej pochodną (złożonej) topologii **grupy Lorentza** $\mathrm{SO}(3,1) = \{\ L \in \mathrm{GL}(4;\mathbb{R})\ \ |\ \ L^{\mathrm{T}}\cdot\eta\cdot L = \eta\ \}$ odwzorowań zachowujących metrykę Minkowskiego $\eta = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ (ich naturalne działanie na $\mathbb{R}^4$ określa iloczyn półprosty w definicji $\mathrm{ISO}(3,1)$);

(4) **grupa specjalna liniowa** $\mathrm{SL}(n;\mathbb{K}) = \{\ A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\ \ |\ \ \det_{(n)} A = 1\ \}$;

(5) **grupa ortogonalna** $\mathrm{O}(n;\mathbb{K}) = \{\ A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\ \ |\ \ A^{\mathrm{T}} \cdot A = \mathbf{1}_n\ \}$;

(6) **grupa specjalna ortogonalna** $\mathrm{SO}(n;\mathbb{K}) = \mathrm{O}(n;\mathbb{K}) \cap \mathrm{SL}(n;\mathbb{K})$;

(7) **grupa unitarna** $\mathrm{U}(n) = \{\ A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})\ \ |\ \ A^\dagger \cdot A = \mathbf{1}_n\ \}$;

(8) **grupa specjalna unitarna** $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n;\mathbb{C})$;

(9) **grupa symplektyczna** $\mathrm{Sp}(n;\mathbb{K}) = \{\ A \in \mathrm{SL}(2n;\mathbb{K})\ \ |\ \ A^{\mathrm{T}} \cdot J_n \cdot A = J_n\ \}$ odwzorowań zachowujących „strukturę symplektyczną”

$$J_n = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix}.$$

Uzgodninie struktury różniczkowej i algebraicznej na zbiorze G ma daleko idące konsekwencje, których szczegółowe studium jest przedmiotem odrębnego kursu (Teoria Grup II – zapraszam w tym semestrze!) i z których część przyjdzie nam jeszcze omawiać w kontekście konstrukcji powiązania na wiązkach głównych. Tymczasem jednak przejdziemy bezpośrednio do dyskusji zagadnień związanych z działaniem grup Liego na rozmaitościach różniczkowalnych, które odgrywają kluczową rolę w konstrukcji wiązek stowarzyszonych (takich jak wiązki Clifforda i spinorowe właśnie). Zaczniemy, jak zazwyczaj, od pojęcia podstawowego.

Definicja 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj G będzie grupą[2] i niech X będzie zbiorem o grupie symetrycznej[3]. Homomorfizm grup

$$\lambda.\ :\ \mathrm{G} \longrightarrow \mathfrak{S}(X)\ :\ g \longmapsto \lambda_g$$

określamy mianem **działania lewostronnego grupy** G **na zbiorze** X, na którym jest określone działanie grupy G, a który nazywamy **zbiorem z działaniem lewostronnym grupy** G. Antyhomomorfizm

$$\varrho.\ :\ \mathrm{G} \longrightarrow \mathfrak{S}(X)\ :\ g \longmapsto \rho_g$$

nazywamy **działaniem prawostronnym grupy** G **na zbiorze** X, a zbiór w nie wyposażony – **zbiorem z działaniem prawostronnym grupy** G. Lekko przeciążając notację, realizację podgrupy $\lambda_{\mathrm{G}} \subset \mathfrak{S}(X)$ będziemy zapisywać jako

$$\lambda\ :\ \mathrm{G} \times X \longrightarrow X\ :\ (g,x) \longmapsto \lambda_g(x) \equiv g \triangleright x \equiv \lambda(g,x)\,,$$

a podgrupy $\varrho_{\mathrm{G}} \subset \mathfrak{S}(X)$ – jako

$$\varrho\ :\ X \times \mathrm{G} \longrightarrow X\ :\ (x,g) \longmapsto \varrho_g(x) \equiv x \triangleleft g \equiv \varrho(x,g)\,.$$

[2]Dla skrótu odwołujemy się do grupy poprzez jej nośnik.

[3]Grupa symetryczna zbioru to grupa permutacji jego elementów. (przyp.)

