

ACTION DIRECTE GRUPY LIEGO
(MAWF '23/24 1.XXIV [RRS])



FIG. 1. Mural szablonowy Banksy'ego z 2003 r. pt. *“The Flower Bomber”* (Beit Sahour, Zachodni Brzeg Jordanu, Palestyna). W jednoosobowym warszawskim środowisku wyżej-geometrycznym znany jest pod nazwą *“The Gerbe Thrower”*.

SPIS TREŚCI

1. Wiele twarzy działania właściwego	1
2. Struktura gładka na przestrzeni orbit	5
Literatura	12

1. WIELE TWARZY DZIAŁANIA WŁAŚCIWEGO

Rzetelna dyskusja wiązek głównych i stowarzyszonych, których potrzebujemy w konstrukcji wiązek Clifforda i odnośnych wiązek spinorowych, wymaga wprowadzenia do teorii działania grup Liego na różnaitościach różniczkowalnych. W odwołaniu do pojęć podstawowych¹ wprowadzonych na Wykładzie XXIII (których wzbogacenia w kontekście różniczkowo-geometrycznym i algebraicznym dostarcza szczegółowe studium w ramach odrębnego kursu pt. „Teoria Grup II” i z których część przyjdzie nam jeszcze omawiać w okolicznościach konstrukcji powiązania na wiązkach głównych) przejdziemy teraz bezpośrednio do dyskusji kompleksu zagadnień związanych z geometryzacją zbioru orbit takiego działania.

¹W interesujących nas zastosowaniach będziemy mieć zawsze do czynienia ze strukturą różniczkowalną zarówno na grupie, jak i na zbiorze, na którym ta działa, jednakowoż dla zachowania pełnej kontroli nad założeniami, których przyjęcie jest niezbędnym w rozmaitych rozpatrywanych przez nas okolicznościach, warto prowadzić dyskusję możliwie długo w kategorii topologicznej, co też czynimy poniżej.

Definicja 1. Przyjmijmy zapis Def.23-3. Działanie $\lambda : G \times X \longrightarrow X$ grupy topologicznej G na przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}(X))$ nazywamy **właściwym**, ilekroć odwzorowanie

$$(1) \quad \Lambda := (\lambda, \text{pr}_2) : G \times X \longrightarrow X \times X : (g, x) \longmapsto (g \triangleright x, x)$$

jest właściwe, tj. ilekroć przeciwobrazy zbiorów zwartych względem Λ są zwarte.

Warunek właściwości działania można przeformułować jak poniżej.

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def.1. Działanie $\lambda : G \times X \longrightarrow X$ grupy topologicznej G na przestrzeni Hausdorffa $(X, \mathcal{T}(X))$ jest właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego podzbioru zwartego $\mathcal{K} \subset X$ podzbiór

$$G(\mathcal{K}) := \{ g \in G \mid \lambda_g(\mathcal{K}) \cap \mathcal{K} \neq \emptyset \}$$

jest zwarty.

Dowód: Załóżmy najpierw, że działanie λ jest właściwe, tj. przeciwobraz dowolnego podzbioru zwartego w $X \times X$ względem odwzorowania Λ (z Def.1) jest zwarty. Niechaj $\mathcal{K} \subset X$ będzie wybranym (dowolnie) podzbiorem zwartym, a wtedy podzbiór

$$\begin{aligned} G(\mathcal{K}) &\equiv \{ g \in G \mid \exists_{x \in \mathcal{K}} : g \triangleright x \in \mathcal{K} \} \equiv \{ g \in G \mid \exists_{x \in X} : \Lambda(g, x) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \} \\ &= \text{pr}_1(\Lambda^{-1}(\mathcal{K} \times \mathcal{K})) \end{aligned}$$

jest zwarty jako ciągły obraz (rzut kanoniczny pr_1 jest odwzorowaniem ciągłym) przeciwobrazu kwadratu kartezjańskiego zbioru zwartego (czyli zbioru zwartego w topologii produktowej) względem odwzorowania właściwego Λ .

I odwrotnie, niechaj podzbiór $G(\mathcal{K})$ będzie zwarty dla dowolnego podzbioru zwartego $\mathcal{K} \subset X$. Rozważmy dowolny podzbiór zwarty $\tilde{\mathcal{K}} \subset X \times X$. Jego ciągłe obrazy $\text{pr}_A(\tilde{\mathcal{K}}) \subset X$, $A \in \{1, 2\}$ są zwarte, przeto własność tę ma także ich suma mnogościowa, $\mathcal{K}_{12} \equiv \text{pr}_1(\tilde{\mathcal{K}}) \cup \text{pr}_2(\tilde{\mathcal{K}}) \subset X$. Przy tym oczywiście ilekroć $(g, x) \in G \times X$ spełnia warunek $\Lambda(g, x) \in \tilde{\mathcal{K}}$, to tym bardziej para ta spełnia warunek $\Lambda(g, x) \in \mathcal{K}_{12} \times \mathcal{K}_{12}$, oto bowiem relacja $(x_1, x_2) \in \tilde{\mathcal{K}}$ implikuje relacje $x_1 \in \text{pr}_1(\tilde{\mathcal{K}}) \subset \mathcal{K}_{12}$ oraz $x_2 \in \text{pr}_2(\tilde{\mathcal{K}}) \subset \mathcal{K}_{12}$, więc też $(x_1, x_2) \in \mathcal{K}_{12} \times \mathcal{K}_{12}$, zatem ostatecznie

$$\Lambda^{-1}(\tilde{\mathcal{K}}) \subset \Lambda^{-1}(\mathcal{K}_{12} \times \mathcal{K}_{12}) \equiv \{ (g, x) \in G \times \mathcal{K}_{12} \mid g \triangleright x \in \mathcal{K}_{12} \} \subset G(\mathcal{K}_{12}) \times \mathcal{K}_{12},$$

co w świetle twierdzenia o zwartości podzbiorów domkniętych przestrzeni topologicznej przesądza o zwartości $\Lambda^{-1}(\tilde{\mathcal{K}})$. Istotnie, podzbiór ten jest domknięty jako ciągły przeciwobraz zwartego, więc – na mocy twierdzenia o domkniętości podzbiorów zwartych przestrzeni Hausdorffa, a wobec hausdorffowskości X , która jest dziedziczona przez $X \times X$ – domkniętego podzbioru $\tilde{\mathcal{K}}$, a ponieważ – jak pokazaliśmy – jest podzbiorem (pod)przestrzeni zwartej $G(\mathcal{K}_{12}) \times \mathcal{K}_{12}$ (iloczynu kartezjańskiego zbiorów zwartych), przeto jest – znów na mocy pierwszego z przywoływanych twierdzeń – także zwarty. $\square$

Nierzadko wygodniejszym okazuje się opis działania właściwego zawarty w

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def.1. Działanie $\lambda : G \times X \longrightarrow X$ grupy topologicznej G na lokalnie prezwartej² przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}(X))$ jest właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy ze zbieżności dowolnego ciągu punktów

$$\lambda(g, x_n) : \mathbb{N} \longrightarrow M : n \longmapsto g_n \triangleright x_n,$$

określonego dla dowolnego zbieżnego ciągu punktów $x_n : \mathbb{N} \longrightarrow X$ oraz dowolnego ciągu elementów $g_n : \mathbb{N} \longrightarrow G$, wynika zbieżność pewnego podciągu ciągu g_n .

