CLIFFORD'S ANATOMY
(MAWF '23/24 1.IX & 1.X [RRS])

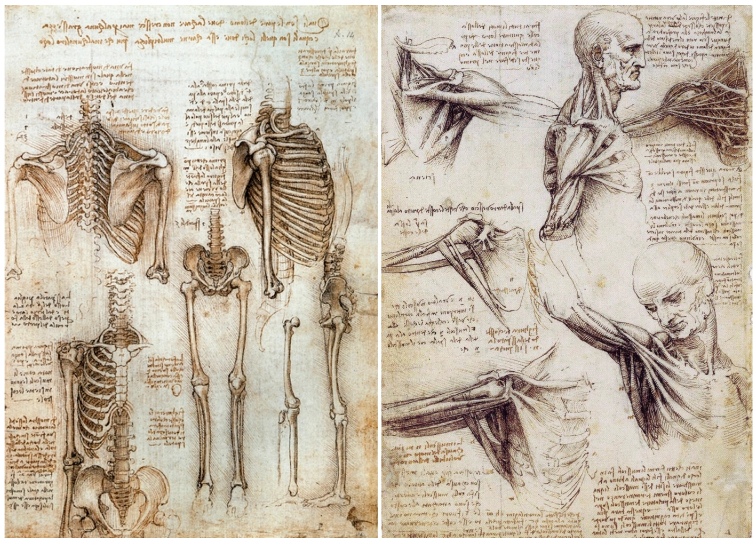

FIG. 1. Anatomiczne studium szkieletu i ramienia ludzkiego z 1510 lub 1511 r., wykonane przez Leonarda da Vinci. Rysunki opatrzone odręcznymi notatkami (spisanymi pismem lustrzanym, to bowiem było wygodniejsze dla leworęcznego autora).

Spis treści

1. Baza i orientacja 1
2. Centrum i antycentrum 5
3. Przygarść nieoczywistych a przydatnych izomorfizmów 9

Dodatek A. Uzupełnienie z teorii przestrzeni kwadratowych 15

Zadania domowe 16

Dotychczasowe nasze rozważania przygotowały nas do przeprowadzenia szczegółowej analizy struktury algebr Clifforda skończenie wymiarowych przestrzeni kwadratowych, której zwieńczeniem będzie klasyfikacja tychże algebr w fizycznie istotnych przypadkach: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

1. Baza i orientacja

Rzeczoną analizę zaczniemy od zbadania wymiaru i wskazania naturalnej bazy algebry Clifforda.

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\{v_i\}_{i\in\overline{1,N}}$, $N = \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ będzie bazą przestrzeni kwadratowej V o niezerowej formie kwadratowej. Zbiór wektorów

$$\{e^{\mathrm{C}}, v_{i_1}.v_{i_2}.\cdots.v_{i_k}\}_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le N,\ k\in\overline{1,N}}$$

stanowi bazę algebry Clifforda $\mathrm{Cliff}(V,Q)$. W szczególności więc

(1) $$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Cliff}(V,Q) = 2^N\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Przeprowadzimy indukcję względem wymiaru N, poczynając od przypadku $N = 1$. Niechaj zatem $v \in V \setminus \{0_V\}$, a wtedy homomorfizm przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowych

$$\imath_V \;:\; V \longrightarrow \langle e, v\rangle_{\mathbb{K}} \subset \mathrm{Cliff}(V,Q) \;:\; \lambda \triangleright v \longmapsto \jmath_V^{\mathrm{C}}(\lambda \triangleright v) \equiv \lambda \triangleright v$$

jest odwzorowaniem Clifforda,

$$\imath_V(\lambda \triangleright v)^2 = \lambda^2 \triangleright \imath_V(v)^2 = \lambda^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright e^{\mathrm{C}} = Q(\lambda \triangleright v) \triangleright e^{\mathrm{C}}\,,$$

którego obraz generuje $\langle e, v\rangle_{\mathbb{K}}$ jako $\mathbb{K}$-algebrę. Ponadto dla dowolnego odwzorowania Clifforda $\varphi \;:\; V \longrightarrow \mathfrak{A}$ jest $\varphi(\lambda \triangleright v) = \lambda \triangleright_{\mathfrak{A}} \varphi(v)$, więc oznaczywszy $a \coloneqq \varphi(v) \in \mathfrak{A}$, spełniający warunek $a^2 = Q(v) \triangleright \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$, możemy zdefiniować odwzorowanie (jawnie unitalne i $\mathbb{K}$-liniowe)

$$\widetilde{\varphi} \;:\; \langle e, v\rangle_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathfrak{A} \;:\; \lambda \triangleright e^{\mathrm{C}} + \mu \triangleright v \longmapsto \lambda \triangleright \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu \triangleright a\,,$$

przy czym

$$\widetilde{\varphi} \circ \imath_V(\lambda \triangleright v) = \lambda \triangleright_{\mathfrak{A}} a = \varphi(\lambda \triangleright v)\,,$$

a nadto

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\varphi}\big((\lambda_1 \triangleright e^{\mathrm{C}} + \mu_1 \triangleright v).(\lambda_2 \triangleright e^{\mathrm{C}} + \mu_2 \triangleright v)\big) = \widetilde{\varphi}\big(\big(\lambda_1 \cdot_{\mathbb{K}} \lambda_2 +_{\mathbb{K}} \mu_1 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v)\big) \triangleright e^{\mathrm{C}} \\
&\qquad + (\lambda_1 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_2 +_{\mathbb{K}} \lambda_2 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_1) \triangleright v\big) = \big(\lambda_1 \cdot_{\mathbb{K}} \lambda_2 +_{\mathbb{K}} \mu_1 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v)\big) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \\
&+_{\mathfrak{A}} (\lambda_1 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_2 +_{\mathbb{K}} \lambda_2 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_1) \triangleright_{\mathfrak{A}} a = (\lambda_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} a) \cdot_{\mathfrak{A}} (\lambda_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} a) \\
&\qquad \equiv \widetilde{\varphi}(\lambda_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} a) \cdot_{\mathfrak{A}} \widetilde{\varphi}(\lambda_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} a)\,.
\end{aligned}$$

Wnioskujemy więc, na podstawie Stw. 7-8.1, że $\big(\big(\langle e^{\mathrm{C}}, v\rangle_{\mathbb{K}}, \iota_V\big), \iota_V\big)$ jest algebrą Clifforda dla $(\langle v\rangle_{\mathbb{K}} \equiv V, Q)$ i – zgodnie z postulatem –

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Cliff}(\langle v\rangle_{\mathbb{K}}, Q) \equiv \dim_{\mathbb{K}} \big\langle e^{\mathrm{C}}, v\big\rangle_{\mathbb{K}} = 2 \equiv 2^1\,.$$

Załóżmy następnie, że dowodzona przez nas teza jest prawdziwa dla dowolnego $N < N_0$ (N_0 ustalone), i niech (V,Q) będzie przestrzenią kwadratową nad $\mathbb{K}$ wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V = N_0$, w której wybieramy bazę Q-ortogonalną $\{v_i\}_{i\in\overline{1,N_0}}$, której element v_{N_0} spełnia warunek $Q(v_{N_0}) \neq 0_{\mathbb{K}}$, co uczyniwszy, rozkładamy V na sumę Q-ortogonalną podprzestrzeni

$$V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_{N_0-1}\rangle_{\mathbb{K}} \,\textcircled{\perp}_Q\, \langle v_{N_0}\rangle_{\mathbb{K}} \equiv V_{N_0-1} \,\textcircled{\perp}_Q\, \langle v_{N_0}\rangle_{\mathbb{K}}\,,$$

wprowadzając przy tym oznaczenia $Q_{N_0-1} \equiv Q\restriction_{V_{N_0-1}}$ i $Q_{N_0} \equiv Q\restriction_{\langle v_{N_0}\rangle_{\mathbb{K}}}$. W świetle Tw. 8-9-10.3, a dalej – dotychczasowych ustaleń i założenia indukcyjnego możemy teraz zapisać

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cliff}(V,Q) &\cong \mathrm{Cliff}(V_{N_0-1}, Q_{N_0-1}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \mathrm{Cliff}(\langle v_{N_0}\rangle_{\mathbb{K}}, Q_{N_0}) \\
&\cong \Big(\big\langle e^{\mathrm{C}}_{N_0-1}\big\rangle_{\mathbb{K}} \oplus \bigoplus_{k=1}^{N_0-1} \bigoplus_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le N_0-1} \langle v_{i_1}.v_{i_2}.\cdots.v_{i_k}\rangle_{\mathbb{K}}\Big) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \Big(\big\langle e^{\mathrm{C}}_{N_0}\big\rangle_{\mathbb{K}} \oplus \langle v_{N_0}\rangle_{\mathbb{K}}\Big) \\
&= \big\langle e^{\mathrm{C}}_{N_0-1} \otimes_{\mathbb{K}} e^{\mathrm{C}}_{N_0}\big\rangle_{\mathbb{K}} \oplus \big\langle e^{\mathrm{C}}_{N_0-1} \otimes_{\mathbb{K}} v_{N_0}\big\rangle_{\mathbb{K}} \\
&\quad \oplus \bigoplus_{k=1}^{N_0-1} \bigoplus_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le N_0-1} \big\langle v_{i_1}.v_{i_2}.\cdots.v_{i_k} \otimes_{\mathbb{K}} e^{\mathrm{C}}_{N_0}\big\rangle_{\mathbb{K}} \\
&\quad \oplus \bigoplus_{k=1}^{N_0-1} \bigoplus_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le N_0-1} \langle v_{i_1}.v_{i_2}.\cdots.v_{i_k} \otimes_{\mathbb{K}} v_{N_0}\rangle_{\mathbb{K}}\,,
\end{aligned}$$

gdzie $e^{\mathrm{C}}_{N_0-1}$ i $e^{\mathrm{C}}_{N_0}$ są jednościami w odnośnych algebrach Clifforda. Z powyższego wynika wprost pożądana równość (1), a nadto – wziąwszy pod uwagę jawną postać (7-8.9) użytego tu izomorfizmu $\mathbb{K}$-algebr – stwierdzamy, że baza $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ otrzymana jako izomorficzny obraz otrzymanej powyżej bazy algebry $\mathrm{Cliff}(V_{N_0-1}, Q_{N_0-1}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \mathrm{Cliff}(\langle e_{N_0}\rangle_{\mathbb{K}}, Q_{N_0})$ wzdłuż χ jest postaci wskazanej w tezie dowodzonego stwierdzenia. $\square$

W następnej kolejności wyróżnimy element algebry Clifforda, który odegra istotną rolę nie tylko w klasyfikacji niskowymiarowych rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda, ale też – w dyskusji ich reprezentacji, więc i w zastosowaniach fizykalnych (w których nosi miano **operatora chiralności**).