Niechaj $X_A,\ A \in \{1,2\}$ będą zbiorami z działaniami lewostronnymi λ^A grupy G i niech $f\ :\ X_1 \longrightarrow X_2$ będzie odwzorowaniem pomiędzy nimi. Powiemy, że f jest **odwzorowaniem lewostronnie** G**-ekwiwariantnym**, jeśli spełniony jest warunek opisany przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \times X_1 \arrow[r, "\lambda^1"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times f"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{G} \times X_2 \arrow[r, "\lambda^2"'] & X_2 \end{tikzcd} .$$

Analogicznie w przypadku działań prawostronnych $\varrho^A,\ A \in \{1,2\}$ na tych zbiorach odwzorowanie $f\ :\ X_1 \longrightarrow X_2$ spełniające warunek wyrażony przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} X_1 \times \mathrm{G} \arrow[r, "\varrho^1"] \arrow[d, "f \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}}"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ X_2 \times \mathrm{G} \arrow[r, "\varrho^2"'] & X_2 \end{tikzcd}$$

nazwiemy **odwzorowaniem prawostronnie** G**-ekwiwariantnym**.

Parę $((X, \mathscr{T}(X)), \lambda)$ złożoną z przestrzeni topologicznej $(X, \mathscr{T}(X))$ oraz działania lewostronnego grupy topologicznej G na X nazywamy **przestrzenią z działaniem topologicznym lewostronnym grupy** G (albo G**-przestrzenią topologiczną lewostronną**), jeśli λ jest odwzorowaniem ciągłym. Analogicznie definiujemy **przestrzeń z działaniem topologicznym prawostronnym** (albo G**-przestrzeń topologiczną prawostronną**) G. Ciągłe odwzorowanie lewostronnie (wzgl. prawostronnie) G-ekwiwariantne między przestrzeniami z działaniem topologicznym lewostronnym (wzgl. prawostronnym) nosi miano **odwzorowania lewostronnie** (wzgl. **prawostronnie**) topologicznie G**-ekwiwariantnego**.

Parę $((M, \widehat{\mathscr{A}}), \lambda)$ złożoną z rozmaitości różniczkowalnej $(M, \widehat{\mathscr{A}})$ oraz działania lewostronnego grupy Liego G na M nazywamy **rozmaitością z działaniem gładkim lewostronnym grupy** G (albo G**-rozmaitością gładką lewostronną**), jeśli λ jest odwzorowaniem gładkim klasy C^∞. Analogicznie definiujemy **rozmaitość z działaniem gładkim prawostronnym** (albo G**-rozmaitość gładką prawostronną**) G. Gładkie odwzorowanie lewostronnie (wzgl. prawostronnie) G-ekwiwariantne klasy C^∞ między rozmaitościami z działaniem gładkim lewostronnym (wzgl. prawostronnym) nosi miano **odwzorowania lewostronnie** (wzgl. **prawostronnie**) **gładko** G**-ekwiwariantnego**. Zbiór odwzorowań G-ekwiwariantnych między ustalonymi dwiema rozmaitościami $M_A,\ A \in \{1,2\}$ z działaniem grupy G będziemy oznaczać symbolem

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(M_1, M_2)\,.$$

Przykłady 2.

(1) Kanonicznym przykładem G-przestrzeni jest sama grupa Liego G, przy czym jako działanie gładkie możemy wybrać dowolne złożenie dwóch działań elementarnych: **lewego działania regularnego**

$$\ell\ :\ \mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}\ :\ (h, g) \longmapsto m(h, g) \equiv \ell_h(g)$$

i **prawego działania regularnego**

$$\wp\ :\ \mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}\ :\ (g, h) \longmapsto m(g, h) \equiv \wp_h(g)\,,$$

e.g., **działanie dołączone**

$$\mathrm{Ad}\ :\ \mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}\ :\ (h, g) \longmapsto h \cdot g \cdot h^{-1} \equiv \ell_h \circ \wp_{h^{-1}}(g) \equiv \mathrm{Ad}_h(g)\,.$$

Tak przygotowani formalnie, możemy już przejść do stosownej abstrakcji struktury z Def. 1.

2. Wiązki główne z grupą strukturalną

Powyższa rekapitulacja rudymentarnych pojęć teorii grup Liego i G-przestrzeni[4] daje nam do ręki intuicje i narzędzia formalne nieodzowne do sprawnego i konstruktywnego poruszania się w środowisku struktur geometrycznych kluczowych dla geometryzacji modułów spinorowych, a także – dla modelowania symetrii lokalnych (a ściślej: ulokalnionych symetrii globalnych) w mechanice klasycznej i teorii pola. Wracamy teraz do ich szczegółowej dyskusji.

