

Lech, Čech : De Rham

---

- Studium Kompleksów  
Odmierzonych

MAWF2 WYKŁADY  $\overline{\text{IV}}$ ,  $\overline{\text{V}}$  :  $\overline{\text{VI}}$

2023/24

---

---



ELEMENTARZ

ALGEBRY HOMOLOGICZNEJ

ZACZYNIEMY OD NAURESLENIA MOŻLIWIE SZEROKIEGO KONTEKSTU NASZYCH DALSZYCH  
ROZWAŻAŃ ROZWIĄZAJĄCYMI I UOGÓLNIĄCYMI DOTYCZĄCYMI DYSKUSJĘ, ZAGADNIEN (KOHOMOLO...  
DEF. 1. KATEGORIA ABELOWA  $\mathcal{A}$  TO TAKA, W KTÓREJ

$$(AB1) \quad \forall x, y \in \mathcal{A} : \mathcal{A}(x, y) \in \text{AbGrp}$$

$$(AB2) \quad \exists 0 \in \mathcal{A} : 0 \text{ zerowy}$$

$$(AB3) \quad \mathcal{A} \text{ MA SKŁONIONE PRODUKTY I KOPRODUKTY}$$

$$(AB4) \quad \forall \quad X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightleftharpoons[g]{f} Z \xrightarrow{\beta} U \quad \text{w } \mathcal{A} :$$

$$\beta \circ (f + g) = \beta \circ f + \beta \circ g \quad , \quad (f + g) \circ \alpha = f \circ \alpha + g \circ \alpha$$

$$(AB5) \quad \forall f \in \mathcal{A}(X, Y) \quad \exists \ker f \text{ i } \text{coker } f, \text{ g.}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \forall A & & \\ & \swarrow \alpha & \downarrow \alpha & \searrow \theta_{AY} & \\ K & \xleftarrow{\sigma} X & \xrightarrow{f} Y & & \\ & \searrow \kappa & \nearrow f & & \\ & & \text{O}_{KY} & & \end{array}$$

$\left( \begin{array}{c} \kappa \\ \text{mono} \end{array} \right) \xleftarrow{(AB2)}$

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{O}_{XC} & & \\ & \searrow & & \nearrow & \\ X & \xrightarrow{f} Y & \xrightarrow{\theta} C & & \\ & \searrow \text{O}_{XA} & \downarrow \alpha & \nearrow \sigma & \\ & & A & & \end{array}$$

$\xleftarrow{(AB2)} \theta \text{ epi}$

$$(AB6) \quad \forall \mu \in \mathcal{A}(X, Y) \mid \exists f \in \mathcal{A}(Y, Z) : (X, \mu) = \ker f$$

$$(\forall f, g \in \mathcal{A}(Z, X) : \mu \circ f = \mu \circ g \Rightarrow f = g)$$

$$\forall \varepsilon \in \mathcal{A}(X, Y) \mid \exists f \in \mathcal{A}(Z, X) : (Y, \varepsilon) = \operatorname{coker} f.$$

Σ. 9-1 (1) AbGrp

(2)  $\operatorname{Mod}_R \dots \operatorname{SMod}_Y \dots$

Def. 2.: NIECHAJ  $\mathcal{A}$  - <sup>CATEGORIA</sup> ABELOWA ; NIECH  $f \in \mathcal{A}(X, Y)$ ,  $X, Y \in \mathcal{A}$ .

OBRAZ  $f$  TO

$$\theta \circ f \equiv 0 \Rightarrow \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\quad \text{Im}(f) \quad} & \\ & \searrow & \downarrow \kappa \\ X & \xrightarrow{f} & Y \xrightarrow{\theta} \operatorname{coker}(f) \end{array}$$

$\ker(\operatorname{coker} f) =: \operatorname{Im} f$

Σ UNIWERSALNE  
Ker



UWAGI i SENSOWNOŚĆ PRAWIDŁEJ DOPINIOCI WYNIKA Z

(\*) DLA  $\mathcal{A} = \text{Mod}_R$ ,  $\ker f \xrightarrow{\kappa} X \xrightarrow{f} Y$  To

MODEL |  $\ker f \xrightarrow{\text{injection}} X \xrightarrow{f} Y$  , (WTOJENIE KAN.)  
 $\text{injection}$   
 $A \quad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\theta} \text{Coker}(f)$  To

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\pi} Y/\text{Im } f$   
 $\pi$

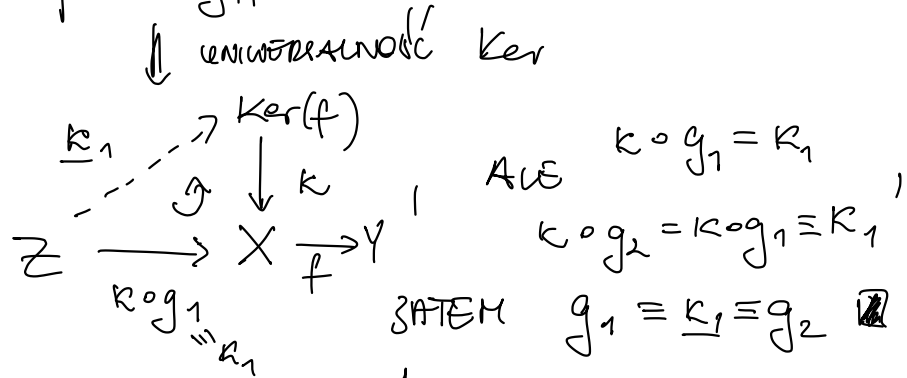
(\*\*) SLW. 1. NIECHAJ  $\mathcal{A}$  - <sup>KATEGORIA</sup> ABELOWA : NIJEL  $f \in \mathcal{A}(X, Y)$ ,  $X, Y \in \mathcal{A}$ .

WOWCZAS  $\kappa$  w  $(\ker(f), \kappa)$  JEST MONO, A  $\theta$  w  $(\text{Coker}(f), \theta)$

JEST EPI.

D: ROZWĄŻMY  $\ker(f) \xrightarrow{\kappa} X \xrightarrow{f} Y$ . NIECH  $Z \xrightarrow{g_1} \text{Coker}(f) \xleftarrow{g_2}$  ③

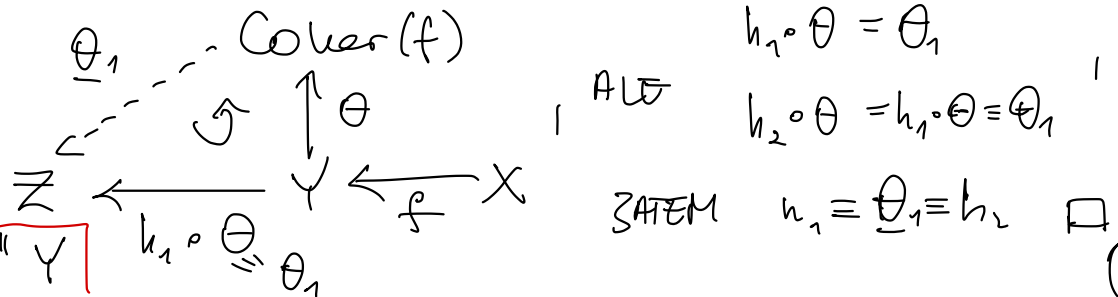
TAKUJE, JE  $\kappa \circ g_2 = \kappa \circ g_1$ . JEST  $f \circ \kappa \circ g_A = 0$



ANALOGICZNIE DLA  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\theta} \text{Coker}(f) \xrightarrow[h_2]{h_1} \mathbb{Z}$  TAKUJE, JE

$h_2 \circ \theta = h_1 \circ \theta$ , JEST  $h_1 \circ \theta \circ f = 0$

$\Downarrow$  UNIWERSALNOŚĆ  $\text{Coker}$

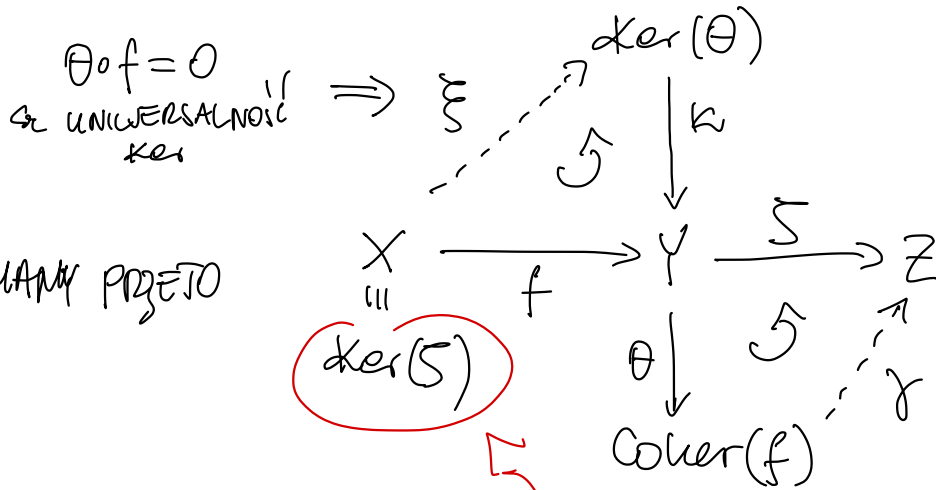


WNIOSEK:  $\inf_k " \hookrightarrow " Y$

(\*\*\*) Stw. 2. (i)  $f \text{ MONO} \Rightarrow (X, f) \cong (\text{Ker}(\text{Coker}(f)), \kappa)$ .

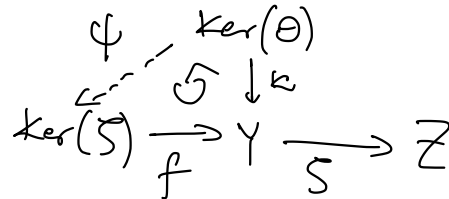
$\forall f \in A(X, Y) : (ii) f \text{ EPI} \Rightarrow (X, f) \cong (\text{Coker}(\text{Ker}(f)), \theta)$ .

D: Ad (i) WPROST NA MOCY (AB6)  $\exists \zeta : Y \rightarrow Z : (X, f) = \text{Ker}(\zeta)$ ,



$\zeta \circ f = 0$   
 $\& \text{ uniwersalno\u015b\u0107}$   
 $\text{coker}$

ALB  $\zeta \circ \kappa = \gamma \circ \theta \circ \kappa = \gamma \circ 0 = 0 \Rightarrow$   
 $\& \text{ uniwersalno\u015b\u0107}$   
 $\text{ker}$



(5)

Ostatecznie zatem  $k \circ \xi \circ \psi = f \circ \psi = k \equiv k \circ \text{id}_{\text{Ker}(\theta)}$  ,

wiec w swietle sw.1. (dla  $(\text{Ker}(\theta), k)$ ) jest

$$\xi \circ \psi = \text{id}_{\text{Ker}(\theta)} .$$

Z drugiej strony  $f \circ \psi \circ \xi = k \circ \xi = f \equiv f \circ \text{id}_X$  ,

wiec z analogicznego powodu (dla monomorfizmu  $f$ ) jest

$$\psi \circ \xi = \text{id}_X .$$

Tezy (ii) dowodzimy podobnie.  $\square$

wniosek:  $f \text{ mono} \Rightarrow X \cong \text{Im } f$

(\*\*\*\*) Slw. 3. W ZAPISIE DEF. 2.  $\underline{f}$  JEST EPI.

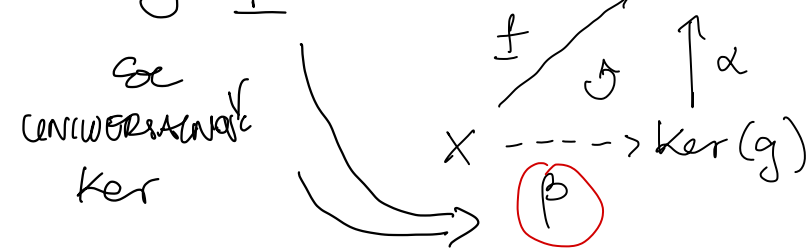
D: Rozważmy  $g: \text{Im}(f) \rightarrow \mathbb{Z}$  dowolny taki,  $\exists$

$$g \circ \underline{f} = 0, \quad \text{Im}(f) \xrightarrow{g} \mathbb{Z}$$

Ale  $\alpha$  i  $\kappa$  są mono

na mocy Slw. 1., zatem

$\kappa \circ \alpha$  jest mono, a przy tym



Mamy — dla  $\text{Ker}(g) \xrightarrow{\kappa \circ \alpha} Y \xrightarrow{\gamma} \text{Coker}(\kappa \circ \alpha) -$

tożsamość  $\gamma \circ f = \gamma \circ \kappa \circ \underline{f} = \gamma \circ (\kappa \circ \alpha) \circ \beta = 0 \circ \beta = 0$  ( $\Leftarrow 0 \circ \beta = (0+0) \circ \beta = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1$ )

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\theta} \text{Coker}(f)$$

Mamy przeto

$$\gamma \circ \kappa = \delta \circ (\theta \circ \kappa) \equiv \delta \circ 0 = 0$$