Definicja 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy (przy czym zakładamy $\mathrm{char}\,\mathbb{K} = 0$ i $\dim_{\mathbb{K}} V = N$) i niechaj

$$\xi_V \;:\; \bigwedge\nolimits^\bullet V \xrightarrow{\cong} \mathrm{Cliff}(V,Q)$$

będzie (jedynym) $\mathbb{K}$-liniowym rozszerzeniem przyporządkowania określonego na tensorach prostych ($v_i \in V,\ i \in \overline{1,N}$ są dowolne)

$$\xi_V(1_{\mathbb{K}}) := e^{\mathrm{C}}\,,$$

$$\xi_V(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k) := \tfrac{1}{k!} \sum\nolimits_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sign}(\sigma) \triangleright v_{\sigma(1)}.v_{\sigma(2)}.\cdots.v_{\sigma(k)}\,, \qquad k \in \overline{1,N}\,.$$

Ponadto niech $\Delta \in \bigwedge^N V^* \smallsetminus \{0\}$ będzie dowolnym niezerowym wyznacznikiem na V. **Element kanoniczny** algebry Clifforda $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ (**stowarzyszony z** Δ) to wektor $e_\Delta \in \mathrm{Cliff}(V,Q)$ określony przez warunek

$$\forall_{v_1,v_2,\ldots,v_N \in V} \;:\; \xi_V(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_N) =: \Delta(v_1,v_2,\ldots,v_N) \triangleright e_\Delta\,.$$

Uwaga 1. Powyższa definicja ma sens, gdyż dla dowolnej bazy ortogonalnej $\mathscr{E} := \{e_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ przestrzeni V homomorfizm ξ_V przyporządkowuje elementom odnośnej bazy $\{1_{\mathbb{K}}, e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}\}_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le N\,,\ k\in\overline{1,N}}$ wektory

$$\begin{aligned}
\xi_V(1_{\mathbb{K}}) &= e^{\mathrm{C}}\,,\\
\xi_V(e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_k) &= \tfrac{1}{k!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \mathrm{sign}(\sigma) \triangleright e_{\sigma(1)}.e_{\sigma(2)}.\cdots.e_{\sigma(k)}\\
&= \tfrac{1}{k!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \mathrm{sign}(\sigma)^2 \triangleright e_1.e_2.\cdots.e_k = e_1.e_2.\cdots.e_k\,,
\end{aligned}$$

przy czym ostatnia tożsamość wynika wprost z (jednej z wielu) definicji znaku permutacji jako odwzorowania

$$\mathrm{sign} \;:\; \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{-1,1\} \;:\; \sigma \longmapsto (-1)^{\tau(\sigma)}\,,$$

w którego zapisie $\tau(\sigma)$ jest liczbą czynników w (dowolnym) rozkładzie permutacji σ na transpozycje, oraz z relacji skośnej przemienności

$$\forall_{\substack{i,j\in\overline{1,N}\\ i\neq j}} \;:\; e_i.e_j = -e_j.e_i \tag{2}$$

spełnianych przez obrazy elementów bazy $\mathscr{E}$ w $\mathrm{Cliff}(V,Q)$. Tym samym odwzorowanie ($\mathbb{K}$-liniowe) ξ_V przeprowadza bazę dziedziny na bazę przeciwdziedziny, o której mowa w tezie Stw. 1, jest zatem izomorfizmem przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowych. Ponadto dla dowolnych wektorów $v_\alpha = v_\alpha^j \triangleright e_i,\ \alpha \in \overline{1,N}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\xi_V(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_N) &= v_1^{i_1} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{i_2} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{i_N} \triangleright \xi_V(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_N})\\
&= \tfrac{1}{N!}\, v_1^{i_1} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{i_2} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{i_N} \triangleright \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sign}(\sigma) \triangleright e_{i_{\sigma(1)}}.e_{i_{\sigma(2)}}.\cdots.e_{i_{\sigma(N)}}\,,
\end{aligned}$$

przy czym w ostatniej sumie wyrazy o indeksach $i_j = i_k$ dla $j \neq k$ występują w parach odpowiadających $(\sigma, \sigma \circ \tau_{j,k})$, których wkłady do sumy różnią się znakiem wobec relacji $\mathrm{sign}(\sigma) = -\mathrm{sign}(\sigma \circ \tau_{j,k})$, a zatem ostatecznie niezerowy przyczynek do tej sumy może pochodzić jedynie od tych N-tek indeksów $(i_1, i_2, \ldots, i_N)$, które stanowią permutacje (dowolne) zbioru $\overline{1,N}$,

$$\xi_V(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_N)$$

$$\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{N!} \sum_{\rho\in\mathfrak{S}_N} v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} \triangleright \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sign}(\sigma) \triangleright e_{\sigma\circ\rho(1)}.e_{\sigma\circ\rho(2)}.\cdots.e_{\sigma\circ\rho(N)} \\
&= \tfrac{1}{N!} \sum_{\rho\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sign}(\rho)\, v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} \triangleright \sum_{\sigma\circ\rho\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sign}(\sigma\circ\rho) \triangleright e_{\sigma\circ\rho(1)}.e_{\sigma\circ\rho(2)}.\cdots.e_{\sigma\circ\rho(N)} \\
&= \tfrac{1}{N!} \sum_{\rho\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sign}(\rho)\, v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} \triangleright \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sign}(\sigma) \triangleright e_{\sigma(1)}.e_{\sigma(2)}.\cdots.e_{\sigma(N)} \\
&\equiv \sum_{\rho\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sign}(\rho)\, v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} \triangleright e_1.e_2.\cdots.e_N \\
&\equiv \Delta_{\mathscr{E}}(v_1, v_2, \ldots, v_N) \triangleright e_1.e_2.\cdots.e_N\,.
\end{aligned}$$

Istotnie, wobec N-liniowości i skośnej symetrii wyznacznika oraz jego unormowania dostajemy, na mocy argumentów analogicznych do tych użytych powyżej,

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathscr{E}}(v_1, v_2, \ldots, v_N) &= v_1^{i_1} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{i_2} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{i_N} \cdot_{\mathbb{K}} \Delta_{\mathscr{E}}(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_N}) \\
&= \sum_{\rho\in\mathfrak{S}_N} v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} \cdot_{\mathbb{K}} \Delta_{\mathscr{E}}(e_{\rho(1)}, e_{\rho(2)}, \ldots, e_{\rho(N)}) \\
&= \sum_{\rho\in\mathfrak{S}_N} v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} \cdot_{\mathbb{K}} \mathrm{sign}(\rho)\, \Delta_{\mathscr{E}}(\mathscr{E}) \\
&= \sum_{\rho\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sign}(\rho)\, v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)}\,.
\end{aligned}$$

Na koniec przywołujemy oczywistą równość

$$\dim_{\mathbb{K}} \bigwedge^N V^* = \binom{N}{N} = 1\,,$$

z której wyciągamy wniosek o istnieniu skalara[1] $\widetilde{\lambda}_\Delta \in \mathbb{K}$ spełniającego relację

$$\Delta_{\mathscr{E}} = \widetilde{\lambda}_\Delta \triangleright \Delta\,,$$

więc ostatecznie

$$\xi_V(\cdot) = \Delta(\cdot) \triangleright e_\Delta\,,$$

gdzie wektor $e_\Delta \in \mathrm{Cliff}(V,Q)$ stopnia N jest dany jednoznacznie (w szczególności nie zależny od argumentu odwzorowania z lewej strony równości).

Mamy istotne

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\mathscr{E} = \{e_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ będzie dowolną bazą ortogonalną w przestrzeni kwadratowej V, a $\Delta_{\mathscr{E}}$ – wyznacznikiem na V określonym przez tę bazę w standardowy sposób[2]. Element kanoniczny stowarzyszony z $\Delta_{\mathscr{E}}$ przyjmuje postać

$$e_{\Delta_{\mathscr{E}}} = e_1.e_2.\cdots.e_N\,. \tag{3}$$

Niechaj dalej $\Delta \in \bigwedge^N V^* \setminus \{0\}$ będzie dowolnym wyznacznikiem na V i niech $\lambda_\Delta \in \mathbb{K}$ będzie skalarem, o którym mowa w tezie Stw. 5. Wówczas zachodzi tożsamość

$$e_\Delta^2 = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}\, \lambda_\Delta \triangleright e^{\mathrm{C}}\,,$$

jeśli zatem forma kwadratowa Q jest niezwyrodniała, to element kanoniczny jest odwracalny w $\mathrm{Cliff}(V,Q)$, w przeciwnym zaś razie spełnia on tożsamość

$$e_\Delta^2 = \mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}\,.$$

Ponadto

$$\forall_{\gamma\in\mathrm{Cliff}(V,Q)}\ :\ e_\Delta.\gamma = J_V^{N-1}(\gamma).e_\Delta\,. \tag{4}$$

[1] Łatwo widać, że skalar ten to $\Delta(\mathscr{E})^{-1}$.

[2] Przypomnijmy, że wyznacznik na przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej V skończonego wymiaru $D \equiv \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ to (dowolny) niezerowy wektor z jednowymiarowej przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej $\bigwedge^D V^*$. Jako taki jest on jednoznacznie wyznaczony przez wartość przyjmowaną na (dowolnej) bazie V. Poprzez narzucenie warunku, iżby wartość ta była równa $1_{\mathbb{K}}$ dla ustalonej bazy *uporządkowanej* $\mathscr{E}$, wyróżniamy wyznacznik $\Delta_{\mathscr{E}}$, o którym mowa w treści stwierdzenia.