Definicja 4. Niechaj G będzie grupą Liego. **Wiązka główna** o **grupie strukturalnej** G to wiązka włóknista

$$(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$$

o składowych:

- przestrzeń totalna P_{G} z wolnym działaniem prawostronnym $r.$ grupy strukturalnej G, które jest przechodnie we włóknie nad (dowolnym) punktem bazy, co opisuje diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"] \\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[r, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"'] & B \end{tikzcd} \ ;$$

- lokalne trywializacje

$$\tau_i \ : \ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}\,, \quad i \in I$$

stowarzyszone z pokryciem otwartym $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ bazy B i G-ekwiwariantne względem działań prawostronnych: r na dziedzinie oraz regularnego $\wp$ na drugim czynniku kartezjańskim przeciwdziedziny,

$$\widetilde{\wp}^i \equiv \mathrm{id}_{\mathcal{O}_i} \times \wp \ : \ (\mathcal{O}_i \times \mathrm{G}) \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \ : \ \big((x,g),h\big) \longmapsto (x, g\cdot h)\,,$$

tj. spełniające warunki

$$\tau_i \circ r_g = \widetilde{\wp}^i_g \circ \tau_i\,, \qquad i \in I\,.$$

Podwiązka główna o grupie strukturalnej H wiązki głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ to podwiązka $(\mathsf{P}_{\mathrm{H}}, B, \mathrm{H}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \upharpoonright_{\mathsf{P}_{\mathrm{H}}})$ tejże wiązki (włóknistej) o grupie strukturalnej będącej podgrupą Liego $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$.

Morfizm wiązek głównych $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}_\alpha}, B_\alpha, \mathrm{G}_\alpha, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_\alpha}})$, $\alpha \in \{1,2\}$ o działaniach odnośnych grup strukturalnych r^α to trójka (Φ, f, φ) złożona z morfizmu wiązek włóknistych

$$(\Phi, f) \ : \ (\mathsf{P}_{\mathrm{G}_1}, B_1, \mathrm{G}_1, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_1}}) \longrightarrow (\mathsf{P}_{\mathrm{G}_2}, B_2, \mathrm{G}_2, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_2}})$$

oraz homomorfizmu grup topologicznych (wzgl. Liego) pozostających w relacji wyrażanej przez diagram przemienny

(1)
$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}_{\mathrm{G}_1} \times \mathrm{G}_1 \arrow[r, "r^1"] \arrow[d, "\Phi\times\varphi"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}_1} \arrow[r, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_1}}"] \arrow[d, "\Phi"] & B_1 \arrow[d, "f"] \\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}_2} \times \mathrm{G}_2 \arrow[r, "r^2"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}_2} \arrow[r, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_2}}"'] & B_2 \end{tikzcd} \ .$$

Przykłady 3.

(1) Trywialna wiązka główna nad B o grupie strukturalnej G, czyli

$$(B \times \mathrm{G}, B, \mathrm{G}, \mathrm{pr}_1)\,.$$

[4] Więcej o nich można dowiedzieć się z mojego wykładu krypto-monograficznego „Teoria grup II”. Uzupełnienie nader istotne z punktu widzenia naszych przyszłych dociekań przyniesie także następny wykład.

(2) Wiązka reperów wiązki wektorowej $\mathbb{V}$ modelowanej na $\mathbb{K}^{\times r}$, czyli

$$\left(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}, B, \mathrm{GL}(r;\mathbb{K}), \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}\right),$$

w szczególności zaś – **wiązka reperów nad rozmaitością** (albo **wiązka baz nad rozmaitością**) M wymiaru n, czyli

$$\left(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathsf{T}M, M, \mathrm{GL}(\mathsf{T}M) \cong \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}), \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathsf{T}M}\right).$$

(3) **Rozwłóknienie Hopfa** (jeszcze raz, tym razem jako...)

$$\left(\mathrm{SU}(2) \equiv \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2, \mathrm{U}(1), \pi_{\mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1)}\right),$$

w którym rzut na bazę przyjmuje postać

$$\pi_{\mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1)} \;:\; \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^{\times 3} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R} \;:\; \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix} \longmapsto \left(2z_1 \cdot \overline{z}_2, |z_1|^2 - |z_2|^2\right),$$

a działanie definiujące grupy strukturalnej $\mathrm{U}(1)$ jest dane wzorem

$$\begin{aligned} r. \;&:\; \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1) \longrightarrow \mathrm{SU}(2) \\ &:\; \left(\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix}, u\right) \longmapsto \begin{pmatrix} z_1 \cdot u & z_2 \cdot u^{-1} \\ -\overline{z}_2 \cdot u & \overline{z}_1 \cdot u^{-1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \overline{u} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

w którego ostatniej części $\mathrm{U}(1)$ traktujemy jako podgrupę Liego macierzowej grupy Liego $\mathrm{SU}(2)$.