Dowód: Załóżmy najpierw, że odwzorowanie Λ jest właściwe i niechaj $x_n : \mathbb{N} \longrightarrow X$ oraz $g_n : \mathbb{N} \longrightarrow G$ będą ciągami o własnościach

$$x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X, \quad y := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \triangleright x_n \in X.$$

²Przestrzeń topologiczną nazywamy **lokalnie prezwartą**, jeśli każdy jej punkt zawiera się w pewnym zbiorze prezwartym (tj. takim, którego domknięcie jest zwarte) zawierającym pewne otoczenie (otwarte) tego punktu.

Korzystając z założenia o lokalnej prezwartości X , wybierzmy dowolne zbiory prezwarne $\mathcal{U} \ni x$ oraz $\mathcal{V} \ni y$ zawierające punkty x i – odpowiednio – y wraz z pewnymi ich otoczeniami (otwartymi). Zbieżność x do x (wzgl. $\lambda(g, x)$ do y) oznacza, że prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są zawarte w $\mathcal{U}$ (wzgl. $\mathcal{V}$), więc tym bardziej w zwartym zbiorze $\overline{\mathcal{U}}$ (wzgl. $\overline{\mathcal{V}}$), to jednak oznacza, że prawie wszystkie wyrazy ciągu $\Lambda(g, x) : \mathbb{N} \rightarrow X \times X : n \mapsto (g_n \triangleright x_n, x_n)$ są zawarte w zwartym podzbiorze $\overline{\mathcal{U}} \times \overline{\mathcal{V}}$, a zatem prawie wszystkie wyrazy ciągu $(g, x) : \mathbb{N} \rightarrow G \times X : n \mapsto (g_n, x_n)$ są zawarte w podzbiorze $\Lambda^{-1}(\overline{\mathcal{U}} \times \overline{\mathcal{V}})$, który wobec właściwego charakteru Λ jest zwarty. Ta cecha $\Lambda^{-1}(\overline{\mathcal{U}} \times \overline{\mathcal{V}})$ przesądza o istnieniu podciągu zbieżnego ciągu (g, x) , co w szczególności implikuje zbieżność odnośnego podciągu ciągu g .

I odwrotnie, założmy, że spełniona jest implikacja z końca tezy dowodzonego stwierdzenia. Ustalmy podzbiór zwarty $\mathcal{K} \subset X \times X$ i wybierzmy dowolny ciąg (g, x) punktów w zbiorze $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$. Jego obraz w $X \times X$ względem Λ jest zawarty w zwartym podzbiorze $\mathcal{K}$, można zeń przeto wybrać podciąg zbieżny, którego przeciwobraz przecina się z ciągiem wyjściowym (g, x) definiując (pod)ciąg, o którym mowa we wspomnianej wcześniej implikacji. Tym sposobem otrzymujemy podciąg (g, x) w $\Lambda^{-1}(\mathcal{K}) \subset G \times X$ zbieżny w $G \times X$ w topologii produktowej, a ponieważ zbiór $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$ jest domknięty jako ciągły przeciwobraz zwanego, więc też domkniętego (j/w) podzbioru $\mathcal{K}$, przeto granica tego zbieżnego podciągu leży w $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$, co ostatecznie dowodzi zwartości $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$ i tym samym przekonuje, że Λ jest odwzorowaniem właściwym. $\square$

Przykładu bezpośredniego zastosowania powyższego rezultatu jest

Stwierdzenie 3. Działanie topologiczne zwartej grupy topologicznej na dowolnej rozmierności różniczkowalnej jest właściwe.

Dowód: Każdy ciąg elementów grupy ma podciąg zbieżny z racji zwartości grupy, teza wynika zatem wprost ze Stw. 2. $\square$

Mamy także

Stwierdzenie 4. Działanie dowolnej podgrupy domkniętej dowolnej grupy Liego stanowiące ograniczenie do podgrupy działania regularnego prawego (wzgl. lewego) grupy na sobie jest właściwe.

Dowód: Zastosujemy kryterium ze Stw. 2. Niechaj $g : \mathbb{N} \rightarrow G$ będzie ciągiem zbieżnym, $h : \mathbb{N} \rightarrow H$ zaś – takim, dla którego ciąg $g \cdot h : \mathbb{N} \rightarrow G : n \mapsto g_n \cdot h_n$ jest zbieżny. Wobec ciągłości operacji grupowych w G zbieżnym jest wówczas także ciąg $(\text{Inv} \circ g) \cdot (g \cdot h) = h$. $\square$

I wreszcie kluczowe dla naszych dalszych rozważań

Stwierdzenie 5. Działanie definiujące grupy strukturalnej na przestrzeni totalnej wiązki głównej jest właściwe.

Dowód: Rozważmy ciągi $p : \mathbb{N} \rightarrow P_G$ i $g : \mathbb{N} \rightarrow G$ o własnościach

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (p_n \triangleleft g_n) = \tilde{p}.$$

Wobec ciągłości rzutu kanonicznego na bazę oraz charakteru działania grupy strukturalnej (we włóknie) otrzymujemy równość

$$\pi_{P_G}(\tilde{p}) \equiv \pi_{P_G}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n \triangleleft g_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{P_G}(p_n \triangleleft g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{P_G}(p_n) = \pi_{P_G}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n\right) = \pi_{P_G}(p),$$

która w świetle Def. 23.5 pozwala zapisać

$$\tilde{p} = p \triangleleft \phi_{P_G}(p, \tilde{p}).$$

Niechaj $\pi_{P_G}(p) \in \mathcal{O}_i$, gdzie $\mathcal{O}_i$ jest elementem pokrycia trywializującego P_G . Istnieje indeks $N \in \mathbb{N}$ o własności

$$\forall_{n \geq N} : p_n, p_n \triangleleft g_n \in \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i),$$

możemy zatem rozpatrywać podciągi p_{N+} i $p_{N+} \triangleleft g_{N+}$ w obrazie trywializacji $\tau_i : \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times G$, w którym

$$\tau_i(p_n) =: (x_n, \gamma_n), \quad \tau_i(p) =: (x, \gamma),$$

czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, \gamma_n) = (x, \gamma),$$

więc też

$$\tau_i(p_n \triangleleft g_n) = \tau_i(p_n) \triangleleft g_n = (x_n, \gamma_n) \triangleleft g_n = (x_n, \gamma_n \cdot g_n)$$

oraz

$$\tau_i(\tilde{p}) = \tau_i(p \triangleleft \phi_{P_G}(p, \tilde{p})) = \tau_i(p) \triangleleft \phi_{P_G}(p, \tilde{p}) = (x, \gamma) \triangleleft \phi_{P_G}(p, \tilde{p}) = (x, \gamma \cdot \phi_{P_G}(p, \tilde{p})),$$

czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_n \cdot g_n) = \gamma \cdot \phi_{P_G}(p, \tilde{p}).$$

Wobec ciągłości operacji grupowych wyprowadzamy stąd wniosek:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_n^{-1} \cdot (\gamma_n \cdot g_n)) = \gamma^{-1} \cdot (\gamma \cdot \phi_{P_G}(p, \tilde{p})) = \phi_{P_G}(p, \tilde{p}),$$

który przesądza o słuszności dowodzonej tezy. $\square$

Idąc tym tropem dalej w kierunku fizykalnych zastosowań, napotykamy

Corollarium 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj (P_G, B, G, π_{P_G}) będzie wiązką główną, M zaś – rozmaiutością z działaniem (lewostronnym) $\lambda : G \times M \longrightarrow M$ grupy G . Rozważmy rozmaiutość produktową $P_G \times M$. Działanie grupy G dane wzorem

$$\tilde{\lambda} : G \times (P_G \times M) \longrightarrow P_G \times M : (g, (p, x)) \longmapsto (r(p, g^{-1}), \lambda(g, m))$$

(2)

jest wolne i właściwe.