<u>*Dowód:*</u> Równość (3) wynika bezpośrednio z rachunku przeprowadzonego w obrębie Uwagi 1. Jeśli teraz w formule definiującej λ_Δ wypisanej w treści Stw. 5 dokonamy podstawienia $v_i \equiv w_i := e_i\,,\ i \in \overline{1,N}$, to otrzymamy równość

$$\begin{aligned}\lambda_{\Delta_{\mathscr{E}}} &\equiv \lambda_{\Delta_{\mathscr{E}}} \cdot_{\mathbb{K}} \Delta_{\mathscr{E}}(\mathscr{E}) \cdot_{\mathbb{K}} \Delta_{\mathscr{E}}(\mathscr{E}) = \det_{(N)}\big(\Phi(e_i,e_j)\big)_{i,j\in\overline{1,N}} = \prod_{i=1}^N \Phi_Q(e_i,e_i) \\ &\equiv \prod_{i=1}^N Q(e_i)\,,\end{aligned}$$

wobec czego – w świetle udowodnionej wcześniej równości (3) – dostajemy

$$\begin{aligned}e_{\Delta_{\mathscr{E}}}^2 &\equiv e_1.e_2.\cdots.e_N.e_1.e_2.\cdots.e_N = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}\, e_1^2.e_2^2.\cdots.e_N^2 = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \prod_{i=1}^N Q(e_i) \triangleright e^{\mathrm{C}} \\ &= (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}\, \lambda_{\Delta_{\mathscr{E}}} \triangleright e^{\mathrm{C}}\,.\end{aligned}$$

Wobec oczywistych tożsamości

$$\begin{aligned}\lambda_{\Delta_{\mathscr{E}}} &\equiv \lambda_{\Delta_{\mathscr{E}}} \cdot_{\mathbb{K}} \Delta_{\mathscr{E}}(\mathscr{E})^2 = \det_{(N)}\big(\Phi(e_i,e_j)\big)_{i,j\in\overline{1,N}} = \lambda_\Delta \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(\mathscr{E})^2\,, \\ e_{\Delta_{\mathscr{E}}} &\equiv \Delta_{\mathscr{E}}(\mathscr{E}) \triangleright e_{\Delta_{\mathscr{E}}} = \xi_V(e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_N) = \Delta(\mathscr{E}) \triangleright e_\Delta\,,\end{aligned}$$

słusznych dla dowolnego niezerowego wyznacznika Δ na V (a taki spełnia warunek $\Delta(\mathscr{E}) \neq 0_{\mathbb{K}}$), możemy w takim razie zapisać

$$\begin{aligned}e_\Delta^2 &= \Delta(\mathscr{E})^{-2} \triangleright e_{\Delta_{\mathscr{E}}}^2 = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}\, \Delta(\mathscr{E})^{-2} \triangleright \big(\lambda_{\Delta_{\mathscr{E}}} \triangleright e^{\mathrm{C}}\big) \\ &= (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}\, \Delta(\mathscr{E})^{-2} \cdot_{\mathbb{K}} \lambda_{\Delta_{\mathscr{E}}} \triangleright e^{\mathrm{C}} = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}\, \lambda_\Delta \triangleright e^{\mathrm{C}}\,.\end{aligned}$$

Jeśli teraz Q jest niezwyrodniała, to jak jasno wynika z rachunku otwierającego niniejszy dowód, $\lambda_{\Delta_{\mathscr{E}}} \neq 0_{\mathbb{K}}$, zatem także $\lambda_\Delta \neq 0_{\mathbb{K}}$, a wówczas

$$e_\Delta^{-1} = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}\, \lambda_\Delta^{-1} \triangleright e^{\mathrm{C}}\,.$$

Jeśli natomiast Q jest zwyrodniała, to $\lambda_\Delta = 0_{\mathbb{K}}$ i w konsekwencji $e_\Delta^2 = \mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}$. W dowodzie ostatniej składowej tezy stwierdzenia wykorzystujemy ustaloną wcześniej relację między e_Δ i $e_{\Delta_{\mathscr{E}}}$ w bezpośrednim rachunku, przeprowadzonym dla dowolnego $v = v^i \triangleright e_i \in V$ z wykorzystaniem relacji (2),

$$\begin{aligned}e_\Delta.v &\equiv v^i \triangleright e_\Delta.e_i = v^i \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(\mathscr{E})^{-1} \triangleright e_1.e_2.\cdots.e_N.e_i \\ &= (-1)^{N-i}\, v^i \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(\mathscr{E})^{-1} \triangleright e_1.e_2.\cdots.e_{i-1}.e_i^2.e_{i+1}.e_{i+2}.\cdots.e_N \\ &= (-1)^{N-i}\,(-1)^{i-1}\, v^i \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(\mathscr{E})^{-1} \triangleright e_i.e_1.e_2.\cdots.e_N \equiv (-1)^{N-1}\, v.e_\Delta \\ &\equiv J_V^{N-1}(v).e_\Delta\,.\end{aligned}$$

Postulowana tożsamość jawi nam się teraz jako prosta konsekwencja powyższego (wszak $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ jest generowana jako $\mathbb{K}$-algebra przez e^{C} i $\mathrm{Image}\, j_V^{\mathrm{C}}$) oraz homomorficznego charakteru inwolucji kanonicznej. □

2. Centrum i antycentrum

Dalsze nasze dociekania podporządkowane celowi nadrzędnemu, jakim jest klasyfikacja rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda oraz ich reprezentacji, wiodą nas wprost do dyskusji centrum algebry Clifforda oraz jego super-partnera, które opisuje

Definicja 2. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. **Centrum algebry Clifforda** $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ to jej podalgebra

$$\begin{aligned} Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) &= \{\ \gamma\in\mathrm{Cliff}(V,Q) \ \mid\ \forall_{\widetilde\gamma\in\mathrm{Cliff}(V,Q)}\ :\ [\gamma,\widetilde\gamma] = \mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}\ \} \\ &\equiv \{\ \gamma\in\mathrm{Cliff}(V,Q) \ \mid\ \forall_{v\in V}\ :\ [\gamma,v] = \mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}\ \}\,. \end{aligned}$$

Antycentrum algebry Clifforda $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ to jej podprzestrzeń $\mathbb{K}$-liniowa

$$\begin{aligned} AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) &= \{\ \gamma\in\mathrm{Cliff}(V,Q) \ \mid\ \forall_{\widetilde\gamma\in\mathrm{Cliff}(V,Q)}\ :\ \gamma.\widetilde\gamma = J_V(\widetilde\gamma).\gamma\ \} \\ &\equiv \{\ \gamma\in\mathrm{Cliff}(V,Q) \ \mid\ \forall_{v\in V}\ :\ \{\gamma,v\} = \mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}\ \}\,. \end{aligned}$$

Najprostszego uszczegółowienia charakterystyki wprowadzonych powyżej obiektów dostarcza

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy zapis Def. 2. $Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)$ jest podalgebrą $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradowaną $\mathbb{K}$-algebry $\mathrm{Cliff}(V,Q)$, natomiast $AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)$ jest podprzestrzenią $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradowaną przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej $\mathrm{Cliff}(V,Q)$, w rozumieniu Def. 5-6.5.

<u>*Dowód:*</u> Zarówno centrum, jak i antycentrum $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ są podprzestrzeniami zachowywanymi przez inwolucję kanoniczną, gdyż

$$\begin{aligned} \forall_{(v,\gamma)\in V\times Z(\mathrm{Cliff}(V,Q))}\ :\ J_V(\gamma).v &= -J_V(\gamma).J_V(v) = -J_V(\gamma.v) = -J_V(v.\gamma) \\ &= -J_V(v).J_V(\gamma) = v.J_V(\gamma) \end{aligned}$$

i, podobnie,

$$\begin{aligned} \forall_{(v,\gamma)\in V\times AZ(\mathrm{Cliff}(V,Q))}\ :\ J_V(\gamma).v &= -J_V(\gamma).J_V(v) = -J_V(\gamma.v) = J_V(v.\gamma) \\ &= J_V(v).J_V(\gamma) = -v.J_V(\gamma)\,. \end{aligned}$$

Stąd też obie dziedziczą $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradację z $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ na mocy Stw. 7-8.7. Przy tym centrum jest w oczywisty sposób podalgebrą $\mathrm{Cliff}(V,Q)$. □

Strukturę centrum i antycentrum algebry Clifforda opisuje

Twierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 2 (przy założeniu $\mathrm{char}\,\mathbb{K}\neq 2$) i niech $N := \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, a wtedy

(i) $N\in 2\mathbb{N}+1 \implies e_\Delta\in Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)$;
(ii) $N\in 2\mathbb{N}+2 \implies e_\Delta\in AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)$.

Ponadto jeśli Q jest niezwyrodniała, to

(i') $N\in 2\mathbb{N}+1 \implies \begin{cases} Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) = \langle e^{\mathrm{C}}\rangle_{\mathbb{K}}\oplus\langle e_\Delta\rangle_{\mathbb{K}} \\ AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) = \{\mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}\} \end{cases}$;

(ii') $N\in 2\mathbb{N}+2 \implies \begin{cases} Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) = \langle e^{\mathrm{C}}\rangle_{\mathbb{K}} \\ AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) = \langle e_\Delta\rangle_{\mathbb{K}} \end{cases}$.

<u>*Dowód:*</u> Punkty (i) i (ii) wynikają bezpośrednio z tożsamości (4). Załóżmy zatem, że Q jest formą niezwyrodniałą, i rozważmy składowe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-jednorodne centrum i antycentrum algebry Clifforda, co możemy uczynić w odwołaniu do Stw.3. Niechaj $\gamma\in AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)^1\equiv AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)\cap\mathrm{Cliff}(V,Q)^1$, a wtedy wobec

$$\forall_{v\in V}\ :\ \gamma.v = -v.\gamma$$

zachodzi

$$\gamma.e_\Delta = (-1)^N\,e_\Delta.\gamma\,, \tag{5}$$

ale też – na mocy Równ. (4) i w świetle założenia dotyczącego parzystości γ –

$$e_\Delta.\gamma = J_V^{N-1}(\gamma).e_\Delta = (-1)^{N-1}\,\gamma.e_\Delta\,,$$

więc ostatecznie

$$\gamma.e_\Delta = (-1)^N \cdot (-1)^{N-1}\,\gamma.e_\Delta = -\gamma.e_\Delta\,,$$

co przy $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$ (a takie poczyniliśmy założenie) oznacza równość

$$\gamma.e_\Delta = \mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}\,.$$

W świetle Stw. 2 wnioskujemy zatem, że

$$\gamma \equiv \gamma.e_\Delta.e_\Delta^{-1} = \mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}.e_\Delta^{-1} = \mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}\,,$$

czyli dla niezwyrodniałej formy kwadratowej dostajemy

$$AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)^1 = \{\mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}\}\,. \tag{6}$$

Jeśli ponadto $N \in 2\mathbb{N}+1$, to z porównania tożsamości

$$\gamma.e_\Delta = -e_\Delta.\gamma\,,$$

słusznej dla dowolnego elementu antycentralnego $\gamma \in AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)(\equiv AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)^0)$, z tożsamością

$$e_\Delta.\gamma = J_V^{N-1}(\gamma).e_\Delta = \gamma.e_\Delta$$

wyciągamy oczekiwany wniosek

$$AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) = \{\mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}\}\,.$$

Rozważmy odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe

$$\varphi_\Delta\ :\ \mathrm{Cliff}(V,Q) \circlearrowleft\ :\ \gamma \longmapsto e_\Delta.\gamma\,.$$