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Def. 4 i niechaj

$$\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} := \{\ (p_1, p_2) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \quad | \quad \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1) = \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2)\ \}$$

będzie produktem włóknistym. **Odwzorowanie ilorazowe** na wiązce głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ to odwzorowanie

$$\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \;:\; \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{G}$$

określone przez warunek

$$\forall_{(p_1,p_2) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \;:\; p_2 = p_1 \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1, p_2).$$

Uwaga 1. O postulowanej gładkości odwzorowania ilorazowego najłatwiej jest przekonać się przy użyciu trywializacji lokalnych. Istotnie, niechaj $p_1, p_2 \in (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_x$, $x \in \mathcal{O}_i$, $i \in I$, przy czym $p_\alpha = \tau_i^{-1}(x, g_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ dla pewnych elementów $g_\alpha \in \mathrm{G}$, a wtedy wobec równości

$$p_2 = \tau_i^{-1}(x, g_2) \equiv \tau_i^{-1}\left(x, g_1 \cdot \left(g_1^{-1} \cdot g_2\right)\right) = \tau_i^{-1}(x, g_1) \triangleleft \left(g_1^{-1} \cdot g_2\right) \equiv p_1 \triangleleft \left(g_1^{-1} \cdot g_2\right)$$

otrzymujemy reprezentację lokalną odwzorowania ilorazowego:

$$\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1, p_2) \equiv g_1^{-1} \cdot g_2 = \mathrm{m}\left(\mathrm{Inv} \circ \mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p_1), \mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p_2)\right),$$

daną w postaci superpozycji odwzorowań gładkich (m jest operacją binarną w G), więc gładką.

Podstawowe własności strukturalne odwzorowania ilorazowego, z których przyjdzie nam korzystać niebawem, opisuje

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 5. Odwzorowanie ilorazowe spełnia warunki wyrażone przez następujące diagramy przemienne:

(DM1) skośna symetria

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[r, "\tau_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"] \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"] \\ \mathrm{G} \arrow[r, "\mathrm{Inv}"'] & \mathrm{G} \end{tikzcd},$$

gdzie $\tau_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \ : \ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \circlearrowleft \ : \ (p_1, p_2) \longmapsto (p_2, p_1)$ jest (obciętą do produktu włóknistego) transpozycją kanoniczną, czyli

$$\forall_{(p_1,p_2)\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_B\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \ : \ \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2, p_1) = \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1, p_2)^{-1} \, ;$$

(DM2) warunek 1-kocyklu

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[r, "(\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\circ\mathrm{pr}_{1,2},\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\circ\mathrm{pr}_{2,3})"] \arrow[dr, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\circ\mathrm{pr}_{1,3}"'] & \mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[d, "M"] \\ & \mathrm{G} \end{tikzcd} ,$$

gdzie $\mathrm{pr}_{i,j} \ : \ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \ : \ (p_1, p_2, p_3) \longmapsto (p_i, p_j), \ (i, j) \in \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$ jest (obciętym do produktu włóknistego) rzutem kanonicznym, czyli

$$\forall_{(p_1,p_2,p_3)\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_B\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_B\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \ : \ \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2, p_3) \circ \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1, p_3)^{-1} \circ \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1, p_2) = e \, ;$$

(DM3) G-ekwiwariantność

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"'] & (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \times \mathrm{G} \arrow[l, "(r\circ\mathrm{pr}_{1,3},\mathrm{pr}_2)"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\times r"] \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\times\mathrm{id}_{\mathrm{G}}"] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"] \\ \mathrm{G} & \mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[l, "\ell\circ(\mathrm{Inv}\times\mathrm{id}_{\mathrm{G}})\circ\tau_{\mathrm{G},\mathrm{G}}"] \arrow[r, "\wp"'] & \mathrm{G} \end{tikzcd} ,$$

czyli

$$\forall_{(p_1,p_2)\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_B\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \ g_1,g_2\in\mathrm{G}} \ : \ \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1 \triangleleft g_1, p_2 \triangleleft g_2) = g_1^{-1} \cdot \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1, p_2) \cdot g_2 \, .$$