Dowód: Oczwisty. $\square$

Tytułem przygotowania gruntu pod wynik wieńczący nasze rozważania wysłowimy jeszcze

Lemat 1. Przyjmijmy zapis Def. 23-3. i niechaj $((X, \mathcal{T}(X)), \lambda)$ będzie przestrzenią z działaniem topologicznym grupy topologicznej G . Rzut kanoniczny

$$\pi_{X/G} : X \longrightarrow X/G$$

na przestrzeń orbit

$$X/G := \{ G \triangleright x \mid x \in X \}$$

jest odwzorowaniem otwartym³ względem topologii ilorazowej na X/G .

Dowód: Rozważmy zbiór otwarty $\mathcal{O} \subset X$. Jego obraz $\pi_{X/G}(\mathcal{O})$ jest – wprost na mocy definicji topologii ilorazowej – otwarty w X/G , jeśli przeciwobraz tego ostatniego,

$$\pi_{X/G}^{-1}(\pi_{X/G}(\mathcal{O})) = \{ \lambda(g, x) \mid (g, x) \in G \times \mathcal{O} \} \equiv G \triangleright \mathcal{O}$$

jest otwarty w X . Tak jednak jest w istocie, oto bowiem zbiór ten jest sumą mnogościową

$$G \triangleright \mathcal{O} = \bigcup_{g \in G} \lambda_g(\mathcal{O})$$

obrazów zbioru otwartego $\mathcal{O}$ względem automorfizmów λ_g przestrzeni X , czyli zbiorów otwartych. $\square$

³**Odwzorowanie otwarte** między przestrzeniami topologicznymi to takie, które przeprowadza podzbiory otwarte dziedziny w podzbiory otwarte przeciwdziedziny.

I wreszcie na zakończenie części wstępnej udowodnimy jeszcze pomocnicze (dla dowodu zasadniczego Tw. 2)

Twierdzenie 1 (O rzędzie odwzorowania ekwiwariantnego). Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj $((M_A, \widehat{\mathcal{A}}_A), \lambda^A)$, $A \in \{1, 2\}$ będą rozmaitościami z jednościnnymi działaniami gładkimi (lewostronnymi) grupy Liego G , przy czym zakładamy dodatkowo, że λ^1 jest przechodnie, tj.,

$$\forall_{x,y \in M_1} \exists_{g \in G} : y = \lambda^1(g, x),$$

i niech $F : M_1 \rightarrow M_2$ będzie odwzorowaniem gładko (lewostronnie) G -ekwiwariantnym. Wówczas F ma stały rząd, w szczególności zaś przeciwobrazy punktów w M_2 względem F są domkniętymi podrozmaitościami włożonymi w M_1 .

Dowód: Wobec przechodniości działania G na rozmaitości M_1 , dla każdej pary punktów $x_1, x_2 \in M_1$ istnieje element $g_{21} \in G$ o własności $x_2 = \lambda_{g_{21}}^1(x_1)$, przy czym z racji G -ekwiwariantności F zachodzi tożsamość funkcjonalna

$$F \circ \lambda_{g_{21}}^1 = \lambda_{g_{21}}^2 \circ F,$$

a zatem także tożsamość

$$\mathbb{T}_{x_1}(F \circ \lambda_{g_{21}}^1) = \mathbb{T}_{x_1}(\lambda_{g_{21}}^2 \circ F),$$

którą możemy przepisać w postaci

$$\mathbb{T}_{x_2} F \circ \mathbb{T}_{x_1} \lambda_{g_{21}}^1 = \mathbb{T}_{F(x_1)} \lambda_{g_{21}}^2 \circ \mathbb{T}_{x_1} F.$$

Z racji dyfeomorficzności charakteru odwzorowań $\lambda_{g_{21}}^A$, $A \in \{1, 2\}$ (przesądzającego o odwracalności odwzorowań do nich stycznych) z powyższej tożsamości wywodzimy wniosek o tożsamości rzędów:

$$\text{rk } \mathbb{T}_{m_2} F = \text{rk } \mathbb{T}_{m_1} F,$$

który w konsekwencji przechodniości λ^1 możemy rozciągnąć na całą dziedzinę F . Końcowa część tezy wynika wprost z twierdzenia o rzędzie (odwzorowania). $\square$

2. STRUKTURA GŁADKA NA PRZESTRZENI ORBIT

Ukrytym celem naszych dotychczasowych rozważań, w których poświęciliśmy dużo czasu na rozpatrzenie rozmaitych sformułowań pojęcia właściwości działania grupy na przestrzeni topologicznej, było przygotowanie gruntu pod topologizację i wybór struktury gładkiej na zbiorze orbit takiego działania. Zwieńczeniem naszych wysiłków jest fundamentalne

Twierdzenie 2 (O rozmaitości ilorazowej). Przyjmijmy notację Def. 1 oraz Lematu 1 (i wcześniejszą). Ilekroć działanie grupy Liego G na rozmaitości $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ jest gładkie, swobodne i właściwe, przestrzeń orbit M/G jest rozmaitością topologiczną wymiaru $\dim M - \dim G$ i istnieje na niej jedyna struktura gładka, względem której rzut kanoniczny $\pi_{M/G}$ jest gładką submersją. Przestrzeń orbit z ową wyróżnioną strukturą rozmaitości nosi miano **rozmaitości ilorazowej**.

Dowód: Zaczniemy od zidentyfikowania struktury rozmaitości topologicznej na zbiorze orbit M/G . Topologia M/G jest topologią ilorazową indukowaną z M : zbiór $\mathcal{O} \subset M/G$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jego przeciwobraz $\pi_{M/G}^{-1}(\mathcal{O})$ jest otwarty w M . Jest to topologia Hausdorffa. Istotnie, wykorzystajmy relację równoważności $\mathcal{R}_\lambda$ na M , jaką jest przynależność do tej samej orbity działania G ,

$$\mathcal{R}_\lambda = \Lambda(G \times M) \subset M \times M,$$

gdzie Λ jest odwzorowaniem zdefiniowanym w Równ. 1. Relacja ta zadaje rozkład M na wzajem rozłączne orbity działania grupy G . Niechaj x i y będą punktami w M , których obrazy $\pi_{M/G}(x)$ i $\pi_{M/G}(y)$ są dwoma różnymi punktami w przestrzeni orbit, tj. $\pi_{M/G}(x) \neq \pi_{M/G}(y)$, a wtedy