Wobec odwracalności elementu kanonicznego jest ono automorfizmem przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej $\mathrm{Cliff}(V,Q)$, a przy tym jeśli $\gamma \in Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)$, to

$$\forall_{v\in V}\ :\ \varphi_\Delta(\gamma).v \equiv e_\Delta.\gamma.v = e_\Delta.v.\gamma = J_V^{N-1}(v).e_\Delta.\gamma = (-1)^{N-1}\,v.\varphi_\Delta(\gamma)\,,$$

i – podobnie – jeśli $\gamma \in AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)$, to

$$\forall_{v\in V}\ :\ \varphi_\Delta(\gamma).v \equiv e_\Delta.\gamma.v = -e_\Delta.v.\gamma = -J_V^{N-1}(v).e_\Delta.\gamma = (-1)^N\,v.\varphi_\Delta(\gamma)\,,$$

zatem prawdziwe są następujące implikacje:

$$N \in 2\mathbb{N}+1 \quad\Longrightarrow\quad \left\{\begin{array}{c} \varphi_\Delta\big(Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)\big) = Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) \\ \varphi_\Delta\big(AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)\big) = AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) \end{array}\right.\,,$$

(7)

$$N \in 2\mathbb{N}+2 \quad\Longrightarrow\quad \varphi_\Delta\big(Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)\big) = AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)\,.$$

Jak jasno widać, uzupełnienie dyskusji struktury antycentrum w przypadku $N \in 2\mathbb{N}+2$ wymaga więc zrozumienia struktury centrum, czym zajmiemy się obecnie.

Zaczniemy od wyznaczenia składowej parzystej centrum, $Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)^0 \equiv Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) \cap \mathrm{Cliff}(V,Q)^0$. Twierdzimy, że – niezależnie od parzystości wymiaru V – składowa ta jest rozpięta na jedności algebry,

$$Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)^0 = \big\langle e^{\mathrm{C}}\big\rangle_{\mathbb{K}}\,, \tag{8}$$

a dowód opieramy na indukcji względem tegoż wymiaru N. Słuszność postulowanej równości w przypadku $N = 1$ staje się oczywista, gdy wziąć pod uwagę model algebry Clifforda skonstruowany w pierwszym kroku indukcyjnego dowodu Stw. 1, załóżmy zatem, że równość ta jest prawdziwa dla $N < N_0$ (N_0 ustalone) i niech $\dim_{\mathbb{K}} V = N_0$. Wybierzmy $v \in V$ o własności $Q(v) \neq 0$ (na co pozwala założenie o niezwyrodnieniu Q), a wtedy – w świetle twierdzenia o istnieniu dopełnienia ortogonalnego dowolnej niezwyrodniałej (skończenie wymiarowej) podprzestrzeni przestrzeni kwadratowej – możemy dokonać rozkładu Q-ortogonalnego

$$V = \langle v\rangle_{\mathbb{K}} \textcircled{\perp}_Q \langle v\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}\,,$$

przy czym – rzecz jasna – $\dim_{\mathbb{K}} \langle v\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q} = \dim_{\mathbb{K}} V - 1 < N_0$. W tym momencie możemy odwołać się do Tw. 7-8.3, aby przerzucić rachunki do algebry kanonicznie izomorficznej z $\mathrm{Cliff}(V,Q)$, jaką jest $\mathrm{Cliff}(\langle v\rangle_{\mathbb{K}}, Q\restriction_{\langle v\rangle_{\mathbb{K}}})\widehat{\otimes}_{\mathbb{K}}\mathrm{Cliff}(\langle v\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}, Q\restriction_{\langle v\rangle_{\mathbb{K}}{}^{\perp_Q}})$, co okaże się nader wygodne. Przyjąwszy dla skrótu oznaczenia $C_v \equiv \mathrm{Cliff}(\langle v\rangle_{\mathbb{K}}, Q\restriction_{\langle v\rangle_{\mathbb{K}}})$ i $C_\perp \equiv \mathrm{Cliff}(\langle v\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}, Q\restriction_{\langle v\rangle_{\mathbb{K}}{}^{\perp_Q}})$ i wybrawszy dla C_v model $\langle e_v^{\mathrm{C}}, v\rangle_{\mathbb{K}}$ jak w dowodzie Stw. 1, rozważmy obraz dowolnego elementu $\gamma \in Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)^0$ w $C_v\widehat{\otimes}_{\mathbb{K}}C_\perp$ – ten jest postaci

$$\eta(\gamma) = e_v^{\mathrm{C}} \otimes_{\mathbb{K}} w^0 + v \otimes_{\mathbb{K}} w^1$$

dla pewnych $w^k \in C_\perp^k,\ k \in \{0,1\}$ (wszak suma stopni czynników tensorowych w każdym ze składników sumy ma być parzysta, bo taki jest stopień γ). Podobnie dla dowolnego $x = \lambda \triangleright_V v + y \in V$, zapisanego w terminach $\lambda \in \mathbb{K}$ i $y \in \langle v\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}$, otrzymujemy

$$\eta(x) = e_v^{\mathrm{C}} \otimes_{\mathbb{K}} y + \lambda \triangleright v \otimes_{\mathbb{K}} e_\perp^{\mathrm{C}}\,,$$

gdzie $e_\perp^{\mathrm{C}} \in C_\perp$ jest odnośną jednością. Na podstawie powyższych wzorów obliczamy

$$\begin{aligned}\eta(\gamma.x) &= \big(e_v^{\mathrm{C}} \otimes_{\mathbb{K}} w^0 + v \otimes_{\mathbb{K}} w^1\big)\widehat{\cdot}\big(e_v^{\mathrm{C}} \otimes_{\mathbb{K}} y + \lambda \triangleright v \otimes_{\mathbb{K}} e_\perp^{\mathrm{C}}\big)\\ &= e_v^{\mathrm{C}} \otimes_{\mathbb{K}} w^0.y + \lambda \triangleright v \otimes_{\mathbb{K}} w^0 + v \otimes_{\mathbb{K}} w^1.y - \lambda \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright e_v^{\mathrm{C}} \otimes_{\mathbb{K}} w^1\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\eta(x.\gamma) &= \big(e_v^{\mathrm{C}} \otimes_{\mathbb{K}} y + \lambda \triangleright v \otimes_{\mathbb{K}} e_\perp^{\mathrm{C}}\big)\widehat{\cdot}\big(e_v^{\mathrm{C}} \otimes_{\mathbb{K}} w^0 + v \otimes_{\mathbb{K}} w^1\big)\\ &= e_v^{\mathrm{C}} \otimes_{\mathbb{K}} y.w^0 + \lambda \triangleright v \otimes_{\mathbb{K}} w^0 - v \otimes_{\mathbb{K}} y.w^1 + \lambda \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright e_v^{\mathrm{C}} \otimes_{\mathbb{K}} w^1\,,\end{aligned}$$

a stąd – wobec centralności γ –

$$\begin{aligned}0 &= \eta\big([\gamma,x]\big) = e_v^{\mathrm{C}} \otimes_{\mathbb{K}} [w^0,y] + v \otimes_{\mathbb{K}} \{w^1,y\} - 2\lambda \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright e_v^{\mathrm{C}} \otimes_{\mathbb{K}} w^1\\ &= e_v^{\mathrm{C}} \otimes_{\mathbb{K}} \big([w^0,y] - 2\lambda \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright w^1\big) + v \otimes_{\mathbb{K}} \{w^1,y\}\,,\end{aligned}$$

co z racji liniowej niezależności składników pozwala wnioskować, że

$$\forall_{y \in \langle v\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}} \ :\ \{w^1,y\} = \mathbf{0}_{C_\perp}\,,$$

czyli – w świetle Równ. (6) –

$$w^1 \in AZ(C_\perp) \cap C_\perp^1 \equiv AZ(C_\perp)^1 = \{\mathbf{0}_{C_\perp}\}\,,$$

a dalej – wobec tego –

$$\forall_{y \in \langle v\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}} \ :\ [w^0,y] = [w^0,y] - 2\lambda \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright w^1 = \mathbf{0}_{C_\perp}\,,$$

co na gruncie założenia indukcyjnego przyprowadza nas do przekonania, że

$$w^0 \in Z(C_\perp) \cap C_\perp^0 \equiv Z(C_\perp)^0 = \langle e_\perp^{\mathrm{C}}\rangle_{\mathbb{K}}\,,$$

tj. $w^0 = \mu \triangleright e_\perp^{\mathrm{C}}$ dla pewnego skalara $\mu \in \mathbb{K}$. Koniec końców otrzymujemy

$$\gamma = \chi\big(e_v^{\mathrm{C}} \otimes_{\mathbb{K}} w^0 + v \otimes_{\mathbb{K}} w^1\big) = \chi\big(e_v^{\mathrm{C}} \otimes_{\mathbb{K}} \mu \triangleright e_\perp^{\mathrm{C}}\big) \equiv \mu \triangleright \chi(\mathbf{1}_{C_v\widehat{\otimes}_{\mathbb{K}}C_\perp}) = \mu \triangleright e^{\mathrm{C}}\,.$$

Udowodniona tym samym równość (8) pozwala dokończyć dowód twierdzenia przy użyciu obserwacji (7), oto bowiem w przypadku $N \in 2\mathbb{N}+2$

$$\begin{aligned}AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) &\equiv AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)^0 = \varphi_\Delta\big(Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)^0\big) = \varphi_\Delta\big(\langle e^{\mathrm{C}}\rangle_{\mathbb{K}}\big)\\ &= \big\langle \varphi_\Delta\big(e^{\mathrm{C}}\big)\big\rangle_{\mathbb{K}} = \langle e_\Delta\rangle_{\mathbb{K}}\end{aligned}$$

(co wynika z Równ. (6) oraz z tego, że φ_Δ jest parzysty), więc też – wtórnie –

$$Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) = \varphi_\Delta\big(AZ\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)\big) = \varphi_\Delta\big(\langle e_\Delta\rangle_{\mathbb{K}}\big) = \langle e^{\mathrm{C}}\rangle_{\mathbb{K}}\,,$$

a w przypadku $N \in 2\mathbb{N}+1$

$$Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)^1 = \varphi_\Delta\big(Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)^0\big) = \langle e_\Delta\rangle_{\mathbb{K}}$$

(co wynika z faktu, że φ_Δ jest nieparzysty), zatem

$$Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) = Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)^0 \oplus Z\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)^1 = \langle e^{\mathrm{C}}\rangle_{\mathbb{K}} \oplus \langle e_\Delta\rangle_{\mathbb{K}} \,.$$

□

3. Przygarść nieoczywistych a przydatnych izomorfizmów

Pierwszy z istotnych wyników pozwalających oswoić nieco bestiarium algebr Clifforda przy użyciu wprowadzonych powyżej obiektów przynosi

Twierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 1 oraz Stw. 5, zakładając przy tym, że forma kwadratowa Q na przestrzeni V wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V = N < \infty$ jest niezwyrodniała. Ilekroć można wybrać wyznacznik $\Delta \in \bigwedge^N V^*$ w taki sposób, że

$$\lambda_\Delta = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}\,, \tag{9}$$

czyli w szczególności $e_\Delta^2 = e^{\mathrm{C}}$, to istnieje kanoniczny unitalny homomorfizm $\mathbb{K}$-algebr

$$\widetilde{\mu} \;:\; \mathrm{Cliff}(V,Q) \longrightarrow \mathrm{Cliff}(V,-Q)$$

o własności

$$\widetilde{\mu}(e_\Delta) = (-1)^{\frac{N(N-1)^2}{2}} \triangleright \big(e_\Delta^-\big)^{N+1}\,,$$

gdzie e_Δ^- jest elementem kanonicznym algebry $\mathrm{Cliff}(V,-Q)$ stowarzyszonym z tym samym wyznacznikiem Δ na przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej V będącej nośnikiem przeciwnej struktury kwadratowej $-Q$. W przypadku $N \in 2\mathbb{N}+2$ homomorfizm ten jest izomorfizmem.