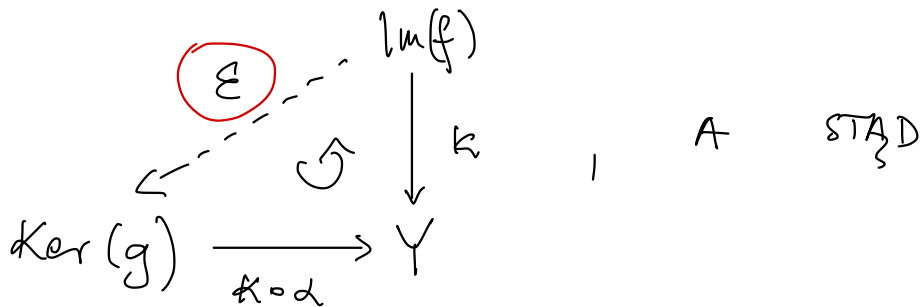
(wzaje  $(\text{Im}(f), \kappa) \equiv \text{Ker } \theta$ ). (7)

$\Rightarrow$   
UNIWERSALNOSC  
Coker

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \gamma & \searrow \theta & \downarrow \delta \\ \text{Coker}(\kappa \circ \alpha) & \xleftarrow{\delta} & \text{Coker}(f) \end{array}$$

W ŚWIEŁIE SLW. 2(i) (DLA MONOTONICZNEGO  $\kappa \cdot \alpha$ ) ZAPŁOŻY  $\text{Ker}(g) \cong \text{Ker}(\text{Coker}(\kappa \cdot \alpha))$

$\implies$   
UNIWERSALNOŚĆ  
 $\text{Ker}$



$\kappa \cdot \alpha \circ \varepsilon = \kappa \equiv \kappa \circ \text{Id}_{\text{Im}(f)}$ , CO NA WOBEC MONOTONNOŚCI  $\kappa$  DAJE

$\alpha \circ \varepsilon = \text{Id}_{\text{Im}(f)}$ . JESLI TERAZ  $\text{Ker}(g) \xrightarrow{\alpha} \text{Im}(f) \xrightleftharpoons[f_2]{f_1} U$

TAKIE, JE  $f_2 \circ \alpha = f_1 \circ \alpha$ , TO  $f_2 \equiv f_2 \circ \text{Id}_{\text{Im}(f)} = f_2 \circ \alpha \circ \varepsilon = f_1 \circ \alpha \circ \varepsilon$   
 $\equiv f_1 \circ \text{Id}_{\text{Im}(f)} = f_1$ , ZATEM

$\alpha$  JEST EPI. ALB TEŻ  $g \circ \alpha \equiv 0$  (WSK  $(\text{Ker}(g), \alpha)$ ), ZATEM  
 $g = 0$ . MAMY WŁC  $g \circ \underline{f} = 0 \implies g = 0$ , CO IMPLIKUJE  $\underline{f}$  EPI.  $\square$  (8)

ABELOWE INTERMEZZO: W LITERATURZE MOŻNA SPOTKAĆ DWIE DEFINICJE KATEGORII ABELOWEJ - TĘ, KTÓRĄ PODAJEMY PONIŻEJ (ZA - NP. - ROTMANEM), ORAZ TĘ, W KTÓREJ AUSJOMAT(ABG) ZASTĘPUJE

$$(ABG') \quad \forall f \in A(X, Y) \exists \text{ KANONICZNY ROZŁĄD}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \left( \begin{array}{c} \text{coker}(k) \\ \text{"} \end{array} \right) & \xrightarrow{\sim} & \left( \begin{array}{c} \text{ker}(\theta) \\ \text{"} \end{array} \right) & \xrightarrow{\alpha} & Y \\ X & \xrightarrow{\pi} & \text{Coker}(\text{ker}(f)) & \xrightarrow{\quad} & \text{ker}(\text{coker}(f)) & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & & & & \parallel & & \nearrow \\ & & & & f & & \end{array}$$

W KTÓRYM  $\tilde{f}$  JEST (KANONICZNYM) ISOMORFIZMEM.

RÓWNOWAŻNOŚĆ TEGO DRUGIEGO SFORMULOWANIA - POCHODZĄCEGO OD MAC LANE'A (DZIĘKUJĘ KUBIE FILIPOWI ZA ZWRÓCENIE MIA NA NIE ULTAŻE!) - Z PIERWSZYM, DUŻO BARDZIEJ ELEMENTARNYM WYDAJE SIĘ CO NAJMNIEJ NIEOCZYWISTA. PONIŻEJ PRZEDSTAWIMY DOWÓD TAJEJ RÓWNOWAŻNOŚCI - O JEJ ISTOTNOŚCI PRZESADZA ISTOTNOŚĆ DANYCH KATEGORII ABELOWYCH. (8.1)

Tw. I.1  $(ABG) \Rightarrow (ABG')$

D: ROZWAŻMY DIAGRAM

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{coker}(k) & ? & \text{ker}(\theta) \\ & & \uparrow \pi & & \downarrow \gamma \\ \text{ker}(f) & \xrightarrow{k} & X & \xrightarrow{f} & Y \xrightarrow{\theta} \text{coker}(f), \end{array}$$

W KTOREGO ZAPISIE WYKORZYSTAJEMY PLW. 1.  $((\text{coker}(k), \pi))$  JEST KOJĄDREM  $k$ ,  
JEST JATEM EPI, NATOMIAST  $((\text{ker}(\theta), \gamma))$  JEST JĄDREM  $\theta$ , WIĘC JEST MONO.  
DŁA UDOWODNIENIA TĘŻY POTRZEBUJEMY ISO-MORFIZMU  $\text{coker}(k) \xrightarrow{\tilde{f}} \text{ker}(\theta)$ ,  
KTÓRY DOMKNIJE POD-DIAGRAM PROSTOKĄTNY NAD  $f$  DO PRZEMIENNEGO.

LEMAT: KAŻDY MORFIZM, KTÓRY JEST EPI I MONO, JEST ISO.

DŁ: DŁA  $\text{ker}(f) \xrightarrow{k} X \xrightarrow{f} Y$  MAMY  $f \circ k = 0$ , ALE  $f$  MONO,

JATEM  $k = 0 \Rightarrow \text{ker}(f) \xrightarrow{0} X \xrightarrow{f} Y$ , PRZY CZYM W ŚWIETLE PLW. 2(ii)

KOJĄDEK 0:  $\begin{array}{ccc} & \downarrow r & \downarrow \gamma \\ & \text{coker}(0) & \xrightarrow{\tilde{f}} \end{array}$  EPICU  $f$  SPEENIA  $Y \simeq \text{coker}(0)$ ,  
GTU  $f$  ISO.

(8.2)



Łatwy TG3

$$\ker(f) \xrightarrow{\quad 0 \quad} X \xrightarrow{\quad \gamma \quad} \operatorname{coker}(0) \quad \begin{array}{c} \uparrow \text{id}_X \\ \swarrow \psi \\ \circlearrowright \end{array} \quad \Leftrightarrow \operatorname{id}_X \circ 0 = 0$$

, czyli  $\psi \circ \gamma = \operatorname{id}_X$ ,

Ale w tym razie  $(\gamma \circ \psi) \circ \gamma = \gamma \circ (\psi \circ \gamma) = \gamma \circ \operatorname{id}_X = \gamma \equiv \operatorname{id}_{\operatorname{coker}(0)} \circ \gamma$   
 daje - wobec epimorfizmu  $\gamma$  -  $\gamma \circ \psi = \operatorname{id}_{\operatorname{coker}(0)}$ , czyli izomorfizm  $\gamma$ .  
 Stąd  $f = \pi^{-1} \circ \gamma$  także jest izomorfizmem.  $\square$

WNIOSEK: potrzebujemy  $\operatorname{coker}(k) \xrightarrow{\quad \bar{f} \quad} \ker(\theta)$ .

Zauważmy, że w świetle Tw.3 mamy  $\operatorname{coker}(k)$

A skoro  $f \circ k = 0$ , to także

$$\begin{array}{c} \operatorname{coker}(k) \\ \uparrow \pi \\ X \end{array} \quad \begin{array}{c} \swarrow \bar{f} \\ \circlearrowright \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \gamma \\ Y \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \theta \\ \operatorname{coker}(f) \end{array}$$

$$X \xrightarrow{\quad f \quad} Y$$

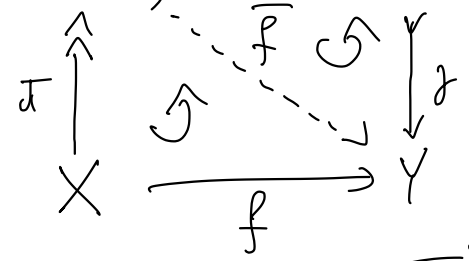
$$\begin{array}{c} \operatorname{coker}(k) \\ \uparrow \pi \\ X \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \bar{f} \\ \circlearrowright \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \gamma \\ Y \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \theta \\ \operatorname{coker}(f) \end{array}$$

$$\ker(f) \xrightarrow{\quad k \quad} X \xrightarrow{\quad f \quad} Y$$

Przy tym  $\theta \circ \bar{f} \circ \pi = \theta \circ f = 0$ , więc  
 wobec epimorfizmu  $\pi$  także  $\theta \circ \bar{f} = 0$ , (8.3)

(DŁUGIE DO (DOWODU) PŁ. 3.)

$\text{coker}(k) \xrightarrow{\bar{f}} \ker(\theta)$ . PORAJEMY, ŻE  $\bar{f}$  JEST MONO, CO NA MOCY  
 A ZATEM SL. 5 (SL. 12) PRZESŁĄDZI O MONOTONICZNOŚCI  $\bar{f}$ .

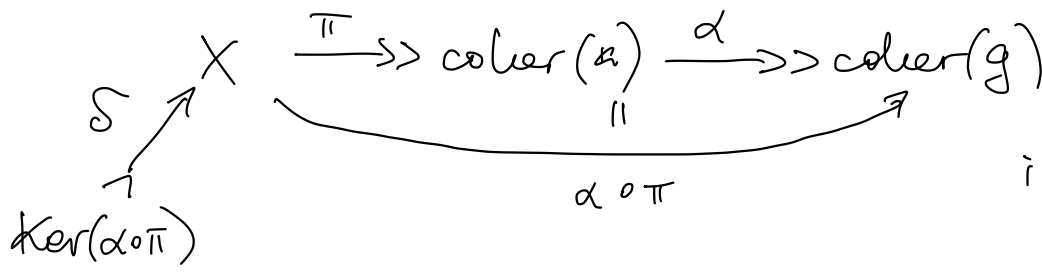


ROZWAŻMY POWYŻNY MORFIZM  $Z \xrightarrow{g} \text{coker}(k) \xrightarrow{\bar{f}} Y$  O WŁASNOŚCI

$\bar{f} \circ g = 0$ , WIODĄ IMPLIKUJĄC  $Z \xrightarrow{g} \text{coker}(k) \xrightarrow{\bar{f}} Y$   

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{g} & \text{coker}(k) \xrightarrow{\bar{f}} Y \\
 & & \uparrow \gamma \quad \uparrow \beta \\
 & & \text{coker}(g)
 \end{array}$$

EPIMORFIZM  $\pi$  I  $\alpha$  OZNACZA EPIMORFIZM ICH SKŁADANIA:



I MAMY  $f \circ \gamma = \bar{f} \circ \pi \circ \gamma = \beta \circ (\alpha \circ \pi) \circ \gamma = \beta \circ 0 = 0$ , (8.4)

PRZETO

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker}(\alpha \circ \pi) & \xrightarrow{\delta} & X \xrightarrow{f} Y \\ & \searrow \delta & \uparrow \kappa \\ & & \text{Ker}(f) \end{array} \quad ; \quad \underline{\delta} \text{ MONO (}\Leftarrow \text{Skł. 5).}$$

ZAŁOŻYMI  $\pi \circ \delta = (\pi \circ \kappa) \circ \underline{\delta} = 0 \circ \underline{\delta} = 0$ , WŁC  $\pi \in \text{Im } \delta$

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker}(\alpha \circ \pi) & \xrightarrow{\delta} & X & \xrightarrow{\alpha \circ \pi} & \text{coKer}(g) \\ & & \pi \downarrow & \nearrow \varepsilon & \\ & & \text{coKer}(\kappa) & & \end{array}$$

WOBEC  $g \in \text{Im } \varepsilon$

$$(\varepsilon \circ \alpha) \circ \pi = \pi \equiv \text{Id}_{\text{coKer}(\kappa)} \circ \pi,$$

CO DLA EPICNEGO  $\pi$  OZNACZA, ŻE  $\varepsilon \circ \alpha = \text{Id}_{\text{coKer}(\kappa)}$ . STĄD DAŁEJ

$$g \equiv (\varepsilon \circ \alpha) \circ g = \varepsilon \circ (\alpha \circ g) = \varepsilon \circ 0 = 0, \text{ A ZATEM - ISTOTNIE - } \tilde{f} \text{ MONO,}$$

WŁC I  $\tilde{f}$  MONO.

z powyższych rozważań (sk. 8.4) wyprowadzamy tożsamość

$$\overline{f} \circ \pi = f = g \circ \tilde{f} \circ \pi,$$

która z racji epimorficzności  $\pi$  daje nam

$$\overline{f} = g \circ \tilde{f}.$$

Ale  $g$  i  $\overline{f}$  mono, więc w świetle skw. 5 także  $\tilde{f}$  mono.

Mamy też tożsamość (sk. 8.3 i 8.4)

$$f \circ \underline{f} = f = g \circ \tilde{f} \circ \pi, \text{ która z racji moniczności } g$$

$$\text{daje nam } \underline{f} = \tilde{f} \circ \pi. \text{ W świetle skw. 3 } \underline{f} \text{ jest epi,}$$

a ponieważ  $\pi$  także jest epi, przeto na mocy skw. 5

$\tilde{f}$  jest epi.