$(x_1, x_2) \notin \mathcal{R}_\lambda$, ponieważ zaś podzbiór $\mathcal{R}_\lambda \subset M \times M$ jest w świetle twierdzenia o domkniętości odwzorowania właściwego o przewartej przeciwdziedzinnie domknięty w topologii produktowej na $M \times M$ jako ciągły obraz zbioru domkniętego $G \times M$ względem odwzorowania właściwego Λ , przeto istnieje otoczenie otwarte $\mathcal{O}_{(x_1, x_2)} \ni (x_1, x_2)$ o własności $\mathcal{O}_{(x_1, x_2)} \cap \mathcal{R}_\lambda = \emptyset$. Wprost na mocy definicji topologii produktowej otoczenie takie jest sumą mnogościową pewnej rodziny iloczynów kartezjańskich podzbiorów otwartych w M , wybierając zatem dowolny z nich – powiedzmy $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}(M)$ – otrzymujemy relacje $\mathcal{O}_\alpha \ni x_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ oraz $(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) \cap \mathcal{R}_\lambda = \emptyset$, a zatem także $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_\alpha) \ni \pi_{M/G}(x_\alpha)$, przy czym koniecznie $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_1) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_2) = \emptyset$, w przeciwnym bowiem razie istniałyby punkty $y_\alpha \in \mathcal{O}_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ należące do wspólnej orbity działania G , a zatem także $(y_1, y_2) \in \mathcal{R}_\lambda \cap (\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$, co przeczyłoby rozłączności $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ i $\mathcal{R}_\lambda$. W konsekwencji Lematu 1 zbiory $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_\alpha)$ są otwartymi otoczeniami punktów $\pi_{M/G}(x_\alpha)$ w przestrzeni orbit.

W następnej kolejności dokonamy rozkładu rozmaitości M na włożone weń gładko orbity działania grupy G , po czym stowarzyszymy z tym rozkładem stosowne lokalne mapy, w których współrzędne kartografujące kierunki transversalne do (bliskich sobie) orbit zostaną ostatecznie wykorzystane w konstrukcji atlasu przestrzeni orbit. Punktem wyjścia do tak zakreślonej taktyki jest upewnienie się, że orbity działania grupy są w istocie podrozmaitościami gładko włożonymi w M . W tym celu rozważymy odwzorowanie gładkie, określone dla dowolnie ustalonego punktu $x \in M$,

$$\Omega_x \equiv \lambda(\cdot, x) : G \longrightarrow M : g \longmapsto \lambda(g, x),$$

o oczywistej własności

$$\Omega_x(G) = G \triangleright x.$$

Odwzorowanie to jest jawnie G -ekwiwariantne,

$$\forall_{g \in G} : \Omega_x \circ \ell_g = \lambda_g \circ \Omega_x,$$

tj. splata ze sobą działania G : lewe regularne na sobie oraz λ na M , a ponieważ pierwsze z tych działań jest przechodnie, przeto możemy odnieść do Ω_x tezę Tw. 1, wnioskując o stałości rzędu tego odwzorowania. Ponadto jest ono injekcją, oto bowiem równość

$$g_2 \triangleright x = \Omega_x(g_2) = \Omega_x(g_1) = g_1 \triangleright x \iff (g_2^{-1} \cdot g_1) \triangleright x = x$$

oznacza – wobec założenia dotyczącego charakteru działania λ – równość

$$g_2^{-1} \cdot g_1 = e \iff g_2 = g_1.$$

To jednak w połączeniu z wcześniejszą konkluzją, a w odwołaniu do twierdzenia o immersywności gładkiej injekcji o stałym rzędzie (wynikającego wprost z twierdzenia o stałym rzędzie), pozwala stwierdzić, że Ω_x jest immersją. Przy tym ilekroć $\mathcal{K} \subset M$ jest zwarty, więc też (wobec hausdorffowskości M) domknięty, jego przeciwobraz $\Omega_x^{-1}(\mathcal{K})$ jest domknięty w G wobec ciągłości Ω_x , a ponieważ dla dowolnego należącego doń elementu g zachodzi relacja $g \triangleright x \in \mathcal{K}$, czyli też

$$(g \triangleright (\mathcal{K} \cup \{x\})) \cap (\mathcal{K} \cup \{x\}) = (g \triangleright \mathcal{K} \cup \{g \triangleright x\}) \cap (\mathcal{K} \cup \{x\}) \supset \{g \triangleright x\} \neq \emptyset,$$

co implikuje jego zawieranie się

$$\Omega_x^{-1}(\mathcal{K}) \subset G(\mathcal{K} \cup \{x\})$$

w zbiorze $G(\mathcal{K} \cup \{x\})$, który jest zwarty na mocy Stw. 1, przeto $\Omega_x^{-1}(\mathcal{K})$ jest zwarty. To zaś oznacza, że Ω_x jest odwzorowaniem właściwym, a zatem ostatecznie – w konsekwencji poprzednich ustaleń – gładkim włożeniem (jest nim każda injektywna immersja będąca odwzorowaniem właściwym – patrz: [Sus23]).

Wybierzmy (dowolnie) punkt $x \in M$, a wraz z nim – jego przeciwobraz $e \in G$ względem Ω_x , i lokalne mapy: $\kappa_e : \mathcal{O}_e \longrightarrow \mathbb{R}^{\times D}$, $D = \dim G$ na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_e$ elementu neutralnego e w G oraz $\kappa_x : \mathcal{O}_x \longrightarrow \mathbb{R}^{\times N}$, $N = \dim M$ na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_x$ punktu x w M , w których lokalna prezentacja włożenia Ω_x przybiera postać kanoniczną (jako immersja), czyli

$$G \triangleright \{x\} \cap \mathcal{O}_x = \kappa_x^{-1}(\mathcal{U}_x \times \{\mathbf{0}_n\}),$$

gdzie $\mathcal{U}_x \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\times D})$ jest homeomorficznym obrazem fragmentu orbity x zawartego w $\mathcal{O}_x$. Niechaj

$$\Delta_x := \kappa_x^{-1}(\{\mathbf{0}_D\} \times \mathbb{R}^{\times N})$$

będzie podrozmaitością $\mathcal{O}_x$ transwersalną do (fragmentu) rzeczonyj orbity $G \triangleright \{x\}$, wyznaczającą rozkład przestrzeni stycznej

$$\mathbb{T}_x M = \mathbb{T}_x(G \triangleright \{x\}) \oplus \mathbb{T}_x \Delta_x,$$

w którym wobec immersywności Ω_x identyfikujemy

$$(3) \quad \mathbb{T}_e \Omega_x(\mathbb{T}_e G) \equiv \mathbb{T}_x(G \triangleright \{x\}) \subset \mathbb{T}_x M.$$

Oznaczmy dalej

$$\delta_x := \lambda|_{G \times \Delta_x} : G \times \Delta_x \longrightarrow M.$$

Wykażemy, że δ_x jest dyfeomorfizmem na pewnym otoczeniu punktu $(e, x) \in G \times \Delta_x$. W tym celu wykorzystamy gładkie włożenie

$$\iota_x : G \longrightarrow G \times \Delta_x : g \longmapsto (g, x)$$

do rozłożenia odwzorowania Ω_x wedle schematu

$$\Omega_x = \delta_x \circ \iota_x,$$

a zatem także – stycznego do niego:

$$\mathbb{T}_e \Omega_x = \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x \circ \mathbb{T}_e \iota_x.$$