<u>*Dowód:*</u> Niechaj λ_Δ będzie skalarem określonym, w sposób opisany w Stw. 5, przez dowolny niezerowy wyznacznik Δ na przestrzeni V z formą kwadratową Q i oznaczmy jako λ_Δ^- skalar określonym przez ten sam wyznacznik, gdy V wyposażymy w formę kwadratową $-Q$. Wówczas dla dowolnych układów wektorów $v_i, w_i \in V,\ i \in \overline{1,N}$ otrzymujemy równość

$$\begin{aligned}\lambda_\Delta^- \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(v_1,v_2,\ldots,v_N) \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(w_1,w_2,\ldots,w_N) &= \det{}_{(N)}\big(\Phi_{-Q}(v_i,w_j)\big)_{i,j\in\overline{1,N}} \\ \equiv \det{}_{(N)}\big(-\Phi_Q(v_i,w_j)\big)_{i,j\in\overline{1,N}} &= (-1)^N \det{}_{(N)}\big(\Phi_Q(v_i,w_j)\big)_{i,j\in\overline{1,N}} \\ &= (-1)^N\,\lambda_\Delta \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(v_1,v_2,\ldots,v_N) \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(w_1,w_2,\ldots,w_N)\,,\end{aligned}$$

z której wynika tożsamość

$$\lambda_\Delta^- = (-1)^N\,\lambda_\Delta\,. \tag{10}$$

Zdefiniujmy odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe

$$\mu \;:\; V \longrightarrow \mathrm{Cliff}(V,-Q) \equiv C_- \;:\; v \longmapsto e_\Delta^- \bullet v\,,$$

wprowadzając przy tym – gwoli przejrzystości zapisu dalszego rozumowania – osobny symbol $\bullet$ na oznaczenie mnożenia w algebrze C_- (z jednością, którą oznaczymy jako e_-^{C}). Przywoławszy Stw. 2 w odniesieniu do trójki $\big(C_-, e_\Delta^-, \lambda_\Delta^-\big)$ oraz Równ. (10), stwierdzamy bez trudu, że odwzorowanie powyższe spełnia – na mocy założenia (9) – warunek Clifforda względem struktury kwadratowej Q, oto bowiem

$$\begin{aligned}\mu(v)^2 &= e_\Delta^- \bullet v \bullet e_\Delta^- \bullet v = \big(e_\Delta^-\big)^2 \bullet J_V^{N-1}(v) \bullet v = (-1)^{N-1}\cdot(-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}\,\lambda_\Delta^- \triangleright v \bullet v \\ &= (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}-1}\,\lambda_\Delta \triangleright \big((-Q)(v) \triangleright e_-^{\mathrm{C}}\big) = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}\,\lambda_\Delta \triangleright \big(Q(v) \triangleright e_-^{\mathrm{C}}\big) \\ &= Q(v) \triangleright e_-^{\mathrm{C}}\,.\end{aligned}$$

Rozszerza się ono zatem kanonicznie i jednoznacznie do unitalnego homomorfizmu $\mathbb{K}$-algebr

$$\widetilde{\mu} \;:\; \mathrm{Cliff}(V,Q) \longrightarrow \mathrm{Cliff}(V,-Q)$$

o własności

$$\forall_{v\in V}\ :\ \widetilde{\mu}(v)=e^-_\Delta\bullet v\,.$$

Wybierzmy bazę $\mathscr{E}=\{e_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ w V ortogonalną względem Q, a zatem także względem $-Q$. Na mocy Stw. 2 i rozumowania przeprowadzonego w jego dowodzie możemy zapisać

$$e_\Delta=\Delta(\mathscr{E})^{-1}\triangleright e_1.e_2.\cdots.e_N\,,\qquad\qquad e^-_\Delta=\Delta(\mathscr{E})^{-1}\triangleright e_1\bullet e_2\bullet\cdots\bullet e_N\,,$$

a w takim razie

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu}(e_\Delta)\ &\equiv\ \Delta(\mathscr{E})^{-1}\triangleright\widetilde{\mu}(e_1.e_2.\cdots.e_N)=\Delta(\mathscr{E})^{-1}\triangleright\mu(e_1)\bullet\mu(e_2)\bullet\cdots\bullet\mu(e_N)\\ &=\ \Delta(\mathscr{E})^{-1}\triangleright e^-_\Delta\bullet e_1\bullet e^-_\Delta\bullet e_2\bullet\cdots\bullet e^-_\Delta\bullet e_N\\ &=\ (-1)^{(N-1)\cdot\frac{N(N-1)}{2}}\,\Delta(\mathscr{E})^{-1}\triangleright\left(e^-_\Delta\right)^N\bullet e_1\bullet e_2\bullet\cdots\bullet e_N\equiv(-1)^{\frac{N(N-1)^2}{2}}\left(e^-_\Delta\right)^{N+1}.\end{aligned}$$

Niech teraz $N=2m\in 2\mathbb{N}+2$, a wtedy skalary λ_Δ i λ^-_Δ przyjmują postać

$$\lambda_\Delta=(-1)^m=\lambda^-_\Delta$$

i otrzymujemy

$$\widetilde{\mu}(e_\Delta)=(-1)^m\left(e^-_\Delta\right)^{2m+1}.$$

Odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe

$$\psi\ :\ V\longrightarrow\mathrm{Cliff}(V,Q)\ :\ v\longmapsto e_\Delta.v$$

spełnia warunek Clifforda względem struktury kwadratowej $-Q$,

$$\begin{aligned}\psi(v)^2\ &=\ e_\Delta.v.e_\Delta.v=e_\Delta^2.J_V^{2m-1}(v).v=-e_\Delta^2.v.v=(-1)^{m(2m-1)}\,\lambda_\Delta\triangleright\big((-Q)(v)\triangleright e^{\mathrm{C}}\big)\\ &=\ (-Q)(v)\triangleright e^{\mathrm{C}}\,,\end{aligned}$$

więc rozszerza się kanonicznie i jednoznacznie do unitalnego homomorfizmu $\mathbb{K}$-algebr

$$\widetilde{\psi}\ :\ \mathrm{Cliff}(V,-Q)\longrightarrow\mathrm{Cliff}(V,Q)$$

o własności

$$\forall_{v\in V}\ :\ \widetilde{\psi}(v)=e_\Delta.v\,.$$

Relację pomiędzy oboma homomorfizmami ustalamy na zbiorze generatorów obu algebr na podstawie rezultatów dotychczasowych dociekań. Oto więc

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\mu}(v)\ &=\ \widetilde{\psi}(e^-_\Delta\bullet v)=\widetilde{\psi}(e^-_\Delta).\widetilde{\psi}(v)=(-1)^m\,(e_\Delta)^{2m+1}.e_\Delta.v\equiv(-1)^m\left(e_\Delta^2\right)^{m+1}.v\\ &=\ (-1)^m\,v\equiv J_V^m(v)\,,\end{aligned}$$

czyli w ogólności (wszak $\widetilde{\mu}$ i $\widetilde{\psi}$ to homomorfizmy $\mathbb{K}$-algebr)

$$\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\mu}=J_V^m\,.$$

Analogicznie wyprowadzamy relację

$$\widetilde{\mu}\circ\widetilde{\psi}=\left(J_V^-\right)^m,$$

gdzie J_V^- jest kanoniczną inwolucją na C_-. Zważywszy oczywistą tożsamość

$$\widetilde{\mu}\circ J_V=J_V^-\circ\widetilde{\mu}\qquad\Longleftarrow\qquad J_V^-\big(e^-_\Delta\big)=(-1)^{2m}\,e^-_\Delta=e^-_\Delta$$

(oraz inwolutywny charakter J_V i J_V^-), możemy zatem przepisać powyższe relacje w postaci

$$\big(J_V^m\circ\widetilde{\psi}\big)\circ\widetilde{\mu}=\mathrm{id}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}\,,\qquad\qquad\widetilde{\mu}\circ\big(J_V^m\circ\widetilde{\psi}\big)=\mathrm{id}_{\mathrm{Cliff}(V,-Q)}\,,$$

z których jasno wynika, że $\widetilde{\mu}$ jest izomorfizmem (o odwrotności $J_V^m\circ\widetilde{\psi}$). □

Kolejny arcyważny wynik artykułuje

Twierdzenie 3 (O kanonicznym iloczynie tensorowym algebr Clifforda)**.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\big(\big((V,+_V,\mathsf{P}_V,\bullet\longmapsto 0_V),\ell_V\big),Q_V\big)$ będzie przestrzenią kwadratową nad ciałem $\mathbb{K}$ wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V = 2m \in 2\mathbb{N}+2$, z wyróżnionym wyznacznikiem $\Delta \in \bigwedge^{2m} V^*$ o stowarzyszonym elemencie kanonicznym $e_\Delta \in \mathrm{Cliff}(V,Q_V)$, który spełnia warunek

$$e_\Delta^2 = \varepsilon \triangleright e^{\mathrm{C}}\,, \qquad \varepsilon \in \{-1,1\}\,.$$