Przygotujac lemat z powyższymi dowodami w koniecznie do  $\tilde{f}$  zamykamy dowód.  $\square$  (p.6)

MAJĄC W GARŚCI ELEMENTARNE POJĘCIA I WYNIKI DOT. KATEGORII ABELOWYCH,  
MOŻEMY PODDAĆ FORMUŁAZACJI I ABSTRAKCJI NASTĘPUJĄCE UPRZĘDNIWO  
WYSTRUKUJĘ KOMOLO...

Def. 3.: Niechaj  $A$  BĘDZIE KATEGORIA ABELOWA\*. KOMPLEKS  
ŁANCUCHOWY w  $A$  TO CIĄG UOGÓLNIONY

$(C_\bullet, d_\bullet) : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Ob } A \times \text{Mor } A : n \mapsto (C_n, d_n), d_n \in \text{st}(C_n, C_{n-1})$   
o własności  $\forall n \in \mathbb{Z} : d_n \circ d_{n+1} = 0$ .  
 $n$ -ŁANCUCHY (OPERATORY BRZĘGU)

MORFIZM KOMPLEKSÓW  $(C^\bullet, d^\bullet), A \in \{1, 2\}$ , ŻW. ODWZOROWANIEM  
ŁANCUCHOWYM, TO CIĄG UOGÓLNIONY

$f_\bullet : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Mor } A : n \mapsto f_n \in A(C_n^1, C_n^2)$  o własności wyrażanej  
PRZĘŻY DIAGRAM PRZEMIENNY  
(CM)

$$\begin{array}{ccccc} \xrightarrow{d_{n+1}^1} & C_n^1 & \xrightarrow{d_n^1} & C_{n-1}^1 & \xrightarrow{d_{n-1}^1} \\ & \downarrow f_n & \uparrow & \downarrow f_{n-1} & \\ \xrightarrow{d_{n+1}^2} & C_n^2 & \xrightarrow{d_n^2} & C_{n-1}^2 & \xrightarrow{d_{n-1}^2} \end{array}$$

$\Rightarrow$  KATEGORIA  
KOMPLEKSÓW  
ŁANCUCHOWYCH  
w  $A$  :  
 $\text{Comp}(A)$  (9)

BEZ TRECI DOWODZIMY

Stw. 4  $A$  ABELOWA  $\Rightarrow \text{Comp}(A)$  ABELOWA.

D:  $\triangle$

z.z. 1 (1) CIĄGI DOKŁADNE w AbGrp i Mod $_R$

(2) KOMPLEKS de Rhama

WICIEJ - WKRÓTCE!

(KOMPLEKSY SINGULARNE W PRZESTRZENIACH  
TOPOLOGICZNYCH  
etc.)

TERMINOLOGIA:

KOMPLEKS DODATNI:  $\rightarrow C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$

— UJĘCIEMNY  
ALBO KO-KOMPLEKSOWY :  $0 \rightarrow C_0 \xrightarrow{\partial_0} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_2 \rightarrow \dots \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots$   
ozn.  $\rightarrow \begin{matrix} \partial_0 \\ C_0 \end{matrix} \begin{matrix} \partial_1 \\ C_1 \end{matrix} \begin{matrix} \partial_2 \\ C_2 \end{matrix} \dots \begin{matrix} \partial_n \\ C_n \end{matrix} \begin{matrix} \partial_{n-1} \\ C_{n-1} \end{matrix}$  (10)

Def. 4: Niech  $(C, d) \in \text{Comp}(A)$ ,  $A$  - ABELOWA. HOMOLOGIA

$(C, d)$  TO CIĄG UGÓLNIONY

$n$ -TA HOMOLOGIA

$$H_n(C, d) : \mathbb{Z} \rightarrow A : n \mapsto \underset{\text{coker!}}{\text{coker}(d_{n+1})} \equiv H_n(C, d)$$

GDZIE  $d_n \in \text{Mor } A$  TO MORFIZM SKONSTRUOWANY wg

NASTĘPUJĄCEGO SKEMATU:

NB:  $k_{n+1}$  TEST MONO

$k_n$

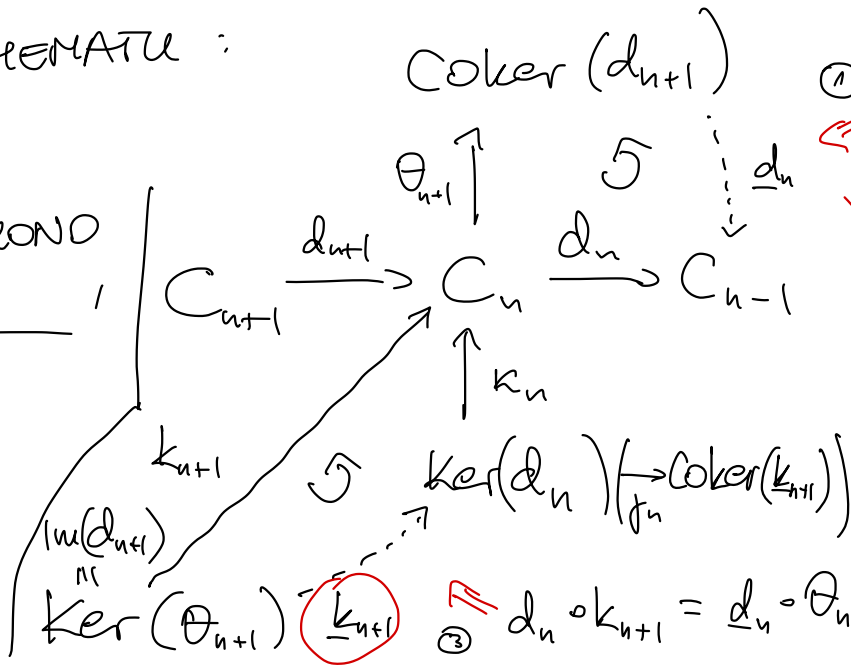
$-11$

WIEC MOŻEMY

"MYŚLEĆ" O  $k_{n+1}$

ŻADNO ZANURZENIE

$\text{Im}(d_{n+1}) \subset \text{Ker}(d_n)$



①  $d_n \circ d_{n+1} = 0$   
ze uniwersalności  
coker

②  $\forall \phi$   
&  $\phi \circ 0 = 0$   
( $\Leftarrow \phi \circ 0 = \phi \circ (0+0)$   
 $= \phi \circ 0 + \phi \circ 0$ )

③  $d_n \circ k_{n+1} = d_n \circ \theta_{n+1} \circ k_{n+1} = 0$  ⑪

UWAGA 1. (\*) DLA  $A \hookrightarrow \text{AbGrp}$  POWYŻSZE OTWARZA STANDARDOWĄ DEFINICJĘ

$$\underbrace{\text{Im } d_{n+1}}_{n\text{-BRZĘCI}} \subset \underbrace{\text{Ker } d_n}_{n\text{-CYKLE}} \Rightarrow H_n(C, d) \equiv \frac{\text{Ker } d_n}{\text{Im } d_{n+1}}$$

$n$ -TA GRUPA HOMOLOGII.

$$\int + \text{Im } d_{n+1} \equiv [5]$$

KLASA (HOMOLOGII)  
 $n$ -CYKLU  $\int$

(\*\*) SLW. 5 NIECHAJ  $A$  - ABELOWA I NIECH  $\mu_A \in A(X_A, Y)$  MONO

$$\begin{array}{ccc} & X_2 & \\ f \swarrow & \downarrow \mu_2 & \\ X_1 & \xrightarrow{\mu_1} & Y \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\varepsilon_1} & Z_1 \\ \varepsilon_2 \downarrow & \searrow g & \\ Z_2 & & \end{array}$$

$\varepsilon_A \in A(Y, Z_A)$  EPI,  $A \in \{1, 2\}$ ,  
 $X_1, X_2, Y, Z_1, Z_2 \in A$ , A NADTO,

(i) WÓWCZAS  $f$  JEST MONO, A  $g$  JEST EPI. (12)



D: Ad (i) ROZWAŻMY  $Z \xrightleftharpoons[h_2]{h_1} X_2 \xrightarrow{f} X_1$  TAMŻE,  $j \in f \circ h_2 = f \circ h_1$ .

WÓWczas  $\mu_2 \circ h_2 = \mu_1 \circ f \circ h_2 = \mu_1 \circ f \circ h_1 = \mu_2 \circ h_1 \implies h_2 = h_1$ .  $\square$   
 $\mu_2$  MONO

TEŻE (i) SPRAWDZAMY ANALOGICZNIE.  $\square$

WNIOSEK: W ŚWIELE SLW. 1, (ODWIESIONEGO DO  $(\text{Ker}(\partial_{n+1}), \underline{k}_{n+1})$  i  $(\text{Ker}(d_n), \underline{k}_n)$ )

ORAZ SLW. 5. STWIERDZAMY MONICZNOŚĆ  $\underline{k}_{n+1}$ . SLW. 2 (i) PRZESADZA

O TOŻSAMOŚCI  $\text{Ker}(\partial_{n+1}) = \text{Ker}(\text{Coker}(\underline{k}_{n+1}))$ , GDZIE  $\text{Coker}(\underline{k}_{n+1}) = \underline{r}_n$

JEST - NA MOCY SLW. 1 - EPIMORFIZMEM "NA"  $\text{coker}(\underline{k}_{n+1}) \cong H_n(C, d_*)$ .

TERMINOLOGIA: KOMPLEKS  $(C, d_*)$  O HOMOLOGII TRYWIALNEJ,

$H_*(C, d_*) = 0$ , OKREŚLAMY MIANEM ACYKLIJNEGO. (13)

W NASTĘPNEJ KOLEJNOŚCI ROZWIĄZAMY  $\mathcal{A} \hookrightarrow \text{AbGrp}$ , WIEC DO SYTUACJI Z UWAGI 2(i).

O STRUKTURALNYM CHARAKTERZE PRZYPORZĄDKOWANIA  
 $(C, d) \mapsto H^*(C, d)$  ZAŚWIADCZA TUTAJ

Stw. 6. NIECHAJ  $\mathcal{A}$  - KATEGORIA ABELOWA  $\hookrightarrow \text{AbGrp}$  I NIECH  $(C, d) \in \text{Comp}(\mathcal{A})$ .

$\forall n \in \mathbb{Z} : H_n : \text{Comp}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$  JEST FUNKTOREM.  
 (ADDYTYWNYM)

D: DEFINUJEMY SKŁADOWĄ MORFIZMOWY  $H_n$ :

$$H_n \left( (C^1, d^1) \xrightarrow{f} (C^2, d^2) \right) : H_n(C^1, d^1) \rightarrow H_n(C^2, d^2)$$

$$\begin{matrix} \parallel \\ f_{*n} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{ODWZOROWANIE} \\ \text{INDUKOWANE} \end{matrix} : [Z] \longmapsto [f_n(Z)]$$

TA DEFINICJA MA SENS, GDYŻ  $d_n^2(f_n(Z))_{(CM)} = f_{n-1}(d_n^2 Z) = f_{n-1}(0) = 0$ , (14)

4.  $f_n(S) \in \mathbb{Z}_n(C^2, d^2)$ , ZATEM WYZNACZA KLASE  $[f_n(S)]$ .

WYBIERAJĄC INNEGO REPREZENTANTA  $\tilde{S} \in [S]$ , CZYLI PŁA

$$\tilde{S} - S = d_{n+1}^1 \xi, \quad \xi \in C_{n+1}^1, \quad \text{DOSTAJEMY}$$

$$f_n(\tilde{S}) = f_n(S + d_{n+1}^1 \xi) = f_n(S) + f_n \circ d_{n+1}^1(\xi)$$

$$\stackrel{(CM)}{=} f_n(S) + d_{n+1}^2(f_{n+1}(\xi)), \quad \text{czyli}$$

$$[f_n(\tilde{S})] = [f_n(S) + d_{n+1}^2(f_{n+1}(\xi))] = [f_n(S)],$$

ZGODNIE Z OGRĘNIWIENIEM. POZOSTAJE SPRAWDZIĆ FUNKTORIALNOŚĆ.

$$\begin{aligned} (f_2 \circ f_1)_{*n} [S] &\equiv [f_2 \circ f_1(S)] \equiv [f_2(f_1(S))] \equiv f_{2*n}[f_1(S)] \\ &\equiv f_{2*n}(f_{1*n}[S]) \equiv (f_{2*} \circ f_{1*})_n [S] \dots \textcircled{15} \end{aligned}$$

$$\text{ORAZ } \text{id}_{*n}[S] \equiv [\text{id}_n(S)] = [S] \equiv \text{id}([S]) \dots$$

; ADDYTYWNOŚĆ

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)_{*n}[S] &\equiv [(f_1 + f_2)(S)] \equiv [f_1(S) + f_2(S)] \\ &\equiv [f_1(S)] + [f_2(S)] \equiv f_{1*}[S] + f_{2*}[S] \\ &\equiv (f_1 + f_2)_{*n}[S]. \quad \square \end{aligned}$$

Powróćmy obecnie do szerszego kontekstu, ażeby upewnić się, że abstrakcyjna definicja homologii ma oczekiwany własność: rozszerza się do definicji funktora homologii...

Tw. 1. Niech  $\mathcal{A}$  - kategoria abelowa ; Niech  $(C, d) \in \text{Comp}(\mathcal{A})$ .