Zważywszy Równ. (3), konstatujemy prawdziwość relacji

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_{(e,x)}(G \times \Delta_x)) &\equiv \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_e G \oplus \mathbb{T}_x \Delta_x) \supset \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_e G \oplus \{0_{\mathbb{T}_x \Delta_x}\}) \\ &\equiv \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x \circ \mathbb{T}_e \iota_x(\mathbb{T}_e G) = \mathbb{T}_e \Omega_x(\mathbb{T}_e G) = \mathbb{T}_x(G \triangleright \{x\}). \end{aligned}$$

Wprowadźmy dalej gładkie włożenie

$$\iota_e : \Delta_x \longrightarrow G \times \Delta_x : y \longmapsto (e, y)$$

podrozmaitości transwersalnej do (lokalnego fragmentu) orbity $G \triangleright \{x\}$, aby móc rozłożyć gładkie włożenie $j_{\Delta_x} : \Delta_x \longrightarrow M$ w postaci

$$j_{\Delta_x} = \delta_x \circ \iota_e$$

i – co za tym idzie – styczne do niego:

$$\mathbb{T}_y j_{\Delta_x} = \mathbb{T}_{(e,y)} \delta_x \circ \mathbb{T}_y \iota_e.$$

Wobec oczywistej równości

$$\mathbb{T}_x \iota_e(\mathbb{T}_x \Delta_x) = \{0_{\mathbb{T}_e G}\} \oplus \mathbb{T}_x \Delta_x$$

otrzymujemy tym razem relację

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_{(e,x)}(G \times \Delta_x)) &\supset \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\{0_{\mathbb{T}_e G}\} \oplus \mathbb{T}_x \Delta_x) \equiv \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x \circ \mathbb{T}_x \iota_e(\mathbb{T}_x \Delta_x) = \mathbb{T}_x j_{\Delta_x}(\mathbb{T}_x \Delta_x) \\ &\equiv \mathbb{T}_x \Delta_x \subset \mathbb{T}_x M, \end{aligned}$$

ostatecznie zatem stwierdzamy, że

$$\mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_{(e,x)}(G \times \Delta_x)) \supset \mathbb{T}_x(G \triangleright \{x\}) \oplus \mathbb{T}_x \Delta_x \equiv \mathbb{T}_x M,$$

słowo zaś zarazem

$$\mathbb{T}_x M \supset \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_{(e,x)}(G \times \Delta_x)),$$

to nieuchronnie

$$\mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_{(e,x)}(G \times \Delta_x)) = \mathbb{T}_x M,$$

co dowodzi surjektywności $\mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x$, a ponieważ jest też – wobec ustalonej wcześniej immersywności Ω_x –

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_{(e,x)}(G \times \Delta_x) \equiv \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_e G + \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x \Delta_x = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x(G \triangleright \{x\}) + \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x \Delta_x \equiv \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x M,$$

przeto $T_{(e,x)}\delta_x$ jawi się bijekcją. Na tym etapie możemy już odwołać się do twierdzenia o lokalnej odwracalności odwzorowań, aby orzec istnienie pewnego otoczenia otwartego $\mathcal{V}_x$ punktu $(e, x) \in G \times \Delta_x$ odwzorowywanego dyfeomorficznie przez (ograniczenie) δ_x w pewne otoczenie otwarte $\tilde{\mathcal{O}}_x$ punktu $x \in M$. Biorąc pod uwagę naturę topologii (produktowej) na $G \times \Delta_x$ (według schematu myślowego wyłożonego na początku niniejszego dowodu w uzasadnieniu hausdorfskości topologii ilorazowej na przestrzeni orbit), upewniamy się, że pierwsze z tych otoczeń można wybrać w postaci produktowej $\mathcal{V}_x = \mathcal{W}_e \times \mathcal{W}_x$, przy czym z każdego z otoczeń: $\mathcal{W}_a$, $a \in \{e, x\}$ można wyjąć przetrwarte przeciwobrazy pewnych kul otwartych $B^D(\tilde{\kappa}_e(e) = \mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \equiv \tilde{\kappa}_e(\tilde{\mathcal{W}}_e)$, $\varepsilon_e > 0$ oraz – odpowiednio – $B^{N-D}(\tilde{\kappa}_x(x) = \mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \equiv \tilde{\kappa}_x(\tilde{\mathcal{W}}_x)$, $\varepsilon_x > 0$ względem lokalnych map $\tilde{\kappa}_e : \mathcal{W}_e \rightarrow \mathbb{R}^{\times D}$ oraz – odpowiednio – $\tilde{\kappa}_x : \mathcal{W}_x \rightarrow \mathbb{R}^{\times N-D}$. W dalszej części naszej analizy skupimy uwagę na otoczeniu produktowym $\tilde{\mathcal{V}}_x \equiv \tilde{\mathcal{W}}_e \times \tilde{\mathcal{W}}_x$.

W następnej kolejności pokażemy, że otoczenie $\tilde{\mathcal{W}}_x \subset \Delta_x$ można wybrać na tyle małym, ażeby każda orbita działania G przecinała je w co najwyżej jednym punkcie. Założymy przeciwnie i rozważmy przeliczalną bazę otoczeń x w $\tilde{\mathcal{W}}_x$ złożoną z przeciwobrazów względem $\tilde{\kappa}_x$ rodziny kul otwartych $B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; r_n)$, $r_n := \frac{1}{E(\varepsilon_x^{-1})+n}$, $n \in \mathbb{N}$. W każdym z przeciwobrazów $\mathcal{B}_n \equiv \tilde{\kappa}_x^{-1}(B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; r_n))$ tkwi para punktów x_n oraz $y_n \neq x_n$ należących do tej samej orbity, tj. spełniających warunek $y_n = g_n \triangleright x_n$ dla pewnego elementu $g_n \in G$. Przy tym wobec założonej postaci bazy otoczeń oba ciągi punktów w (przezwartym) $\tilde{\mathcal{W}}_x$ zbiegają do x ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = \lim_{n \rightarrow \infty} (g_n \triangleright x_n),$$

a zatem – w świetle Stw. 2, a z racji właściwego charakteru λ – ciąg g zdefiniowany przez parę ciągów $(x., y.)$ zawiera podciąg g_n zbieżny do pewnego elementu $g \in G$. Ciągłość działania λ pozwala nam zatem zapisać ciąg równości

$$g \triangleright x \equiv \lambda\left(\lim_{k \rightarrow \infty} (g_{n_k}, x_{n_k})\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(g_{n_k}, x_{n_k}) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = x,$$

a ponieważ mamy do czynienia z działaniem wolnym, przeto nieodzownie $g = e$. Jednakowoż dla dostatecznie dużych wartości $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $g_{n_k} \in \tilde{\mathcal{W}}_e$, przy czym $g_{n_k} \neq e$ (wszak $y_{n_k} \neq x_{n_k}$) więc też

$$\lambda(g_{n_k}, x_{n_k}) = y_{n_k} = \lambda(e, y_{n_k}),$$

co z racji iniektywności $\delta_x \upharpoonright_{\tilde{\mathcal{W}}_e \times \tilde{\mathcal{W}}_x} \equiv \lambda \upharpoonright_{\tilde{\mathcal{W}}_e \times \tilde{\mathcal{W}}_x}$ implikuje równość

$$(g_{n_k}, x_{n_k}) = (e, y_{n_k}),$$

prowadzącą do jawnej sprzeczności. Otoczenie $\tilde{\mathcal{W}}_x$ o postulowanej cesze zawsze zatem istnieje.