Dowód: Oczywisty. □

Nie zawsze mamy do czynienia z pełnym „pakietem" obiektów wymienionych w definicji wiązki głównej. Warto zatem zastanowić się, które z jej elementów mają naturę *konstytutywną*, tj. determinują istnienie struktury wiązki głównej na rozmaitości. Odpowiedzi na tak postawione pytanie przynosi

Stwierdzenie 2. Niechaj P, B będą rozmaitościami i niech G będzie grupą Liego. Zakładamy też, że jest określona surjektywna submersja $\pi \ : \ \mathsf{P} \longrightarrow B$ oraz gładkie działanie prawostronne $r_{\cdot} \ : \ \mathsf{P} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathsf{P}$ grupy G na P. Jeśli działanie $r_{\cdot}$ jest swobodne, jego orbity pokrywają się z poziomicami π, a odwzorowanie $\phi_{\mathsf{P}} \ : \ \mathsf{P} \times_B \mathsf{P} \longrightarrow \mathrm{G}$ określone (jednoznacznie) przez warunek

$$\forall_{(p_1,p_2)\in\mathsf{P}\times_B\mathsf{P}} \ : \ p_2 = r_{\phi_{\mathsf{P}}(p_1,p_2)}(p_1)$$

jest gładkie, to wówczas czwórka

$$(\mathsf{P}, B, \mathrm{G}, \pi)$$

jest wiązką główną.

Dowód: Na podstawie Tw. 19-20-21-22.1 o istnieniu cięć lokalnych surjektywnej submersji stwierdzamy istnienie pokrycia otwartego $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ rozmaitości B, na którego elementach określone są gładkie cięcia lokalne $\sigma_i \ : \ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathsf{P}$ submersji π, możemy zatem zdefiniować jawnie gładkie odwzorowania

$$\tau_i^{-1} \ : \ \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{O}_i) \ : \ (x, g) \longmapsto r_g\big(\sigma_i(x)\big) \, .$$

Wykorzystując odwzorowanie ϕ_{P}, bez trudu znajdujemy ich (gładkie) odwrotności:

$$\tau_i \ : \ \pi^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \ : \ p \longmapsto \big(\pi(p), \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i \circ \pi(p), p\big)\big) \, .$$

Są one dobrze określone, gdyż
$$\pi\big(\sigma_i \circ \pi(p)\big) = (\pi \circ \sigma_i) \circ \pi(p) = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_i} \circ \pi(p) = \pi(p)\,,$$
i – istotnie – spełniają postulowane tożsamości:
$$\tau_i^{-1} \circ \tau_i(p) = \tau_i^{-1}\big(\pi(p), \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i \circ \pi(p), p\big)\big) = r_{\phi_{\mathsf{P}}(\sigma_i \circ \pi(p),p)}\big(\sigma_i \circ \pi(p)\big) \equiv p\,,$$
$$\begin{aligned}\tau_i \circ \tau_i^{-1}(x,g) &= \tau_i\big(r_g\big(\sigma_i(x)\big)\big) = \big(\pi \circ r_g \circ \sigma_i(x), \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i \circ \pi \circ r_g \circ \sigma_i(x), r_g \circ \sigma_i(x)\big)\big)\\ &= \big(\pi \circ \sigma_i(x), \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i \circ \pi \circ \sigma_i(x), r_g \circ \sigma_i(x)\big)\big) = \big(x, \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i(x), r_g \circ \sigma_i(x)\big)\big) = (x,g)\,,\end{aligned}$$
z których druga wynika stąd, że działanie G odwzorowuje poziomicę π w siebie, a do tego nieuchronnie
$$\forall_{(p_1,p_2,g)\in\mathsf{P}^{\times 2}\times\mathrm{G}} \;:\; \phi_{\mathsf{P}}\big(p_1, r_g(p_2)\big) = \phi_{\mathsf{P}}(p_1,p_2)\cdot g\,.$$
Są one także stosownie G-ekwiwariantne, oto bowiem[5]
$$\tau_i^{-1}\big((x,g) \triangleleft h\big) \equiv \tau_i^{-1}(x, g\cdot h) = r_{g\cdot h}\big(\sigma_i(x)\big) = r_h \circ r_g\big(\sigma_i(x)\big) = r_h\big(r_g \circ \sigma_i(x)\big) \equiv r_h \circ \tau_i^{-1}(x,g)\,.$$