$\forall n \in \mathbb{Z} : H_n : \text{Comp}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$  jest funktorem.  
(addytywnym)

D : Zauważmy najpierw, że wobec tożsamości  $\partial_{n+1} \circ d_{n+1} = 0$  mamy

- z racji uniwersalności  $\text{ker}$  -

$$\begin{array}{ccccc} C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & \text{coker}(d_{n+1}) \\ & \nearrow \tilde{d}_{n+1} & \uparrow \iota_{n+1} & & \\ & & \text{Ker}(\partial_{n+1}) & \equiv & \text{Im}(d_{n+1}) \end{array}$$

W świetle slw. 3.  $\tilde{d}_{n+1}$  jest epi. Następnie rozważymy parę  
kompleksów tancerkowych  $(C^A, d^A) \in \text{Comp}(\mathcal{A})$ ,  $A \in \{1, 2\}$  wraz  
z odwzorowaniem tancerkowym  $f. : (C^1, d^1) \rightarrow (C^2, d^2)$   
i przyjrzymy się odnośnemu diagramowi (przemiennemu) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Im}(d_{n+1}^1) & \xrightarrow{\underline{k}_{n+1}^1} & \text{Ker}(d_n^1) & \xrightarrow{\gamma_n^1} & \text{Coker}(\underline{k}_{n+1}^1) \equiv H_n(C^1, d^1) \\
 \uparrow \tilde{d}_{n+1}^1 & \searrow \underline{k}_{n+1}^1 & \downarrow \underline{k}_n^1 & & \\
 \dots \xrightarrow{d_{n+2}^1} C_{n+1}^1 & \xrightarrow{d_{n+1}^1} & C_n^1 & \xrightarrow{d_n^1} & C_{n-1}^1 \xrightarrow{d_{n-1}^1} \dots \\
 \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\
 \dots \xrightarrow{d_{n+2}^2} C_{n+1}^2 & \xrightarrow{d_{n+1}^2} & C_n^2 & \xrightarrow{d_n^2} & C_{n-1}^2 \xrightarrow{d_{n-1}^2} \dots \\
 \downarrow \tilde{d}_{n+1}^2 & \nearrow \underline{k}_{n+1}^2 & \uparrow \underline{k}_n^2 & & \\
 \text{Im}(d_{n+1}^2) & \xrightarrow{\underline{k}_{n+1}^2} & \text{Ker}(d_n^2) & \xrightarrow{\gamma_n^2} & \text{Coker}(\underline{k}_{n+1}^2) \equiv H_n(C^2, d^2)
 \end{array}$$

zapisany w uprzednio wprowadzonych oznaczeniach.

Po pierwsze stwierdzamy  $d_n^2 \circ f_n \circ k_n^1 = f_{n-1} \circ d_n^1 \circ k_n^1 = f_{n-1} \circ 0 = 0$

$\Rightarrow$   
uniwersalność  
ker

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Ker}(d_n^2) & \\
 \nearrow \tilde{d}_n^2 & \downarrow \underline{k}_n^2 & \\
 \text{Ker}(d_n^1) & \xrightarrow{f_n \circ k_n^1} & C_n^2
 \end{array}$$

NASTĘPNIE WNIOSKUJEMY NA PODSTAWIE TOŻSAMOŚCI

$$0 = 0 \circ f_{n+1} \equiv (\Theta_{n+1}^2 \circ d_{n+1}^2) \circ f_{n+1} = \Theta_{n+1}^2 \circ f_n \circ d_{n+1}^1 = \Theta_{n+1}^2 \circ f_n \circ k_{n+1}^1 \circ \widetilde{d}_{n+1}^1 = \Theta_{n+1}^2 \circ f_n \circ k_n^1 \circ \underline{k}_{n+1}^1 \circ \widetilde{d}_{n+1}^1$$

A WOBEC EPICHOŚCI  $\widetilde{d}_{n+1}^1$ ,  $\exists \in \Theta_{n+1}^2 \circ f_n \circ k_n^1 \circ \underline{k}_{n+1}^1 = 0$ , WIĘC TEŻ Z RACJI UNIWERSALNOŚCI  $\ker$  (ODWISIONEJ DO  $\text{im}(d_{n+1}^2) \equiv \text{Ker}(\text{Coker}(d_{n+1}^2))$ )

$$\begin{array}{ccc} & \text{im}(d_{n+1}^1) & \\ \swarrow \beta_{n+1} & \downarrow f_n \circ k_n^1 \circ \underline{k}_{n+1}^1 & \\ \text{im}(d_{n+1}^2) & \xrightarrow{\underline{k}_{n+1}^2} & C_n^2 \end{array}$$

OSTATECZNIE OBLICZAMY  $\underline{k}_{n+1}^2 \circ \beta_{n+1} = f_n \circ k_n^1 \circ \underline{k}_{n+1}^1 = k_n^2 \circ d_n \circ \underline{k}_{n+1}^1$

$$\subseteq \underline{k}_n^2 \circ \underline{k}_{n+1}^2 \circ \beta_{n+1}$$

CO WOBEC MONICZNOŚCI  $k_n^2$  DAJE:

$$\underline{k}_{n+1}^2 \circ \beta_{n+1} = d_n \circ \underline{k}_{n+1}^1, \text{ CZYLI}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Im}(d_{n+1}^1) & \xrightarrow{\underline{k}_{n+1}^1} & \text{Ker}(d_n^1) & \xrightarrow{\gamma_n^1} & H_n(C^1, d^1) \\
 \beta_{n+1} \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \alpha_n & \curvearrowright & \downarrow \\
 \text{Im}(d_{n+1}^2) & \xrightarrow{\underline{k}_{n+1}^2} & \text{Ker}(d_n^2) & \xrightarrow{\gamma_n^2} & H_n(C^2, d^2)
 \end{array}$$

$H_n(f.)$  !

& UNIWERSALNY coker  
 (CONVERSION DO  $(\text{Im}(d_{n+1}^1), \underline{k}_{n+1}^1)$ )

W ŚWIELE POWYŻSZEGO  $(\gamma_n^2 \circ \alpha_n) \circ \underline{k}_{n+1}^1 = \gamma_n^2 \circ \underline{k}_{n+1}^2 \circ \beta_{n+1} = 0 \circ \beta_{n+1} = 0$

SPRAWDZENIE POŻĄDANYCH WŁASNOŚCI TAKI OUREŚŁONEGO  
 PRZYPORZĄDKOWANIA  $f. \mapsto H.(f.)$  JEST PROSTYM ĆWICZENIEM,  
 KTÓRE POZOSTAWIAMY UWAGNEMU CZYTELNIKOWI.  $\square$



TERMINOLOGIA: kompleks  $(C, d)$  o homologii trywialnej,  $H.(C, d)$ ,  
określamy mianem ACYKLUZNEGO.

---

W NASTĘPNEJ WOLEJNOŚCI ROZPATRZYMY TWIERDZENIA  
KLUCZOWE W ANALIZIE HOMOLOGII A ZNACZENIE  
PIZYKALNYM, BO POZWALAJĄCE WYRAZIC POSZUKIWANY  
HOMOLOGIE KOMPLEKSU PRZĘZ HOMOLOGIE (W ZAT.: ZNANE)  
KOMPLEKSÓW J NIM POWIĄZANYCH W SZCZEGÓLNY SPOSÓB, O KTÓRYM  
MOWA W...

Tw. 2. NIECHAJ  $A$  - KATEGORIA ABELOWA  $\hookrightarrow$  AbGrp, NIECH

$$0 \dashrightarrow (C^1_\bullet, d^1_\bullet) \xrightarrow{z_\bullet} (C^2_\bullet, d^2_\bullet) \xrightarrow{\pi_\bullet} (C^3_\bullet, d^3_\bullet) \dashrightarrow 0 \quad (\text{SES})$$

BĘDZIE KRÓTKIM CIĄGIEM DOKŁADNYM W  $\text{Comp}(A)$ .

WÓWZAS ISTNIEJE DŁUGI CIĄG DOKŁADNY W HOMOLOGII

$$\dots \rightarrow H_{n+1}(C^3_\bullet, d^3_\bullet) \xrightarrow{\beta_{n+1}} H_n(C^1_\bullet, d^1_\bullet) \xrightarrow{z_{*n}} H_n(C^2_\bullet, d^2_\bullet) \xrightarrow{\pi_{*n}} H_n(C^3_\bullet, d^3_\bullet)$$

$$\xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}(C^1_\bullet, d^1_\bullet) \rightarrow \dots, \quad \text{w którego zapisie}$$

$\cong H_n(C^3) \text{ (skłót)} \qquad \cong H_{n-1}(C^1)$

MORFIZMY  
ŁĄCZĄCE  
-3-1-1

$$\beta_\bullet : H_\bullet(C^3_\bullet, d^3_\bullet) \rightarrow H_{\bullet-1}(C^1_\bullet, d^1_\bullet) \quad \text{śł. postaci}$$

(CZASEM JW. ROCKSTEINEM) :  $[S] \longmapsto \begin{bmatrix} z_{n-1}^{-1} & d_n^2 & \pi_n^{-1}(S) \end{bmatrix} \text{ (SYMBOL)} \quad (22)$

D : ZACZNIEMY OD DESYFRACJI DEFINICJI HOMOMORFIZMU ŁĄCZĄCEGO:

$$\beta_g : H^g(C^3) \rightarrow H^{g-1}(C^1). \text{ ROZWAŻMY DOWOLNY } g\text{-KOCYKŁ } \phi_3 \in C_g^3$$

REPREZENTUJĄCY KLASĘ  $[\phi_3] \in H^g(C^3)$ . JEGO (DOW.) PRZEBIWOBRĄZ  $\phi_2$  WZDŁUG  $\pi_g$  (WÓDEGO ISTNIENIE ZAPEWNIĄ EPICHOŚĆ  $\pi_g$ ) SPEŁNIA TOŻSAMOŚĆ

$$\pi_{g-1}(d_g^2 \phi_2) = d_g^3 \circ \pi_g(\phi_2) = d_g^3 \phi_3 = 0, \text{ ZATEM } d_g^2 \phi_2 \in \text{Ker } \pi_{g-1} = \text{Im } \tau_{g-1}$$

( $\Leftarrow$  DOKŁADNOŚĆ (SES)), CZYLI ISTNIĘJE  $\phi_1 \in C_{g-1}^1$  O WŁASNOŚCI

$$\tau_{g-1}(\phi_1) = d_g^2 \phi_2.$$

TEN SPEŁNIA  $\tau_{g-2}(d_{g-1}^1 \phi_1) = d_{g-1}^2 \circ \tau_{g-1}(\phi_1) = d_{g-1}^2 \circ d_g^2 \phi_2 = 0$ , CO WÓDEC MONICZNOŚCI  $\tau_{g-2}$  IMPLIKUJE  $d_{g-1}^1 \phi_1 = 0$ .

PRZYJMUJEMY ZATEM  $\beta_g([\phi_3]) := [\phi_1]$ , UZUPELNIAJĄC WCZEŚNIEJSZE DEFINICJE

$$\iota_{*g} : H_g(C^1_*) \rightarrow H_g(C^2_*) : [a] \mapsto [\iota_g(a)],$$

$$\pi_{*g} : H_g(C^2_*) \rightarrow H_g(C^3_*) : [b] \mapsto [\pi_g(b)].$$

$$\begin{aligned} \pi(\phi_2) &= \phi_3 \\ &+ d\phi \\ &\in d\pi_{g+1}(\delta) \end{aligned}$$

ZAUWAŻAMY, ŻE ZMIANA  $\phi_3 \mapsto \phi_3 + d_{g+1}^3 D$  WYBORU REPREZENTANTA  $[\phi_3]$  PROWADZI DO  $\phi_2 \mapsto \phi_2 + d\delta$ .  
 DLA  $\pi_{g+1}(\delta) = D$ , ZATEM TEŻ  $\phi_1 \mapsto \phi_1 \Rightarrow [\phi_1]$  JEST - W ISTOCIE - PRZYPISANA KLASIE  $[\phi_3]$ .  
 POZOSTAŁE WYBORY DOWOLNE DO DRODZE OD  $\phi_3$  DO  $\phi_1$  SĄ BEZ ZNACZENIA; ELEMENTY W  $\pi_n^{-1}(j)$  PODAJĄ  
 SIĘ O ELEMENTY Z  $\ker \pi_n = \text{Im } \iota_n$ , WIĘC DO ZWIĄZKU Z  $\iota_{n-1}^1 \circ d_n^2$  DOSTAJEMY POPRAWKĘ  $\sim \iota_n^1 \circ d_{n+1}^1 \circ \iota_{n+1}^1 = d_n^1 \Rightarrow 0 \in G$ .