Rozważmy teraz złożenie homeomorfizmów

$$\phi_x := (\tilde{\kappa}_e \times \tilde{\kappa}_x) \circ (\delta_x \upharpoonright_{\tilde{\mathcal{V}}_x})^{-1} : \tilde{\mathcal{O}}_x \xrightarrow{\cong} \tilde{\mathcal{V}}_x \equiv \tilde{\mathcal{W}}_e \times \tilde{\mathcal{W}}_x \xrightarrow{\cong} B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x).$$

Pokażemy, że określa ono lokalną mapę zgodną z działaniem grupy G w tym naturalnym sensie, że orbity tegoż działania są w tej mapie hiperpłaszczyznami parametryzowanymi przez pierwszych D współrzędnych. Zaczniemy od tego, że wobec otwartości zarówno swojej dziedziny, jak i przeciwdziedziny homeomorfizm ϕ_x dopuszcza postulowaną interpretację, pozostaje więc jedynie upewnić się co do słuszności naszych oczekiwań dotyczących opisu fragmentów orbit zawartych w jego dziedzinie. Mamy

$$\begin{aligned} \phi_x^{-1} : \quad & B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}_x \\ & : \quad (\xi, \zeta) \longmapsto \delta_x(\tilde{\kappa}_e^{-1}(\xi), \tilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta)) \equiv \lambda(\tilde{\kappa}_e^{-1}(\xi), \tilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta)), \end{aligned}$$

bez trudu przeto stwierdzamy, że dowolna hiperpowierzchnia $\zeta = \zeta_* = \text{const}$ jest zawarta w pojedynczej orbicie, oto bowiem jej homeomorficzny przeciwobraz w M względem ϕ_x spełnia relację

$$\phi_x^{-1}(B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times \{\zeta_*\}) \equiv \lambda(\tilde{\mathcal{W}}_e \times \{\tilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta_*)\}) \subset \lambda(G \times \{\tilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta_*)\}) \equiv G \triangleright \{\tilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta_*)\}.$$

Rozumowanie to pokazuje, że dowolna orbita $G \triangleright \{y\}$, $y \in M$ przecina $\tilde{\mathcal{O}}_x$ wzdłuż sumy mnogościowej (fragmentów) hiperpowierzchni o opisie współrzędniowym $\zeta = \zeta_i = \text{const}$, $i \in I_y$ dla pewnego zbioru indeksów I_y . Otoczenie $\tilde{\mathcal{W}}_x$ zostało jednak wybrane tak, iżby dowolna orbita

przecinała je w *co najwyżej jednym* punkcie, wobec czego $|I_y| \leq 1$. Lokalna mapa ϕ_x jest zatem – w istocie – zgodna z działaniem G w określonym wyżej znaczeniu i może być wykorzystana w kartografowaniu przestrzeni orbit na otoczeniu punktu $\pi_{M/G}(x) \equiv [x]$.

Skonstruujemy teraz lokalną mapę na otoczeniu $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x)$ punktu $[x]$, pamiętając, że otwartość zbioru $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x) \ni [x]$ w topologii ilorazowej jest zapewniona przez otwartość rzutu kanonicznego $\pi_{M/G}$, stwierdzoną w Lemacie 1. Oznaczmy lokalne cięcie przez x w poprzek orbit zawartych w $\tilde{\mathcal{O}}_x$ symbolem

$$\tilde{\Delta}_x := \phi_x^{-1}(\{\mathbf{0}_D\} \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x))$$

i zauważmy, że ograniczenie rzutu kanonicznego

$$\pi_{M/G} \upharpoonright_{\tilde{\Delta}_x} : \tilde{\Delta}_x \longrightarrow \pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x)$$

jest bijekcją w świetle założeń poczynionych w odniesieniu do charakteru przecięć orbit działania G z $\tilde{\mathcal{O}}_x$ oraz z racji potwierdzonej zgodności mapy ϕ_x z tymże działaniem. Przy tym ilekroć $\mathcal{W} \subset \tilde{\Delta}_x$ jest podzbiorem otwartym, jego obraz w przestrzeni orbit

$$\pi_{M/G}(\mathcal{W}) \equiv \pi_{M/G} \circ \phi_x^{-1}(\{\mathbf{0}_D\} \times \text{pr}_2 \circ \phi_x(\mathcal{W})) = \pi_{M/G} \circ \phi_x^{-1}(B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times \text{pr}_2 \circ \phi_x(\mathcal{W}))$$

jest w oczywisty sposób otwarty jako obraz względem złożenia odwzorowań otwartych zbioru $B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times \text{pr}_2 \circ \phi_x(\mathcal{W})$ otwartego w topologii produktowej – wszak ϕ_x jest homeomorfizmem, więc też odwzorowaniem otwartym, a rzut na drugą składową zadanego przezeń zbioru $\phi_x(\mathcal{W})$ otwartego w topologii produktowej, czyli będącego sumą mnogościową iloczynów kartezjańskich zbiorów otwartych, jest takąż sumą rzutów tychże iloczynów na drugą składową, więc także zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^{N-D}$. Koniec końców odwzorowanie ograniczone $\pi_{M/G} \upharpoonright_{\tilde{\Delta}_x}$ jest zatem homeomorfizmem, którego ciągłą odwrotność będziemy oznaczać symbolem

$$\sigma_{[x]} := (\pi_{M/G} \upharpoonright_{\tilde{\Delta}_x})^{-1} : \pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x) \xrightarrow{\cong} \tilde{\Delta}_x.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\psi_{[x]} := \text{pr}_2 \circ \phi_x \circ \sigma_{[x]} : \pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x) \xrightarrow{\cong} \tilde{\Delta}_x \xrightarrow{\cong} \{\mathbf{0}_D\} \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \longrightarrow B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x),$$

które – jak łatwo widać – jest homeomorfizmem otoczenia otwartego $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x)$ na kulę otwartą $B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \subset \mathbb{R}^{N-D}$, czyli – innymi słowy – lokalną mapą klasy C^0 . Należy przy tym podkreślić, że lokalna prezentacja rzutu kanonicznego określona przez lokalną mapę ϕ_x na $\tilde{\mathcal{O}}_x$ oraz stowarzyszoną z nią lokalną mapę $\psi_{[x]}$ na $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x)$ przyjmuje prostą postać

$$\psi_{[x]} \circ \pi_{M/G} \circ \phi_x^{-1} : B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \rightarrow B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x),$$

o jawnie submersywnym charakterze. Odwzorowanie $\sigma_{[x]}$ ma zatem naturalną interpretację ciecica lokalnego submersji $\pi_{M/G}$. Jeśli więc zaindukujemy strukturę rozmierności na M/G z tej na rozmierności M (j/w) przy użyciu podatlasu na M utworzonego przez wszystkie możliwe mapy lokalne na M zgodne z działaniem G i wszystkie cięcia lokalne rzutu kanonicznego nad obrazami – względem tegoż ciecica – ich dziedzin, to dla zakończenia dowodu twierdzenia pozostanie nam jedynie wykazać gładkość odwzorowań przejścia między mapami określonymi na przecinających się niepusto otoczeniach w przestrzeni orbit, a na koniec – jedynność tak otrzymanej struktury gładkiej.