Wówczas dla dowolnej $\big(\big((\widetilde V,+_{\widetilde V},\mathsf{P}_{\widetilde V},\bullet\longmapsto 0_{\widetilde V}),\ell_{\widetilde V}\big),Q_{\widetilde V}\big) \in \mathrm{Ob}\,\square\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ istnieje kanoniczny unitalny homomorfizm $\mathbb{K}$-algebr

$$\mathrm{Cliff}\big(V\oplus\widetilde V, Q_V \oplus \varepsilon\triangleright Q_{\widetilde V}\big) \cong \mathrm{Cliff}(V,Q_V)\otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Cliff}(\widetilde V, Q_{\widetilde V})\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Rozważmy kanoniczne izometryczne włożenia

$$\jmath_V \;:\; V \rightarrowtail V\oplus\widetilde V\,, \qquad\qquad \jmath_{\widetilde V} \;:\; \widetilde V \rightarrowtail V\oplus\widetilde V\,,$$

przy czym w drugim przypadku *implicite* traktujemy $\widetilde V$ jako nośnik struktury kwadratowej $\varepsilon\triangleright Q_{\widetilde V}$. W świetle (dowodu) Tw. 7-8.3 indukowane unitalne homomorfizmy $\mathbb{K}$-algebr

$$\widetilde\jmath_V \equiv \mathrm{Cliff}(\jmath_V) \quad:\quad \mathrm{Cliff}(V,Q_V) \longrightarrow \mathrm{Cliff}(V\oplus\widetilde V, Q_V\oplus\varepsilon\triangleright Q_{\widetilde V}) \equiv C_\oplus\,,$$

$$\widetilde\jmath_{\widetilde V} \equiv \mathrm{Cliff}(\jmath_{\widetilde V}) \quad:\quad \mathrm{Cliff}(\widetilde V,\varepsilon\triangleright Q_{\widetilde V}) \longrightarrow C_\oplus$$

spełniają – dla dowolnego elementu $\widetilde\gamma \in \mathrm{Cliff}(\widetilde V,\varepsilon\triangleright Q_{\widetilde V})$ – warunek ($\widetilde e^{\mathrm{C}}$ jest jednością w $\mathrm{Cliff}(\widetilde V,\varepsilon\triangleright Q_{\widetilde V})$)

$$\begin{aligned}
\widetilde\jmath_V(e_\Delta).\widetilde\jmath_{\widetilde V}(\widetilde\gamma) &\equiv m_{C_\oplus}\circ\big(\widetilde\jmath_V\otimes\widetilde\jmath_{\widetilde V}\big)(e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde\gamma) \equiv \chi(e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde\gamma) = \chi(e^{\mathrm{C}}.e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde\gamma.\widetilde e^{\mathrm{C}})\\
&= \chi\big((-1)^{\deg\widetilde\gamma\cdot\deg e_\Delta}\,\big(e^{\mathrm{C}}\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde\gamma\big)\widetilde\cdot\big(e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde e^{\mathrm{C}}\big)\big)\\
&= \chi\big(\big(e^{\mathrm{C}}\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde\gamma\big)\widetilde\cdot\big(e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde e^{\mathrm{C}}\big)\big) = \chi\big(e^{\mathrm{C}}\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde\gamma\big).\chi\big(e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde e^{\mathrm{C}}\big)\\
&= \widetilde\jmath_{\widetilde V}(\widetilde\gamma).\widetilde\jmath_V(e_\Delta)\,,
\end{aligned}$$

przeto odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe

$$\varphi \;:\; \widetilde V \longrightarrow C_\oplus \;:\; v \longmapsto \widetilde\jmath_V(e_\Delta).\widetilde\jmath_{\widetilde V}(v)$$

spełnia warunek Clifforda (wzgl. $\widetilde Q$),

$$\begin{aligned}
\varphi(v)^2 &\equiv \widetilde\jmath_V(e_\Delta).\widetilde\jmath_{\widetilde V}(v).\widetilde\jmath_V(e_\Delta).\widetilde\jmath_{\widetilde V}(v) = \widetilde\jmath_V(e_\Delta)^2.\widetilde\jmath_{\widetilde V}(v)^2 = \widetilde\jmath_V\big(e_\Delta^2\big).\widetilde\jmath_{\widetilde V}\big(v^2\big)\\
&= \varepsilon\big(\varepsilon\,\widetilde Q(v)\big)\triangleright\mathbf{1}_\oplus = Q(v)\triangleright\mathbf{1}_\oplus\,,
\end{aligned}$$

i z tej racji rozszerza się jednoznacznie i kanonicznie do unitalnego homomorfizmu $\mathbb{K}$-algebr

$$\widetilde\varphi \;:\; \mathrm{Cliff}\big(\widetilde V, Q_{\widetilde V}\big) \longrightarrow C_\oplus\,.$$

Przy tym – dla dowolnych $(v,\widetilde v)\in V\times\widetilde V$ – zachodzi równość

$$\begin{aligned}
\widetilde\jmath_V(v).\widetilde\varphi(\widetilde v) &\equiv \widetilde\jmath_V(v).\widetilde\jmath_V(e_\Delta).\widetilde\jmath_{\widetilde V}(\widetilde v) = \widetilde\jmath_V(v.e_\Delta).\widetilde\jmath_{\widetilde V}(\widetilde v) = \widetilde\jmath_V\big(e_\Delta.J_V(v)\big).\widetilde\jmath_{\widetilde V}(\widetilde v)\\
&= -\widetilde\jmath_V(e_\Delta.v).\widetilde\jmath_{\widetilde V}(\widetilde v) = -\widetilde\jmath_V(e_\Delta).\widetilde\jmath_V(v).\widetilde\jmath_{\widetilde V}(\widetilde v) \equiv -\widetilde\jmath_V(e_\Delta).\chi(v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde v)\\
&= -\widetilde\jmath_V(e_\Delta).\chi\big(e^{\mathrm{C}}.v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde v.\widetilde e^{\mathrm{C}}\big) = -\widetilde\jmath_V(e_\Delta).\chi\big((-1)^{\deg v\cdot\deg\widetilde v}\,\big(e^{\mathrm{C}}\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde v\big).\big(v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde e^{\mathrm{C}}\big)\big)\\
&= \widetilde\jmath_V(e_\Delta).\chi\big(e^{\mathrm{C}}\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde v\big).\chi\big(v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde e^{\mathrm{C}}\big) = \widetilde\jmath_V(e_\Delta).\widetilde\jmath_{\widetilde V}(\widetilde v).\widetilde\jmath_V(v)\\
&\equiv \widetilde\varphi(\widetilde v).\widetilde\jmath_V(v)\,,
\end{aligned}$$

zatem

$$\forall_{(\gamma,\widetilde\gamma)\in\mathrm{Cliff}(V,Q_V)\times\mathrm{Cliff}(\widetilde V,Q_{\widetilde V})} \;:\; \widetilde\jmath_V(\gamma).\widetilde\varphi(\widetilde\gamma) = \widetilde\varphi(\widetilde\gamma).\widetilde\jmath_V(\gamma)\,.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe

$$\Phi\ :\ \mathrm{Cliff}(V,Q_V)\otimes_{\mathbb{K}}\mathrm{Cliff}(\widetilde{V},Q_{\widetilde{V}})\longrightarrow C_\oplus$$

stanowiące (jedyne) rozszerzenie przyporządkowania określonego na tensorach prostych jako

$$\Phi(\gamma\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{\gamma}) := \widetilde{\jmath}_V(\gamma).\widetilde{\varphi}(\widetilde{\gamma})\,.$$

Pokażemy, że Φ jest unitalnym izomorfizmem $\mathbb{K}$-algebr, kostruując jego odwrotność. W tym celu rozważmy odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe

$$\Psi\ :\ V\oplus\widetilde{V}\longrightarrow\mathrm{Cliff}(V,Q_V)\otimes_{\mathbb{K}}\mathrm{Cliff}(\widetilde{V},Q_{\widetilde{V}})\ :\ (v,\widetilde{v})\longmapsto v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}+\varepsilon\triangleright e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}\,,$$

które spełnia warunek Clifforda

$$\begin{aligned}
\Psi(v,\widetilde{v})^2 &= \big(v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}+\varepsilon\triangleright e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}\big)\cdot\big(v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}+\varepsilon\triangleright e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}\big)\\
&= v^2\otimes_{\mathbb{K}} e^{\mathrm{C}}+\varepsilon\triangleright v.e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}+\varepsilon\triangleright e_\Delta.v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}+e_\Delta^2\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}^2\\
&= Q_V(v)\triangleright e^{\mathrm{C}}\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}+\varepsilon\triangleright v.e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}-\varepsilon\triangleright v.e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}+\varepsilon\, Q_{\widetilde{V}}(\widetilde{v})\triangleright e^{\mathrm{C}}\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}\\
&\equiv \big(Q_V\oplus\varepsilon\triangleright Q_{\widetilde{V}}\big)(v,\widetilde{v})\triangleright e^{\mathrm{C}}\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}\,,
\end{aligned}$$

a zatem indukuje (jedyny) unitalny homomorfizm $\mathbb{K}$-algebr

$$\widetilde{\Psi}\ :\ C_\oplus\longrightarrow\mathrm{Cliff}(V,Q_V)\otimes_{\mathbb{K}}\mathrm{Cliff}(\widetilde{V},Q_{\widetilde{V}})$$

o własności

$$\widetilde{\Psi}(v,\widetilde{v}) = v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}+\varepsilon\triangleright e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}\,.$$

Zauważmy, że reprezentacja (3) elementu kanonicznego pozwala nam obliczyć wprost

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Psi}\circ\widetilde{\jmath}_V(e_\Delta) &\equiv \Delta(\mathscr{E})^{-1}\triangleright\widetilde{\Psi}\circ\widetilde{\jmath}_V(e_1.e_2.\cdots.e_{2m}) = \Delta(\mathscr{E})^{-1}\triangleright\widetilde{\Psi}\big(\jmath_V(e_1).\jmath_V(e_2).\cdots.\jmath_V(e_{2m})\big)\\
&= \Delta(\mathscr{E})^{-1}\triangleright\Psi(e_1,0).\Psi(e_2,0).\cdots.\Psi(e_{2m},0) = \Delta(\mathscr{E})^{-1}\triangleright\big(e_1\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}\big).\big(e_2\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}\big).\cdots.\big(e_{2m}\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}\big)\\
&= e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}\,.
\end{aligned}$$