Skonstruowane powyżej trywializacje lokalne spełniają w punktach $x \in \mathcal{O}_{ij},\ i,j \in I$ warunki
$$\begin{aligned}\tau_i \circ \tau_j^{-1}(x,g) &= \tau_i\big(r_g \circ \sigma_j(x)\big) = \big(\pi \circ r_g \circ \sigma_j(x), \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i \circ \pi \circ r_g \circ \sigma_j(x), r_g \circ \sigma_j(x)\big)\big)\\ &= \big(x, \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i(x), r_g \circ \sigma_j(x)\big)\big) = \big(x, \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i(x), \sigma_j(x)\big)\cdot g\big)\,,\end{aligned}$$
z których odczytujemy postać odwzorowań przejścia:
$$g_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{G} \;:\; x \longmapsto \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i(x), \sigma_j(x)\big)\,,$$
zamykając tym samym procedurę identyfikacji postulowanej struktury wiązki głównej o grupie strukturalnej G. □

W następnej kolejności przedstawimy wygodne kryterium trywializowalności wiązki głównej.

Stwierdzenie 3. Istnieje wzajem jednoznaczna odpowiedniość między cięciami lokalnymi klasy C^∞ wiązki głównej i jej trywializacjami lokalnymi. W szczególności wiązka główna jest globalnie trywializowalna wtedy i tylko wtedy, gdy ma globalne cięcie.

Dowód: Cięciu lokalnemu $\sigma \;:\; \mathcal{O} \longrightarrow \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}) \subset \mathsf{P}_{\mathrm{G}},\ \mathcal{O} \in \mathscr{T}(B)$ przyporządkowujemy trywializację (lokalną)
$$\tau_\sigma \;:\; \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O} \times \mathrm{G} \;:\; p \longmapsto \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), p\big)\big)$$
o pożądanych własnościach, a więc odwracalną,
$$\tau_\sigma^{-1} \;:\; \mathcal{O} \times \mathrm{G} \longrightarrow \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}) \;:\; (x,g) \longmapsto \sigma(x) \triangleleft g\,,$$
i G-ekwiwariantną,
$$\begin{aligned}\tau_\sigma(p \triangleleft g) &\equiv \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p \triangleleft g), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p \triangleleft g), p \triangleleft g\big)\big) = \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), p \triangleleft g\big)\big)\\ &= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), p\big)\cdot g\big) = \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), p\big)\big) \triangleleft g \equiv \tau_\sigma(p) \triangleleft g\,.\end{aligned}$$

I odwrotnie, dowolnej trywilizacji lokalnej $\tau \;:\; \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O} \times \mathrm{G}$ przypisujemy cięcie (lokalne)
$$\sigma_\tau \;:\; \mathcal{O} \longrightarrow \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}) \;:\; x \longmapsto \tau^{-1}(x,e)\,.$$
Powyższe przyporządkowania są przy tym wzajem odwrotne, oto bowiem – z jednej strony –
$$\forall_{x\in\mathcal{O}} \;:\; \sigma_{\tau_\sigma}(x) = \tau_\sigma^{-1}(x,e) = \sigma(x) \triangleleft e = \sigma(x)\,,$$

[5] Odwrotność G-ekwiwariantnej bijekcji jest odwzorowaniem G-ekwiwariantnym.

oraz – z drugiej strony –

$$\forall_{p\in\pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\rm G}}(\mathcal{O})}\ :\ \tau_{\sigma_\tau}(p)=\big(\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p),\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}\big(\sigma_\tau\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p),p\big)\big)=\big(\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p),\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p),e\big),p\big)\big)\,,$$

a ponieważ

$$p\equiv\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p),e\big)\triangleleft\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p),e\big),p\big)\,,$$

czyli

$$\begin{aligned}\tau(p)&=\tau\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p),e\big)\triangleleft\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p),e\big),p\big)\big)=\tau\circ\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p),e\big)\triangleleft\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p),e\big),p\big)\\&=\big(\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p),e\big)\triangleleft\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p),e\big),p\big)=\big(\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p),\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p),e\big),p\big)\big)\,,\end{aligned}$$

przeto

$$\tau_{\sigma_\tau}(p)=\tau(p)\,.$$

□

Uwaga 2. Należy podkreślić, że ostatnia część tezy powyższego stwierdzenia nie stosuje się do wiązek włóknistych w ogólności. Ażeby się o tym przekonać, wystarczy zauważyć, że każda wiązka wektorowa ma globalne cięcie zerowe $\mathbf{0}_{\mathbb{V}}$ (a nie każda taka wiązka jest globalnie trywializowalna – patrz, np., wiązka styczna nad nieuczesaną $\mathbb{S}^2$).