Niechaj zatem $\psi_{[x_A]} : \pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_A}) \xrightarrow{\cong} B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_{x_A})$, $A \in \{1, 2\}$ będą dwiema lokalnymi mapami spełniającymi warunek $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_1}) \cap \pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2}) \neq \emptyset$, a stowarzyszonymi z lokalnymi mapami $\phi_{x_A} : \tilde{\mathcal{O}}_{x_A} \xrightarrow{\cong} B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_{e;A}) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_n; \varepsilon_{x_A})$. Przecinanie się rzutów $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_A})$ otoczeń $\tilde{\mathcal{O}}_{x_A}$ odnośnych punktów x_A oznacza, że są w tych otoczeniach punkty $y_A \in \tilde{\mathcal{O}}_{x_A}$ należące do tej samej orbity, tj. $y_2 = g_{21} \triangleright y_1$ dla pewnego elementu $g_{21} \in G$, możemy zatem bez straty ogólności (dokonawszy – jeśli trzeba – trywialnego przesunięcia w przeciwdziedzinach obu map ϕ_{x_A}) przyjąć, że $y_A = x_A$ i jest spełniony warunek

$$x_2 = g_{21} \triangleright x_1.$$

Zalóżmy najpierw, że $g_{21} = e$, a wtedy możemy wprost rozpatrzyć odwzorowanie przejścia między mapami $\phi_{x_1} = (\xi_1, \zeta_1)$ i $\phi_{x_2} = (\xi_2, \zeta_2)$ na zbiorze $\mathcal{O}_{12} := \tilde{\mathcal{O}}_{x_1} \cap \tilde{\mathcal{O}}_{x_2}$. Jako że przecięcia dowolnej orbity z każdym z otoczeń odpowiadają stałej i jedynej wartości ζ_1 oraz takiejż wartości ζ_2 ,

przeto gładkie (wprost na mocy konstrukcji – wszak ϕ_{x_A} są mapami na gładkiej rozmaiłości M) odwzorowanie przejścia między obiema mapami jest postaci

$$\begin{aligned} \phi_{x_2} \circ (\phi_{x_1} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{12}})^{-1} &: \phi_{x_1}(\mathcal{O}_{12}) \xrightarrow{\cong} \phi_{x_2}(\mathcal{O}_{12}) \\ &: (\xi_1(y), \zeta_1(y)) \mapsto (F_1 \circ (\xi_1, \zeta_1), F_2 \circ \zeta_1)(y), \end{aligned}$$

gdzie F_1 i F_2 są pewnymi odwzorowaniami gładkimi. W szczególności więc otrzymujemy relację

$$\zeta_2(y) = F_2 \circ \zeta_1(y), \quad y \in \mathcal{O}_{12},$$

z której odczytujemy jawnie gładką postać odwzorowania przejścia między mapami indukowanymi:

$$\begin{aligned} \psi_{[x_2]} \circ (\psi_{[x_1]} \upharpoonright_{\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{12})})^{-1} &: \psi_{[x_1]} \circ \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{12}) \xrightarrow{\cong} \psi_{[x_2]} \circ \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{12}) \\ &: \text{pr}_2 \circ \phi_{x_1} \circ (\pi_{M/G} \upharpoonright_{\tilde{\Delta}_{x_1}})^{-1}(\pi_{M/G}(y)) \equiv \zeta_1(y) \mapsto \zeta_2(y) = F_2(\zeta_1(y)). \end{aligned}$$

W przypadku $g_{21} \neq e$ nie możemy wprawdzie *a priori* rozważać odwzorowań przejścia między mapami ϕ_{x_1} i ϕ_{x_2} na $\mathcal{O}_{12}$ (zbiór ten może być w szczególności pusty), ale możemy zastąpić mapę lokalną ϕ_{x_2} oraz cięcie lokalne $\sigma_{[x_2]}$ użyte w definicji mapy lokalnej $\psi_{[x_2]}$ na $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{x_2})$ innymi z tego samego podatlasu na M i – odpowiednio – zbioru cięć lokalnych rzutu kanonicznego, indukujących mapy lokalne na przestrzeni orbit, które wspólnie wyznaczają *tę samą* mapę lokalną $\psi_{[x_2]}$ na $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{x_2})$, ale jednocześnie przeprowadzają punkt z jej dziedziny przez zbiór otwarty w nakryciu M przecinający się z $\mathcal{O}_{x_1}$ w pewnym otoczeniu otwartym x_1 , co sprowadza nas do poprzednio zweryfikowanego przypadku. Otóż więc użyjmy automorfizmu $\lambda_{g_{21}}$, aby zdefiniować odwzorowanie

$$\phi_{x_1}^{21} := \phi_{x_2} \circ \lambda_{g_{21}} : \lambda_{g_{21}}^{-1}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2}) \xrightarrow{\cong} B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_{e;2}) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_{x_2})$$

na otwartym (wprost z konstrukcji) otoczeniu $\lambda_{g_{21}}^{-1}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2})$ punktu x_1 . Jako że automorfizm $\lambda_{g_{21}}$ przeprowadza orbity na orbity, $\phi_{x_1}^{21}$ jest mapą lokalną zgodną z działaniem G . Definicję tę uzupełniamy stosowną definicją lokalnego cięcia rzutu kanonicznego nad $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2})$,

$$\sigma_{[x_2]}^{21} := \lambda_{g_{21}}^{-1} \circ \sigma_{[x_2]}.$$

Ta ostatnia ma sens, gdyż

$$\pi_{M/G} \circ \sigma_{[x_2]}^{21} = \pi_{M/G} \circ \sigma_{[x_2]} = \text{id}_{\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2})},$$

a przy tym zgodnie z zapowiedzią odtwarza, w połączeniu z nową mapą lokalną, wyjściową mapę lokalną na $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2})$, o czym przekonuje bezpośredni rachunek:

$$\psi_{[x_2]}^{21} := \text{pr}_2 \circ \phi_{x_1}^{21} \circ \sigma_{[x_2]}^{21} = \text{pr}_2 \circ \phi_{x_1} \circ \lambda_{g_{21}} \circ \lambda_{g_{21}}^{-1} \circ \sigma_{[x_2]}^{21} = \text{pr}_2 \circ \phi_{x_1} \circ \sigma_{[x_2]}^{21} \equiv \psi_{[x_2]}.$$

To kończy dowód istnienia struktury gładkiej, o której jest mowa w tezie twierdzenia. Należy jeszcze wykazać struktury tej jedynosc.