PRZYSTĄPIMY OBECNIE DO SPRAWDZENIA DOKŁADNOŚCI CIĄGU GRUP HOMOLOGII:

$$(*) \text{ W } H_g(C^2_*) \ni [b] : \text{ZADŁŻMY, JE } [b] \in \ker \pi_{*g}, \text{ CZYLI } 0 = \pi_{*g}[b] = [\pi_g(b)]$$

$$\Rightarrow \exists c \in C_{g+1}^3 : \pi_g(b) = d_{g+1}^3 c. \text{ WOBEC EPICKOŚCI } \pi_{g+1} \text{ ZNAJDUJEMY } \beta \in C_{g+1}^2$$

$$\text{O WŁASNOŚCI } c = \pi_{g+1}(\beta), \text{ CZYLI } \pi_g(b) = d_{g+1}^3 \circ \pi_{g+1}(\beta) = \pi_g(d_{g+1}^2 \beta), \text{ T.J.}$$

$$b - d_{g+1}^2 \beta \in \ker \pi_g = \text{Im } \iota_g, \text{ ZATEM } \exists \alpha \in C_g^1 : b = d_{g+1}^2 \beta + \iota_g(\alpha), \text{ CO DAJE}$$

$$[b] = [\iota_g(\alpha) + d_{g+1}^2 \beta] = [\iota_g(\alpha)] = \iota_{*g}[\alpha] \in \text{Im } \iota_{*g}. \quad \square$$

(\*\*) w  $H_{g-1}(C^1) \ni [a]$ : ZATÓŻMY, ŻE  $[a] \in \ker \pi_{*g-1}$ , CZYLI  $0 = \pi_{*g-1}[a] \equiv [\pi_{g-1}(a)]$

$\Rightarrow \exists b \in C_g^2 : \pi_{g-1}(a) = d_g^2 b$ . ROZWAŻMY  $c := \pi_g(b)$ . ZACHODZI

$$d_g^3 c = d_g^3 \circ \pi_g(b) = \pi_{g-1} \circ d_g^2 b = \pi_{g-1} \circ \pi_{g-1}(a) = 0(a) = 0, \text{ WIEC TEŻ}$$

DOSTAJEMY  $[c] \in H_g(C^3)$ , A PRZY TYM — WPROST Z DEFINICJI —  $[a] = \beta_g[c] \in \text{Im } \beta_g$ . 

(\*\*\*) w  $H_g(C^3) \ni [c]$ : ZATÓŻMY, ŻE  $[c] \in \ker \beta_g$ , CZYLI  $0 = \beta_g[c] \equiv [a]$ , T.J.

DLA  $b : \pi_g(b) = c$  SPETNIĄCYCH  $d_g^2 b = \pi_{g+1}(a)$  MAMY  $a = d_g^1 \alpha$ , CZYLI

$$d_g^2 b = d_g^2(\pi_g(\alpha)), \text{ T.J. } b - \pi_g(\alpha) \in \ker d_g^2, \text{ ZATEM } \exists [b - \pi_g(\alpha)] \in H_g(C^2).$$

WOBEC TEGO  $c = \pi_g(b) = \pi_g(b - \pi_g(\alpha))$  ODTWARZA  $[c] = \pi_{*g}[b - \pi_g(\alpha)] \in \text{Im } \pi_{*g}$ . 

NAMY TEŻ

# TW.3. [NATURALNOŚĆ BOULSTEINA]

$$0 \cdots \rightarrow (C_1, d_1^1) \xrightarrow{z_1} (C_1, d_1^2) \xrightarrow{\pi_1} (C_1, d_1^3) \cdots \rightarrow 0$$

$$f_1 \downarrow \quad g_1 \downarrow \quad h_1 \downarrow$$

DIAGRAM  
PRZEMIENNY

$$0 \cdots \rightarrow (D_1, \delta_1^1) \xrightarrow{z_1} (D_1, \delta_1^2) \xrightarrow{p_1} (D_1, \delta_1^3) \cdots \rightarrow 0$$

MONOMORFIZMY  
TĄCZĄCE



$$\cdots \rightarrow H_n(C_1, d_1^1) \xrightarrow{z_{*n}} H_n(C_1, d_1^2) \xrightarrow{\pi_{*n}} H_n(C_1, d_1^3) \xrightarrow{f_n} H_{n-1}(C_1, d_1^1) \rightarrow \cdots$$

$$f_{*n} \downarrow \quad g_{*n} \downarrow \quad h_{*n} \downarrow \quad f_{*n-1} \downarrow$$

DIAGRAM  
PRZEMIENNY

$$\cdots \rightarrow H_n(D_1, \delta_1^1) \xrightarrow{z_{*n}} H_n(D_1, \delta_1^2) \xrightarrow{p_{*n}} H_n(D_1, \delta_1^3) \xrightarrow{f_n} H_{n-1}(D_1, \delta_1^1) \rightarrow \cdots$$

D:  $\triangle$

(INNYM POTĘŻNYM NARZĘDZIEM RACHUNKOWYM ALGEBRY HOMOLOGICZNEJ  
JEST KONSTRUKCJA HOMOTOPII, KTÓRA USTALA RELACJĘ  
POMIĘDZY INDUKOWANYMI MORFIZMAMI HOMOLOGII...

Def. 5. NIECH  $\mathcal{A}$  - ABELOWA ( $\hookrightarrow \text{AbGrp}$ ) i NIECH

$f_{\bullet}^A : (C_{\bullet}^1, d_{\bullet}^1) \rightarrow (C_{\bullet}^2, d_{\bullet}^2)$  BĘDĄ MORFIZMAMI  
KOMPLEKSÓW ŁĄCZONYCH  
W  $\mathcal{A}$ .

MÓWIMY, ŻE  $f_{\bullet}^1$  I  $f_{\bullet}^2$  SĄ HOMOTOPIJNE (HOMOTOPIJNIE  
ROZNOWAŻNIE)

CO ZAPISUJEMY JAKO  $f_{\bullet}^1 \simeq f_{\bullet}^2$ , ILEKROD  
CIĄG UOGÓLNIONY  $h_{\bullet} : C_{\bullet}^1 \rightarrow C_{\bullet}^2 \text{ (f1)} \in \text{Mor}(\mathcal{A})^{\mathbb{Z}}$  HOMOTOPIA

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow C_{n+1}^1 & \xrightarrow{d_{n+1}^1} & C_n^1 & \xrightarrow{d_n^1} & C_{n-1}^1 & \rightarrow & \\ \uparrow f_{n+1}^A & \swarrow h_n & \uparrow f_n^A & \swarrow h_{n-1} & \uparrow f_{n-1}^A & & \\ \rightarrow C_{n+1}^2 & \xrightarrow{d_{n+1}^2} & C_n^2 & \xrightarrow{d_n^2} & C_{n-1}^2 & \rightarrow & \end{array}$$

$$f_n^1 - f_n^2 = d_{n+1}^2 \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n^1$$

(H)

O WŁASNOŚCI  
WYKAZANEJ  
PRZĘZ DĄCIAM PRZECIWNY

W szczególności morfizm  $f: (C^1, d^1) \rightarrow (C^2, d^2)$  nazywamy  
homotopijnie zerowym, gdy  $f \simeq 0$ .

Uwaga:  $\text{id}_{(C, d)} \simeq 0$ , kompleks  $(C, d)$  nazywamy miannym  
ścigającym się, a odnośną homotopię  $h$  - miannym  
homotopii ściągającej.

o istności powyższych pojęć zaświadczyają poniższe

Skł. 7.  $f^1 \simeq f^2 \implies f^1_* = f^2_*$

Dł.  $f^1_{*n}[S] \equiv [f^1_n(S)]_{(H)} = [f^2_n(S) + d^2_{n+1} \circ h_n(S) + h_{n-1} \circ d^1_n(S)]$   
 $= [f^2_n(S) + d^2(h_n(S))] \equiv [f^2_n(S)] = f^2_{*n}[S] \quad (28)$



ORAZ

Slw. 8. DOWOLNY KOMPLEKS SŁABY GALNY JEST ACYKLUJNY.

D:  $[S] \equiv \text{id}_{(C, d.)} *_{n} [S] \underset{\text{Slw. 2}}{=} 0 *_{n} [S] \equiv [0_n(S)] = [0] = 0$

ii.  $\forall n \in \mathbb{Z}: H_n(C, d.) = 0 \quad \square$

KOLEJNĄ STRUKTURĘ O ZNACZENIU FIZYKALNYM, Z KTÓRĄ  
PRZYSTOJE NAM SIĘ ZAPOZNAĆ, SĄ KOMPLEKSY W  $\text{Comp}(A)$ .  
ICH ZNAJOMOŚĆ STAJE SIĘ - BYWA - JEDNĄ ISTOTNYCH IZOMORFIZMÓW  
W (KO)HOMOLOGII, KTÓRYCH PRZYKŁADY OMÓWIMY JUŻ WKRÓTCE.

DEF. 6.: NIECHAJ  $R \in \text{AbRing}$ . BIKOMPLEKS TANIECZOWY TO TRÓJKA

$(C_{\bullet, \bullet}, d_{\bullet, \bullet}^{(1)}, d_{\bullet, \bullet}^{(2)})$  ZŁOŻONA Z CIĄGU UOGÓLNIONEGO  $C_{\bullet, \bullet}: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \text{Mod}_R$   
 $: (m, n) \mapsto C_{m, n}$

ORAZ PARY CIĄGÓW UOGÓLNIONYCH:  $\left\{ \begin{array}{l} d_{\bullet, \bullet}^{(1)}: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \text{Hom}_R(C_{\bullet, \bullet}) \\ : (m, n) \mapsto d_{m, n}^{(1)} \in \text{Hom}_R(C_{m, n}, C_{m-1, n}) \\ d_{\bullet, \bullet}^{(2)}: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \text{Hom}_R(C_{\bullet, \bullet}) \\ : (m, n) \mapsto d_{m, n}^{(2)} \in \text{Hom}_R(C_{m, n}, C_{m, n-1}) \end{array} \right.$

$$\begin{array}{ccccc} & & \downarrow d_{m, n}^{(1)} & & \\ d_{m, n}^{(1)} \rightarrow & C_{m, n} & \xrightarrow{d_{m, n}^{(2)}} & & \\ & \downarrow d_{m, n}^{(2)} & & & \end{array}$$

• WŁASNOŚCIACH: (BC1)  $\forall n \in \mathbb{Z}: (C_{\bullet, n}, d_{\bullet, n}^{(1)}) \in \text{Comp}(\text{Mod}_R)$

$\forall m \in \mathbb{Z}: (C_{m, \bullet}, d_{m, \bullet}^{(2)}) \in \text{Comp}(\text{Mod}_R)$

(BC2)  $\forall (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}: d_{m-1, n}^{(2)} \circ d_{m, n}^{(1)} = d_{m, n-1}^{(1)} \circ d_{m, n}^{(2)}$

WŁASNOŚĆ (BC2) POZWALA ZWIĄZAĆ  $\mathcal{Z}$  BIKOMPLEKSEM - ORAZ  $H_*(C_{\bullet, n}, d_{\bullet, n}^{(1)})$   
 i  $H_*(C_{m, \bullet}, d_{m, \bullet}^{(2)})$   $\forall m, n \in \mathbb{Z}$  - JEDNĄ JESZCZE HOMOLOGIE, O KTÓREJ MOWI

DEF. 7. NIECHAJ  $R \in \text{AbRing}$  i NIECH  $(C_{\bullet, \bullet}, d_{\bullet, \bullet}^{(1)}, d_{\bullet, \bullet}^{(2)})$  BĘDZIE  
 BIKOMPLEKSEM ŁANCUKOWYM na  $\text{Mod}_R$ . KOMPLEKS TOTALNY BIKOMPLEKSU  
 TO KOMPLEKS ŁANCUKOWY  $(\text{Tot}(C_{\bullet, \bullet}), D_{\bullet}) \in \text{Comp}(\text{Mod}_R)$

0 OBIEKTAM  
 $n$  - ŁANCUKOWY

$$\text{Tot}(C_{\bullet, \bullet})_N := \bigoplus_{N=m+n} C_{m, n}$$

1 OPERATORACH  
 $n$  - KŁASZCZĄ

$$D_N := \sum_{N=m+n} (d_{m, n}^{(1)} + (-1)^m d_{m, n}^{(2)}) : \text{Tot}(C_{\bullet, \bullet})_N \rightarrow \text{Tot}(C_{\bullet, \bullet})_{N-1}$$

JEGO HOMOLOGIE OKREŚLAMY MIANEM HOMOLOGII TOTALNEJ BIKOMPLEKSU.

(SPRAWDZENIE POPRAWNOŚCI DEFINICJI  $D_N$  JAKO OPERATORÓW KŁASZCZĄ  
 POZOSTAWIAMY UWAGNEMU CZYTELNIKOWI.)

MAYĄC NA WZGLĘDZIE PRZYSZŁE ZASTOSOWANIA, WPROWADZAMY JESZCZE

DEF. 8. NIECHAJ  $R \in \text{Ab Ring}$  I NIECH  $(C_{\bullet, \bullet}, d_{\bullet, \bullet}^{(1)}, d_{\bullet, \bullet}^{(2)})$  BĘDZIE

BIKOMPLEKSEM TANCUKLOWYM na Mod<sub>R</sub>. PIERWSZA HOMOLOGIA ITEROWANA

BIKOMPLEKSU TO HOMOLOGIA KOMPLEKSU TANCUKLOWEGO

$$\left( \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_{\bullet, n}^{(2)}(C_{\bullet, \bullet}, d_{\bullet, \bullet}^{(1)}), \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} [d_{\bullet, n}^{(2)}] \right)$$

O OPERATORACH KOBRZĘGU  $[d_{\bullet, n}^{(1)}] : H_{\bullet, n}^{(2)}(C_{\bullet, \bullet}, d_{\bullet, \bullet}^{(2)}) \rightarrow H_{\bullet-1, n}^{(2)}(C_{\bullet, \bullet}, d_{\bullet, \bullet}^{(2)})$

$$\left[ \text{OZN. } \bigoplus_{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} H_m^{(1)} H_{\bullet, n}^{(2)} \right. \quad ; \quad \begin{array}{ccc} [C]_{d_{\bullet, \bullet}^{(2)}} & \xrightarrow{\quad} & [d_{m, n}^{(1)} C]_{d_{\bullet, \bullet}^{(2)}} \\ \bigcap & & \bigcap \\ H_{m, n}^{(2)}(C_{\bullet, \bullet}, d_{\bullet, \bullet}^{(2)}) & & H_{m-1, n}^{(2)}(C_{\bullet, \bullet}, d_{\bullet, \bullet}^{(2)}) \end{array}$$

DRUGĄ HOMOLOGIE ITEROWANĄ BIKOMPLEKSU DEFINIujemy ANALOGICZNIE JAKO

HOMOLOGIE KOMPLEKSU  $\left( \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} H_{m, \bullet}^{(1)}(C_{\bullet, \bullet}, d_{\bullet, \bullet}^{(1)}), \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} [d_{m, \bullet}^{(2)}] \right)$ .  $\left[ \text{OZN. } \bigoplus_{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} H_n^{(2)} H_{m, \bullet}^{(1)} \right.$

## ZNACZENIE HOMOLOGII ITEROWANYM PODPADA

Tw. 4. PRZYMIJMY ZAPIS DEF. 8. I ZAŁOŻMY, ŻE  $(C_{\cdot}, d_{\cdot,1}^{(1)}, d_{\cdot,1}^{(2)})$  JEST JEDNOSTRONNIE OGRANICZONY W OBU GRADUJACH, T.J.  $\exists (M, N) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \forall m > M, n > N : C_{m,n} \equiv 0$ .