Na zakończenie naszego trawersu przez elementarz teorii wiązek głównych zajmiemy się wyznaczeniem wygodnego opisu lokalnego morfizmów wiązek głównych pokrywających dyfeomorfizm identycznościowy na bazie (pośród których z czasem rozpoznamy tzw. „transformacje symetrii cechowania”).

Twierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 4. Dowolny morfizm $(\Phi,\ {\rm id}_B,{\rm id}_{\rm G})$ wiązek głównych $(\mathsf{P}^\alpha_{\rm G},B,{\rm G},\pi_{\mathsf{P}^\alpha_{\rm G}})$, $\alpha\in\{1,2\}$ o odnośnych trywializacjach lokalnych $\tau^\alpha_i\ :\ \pi^{-1}_{\mathsf{P}^\alpha_{\rm G}}(\mathcal{O}_i)\xrightarrow{\cong}\mathcal{O}_i\times{\rm G}$ (stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\mathscr{O}=\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$) i odwzorowaniach przejścia $g^\alpha_{ij}\ :\ \mathcal{O}_{ij}\longrightarrow{\rm G}$), opisany przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}\mathsf{P}^1_{\rm G} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_{\mathsf{P}^1_{\rm G}}"'] & \mathsf{P}^2_{\rm G} \arrow[d, "\pi_{\mathsf{P}^2_{\rm G}}"] \\ B \arrow[r, equal, "{\rm id}_B"'] & B\end{tikzcd}\ ,$$

zadaje rodzinę $\{h_i\}_{i\in I}$ odwzorowań (lokalnie) klasy C^∞

$$h_i\ :\ \mathcal{O}_i\longrightarrow{\rm G}\,,\quad i\in I$$

o własności

$$\forall_{x\in\mathcal{O}_{ij}}\ :\ g^2_{ij}(x)=h_i(x)\cdot g^1_{ij}(x)\cdot h_j(x)^{-1}\,. \tag{2}$$

I odwrotnie, każda taka rodzina wyznacza jedyny morfizm opisanego typu.

Dowód: Rozumując analogicznie jak w dowodzie Tw. 19-20-21-22.4, upewniamy się, że odwzorowanie Φ jest jednoznacznie zadane przez wartości przyjmowane przez nie na lokalnie płaskich cięciach $\sigma^1_i\equiv\sigma_{\tau^1_i}$, $i\in I$ stowarzyszonych z lokalnymi trywializacjami swej dziedziny. Istotnie, dowolny punkt z włókna $\mathsf{P}^1_{{\rm G}\,x}$ możemy wobec założonej G-ekwiwariantności trywializacji zapisać w postaci

$$\tau^{1\,-1}_i(x,g)=\sigma^1_i(x)\triangleleft g\,,$$

a zatem wobec G-ekwiwariantności Φ zachodzi

$$\Phi\big(\tau^{1\,-1}_i(x,g)\big)=\Phi\big(\sigma^1_i(x)\triangleleft g\big)=\Phi\big(\sigma^1_i(x)\big)\triangleleft g\,.$$

Definiujemy jawnie gładkie odwzorowania
$$h_i := \mathrm{pr}_2 \circ \tau_i^2 \circ \Phi \circ \sigma_i^1 \ : \ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{G}$$
i sprawdzamy: z jednej strony
$$\tau_j^{2\,-1}\big(x, h_j(x)\big) = \tau_i^{2\,-1}\big(x, g_{ij}^2(x) \cdot h_j(x)\big)\,,$$
a z drugiej
$$\begin{aligned}\tau_j^{2\,-1}\big(x, h_j(x)\big) \quad &= \quad \Phi \circ \sigma_j^1(x) \equiv \Phi\big(\tau_j^{1\,-1}(x,e)\big) = \Phi\big(\tau_i^{1\,-1}\big(x, g_{ij}^1(x)\big)\big) = \Phi\big(\tau_i^{1\,-1}(x,e)\big) \triangleleft g_{ij}^1(x) \\ &\equiv \quad \Phi \circ \sigma_i^1(x) \triangleleft g_{ij}^1(x) = \tau_j^{2\,-1}\big(x, h_i(x)\big) \triangleleft g_{ij}^1(x) = \tau_j^{2\,-1}\big(x, h_i(x) \cdot g_{ij}^1(x)\big)\,,\end{aligned}$$
co w sumie odtwarza postulowaną relację w konsekwencji bijektywności trywializacji lokalnych.