Tożsamości

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Psi}\circ\Phi\big(v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}+e^{\mathrm{C}}\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}\big) &= \widetilde{\Psi}\big((v,0).\widetilde{\varphi}\big(e^{\mathrm{C}}\big)+\widetilde{\jmath}_V\big(e^{\mathrm{C}}\big).\widetilde{\varphi}(\widetilde{v})\big)\\
&= \widetilde{\Psi}\big((v,0).\mathbf{1}_{C_\oplus}+\mathbf{1}_{C_\oplus}.\widetilde{\jmath}_V(e_\Delta).\widetilde{\jmath}_{\widetilde{V}}(\widetilde{v})\big)\\
&= \widetilde{\Psi}(v,0)+\widetilde{\Psi}\circ\widetilde{\jmath}_V(e_\Delta).\widetilde{\Psi}(0,\widetilde{v})\\
&= v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}+\big(e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}\big).\big(\varepsilon\triangleright e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}\big)\\
&= v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}+\varepsilon\triangleright e_\Delta^2\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}\\
&= v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}+e^{\mathrm{C}}\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\Phi\circ\widetilde{\Psi}(v,\widetilde{v}) &= \Phi\big(v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}+\varepsilon\triangleright e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}\big) = \Phi\big(v\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{e}^{\mathrm{C}}\big)+\varepsilon\triangleright\Phi\big(e_\Delta\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{v}\big)\\
&= \widetilde{\jmath}_V(v).\widetilde{\varphi}\big(\widetilde{e}^{\mathrm{C}}\big)+\varepsilon\triangleright\widetilde{\jmath}_V(e_\Delta).\widetilde{\varphi}(\widetilde{v})\\
&= (v,0).\mathbf{1}_{C_\oplus}+\varepsilon\triangleright\widetilde{\jmath}_V(e_\Delta).\widetilde{\jmath}_V(e_\Delta).\widetilde{\jmath}_{\widetilde{V}}(\widetilde{v})\\
&= (v,0)+\varepsilon\triangleright\widetilde{\jmath}_V\big(e_\Delta^2\big).(0,\widetilde{v}) = (v,0)+(0,\widetilde{v})\equiv(v,\widetilde{v})\,.
\end{aligned}$$

pokazują dowodnie – na (nietrywialnych) generatorach, więc i ogólnie (wobec homomorficznego charakteru rozpatrywanych odwzorowań) – antycypowaną odwracalność Φ. $\square$

Na zakończenie rozważań ogólnych, wytyczających szlak ku twierdzeniom klasyfikacyjnym dla rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda, wypowiemy jeszcze istotne

Twierdzenie 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\big((V_\alpha, +_\alpha, \mathsf{P}_\alpha, \bullet \longmapsto 0_\alpha), \ell_\alpha\big),\ \alpha \in \{1,2\}$ będą przestrzeniami $\mathbb{K}$-liniowymi wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V_1 = \dim_{\mathbb{K}} V_2 =: N < \infty$, a nadto niech $\Delta\ :\ V_1 \times V_2 \longrightarrow \mathbb{K}$ będzie dwoistością[3]. Określmy na $V_1 \oplus V_2$ formę kwadratową

$$Q_\Delta\ :\ V_1 \oplus V_2 \longrightarrow \mathbb{K}\ :\ (v_1, v_2) \longmapsto \Delta(v_1, v_2) \equiv \Delta \circ \big(\mathrm{pr}_1 \times \mathrm{pr}_2\big)\big((v_1, v_2), (v_1, v_2)\big)\,.$$

Istnieje kanoniczny unitalny izomorfizm $\mathbb{K}$-algebr

$$\mathrm{Cliff}(V_1 \oplus V_2, Q_\Delta) \cong \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\textstyle\bigwedge^\bullet V_1\big)\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Zacznijmy od odnotowania, że sensowność definicji formy kwadratowej Q_Δ jest prostą kownsekwencją dwuliniowości dwoistości Δ. To rzekłszy, możemy wykorzystać izomorfizm przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowych (odwzorowanie prawostronnie stowarzyszone z Δ)

$$r_\Delta\ :\ V_2 \xrightarrow{\cong} V_1^*\ :\ v \longmapsto \Delta(\cdot, v)\,,$$

aby w połączeniu z tezą Stw. 7-8.4 wypisać wygodny układ generujący $\mathbb{K}$-algebry $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\bigwedge^\bullet V_1\big)$ złożony z endomorfizmów $\mu_{v_1},\ v_1 \in V_1$ oraz $\imath_{r_\Delta(v_2)},\ v_2 \in V_2$, które spełniają proste relacje

$$\mu_{v_1}^2 = 0 = \imath_{r_\Delta(v_2)}^2\,, \qquad \{\imath_{r_\Delta(v_2)}, \mu_{v_1}\} = \Delta(v_1, v_2) \triangleright \mathrm{id}_{\bigwedge^\bullet V_1}\,.$$

O ile dwie pierwsze nie wymagają dodatkowego komentarza, ostatnią sprawdzamy w bezpośrednim rachunku (na tensorach prostych, dla dowolnych $w_i \in V_1,\ i \in \overline{1,n}$):

$$\begin{aligned}
& \{\imath_{r_\Delta(v_2)}, \mu_{v_1}\}(w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n) \\
= \ & \imath_{r_\Delta(v_2)}(v_1 \wedge w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n) + v_1 \wedge \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\, \Delta(w_k, v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \underset{\widehat{k}}{\cdots} \wedge w_n \\
= \ & \Delta(v_1, v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n - v_1 \wedge \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\, \Delta(w_k, v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \underset{\widehat{k}}{\cdots} \wedge w_n \\
& + v_1 \wedge \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\, \Delta(w_k, v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \underset{\widehat{k}}{\cdots} \wedge w_n \\
= \ & \Delta(v_1, v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n \equiv \Delta(v_1, v_2) \triangleright \mathrm{id}_{\bigwedge^\bullet V_1}(w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n)\,.
\end{aligned}$$

Zdefiniujmy odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe

$$\varphi\ :\ V_1 \oplus V_2 \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\textstyle\bigwedge^\bullet V_1\big)\ :\ (v_1, v_2) \longmapsto \mu_{v_1} + \imath_{r_\Delta(v_2)}\,.$$

Na podstawie wypisanych wyżej tożsamości bez trudu sprawdzamy, że spełnia ono warunek Clifforda,

$$\begin{aligned}
\varphi(v_1, v_2)^2 \ & \equiv \ \big(\mu_{v_1} + \imath_{r_\Delta(v_2)}\big) \circ \big(\mu_{v_1} + \imath_{r_\Delta(v_2)}\big) = \mu_{v_1}^2 + \imath_{r_\Delta(v_2)}^2 + \{\imath_{r_\Delta(v_2)}, \mu_{v_1}\} \\
& = \ \Delta(v_1, v_2) \triangleright \mathrm{id}_{\bigwedge^\bullet V_1} \equiv Q_\Delta(v_1, v_2) \triangleright \mathbf{1}_{\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^\bullet V_1)}\,,
\end{aligned}$$

rozszerza się ono zatem kanonicznie do unitalnego homomorfizmu $\mathbb{K}$-algebr

$$\widetilde{\varphi}\ :\ \mathrm{Cliff}(V_1 \oplus V_2, Q_\Delta) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\textstyle\bigwedge^\bullet V_1\big)$$

o własności

$$\widetilde{\varphi}(v_1, v_2) = \mu_{v_1} + \imath_{r_\Delta(v_2)}\,.$$

[3]Przypomnijmy, że dwoistość dla pary (G_1, G_2) modułów nad pierścieniem przemiennym R to odwzorowanie $\Delta\ :\ G_1 \times G_2 \longrightarrow R$ nieosobliwe, tj. takie, dla którego oba odwzorowania jednostronnie stowarzyszone $l_\Delta\ :\ G_1 \longrightarrow G_2^*\ :\ g_1 \longmapsto \Delta(g_1, \cdot)$ (lewostronnie) i $l_\Delta\ :\ G_2 \longrightarrow G_1^*\ :\ g_2 \longmapsto \Delta(\cdot, g_2)$ (prawostronnie) są bijekcjami.

Na mocy Stw. 8-9-10.4 podprzestrzeń $\mathrm{Image}\,\widetilde{\varphi}\!\upharpoonright_{J^{\mathrm{C}}_{V_1\oplus V_2}(V_1\oplus V_2)} \equiv \mathrm{Image}\,\varphi$ generuje $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\bigwedge^\bullet V_1\big)$ jako $\mathbb{K}$-algebrę, zatem $\widetilde{\varphi}$ jest epimorfizmem. Ale zarazem – w świetle Równ. (1) –

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Cliff}(V_1 \oplus V_2, Q_\Delta) = 2^{\dim_{\mathbb{K}}(V_1\oplus V_2)} = 2^{\dim_{\mathbb{K}} V_1 + \dim_{\mathbb{K}} V_2} = 2^{2\dim_{\mathbb{K}} V_1}$$

oraz – tym razem na gruncie Tw. 7-8.4 oraz Stw. 7-8.3 –

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\bigwedge^\bullet V_1\big) = \big(\dim_{\mathbb{K}} \bigwedge^\bullet V_1\big)^2 = \big(2^{\dim_{\mathbb{K}} V_1}\big)^2 \equiv 2^{2\dim_{\mathbb{K}} V_1}\,,$$

co pokazuje dowodnie, że $\widetilde{\varphi}$ jest w istocie izomorfizmem. □

Jako proste corollarium do poprzedniego twierdzenia otrzymujemy

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy, zakładając przy tym, że $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$, przestrzeń kwadratowa V jest niezwyrodniała i ma $\dim_{\mathbb{K}} V \in 2\mathbb{N}$. Niechaj $\omega \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ będzie inwolucją, $\omega^2 = \mathrm{id}_V$, skośnie symetryczną względem formy kwadratowej Q, tj. taką, która spełnia warunek

$$\omega^* = -\omega$$

wypisany dla

$$\forall_{v_1,v_2\in V}\ :\ \Phi_Q\big(\omega^*(v_1), v_2\big) := \Phi_Q\big(v_1, \omega(v_2)\big)\,.$$