ILEKROĆ HOMOLOGIA ITEROWANA ZNIKA POZA WYRÓŻNIONYM RZĘDEM  $n = n_0$  (W PRZYPADKU PIERWSZEJ) WZGL. POZA WYRÓŻNIONĄ KOLUMNĄ  $m = m_0$  (W PRZYPADKU DRUGIEJ), HOMOLOGIA TOTALNA JEST Z NIĄ IZOMORFICZNA,

T.J.  $\forall m \in \mathbb{Z} : H_{m+n_0}(\text{Tot}(C_{\cdot, \cdot}), D_{\cdot, \cdot}) \simeq H_m^{(1)} H_{\cdot, n_0}^{(2)}$

WZGL.

$$\forall n \in \mathbb{Z} : H_{m_0+n}(\text{Tot}(C_{\cdot, \cdot}), D_{\cdot, \cdot}) \simeq H_n^{(2)} H_{m_0, \cdot}^{(1)}$$

D: DAWOŚ PRZEPROWADZIMY DLA PIERWSZEJ HOMOLOGII ITEROWANEJ.  
W PRZYPADKU DRUGIEJ HOMOLOGII ITEROWANEJ JEST ON W PEŁNI ANALOGICZNY. DLA USTALENIA UWAGI POTOŻYMY TEŻ  $(M, N) = (0, 0)$ . (33)

OZNACZMY DLA SUMY  $\delta_{m,n} \equiv d_{m,n}^{(1)}$  ;  $\nabla_{m,n} \equiv (-1)^m d_{m,n}^{(2)}$ , A NASTĘPNIE OPISAMY  
 INDEKSY BIGRADACJI.

$$\Leftrightarrow ([d^{(1)}, d^{(2)}] = 0 \Rightarrow \{\delta, \nabla\} = 0)$$

NIECHAJ  $[\phi] \in H_m^{(1)} H_{\cdot, n_0}^{(2)}$ . REPREZENTANT  $\phi$  TEJ KLASY SPEŁNIA WARUNEK

$$\nabla \phi = 0,$$

ZATEM OKREŚLA  $[\phi]_{\nabla} \in H_{n_0}(C_{m, \cdot}, d_{m, \cdot}^{(2)})$ , A PRZY TYM  $0 = [\delta][\phi]_{\nabla} \equiv [\delta\phi]_{\nabla}$ ,

CZYLI  $\exists \phi_1 \in C_{m-1, n_0+1} : \delta\phi = -\nabla\phi_1 \Rightarrow 0 = \delta^2\phi = -\delta\nabla\phi_1 = +\nabla(\delta\phi_1)$ , MAMY ZATEM

$[\delta\phi_1]_{\nabla} \in H_{n_0+1}(C_{m-2, \cdot}, d_{m-2, \cdot}^{(2)})$  O WŁASNOŚCI  $[\delta][\delta\phi_1]_{\nabla} \equiv [\delta^2\phi_1]_{\nabla} = 0$ , PRZETO

$\delta\phi_1$  WYZNACZA  $[\delta\phi_1] \in H_{m-2}^{(1)} H_{\cdot, n_0+1}^{(2)} \equiv 0$  (NA MOCY ZAŁOŻENIA). KLASA TA JEST

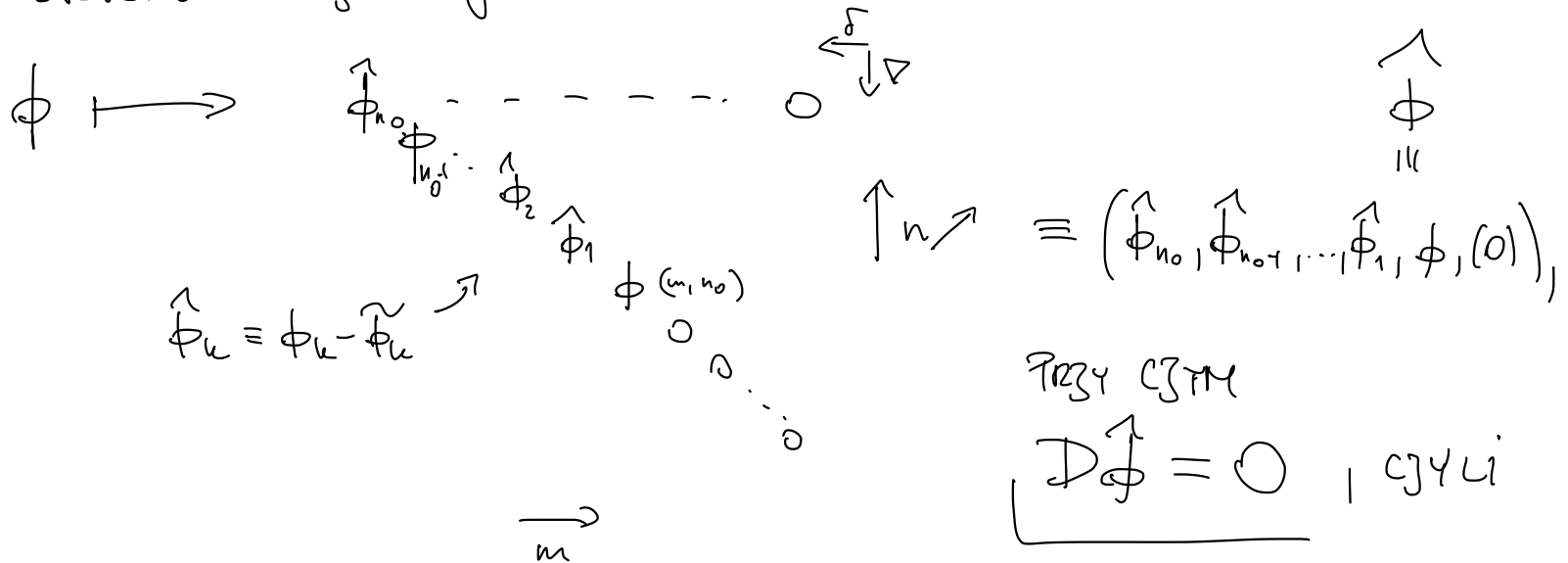
REPREZENTOWANA PRZEZ  $[\delta\phi_1]_{\nabla} \equiv [\delta][\tilde{\phi}_1]_{\nabla} \equiv [\delta\tilde{\phi}_1]_{\nabla}$ ,  $\tilde{\phi}_1 \in C_{m-1, n_0+1}$ ,  $\nabla\tilde{\phi}_1 = 0$ .

$\Leftrightarrow \exists \phi_2 \in C_{m-2, n_0+2} : \delta(\phi_1 - \tilde{\phi}_1) = -\nabla\phi_2 \Rightarrow 0 = \delta^2(\phi_1 - \tilde{\phi}_1) = -\delta\nabla\phi_2 = +\nabla(\delta\phi_2)$ ,  $\downarrow$   
 $-\nabla(\phi_1 - \tilde{\phi}_1) = -\nabla\phi_1 = \delta\phi$

ZNÓW WYC DOSTAJEMY  $[\delta\phi_2]_{\nabla} \in H_{n_0+2}(C_{m-3, \cdot}, d_{m-3, \cdot}^{(2)})$  O WŁASNOŚCI  $[\delta][\delta\phi_2]_{\nabla} \equiv [\delta^2\phi_2]_{\nabla} = 0$ , CZYLI  
 - JAK UPRZĘDNIŁO - JEST  $[\delta\phi_2] \in H_{m-3}^{(1)} H_{\cdot, n_0+2}^{(2)} \equiv 0$  (J/W)  $\Rightarrow [\delta\phi_2]_{\nabla} = [\delta\tilde{\phi}_2]_{\nabla}$ ,  $\tilde{\phi}_2 \in C_{m-2, n_0+2}$ ,  $\nabla\tilde{\phi}_2 = 0$ . (34)

A DALEJ  $\exists \phi_3 \in C_{m-3, n_0+3} : \delta(\phi_2 - \tilde{\phi}_2) = -\nabla \phi_3$ ,    PRZY  $-\nabla(\phi_2 - \tilde{\phi}_2) = -\nabla \phi_2 = \delta(\phi_1 - \tilde{\phi}_1)$   
etc.!

ТҮМ СРОДОБЕМ ҮЗҮСҮҮҖЕМҮ


$$\phi \mapsto [\hat{\phi}]_{\mathcal{D}} \in H_{m+n_0}(\overline{\text{Tot}}(G, \cdot), \cdot, \mathcal{D})$$

POZOSTAJE PRZEKONAC SIĘ O NIEZALEŻNOŚCI  $[\hat{\phi}]_D$  OD WYBORU  
REPREZENTANTA KLASY  $[\phi] \in H_m^{(1)} H_{\bullet, 1^m}^{(2)}$ .

W tym celu rozważmy  $[\phi]_{\nabla} \mapsto [\phi]_{\nabla} + [\delta][\tilde{\phi}]_{\nabla} = [\phi + \delta\tilde{\phi}]_{\nabla}, \nabla\tilde{\phi} = 0$

Jest  $[\delta][\phi + \delta\tilde{\phi}]_{\nabla} = [\delta\phi + \delta^2\tilde{\phi}]_{\nabla} = [\delta\phi]_{\nabla} = [\delta][\phi]_{\nabla} = 0$ , więc możemy

położyć  $\delta\phi = -\nabla\phi$ , etc., jak poprzednio.

Wobec powyższego otrzymujemy

$$[\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_n, \phi, 0]_{\nabla} \xrightarrow{[\phi] \mapsto [\phi]_{\nabla} + [\delta][\tilde{\phi}]_{\nabla}} [\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_n, \phi + \delta\tilde{\phi}, 0]_{\nabla} \stackrel{\nabla\tilde{\phi}=0}{=} [\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_n, \phi] + [0, \dots, 0, \delta\tilde{\phi}, \nabla\tilde{\phi}]_{\nabla} \\ = [\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_n, \phi, 0] + \nabla(0, \dots, 0, \tilde{\phi}, 0)_{\nabla} = [\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_n, \phi]_{\nabla}$$

WNIOSEK: Przyporządkowanie  $[\phi] \xrightarrow{h} [\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_n, \phi, 0]_{\nabla}$  jest dobrze określone.  $\square$

Następnie konstruujemy przyporządkowanie odwrotne:  $H_*(\text{Tot}(C_{\bullet}), D_{\bullet}) \rightarrow H_{\bullet}^{(1)} H_{\bullet, n_0}^{(2)} \dots$

Niechaj  $\omega = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$  będzie  $N$ -cyklem w  $H_{\bullet}^{(1)}$  homologii  $D$ , tj. mamy

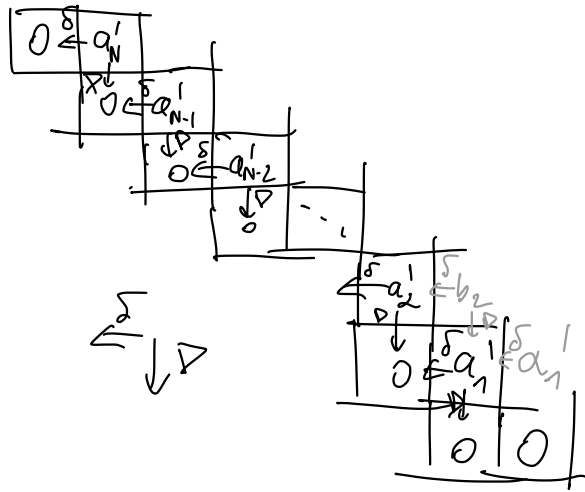
$$\left( \begin{array}{c|c} a_n & a_0 \\ \hline & a_0 \\ \hline & 1\text{-cykl} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} a_2 & a_1 \\ \hline & a_1 \\ \hline & 2\text{-cykl} \end{array} \quad \downarrow \nabla \quad \dots \right) \quad (36)$$





jest zatem  $a_0 = \nabla b_1 \Rightarrow \omega - D(0, 0, \dots, 0, b_1)$  spełnia relację  $D\omega_1 = D\omega = 0$ , a przy tym  $\subseteq \omega'$

$\omega' = (a_N, a_{N-1}, \dots, a_1, \delta b_1, 0) \equiv (a'_N, a'_{N-1}, \dots, a'_1, 0)$ , czyli otrzymany  $D$ -homologiczny z  $\omega$   $N$ -cykl „zredukowany”



$$\left. \begin{array}{l} \nabla a'_1 = 0 \\ \delta a'_1 = -\nabla a'_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists [a'_1]_\nabla : [\delta][a'_1]_\nabla = [\delta a'_1]_\nabla = [-\nabla a'_2]_\nabla = 0$$

$$[a'_1]_\nabla \text{ wyznacza } [a'_1] \in H_1^{(1)} H_{N-1}^{(0)} \equiv 0$$

$$[a'_1]_\nabla = [\delta][a'_1]_\nabla \equiv [\delta a'_1]_\nabla, \nabla a'_1 = 0$$

(tu już jest rezultat!)

jest zatem  $a'_1 = \delta a'_1 + \nabla b_2, \nabla a'_1 = 0 \Rightarrow \omega'' := \omega' - D(0, 0, \dots, 0, b_2, a'_1)$  spełnia relację  $D\omega'' = D\omega' = D\omega = 0$ , a przy tym  $\omega'' = (a_N, a_{N-1}, \dots, a_2, \delta b_2, 0, 0) \equiv (a''_N, a''_{N-1}, \dots, a''_2, 0, 0)$ , czyli otrzymany  $D$ -homologiczny z  $\omega$   $N$ -cykl zredukowany etc.