Niechaj teraz $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^\alpha, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^\alpha})$, $\alpha \in \{1,2\}$ będą wiązkami głównymi o trywializacjach lokalnych $\tau_i^\alpha \ : \ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}$ i odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^\alpha \ : \ \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{G}$. Mając dowolną rodzinę odwzorowań $h_i \ : \ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{G}$ opisanych w tezie dowodzonego twierdzenia, definiujemy nad elementami pokrycia współtrywializującego odwzorowania lokalnie gładkie
$$\Phi_i \ : \ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^1}^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^2}^{-1}(\mathcal{O}_i) \ : \ \tau_i^{1\,-1}(x,g) \longmapsto \tau_i^{2\,-1}\big(x, h_i(x) \cdot g\big)\,,$$
dla których liczymy – w dowolnym punkcie $(x,g) \in \mathcal{O}_{ij} \times \mathrm{G}$ –
$$\begin{aligned}\Phi_j\big(\tau_i^{1\,-1}(x,g)\big) \quad &= \quad \Phi_j\big(\tau_j^{1\,-1}\big(x, g_{ji}^1(x) \cdot g\big)\big) = \tau_j^{2\,-1}\big(x, h_j(x) \cdot g_{ji}^1(x) \cdot g\big) \\ &= \quad \tau_i^{2\,-1}\big(x, g_{ij}^2(x) \cdot h_j(x) \cdot g_{ji}^1(x) \cdot g\big) = \tau_i^{2\,-1}\big(x, h_i(x) \cdot g\big) \equiv \Phi_i\big(\tau_i^{1\,-1}(x,g)\big)\,.\end{aligned}$$
Na tej podstawie wnioskujemy, że Φ_i, $i \in I$ są ograniczeniami odwzorowania globalnie gładkiego
$$\Phi \ : \ \mathsf{P}_{\mathrm{G}}^1 \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}}^2\,, \qquad\qquad \Phi\restriction_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^1}^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i\,,$$
działającego z zachowaniem włókien i jawnie G-ekwiwariantnego (dzięki przemienności lewego i prawego działania regularnego G na sobie oraz założonej G-ekwiwariantności trywializacji). $\square$

Nasz tour d'horizon teorii wiązek głównych wieńczy poniższe stwierdzenie, będące prostą konsekwencją (konstruktywnego dowodu) powyższego Twierdzenia.

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def. 4. Podkategoria
$$\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B\,|\,\mathrm{id}_B)$$
kategorii $\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)$ wiązek głównych nad bazą B o grupie strukturalnej G o tej samej klasie obiektów co $\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)$ i o morfizmach o identycznościowej składowej na bazie, $f = \mathrm{id}_B$ (i na grupie strukturalnej, $\varphi = \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$) jest grupoidem.

Dowód: W świetle Tw. 2 wystarczy poprowadzić rozważania w opisie lokalnym, w którym dowolny morfizm $\Phi \ : \ \mathsf{P}_{\mathrm{G}}^1 \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}}^2$ pokrywający identyczność na bazie B jest reprezentowany przez rodzinę odwzorowań $h_i \ : \ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{G}$, $i \in I$. Na mocy tego samego stwierdzenia rodzina odwzorowań $\{\widetilde{h}_i := \mathrm{Inv} \circ h_i\}_{i \in I}$ określa morfizm $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^2 \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}}^1$, który w oczywisty sposób jest odwrotnością Φ. $\square$

Do dyskusji istotnych konstrukcji z udziałem wiązek głównych (takich jak redukcja wiązki głównej wzdłuż włożenia podgrupy właściwej jej grupy strukturalnej (np. na wiązce baz wiązki stycznej nad rozmaitością w obecności struktury metrycznej) i jej prolongacja wzdłuż rozszerzenia centralnego tejże)) jeszcze wrócimy, a tymczasem kontynuujemy nasz trawers cwałem przez geometryzacje struktur algebraicznych...