W tym celu rozważmy dowolne dwie takie struktury na tej samej przestrzeni orbit M/G , oznaczając odnośne jej kopie indeksem: $(M/G)_A$, $A \in \{1, 2\}$ dla wygodnego odróżnienia. Wprost na mocy poczynionego założenia rzut kanoniczny $\pi_{M/G} : M \twoheadrightarrow (M/G)_A$, $A \in \{1, 2\}$ jest w obu przypadkach gładką surjektywną submersją, można zatem odnieść do niego tezę Stw.19-20-21-22.1. (o kwazi-universalnej własności submersji), i to na dwa sposoby: możemy oto zapisać diagram przemienności

$$\begin{array}{ccc} & (M/G)_2 & \\ \pi_{M/G} \nearrow & \uparrow \text{id}_{M/G} & \\ M & \xrightarrow{\pi_{M/G}} & (M/G)_1 \end{array},$$

w którym traktujemy $\pi_{M/G} : M \twoheadrightarrow (M/G)_1$ jako submersję, $\pi_{M/G} : M \twoheadrightarrow (M/G)_2$ zaś (to samo odwzorowanie) – jako odwzorowanie referencyjne, którego gładkość przesądza o gładkości

$\text{id}_{M/G}$; możemy też zamienić miejscami (i rolami) $(M/G)_1$ i $(M/G)_2$, co prowadzi do wniosku, że także wtedy, gdy traktujemy $\text{id}_{M/G}$ jako odwzorowanie z $(M/G)_2$ w $(M/G)_1$, jest ono gładkie, co jest równoznaczne z równoważnością obu struktur różniczkowych. $\square$

Uwaga 1. Często przyjmuje się, że nośnik struktury rozmaitości topologicznej powinien spełniać drugi aksjomat przeliczalności. Bez trudu przekonujemy się, że przestrzeń orbit M/G ma tę cechę, oto bowiem obraz dowolnej skończonej lub przeliczalnie nieskończonej bazy $\mathcal{O} := \{\mathcal{O}_n\}_{n \in I \subset \mathbb{N}}$ topologii M względem rzutu kanonicznego na przestrzeń orbit, $\pi_{M/G}(\mathcal{O}) = \{\pi_{M/G}(\mathcal{O}_n)\}_{n \in I \subset \mathbb{N}}$, jest – w świetle Lematu 1 – odpowiednią bazą topologii (ilorazowej) M/G . Istotnie, $\pi_{M/G}(\mathcal{O})$ jest pokryciem otwartym M/G , a ponadto dla dowolnej pary $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}), \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2})$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ elementów tej rodziny o niepustym przecięciu $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2}) \ni G \triangleright x$, $x \in M$ istnieje element $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_{12}}) \subset \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2})$ o własności $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_{12}}) \ni G \triangleright x$. W rzeczy samej, z relacji $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2}) \ni G \triangleright x$ wynika istnienie punktów $x_A \in \mathcal{O}_{n_A}$, $A \in \{1, 2\}$ oraz elementu grupy $g_{21} \in G$ spełniających relację $x_2 = g_{21} \triangleright x_1$, wobec czego zbiór $\lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1})$ ma niepuste przecięcie z $\mathcal{O}_{n_2}$, a ponieważ jest otwarty (jako homeomorficzny obraz zbioru otwartego), przeto jest sumą mnogościową pewnej rodziny elementów bazy $\mathcal{O}$. Przynajmniej jeden element tej rodziny – oznaczmy go $\mathcal{O}_{n_{12}}$ – przecina się niepusto z $\mathcal{O}_{n_2}$, a zatem – wprost na mocy definicji bazy topologii – istnieje element $\mathcal{O}_{n_{122}} \in \mathcal{O}$ spełniający warunek

$$\mathcal{O}_{n_{122}} \subset \mathcal{O}_{n_{12}} \cap \mathcal{O}_{n_2} \subset \lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \mathcal{O}_{n_2},$$

z którego wynika już pożądaný warunek

$$\begin{aligned} \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_{122}}) &\subset \pi_{M/G}(\lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \mathcal{O}_{n_2}) \subset \pi_{M/G}(\lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1})) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2}) \\ &= \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2}). \end{aligned}$$

Wreszcie na koniec zauważmy, że dla dowolnego zbioru otwartego $\mathcal{O} \subset M/G$ zachodzi – wprost na mocy definicji topologii ilorazowej oraz wobec bazowego charakteru $\mathcal{O}$ – tożsamość

$$\pi_{M/G}^{-1}(\mathcal{O}) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_{n_i},$$

w której $I \subset \mathbb{N}$ jest pewnym zbiorem indeksów. Wobec powyższego otrzymujemy równość

$$\pi_{M/G}(\pi_{M/G}^{-1}(\mathcal{O})) = \pi_{M/G}(\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_{n_i}) = \bigcup_{i \in I} \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_i}),$$

która przesądza o bazowym charakterze $\pi_{M/G}(\mathcal{O})$.

Na zakończenie tej części wykładu wypowiemy stwierdzenie istotne z punktu widzenia zastosowań teorii grup Liego w opisie nieliniowych realizacji symetrii w teorii pola (w szczególności w modelowaniu efektywnej teorii pola „małych” wzbudzeń klasycznej jej próżni), a mianowicie

Twierdzenie 3. Przyjmijmy zapis Lematu 1 i niechaj G będzie grupą Liego, $H \subseteq G$ zaś – jej podgrupą domkniętą. Istnieje dokładnie jedna struktura rozmaitości gładkiej na przestrzeni ilorazowej G/H z topologią ilorazową zaindukowaną z G , względem której rzut kanoniczny $\pi_{G/H} : G \rightarrow G/H$ jest surjektywną submersją. Naturalne lewe działanie

$$(4) \quad [\ell] : G \times (G/H) \rightarrow G/H : (\tilde{g}, gH) \mapsto (\tilde{g} \cdot g)H$$

jest gładkie względem tej struktury. Gładka rozmaitość G/H z działaniem grupy G określona tym sposobem nosi miano **gładkiej przestrzeni jednorodnej** G .

Dowód: Rozważmy działanie $\wp : G \times H \rightarrow G : (g, h) \mapsto g \cdot h$ podgrupy $H \subset G$ na grupie G otrzymane w wyniku ograniczenia do tejże podgrupy prawego działania regularnego G na sobie. Jest ono jawnie swobodne, a przy tym możemy je zapisać jako superpozycję

$$\wp = m \circ (\text{id}_G \times j_H)$$

odwzorowań gładkich (przy czym gładkość kanonicznego włożenia $j_H : H \rightarrow G$ wynika wprost z Tw. 23-1., zatem jest też gładkie. W świetle Stw. 4 jest ono również właściwe, możemy więc

odnieć do pary (G, H) tezę Tw. 2, konstatując prawdziwość pierwszej części tezy twierdzenia dowodzonego. Pozostaje zatem wykazać gładkość działania $[\lambda]$. Zauważmy, że działanie to domyka diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc}
 & & G/H \\
 & \nearrow \pi_{G/H} \circ m & \uparrow [\lambda] \\
 G \times G & \xrightarrow{\text{id}_G \times \pi_{G/H}} & G \times G/H
 \end{array} ,$$

w którym $\text{id}_G \times \pi_{G/H}$ jest submersją, co pozwala zastosować Stw. 19-20-21-22.1., aby wywnioskować gładkość $[\lambda]$ z gładkości odwzorowania $\pi_{G/H} \circ m$, wynikającej ze stwierdzonej wcześniej gładkości $\pi_{G/H}$ i założonej gładkości m . $\square$

LITERATURA

[Sus23] R. R. Suszek, “*Niezbędnik różniczkowo-geometryczny*”, notatki uzupełniające, 2023.