KONTYNUUJĄC PROCEDURĘ REDUKCJI W OBRĘBIE  $[\omega]_D$  OSIĄGAMY

$$\tilde{\omega} = (\tilde{a}_N, \tilde{a}_{N-1}, \dots, \tilde{a}_{N-n_0}, 0, 0, \dots, 0), \text{ PRZY CZYM } \begin{cases} \nabla \tilde{a}_{N-n_0} = 0 \\ \delta \tilde{a}_{N-n_0} = -\nabla \tilde{a}_{N-n_0+1} \end{cases} \text{ ZATEM}$$

$\exists [\tilde{a}_{N-n_0}]_D : [\delta][\tilde{a}_{N-n_0}]_D = [\delta \tilde{a}_{N-n_0}]_D = [-\nabla \tilde{a}_{N-n_0+1}]_D = 0 \Rightarrow [\tilde{a}_{N-n_0}]_D$  WYZNAGAJA  $[\tilde{a}_{N-n_0}] \in H_{N-n_0}^{(1)} H_{n_0}^{(1)}$

A PONIEWAŻ WIEMY JEDYŃCIE, ŻE  $H_{n_0+A}^{(1)} H_{n_0+A}^{(2)} \equiv 0$ , PRZETO PROCEDURA URZYWA SIĘ NA TYM ETAPIE:

$$H_N(\text{Tot}(C_r), D) \ni [\omega]_D \xrightarrow{g} [\tilde{a}_{N-n_0}] \in H_{N-n_0}^{(1)} H_{n_0}^{(2)}$$

MUSIMY JUŻGŁO SPRAWDZIĆ (i) OKREŚLONOŚĆ PRZYPORZĄDOWANIA  $g$  i  
(ii) TO, ŻE JEST ONO ODWROTNAŁĄ  $h$ .

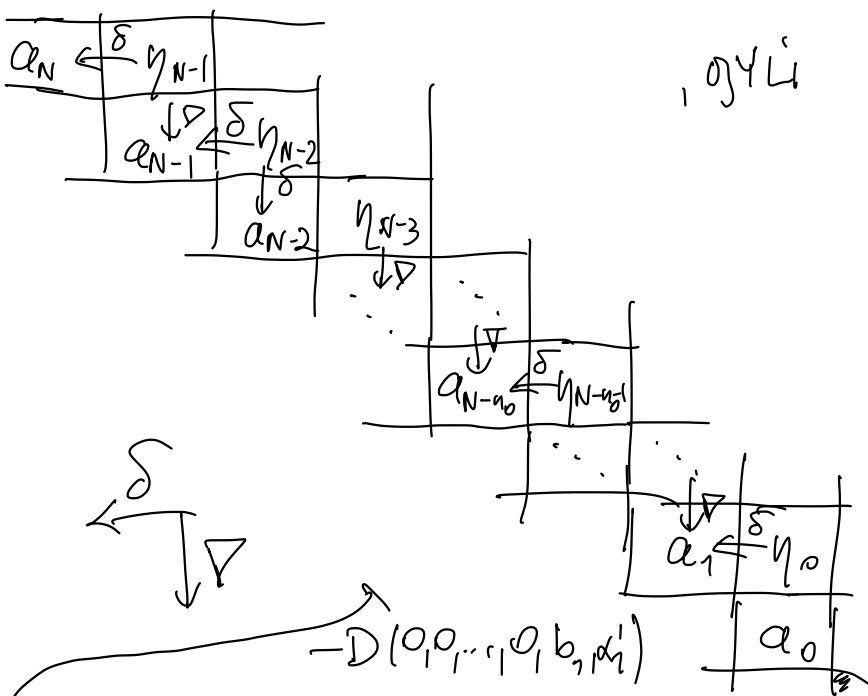
$$\tilde{a}_{N-n_0} = a_{N-n_0} - \delta b_{N-n_0}$$

AŻ (i) WPROST Z KONSTRUKCJI  $\tilde{\omega} = \omega + D\xi$  ( $\xi = (0, 0, \dots, 0, \xi_{N-n_0}, \xi_{N-n_0-1}, \dots, \xi_0)$  - SUMA POPRAWEK),

W NAJLEPSZYM ZATEM RAZIE MAMY DO CZYNIEŃIA Z PRZYPORZĄDOWANIEM  $[\omega]_D \mapsto [\tilde{a}_{N-n_0}]$ .

WYBIERZMY MNIEGO REPREZENTANTA:  $\tilde{\omega} \equiv \omega + D\eta = (\dots, \eta_0 + \nabla \eta_0)$ ,  $\eta = (\eta_{N-1}, \eta_{N-2}, \dots, \eta_0)$  KLASZ  $[\omega]_D$ ,

A WTEDY POSTANIEMY



1034 Li

POPE3.

$$a_0 \mapsto a_0 + \nabla \eta_0 \stackrel{\text{POPE3.}}{=} \nabla b_1 + \nabla \eta_0 = \nabla(b_1 + \eta_0)$$

$$a_1 \mapsto a_1 + \delta \eta_0 + \nabla \eta_1 \quad b_1 \mapsto b_1 + \eta_0$$

$$a_2 \mapsto a_2 + \delta \eta_1 + \nabla \eta_2$$

$$\vdots$$

$$a_{N-n_0} \mapsto a_{N-n_0} + \delta \eta_{N-n_0-1} + \nabla \eta_{N-n_0}$$

$$\vdots$$

$$a_{N-1} \mapsto a_{N-1} + \delta \eta_{N-2} + \nabla \eta_{N-1}$$

$$a_N \mapsto a_N + \delta \eta_{N-1}$$

for  $\in$

$$a_0 \mapsto a_0 + \nabla \eta_0 = 0$$

$$-\nabla b_1 = 0 \quad -\nabla(b_1 + \eta_0) = 0$$

$\rightarrow$

$$a_1 \mapsto a_1 + \delta \eta_0 + \nabla \eta_1 = a_1 - \delta b_1 + \nabla \eta_1 \equiv a_1' + \nabla \eta_1 \quad \text{ANALOGICALLY DO}$$

$$-\delta b_1 \quad -\delta(b_1 + \eta_0) \mid = \delta a_1' + \nabla b_2 + \nabla \eta_1 \equiv \delta a_1' + \nabla(b_2 + \eta_1) \quad a_0 \mapsto a_0 + \nabla \eta_0$$

$$\hat{\omega}_1 = \hat{\omega} - D(0, 0, \dots, 0, b_1 + \eta_0)$$

$$\Leftrightarrow (a_1', b_2) \mapsto (a_1', b_2 + \eta_1) \Rightarrow \dots$$

$$\begin{matrix} a_1' \\ -\delta\alpha_1' - \nabla b_2 \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} a_1' + \nabla\eta_1 \\ -\delta\alpha_1' - \nabla(b_2 + \eta_1) \end{matrix} = 0$$

$$a_2 - \delta b_2 \equiv a_2' \xrightarrow{\nabla\alpha_1' = 0} \begin{matrix} a_2 + \delta\eta_1 + \nabla\eta_2 \\ -\delta(b_2 + \eta_1) \end{matrix} = a_2 - \delta b_2 + \nabla\eta_2 \equiv a_2' + \nabla\eta_2 \text{ etc.}$$

KONIEC KONCOW UŻYCIEM JESTY POPRAWIONY REDUKCJE

$$\hat{\omega}_{N-n_0} = \hat{\omega}_{N-n_0-1} - D(0, 0, \dots, 0, b_{N-n_0} + \eta_{N-n_0-1}, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a_{N-n_0} + \delta\eta_{N-n_0-1} + \nabla\eta_{N-n_0})}_{\hat{a}_{N-n_0}} - \delta(b_{N-n_0} + \eta_{N-n_0-1}) = a_{N-n_0} - \delta b_{N-n_0} + \nabla\eta_{N-n_0}$$

$$\Rightarrow \tilde{\omega} + D(\eta_{N-1}, \eta_{N-2}, \dots, \eta_{N-n_0}, 0, 0, \dots, 0) \stackrel{D}{\sim} \tilde{\omega} \quad \left( \equiv \tilde{a}_{N-n_0} + \nabla\eta_{N-n_0} \right)$$

POPRAWKA

ORAZ  $[[\tilde{a}_{N-n_0}]_{\nabla}]_{\delta} \mapsto [[\tilde{a}_{N-n_0} + \nabla\eta_{N-n_0}]_{\nabla}]_{\delta} = [[\tilde{a}_{N-n_0}]_{\nabla}]_{\delta}$ , zgodnie z ogólnianiami.

Aż (ii) z jednej strony mamy - TRYWALNIE -

$$[\phi] \xrightarrow{h} [\hat{\phi}_{n_0}, \hat{\phi}_{n_0-1}, \dots, \hat{\phi}_1, \phi, 0]_D \xrightarrow{g} [\phi], \text{ czyli } g \circ h = \text{id}_{H^{(1)}_{n_0} \oplus H^{(2)}_{n_0}}$$

NA POZIOMIE LOKALIZACJI układowości NEROWNAŁY

Z drugiej strony:

$$[a_N, a_{N-1}, \dots, a_0]_D \xrightarrow{\text{JAKOŚĆ D-REDUKOWALNOŚĆ}} [\tilde{a}_N, \tilde{a}_{N-1}, \dots, \tilde{a}_{N-n_0}, 0, 0, \dots, 0]_D \xrightarrow{g} [\tilde{a}_{N-n_0}] \xrightarrow{h} [\hat{\phi}_{n_0}, \hat{\phi}_{n_0-1}, \dots, \hat{\phi}_1, \tilde{a}_{N-n_0}, 0, \dots, 0]$$

PYTANIE: !!?

AŻEBY UDZIEĆ NA NIE ODPOWIEDZI, ROZWAŻYMY DWA POWOLNE

ROZSTRZEGANIA DANEGO  $\phi$ ,  $\begin{cases} \nabla \phi = 0 \\ [\delta][\phi]_D = 0 \end{cases}$  DO PEŁNEGO D-CYKLU...

$$C_{n_1, n_0} \begin{cases} -\nabla \phi_1 = \delta \phi = -\nabla \tilde{\phi}_1 \Rightarrow \nabla(\tilde{\phi}_1 - \phi_1) = 0 \Rightarrow [\tilde{\phi}_1 - \phi_1]_D =: \Delta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta \phi_1 = -\nabla \phi_2 \\ \delta \tilde{\phi}_1 = -\nabla \tilde{\phi}_2 \end{cases} \hookrightarrow \begin{cases} \delta \Delta_1 = -\nabla(\tilde{\phi}_2 - \phi_2) =: \Delta_2 \\ \delta \Delta_{k-1} = -\nabla \Delta_k \end{cases}$$

PRZEŁO  $[\delta][\Delta_1]_\nabla \equiv [\delta\Delta_1]_\nabla = [-\nabla\Delta_2]_\nabla = 0 \Rightarrow [\Delta_1] \in H_{m-1}^{(1)} H_{n_0+1}^{(2)} \equiv 0$

(KAZAŁO KOTOMOLOGIA PEROWANA TYŁO  
W  $\cdot, n_0$ )

ZATEM  $\exists \mathcal{D}_1, \nabla \mathcal{D}_1 = 0$  :  $[\Delta_1]_\nabla = [\delta][\mathcal{D}_1]_\nabla \equiv [\delta\mathcal{D}_1]_\nabla$ , T.J.  $\exists \xi_1 : \Delta_1 = \delta\mathcal{D}_1 + \nabla\xi_1$ ,  
PODZ. PATEM.

A PRZY TEM  $-\nabla\Delta_2 \stackrel{\text{podz.}}{=} \delta\Delta_1 = \delta^2\mathcal{D}_1 + \delta\nabla\xi_1 = -\nabla\delta\xi_1 \leftarrow \{\delta, \nabla\} = 0$

$\Downarrow$   
 $\nabla(\Delta_2 - \delta\xi_1) = 0$  ; NAMU  $[\Delta_2 - \delta\xi_1]_\nabla$

ALE  $\delta\Delta_2 = -\nabla\Delta_3$  (KONTYNUACJA HIERARCHII), ZATEM

$[\delta][\Delta_2 - \delta\xi_1]_\nabla \equiv [\delta\Delta_2 - \delta^2\xi_1]_\nabla = [\delta\Delta_2]_\nabla = [-\nabla\Delta_3]_\nabla = 0$ , UŻYU NAMU

$[\Delta_2 - \delta\xi_1] \in H_{m-2}^{(u)} H_{n_0+2}^{(u)} \equiv 0 \Rightarrow \Delta_2 - \delta\xi_1 = \delta\mathcal{D}_2 + \nabla\xi_2, \nabla\mathcal{D}_2 = 0$  (J.W)

$\Downarrow$   
 $\Delta_2 = \delta(\mathcal{D}_2 + \xi_1) + \nabla\xi_2$  i t.d.