Wówczas istnieje kanoniczny unitalny izomorfizm $\mathbb{K}$-algebr

$$\mathrm{Cliff}(V,Q) \cong \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\bigwedge^\bullet \mathrm{Ker}\,(\omega - \mathrm{id}_V)\big)\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Inwolucja ω zadaje – w świetle stwierdzenia dotyczącego odpowiedniości pomiędzy rozkładami modułów nad pierścieniem na sumy proste ich podmodułów a zupełnymi rodzinami rzutów komplementarnych na tychże modułach – rozkład

$$V = \mathrm{Ker}\,(\omega + \mathrm{id}_V)\big) \oplus \mathrm{Ker}\,(\omega - \mathrm{id}_V) \equiv V_- \oplus V_+\,,$$

gdyż para $P_\pm := 2^{-1}_{\mathbb{K}} \triangleright (\mathrm{id}_V \pm \omega)$ stanowi zupełny układ rzutów komplementarnych. Ponadto dla dowolnych $v_\pm, w_\pm \in V_\pm$ zachodzi tożsamość

$$\Phi_Q(v_\pm, w_\pm) \;=\; \Phi_Q\big(\pm\omega(v_\pm), \pm\omega(w_\pm)\big) = \Phi_Q\big(\omega^* \circ \omega(v_\pm), w_\pm\big) = -\Phi_Q\big(\omega^2(v_\pm), w_\pm\big) = -\Phi_Q(v_\pm, w_\pm)\,,$$

przeto

$$V_\pm \perp_Q V_\pm\,,$$

natomiast w ograniczeniu do $V_\pm \times V_\mp$ forma dwuliniowa Φ_Q jest niezwyrodniała – istotnie, ilekroć dla ustalonego $v_\pm \in V_\pm$ jest

$$\forall_{w_\mp\in V_\mp}\ :\ \Phi_Q(v_\pm, w_\mp) = 0_{\mathbb{K}}\,,$$

to dowolny wektor $V \ni w = \widetilde{w}_- \oplus w_+$ wzgl. $w = w_- \oplus \widetilde{w}_+$ spełnia warunek

$$\Phi_Q(v_\pm, w) = \Phi_Q(v_\pm, \widetilde{w}_\pm) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v_\pm, w_\mp) = \Phi_Q(v_\pm, w_\mp) = 0_{\mathbb{K}}\,,$$

zatem – wobec niezwyrodnienia Q – koniecznie

$$v_\pm = 0_V\,.$$

W rezultacie otrzymujemy parę dwoistą (V_-, V_+) związaną dwoistością

$$\Delta_Q := 2\Phi_Q\!\upharpoonright_{V_-\times V_+}\,,$$

dla której wyprowadzamy tożsamość

$$\begin{aligned}\Phi_Q(v_- \oplus v_+, w_- \oplus w_+) \;&=\; \Phi_Q(v_-, w_-) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v_+, w_+) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v_-, w_+) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v_+, w_-) \\ &=\; \Phi_Q(v_-, w_+) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(w_-, v_+) \equiv 2^{-1}_{\mathbb{K}} \triangleright \big(\Delta_Q(v_-, w_+) +_{\mathbb{K}} \Delta_Q(w_-, v_+)\big)\,,\end{aligned}$$

a z niej – równość

$$Q(v_- \oplus v_+) = \Delta_Q(v_-, v_+)\,,$$

usprawiedliwiającą – w połączeniu z wcześniejszymi obserwacjami – bezpośrednie odwołanie się do Tw. 4. Na tej podstawie stwierdzamy, zgodnie z tezą będącą przedmiotem dowodu,

$$\mathrm{Cliff}(V,Q) \equiv \mathrm{Cliff}(V_- \oplus V_+, Q \equiv Q_{\Delta_Q}) \cong \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\textstyle\bigwedge^\bullet V_-\big)\,.$$

$\square$

Dodatek A. Uzupełnienie z teorii przestrzeni kwadratowych

Poniższe stwierdzenie ustala prostą relację między formą kwadratową na przestrzeni wektorowej i dowolnym (niezerowym) wynacznikiem na tej ostatniej, do którego będziemy się odwoływać w trakcie badań nad anatomią algebr Clifforda.

Stwierdzenie 5. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj V będzie przestrzenią (kwadratową) wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V = N < \infty$. Dowolny wyznacznik $\Delta \in \bigwedge^N V^* \setminus \{0\}$ określa jednoznacznie skalar $\lambda_\Delta \in \mathbb{K}$ spełniający – dla dowolnych $v_i, w_i \in V$, $i \in \overline{1,N}$ – tożsamości

$$\det{}_{(N)}\big(\Phi_Q(v_i,w_j)\big)_{i,j\in\overline{1,N}} = \lambda_\Delta \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(v_1,v_2,\ldots,v_N) \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(w_1,w_2,\ldots,w_N)\,.$$

Zadania domowe

Zadanie domowe 1. Udowodnij Stw. 5.

Zadanie domowe 2. Sprawdź, że dla dowolnej przestrzeni kwadratowej (V,Q) mnożenie przez wektor anizotropowy $v \in V$ określa izomorfizm $\mathrm{Cliff}(V,Q)^0 \cong \mathrm{Cliff}(\langle v\rangle^{\perp_Q}, Q\restriction_{\langle v\rangle^{\perp_Q}})$.

Zadanie domowe 3. Niechaj (V,Q) będzie niezwyrodniałą przestrzenią kwadratową nad ciałem $\mathbb{K}$ wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V = N \in \mathbb{N}^\times$. Na algebrze zewnętrznej $\bigwedge^\bullet V$ określamy **iloczyn wewnętrzny**

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_\wedge \ : \ \bigwedge^\bullet V \times \bigwedge^\bullet V \longrightarrow \mathbb{K}$$

jako jedyne 2-liniowe rozszerzenie przyporządkowania

$$\langle 1_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}\rangle_\wedge = 1_{\mathbb{K}}\,, \qquad \langle 1_{\mathbb{K}}, v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_m\rangle_\wedge = 0_{\mathbb{K}} = \langle v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_m, 1_{\mathbb{K}}\rangle_\wedge\,,$$

$$\langle v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_m, w_1\wedge w_2\wedge\cdots\wedge w_n\rangle_\wedge := \delta_{m,n}\det{}_{(n)}\big(\Phi_Q(v_i,w_j)\big)$$

określonego dla wielowektorów prostych $v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_m$ i $w_1\wedge w_2\wedge\cdots\wedge w_n$ (tutaj $v_i, w_j \in V$, $i \in \overline{1,m}, j\in\overline{1,n}$).

(i) Niechaj $\mathcal{E} \equiv \{e_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ będzie dowolną bazą (pseudo)ortonormalną (V,Q). Udowodnij, że wówczas zbiór $\{1_{\mathbb{K}}\}\cup\bigcup_{k\in\overline{1,N}}\{e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}\}_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le N}$ jest bazą (pseudo)ortonormalną $(\bigwedge^\bullet V, \langle\cdot,\cdot\rangle_\wedge)$.

(ii) Zdefiniujmy **mnożenie wewnętrzne przez** $v\in V$ jako odwzorowanie sprzężone względem odwzorowania μ_v ze Stw. 7-8.4,

$$I_v := \mu_v^*\,,$$

tj.

$$\langle I_v(x), y\rangle_\wedge := \langle x, \mu_v(y)\rangle_\wedge\,, \qquad x,y\in\bigwedge^\bullet V\,.$$

Wykaż, że I_v jest antyróżniczkowaniem na $\bigwedge^\bullet V$, tj. dla dowolnego wielowektora prostego $w_1\wedge w_2\wedge\cdots\wedge w_n$ jak wyżej zachodzi tożsamość

$$I_v(w_1\wedge w_2\wedge\cdots\wedge w_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\,\langle v, w_k\rangle_\wedge \triangleright w_1\wedge w_2\wedge \underset{\widehat{k}}{\cdots}\wedge w_n\,,$$

a dla dowolnych wielowektorów jednorodnych x i y (patrz: Stw. 7-8.3) spełniona jest **$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradowana reguła Leibniza**

$$I_v(x\wedge y) = I_v(x)\wedge y + (-1)^{\deg x}\, x\wedge I_v(y)\,.$$

Używając izomorfizmu ξ_V z Def. 1, zadajemy **iloczyn wewnętrzny na** $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ wzorem

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{C}} := \langle\cdot,\cdot\rangle_\wedge\circ\big(\xi_V^{-1}\times\xi_V^{-1}\big) \ : \ \mathrm{Cliff}(V,Q)\times\mathrm{Cliff}(V,Q)\longrightarrow\mathbb{K}\,.$$

(iii) Przywoławszy zapis Zad. dom. 7-8.8, udowodnij tożsamości

$$\langle \gamma.x, y\rangle_{\mathrm{C}} = \langle x, \widehat{\gamma}.y\rangle_{\mathrm{C}}\,, \qquad \langle x.\gamma, y\rangle_{\mathrm{C}} = \langle x, y.\widehat{\gamma}\rangle_{\mathrm{C}}$$

dla dowolnych $\gamma, x, y\in\mathrm{Cliff}(V,Q)$.

(iv) Udowodnij (pseudo)ortogonalność bazy $\{e^{\mathrm{C}}\}\cup\bigcup_{k\in\overline{1,N}}\{e_{i_1}.e_{i_2}.\cdots.e_{i_k}\}_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le N}$ (dla $\{e_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ jak w punkcie (i)).

(v) Niechaj $\gamma = v_1.v_2.\cdots.v_m$ będzie elementem prostym (dla $v_i\in V$, $i\in\overline{1,m}$). Wyprowadź równości

$$\|\gamma\| = \widehat{\gamma}.\gamma = \gamma.\widehat{\gamma} = \|v_1\|\cdot\|v_2\|\cdot\cdots\cdot\|v_m\|\,,$$

słuszne dla $\|x\| = \langle x,x\rangle$, $x\in\mathrm{Cliff}(V,Q)$.

Zadanie domowe 4. Przyjmijmy założenia i zapis Zad. 3. Wybierzmy dowolnie porządek na $\mathcal{E}$ (czyli orientację na V), np.

$$(e_1, e_2, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_{p+q})$$

dla

$$\big(Q(e_1), Q(e_2), \ldots, Q(e_p), Q(e_{p+1}), \ldots, Q(e_{p+q})\big) = (\underbrace{+1, +1, \ldots, +1}_{p}, \underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{q}),$$

i niech

$$\omega_V \equiv e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_{p+q}$$

będzie odnośnym unormowanym elementem objętości. Definiujemy **operator** (**gwiazdkę**) **Hodge'a**

$$\star_Q \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\textstyle\bigwedge^\bullet V\big)$$

wzorem

$$x \wedge \star_Q y := \langle x, y \rangle_\wedge \triangleright \omega_V\,, \qquad x, y \in \textstyle\bigwedge^\bullet V\,.$$

Udowodnij tożsamość

$$\star_Q x = \xi_V^{-1}\big(\widehat{\xi_V(x)}.\xi_V(\omega_V)\big)\,.$$

Oblicz wprost

$$\star_Q 1_{\mathbb{K}}\,, \qquad\qquad \star_Q \omega_V\,, \qquad\qquad \star_Q e_i\,.$$

Wyznacz

$$\star_Q^2 \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\textstyle\bigwedge^\bullet V\big)\,.$$