KONTAK KONTAKU STRUKTURNY...

(43)

$$\Delta_1 = \delta D_1 + \nabla \xi_1 \equiv \delta D_1 + \nabla(\xi_1 + D_2) \stackrel{\sim}{=} \xi_1 \quad (\nabla D_1 = 0 = \nabla D_2)$$

$$\Delta_2 = \delta(\xi_1 + D_2) + \nabla \xi_2 \equiv \delta(\xi_1 + D_2) + \nabla(\xi_2 + D_3), \quad \nabla D_3 = 0$$

$$\Delta_3 = \delta(\xi_2 + D_3) + \nabla \xi_3 \equiv \delta(\xi_2 + D_3) + \nabla(\xi_3 + D_4), \quad \nabla D_4 = 0 \text{ etc.}$$

сформулируем

сумму

$$\Delta^{\in (\Delta_*)} = \mathcal{D}(\xi_{n_0-1}, \xi_{n_0-2} + D_{n_0-1}, \xi_{n_0-3} + D_{n_0-2}, \dots, \xi_1 + D_2, D_1)$$

$\Downarrow$

$$[(\phi_{n_0}, \phi_{n_0-1}, \dots, \phi_1, \phi, 0, 0, \dots, 0)]_D = [(\tilde{\phi}_{n_0}, \tilde{\phi}_{n_0-1}, \dots, \tilde{\phi}_1, \phi, 0, 0, \dots, 0)]_D. \quad \square$$

64



SNOPKI, FORMY, ŁAŃCZAKI ; TORSE  
W SŁUŻBIE FIZYKI ; NATURA

CEL: USTANOWIENIE RELACJI STRUKTURALNEJ ①  
POMIĘDZY NARODZANymi OBIEKTAMI  
KOMBINATORYCZNYMI (KLASAMI OBSTRUKCJI,  
KOMBINACJAMI KLASYFIKUJĄCYMI etc.)  
i ZNANYMI OBIEKTAMI RÓŻNICZKOWO-GEOMETRYCZNYMI  
(FORMAMI, CYKLAMI HOMOLOGICZNYMI etc.)

METODA: HAXAMOVA

AKTORY:  $M \in \text{Ob Man}$

(2)

$$\Theta := \{\Theta_i\}_{i \in \mathbb{I}} \subset \mathcal{J}(M), \quad \bigcup_{i \in \mathbb{I}} \Theta_i = M$$

(ozn.  $\Theta_{i_1 i_2 \dots i_N} := \Theta_{i_1} \cap \Theta_{i_2} \cap \dots \cap \Theta_{i_N}$ )

(POKRYCIE  
OTWARTE)

Rozważamy odwzorowania ustalonego typu  $T$

(e.g., lokalnie gradienty, lokalnie state etc.)

$M \rightarrow G$ , gdzie  $G \in \text{Ob AbGrp}$  — TE POZWALAJĄ

ZDEFINIOWAĆ GRUPE  $\check{C}$ -P-KOTAŃCUKÓW ČECHA  
(stow. z  $\Theta$ , o wartościach w  $G$ )

$$\check{C}^p(\Theta; G) = \left\{ (f_{i_0 i_1 \dots i_p})_{i_0, i_1, \dots, i_p \in \mathbb{I}} \mid f_{i_0 i_1 \dots i_p} \in \text{Map}_T(\Theta_{i_0 i_1 \dots i_p}, G) \right\}$$

NB: NOTACJA **MULTYPLIKATYWNA**:

$$\forall \sigma \in G_{\mathbb{I}^p} : f_{i_{\sigma(0)} i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}} = \eta_{\sigma} \sigma \cdot f_{i_0 i_1 \dots i_p}$$

(3)

TA WSPÓŁOKREŚLA KOMPLEKS KOŁANOWY CECHA  
 $(\check{C}^\bullet(\mathcal{O}; G), \check{\delta}^\bullet)$ :

$$\check{C}^0(\mathcal{O}; G) \xrightarrow{\check{\delta}^{(0)}} \check{C}^1(\mathcal{O}; G) \xrightarrow{\check{\delta}^{(1)}} \dots \xrightarrow{\check{\delta}^{(p-1)}} \check{C}^p(\mathcal{O}; G) \xrightarrow{\check{\delta}^{(p)}} \dots$$

o OPERATORACH KOBRZĘCY CECHA  $(f_{i_0 i_1 \dots i_p})_{i_0 i_1 \dots i_p \in \bar{I}}$

$$\check{\delta}^{(p)} f_{i_0 i_1 \dots i_p i_{p+1}} := \prod_{k=0}^{p+1} \epsilon_{i_k} \left( \text{Inv}^k \circ f_{i_0 i_1 \dots \underset{i_k}{i_{p+1}}} \right),$$

$$\epsilon_{i_k} f_{i_0 i_1 \dots \underset{i_k}{i_{p+1}}} = f_{i_0 i_1 \dots \underset{i_k}{i_{p+1}}} \mid \Theta_{i_k}$$

$$\equiv f_{i_0 i_1 \dots \underset{i_k}{i_{p+1}}} \mid \Theta_{i_0 i_1 \dots \underset{i_k}{i_{p+1}}} \cap \Theta_{i_k} \equiv f_{i_0 i_1 \dots \underset{i_k}{i_{p+1}}} \mid \Theta_{i_0 i_1 \dots i_{p+1}}$$

DEFINICJE POCHODNE:

GRUPA  $p$ -KOCYKLI

$$\check{Z}^p(\sigma; G) := \text{Ker } \check{\delta}^{(p)}$$

GRUPA  $p$ -KOBREZECYÓW

$$\check{B}^p(\sigma; G) := \text{Im } \check{\delta}^{(p-1)}$$

$p$ -ta GRUPA KOKOMOLOGII

$$\check{H}^p(\sigma; G) := \check{Z}^p(\sigma; G) / \check{B}^p(\sigma; G)$$

MIANEN KOKOMOLOGII WSECH ROZMIARÓW  $M$   
O WARTÓŚCIACH W  $G$  OKREŚLAMY

$$\check{H}^*(M; G) = \varinjlim_{\sigma} \check{H}^*(\sigma; G)$$

(PO ROZDROBNIENIACH)

GRANICA TA ISTNIEJE I JEST OSIĄGANIA NP. (5)  
POPRZĘDZ SPRYTNY WYBÓR POLRYCIA: POKRYCIE DOBRE,  
TJ. TAKIE I DLA KtóREGO

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \forall i_1, i_2, \dots, i_N \in I: (\Theta_{i_1 i_2 \dots i_N} \neq \emptyset \Rightarrow \Theta_{i_1 i_2 \dots i_N} \text{ ściągające})$$

POLRYCIA TAKIE ISTNIEJĄ NA RZYMATEŚCIACH KLASY  $C^2$   
(DOWÓD DE RHAMA KONSTRUKUJE JE W POSTACI OTOCZEN  
GEODEZYJNYCH W METRYCE RIEMANNOWSKIEJ ZAINDUKOWANEJ  
Z MODELU LOKALNEGO  $\mathbb{R}^{\dim M}$ ).

OD TEJ POLY BĘDZIEMY DODATKOWO ZAKŁADAĆ, ŻE MAMY  
DO CZYNIEŃIA Z POKRYCIEM LOKALNIE SKŁÓJONYM...

3 TAKIM STOWARZYSZANYM ROZKŁAD JEDNOŚCI (6)

$$\{h_i : M \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}\}_{i \in I} : (P_{U1}) \forall x \in M, i \in I : 0 \leq h_i(x) \leq 1$$

$$(P_{U2}) \forall i \in I : \text{supp } h_i \subset \theta_i$$

$$(P_{U3}) \sum_{i \in I} h_i = 1$$

WYBRAWSZY  $T = \text{LOKALNIE STAŁE}$  i  $G = \mathbb{R}$ , OTRZYMUJEMY

TW.

$$\check{H}^*(M; \mathbb{R}) \cong H_{dR}^*(M)$$

$D$ : ISOMORFIZM POWYŻSZY ZAINDUKOWANY Z ODWZOROWANIEM  
 $\omega : \check{C}^p(\theta; \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^p(M) : (f_{i_0 i_1 \dots i_p}) \mapsto - \sum_{i_0, i_1, \dots, i_p} f_{i_0 i_1 i_2 \dots i_p} h_{i_0} dh_{i_1} \wedge dh_{i_2} \wedge \dots \wedge dh_{i_p}$

NB:  $p$ -FORMA  $h_{i_0} dh_{i_1} \wedge dh_{i_2} \wedge \dots \wedge dh_{i_p}$  JEST TOŻSAMOŚCIOWO  $= 0$  (7)

POZA  $i_0, i_1, \dots, i_p$  CO POZWALA DOWOLNIE PRZEDŁUŻYĆ  $f_{i_0, i_1, \dots, i_p}$   
DLA UŻYSKANIA WYRAŻENIA GŁADKIEGO.

BEZ TRUDU PRZEKONUJEMY SIĘ, ŻE  $\omega$  JEST KOAFIZMEM  
KOMPLEKSÓW KOTANCUKÓW, T.J. SPEENIA

$$\check{C}^p(\mathcal{O}; \mathbb{R}) \longrightarrow \check{C}^{p+1}(\mathcal{O}; \mathbb{R})$$

$$\omega \downarrow$$

$$\downarrow \omega$$

$$\Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$$

OTO BOWIEM

$$d\omega_f = - \sum_{i_0, i_1, \dots, i_p} f_{i_0, i_1, \dots, i_p} dh_{i_0} \wedge dh_{i_1} \wedge dh_{i_2} \wedge \dots \wedge dh_{i_p},$$

A Z DRUGIEJ STRONY

$$\omega_{\check{\sigma}^{(p)}_f} = - \sum_{i_0, i_1, \dots, i_{p+1}} \sum_{k=0}^{p+1} e_{i_k} (\text{Inv}^k \circ f_{i_0, i_1, \dots, i_{p+1}}) h_{i_0} dh_{i_1} \wedge dh_{i_2} \wedge \dots \wedge dh_{i_{p+1}}$$



uwzględniając tożsamość  $\sum_{i_k} \xi_{i_k} h_{i_k} = 1 \Rightarrow \sum_{i_k} \xi_{i_k} dh_{i_k} = 0$  ⑧

otrzymujemy - zgodnie z oczekiwaniem -

$$\omega_{\delta^p \Gamma_f} = - \sum_{i_1 i_2 \dots i_{p+1}} f_{i_1 i_2 \dots i_{p+1}} dh_{i_1} \wedge dh_{i_2} \wedge \dots \wedge dh_{i_{p+1}} \equiv d\omega_f.$$

Jako takie,  $\omega$  indukuje homomorfizm grup kohomologii.  
 Oznaczmy go symbolem  $[\omega]_* : \check{H}^*(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_{dR}^*(M)$   
 i sprawdzimy że jest surjektywność i iniektywność dla  $p=2$ .  
 Dowód można bez trudu uogólnić dla dowolnego  $p$

Rozważmy reprezentanta  $\omega \in \mathcal{Z}_{dR}^2(M)$  klasy  $[\omega] \in H_{dR}^2(M)$   
 Dobroć  $\mathcal{U}$  pozwala nam stowarzyszyć z  $\omega$  lokalnie gładkie  
 1-formy pierwotne:  $0 \leftarrow \omega|_{\mathcal{U}_i} = d\theta_i, \theta_i \in \Omega^1(\mathcal{U}_i)$

KTÓRE SPŁEŃNIAJĄ ADWOLCI

$$O \stackrel{d}{\leftarrow} (\Theta_j - \Theta_i) \Big|_{\mathcal{O}_{ij}} = d\gamma_{ij} \quad , \quad \gamma_{ij} \in C^\infty(\mathcal{O}_{ij}, \mathbb{R}) \quad ,$$

A DALEJ

$$O \stackrel{d}{\leftarrow} (\gamma_{jk} - \gamma_{ik} + \gamma_{ij}) \Big|_{\mathcal{O}_{ijk}} = c_{ijk} \in \mathbb{R} \quad , \quad \text{PRZY CZYM } c_{ijk} = c_{[ijk]} \quad ,$$

$$\text{A NADTO } \check{\delta}^{(2)} c_{ijk} = 0 \quad , \quad \text{CZYLI } (c_{ijk}) \in \check{Z}^2(\mathcal{O}; \mathbb{R}) \quad .$$

DLA INNEGO REPREZENTANTA:  $\omega \mapsto \omega + d\Theta$  ZNAJDUJEMY

$$\Theta_i \mapsto \Theta_i + \Theta \Big|_{\mathcal{O}_i} \Rightarrow \text{MOŻEMY POŁOŻYĆ } \gamma_{ij} \mapsto \gamma_{ij} + 0 \quad ,$$

A ZATEM TAKŻE  $c_{ijk} \mapsto c_{ijk} + 0$  , CZYLI - W ISTOCIE -

$\omega$  JEST STONARZYSZONY Z  $[\omega]$ .

Biorąc pod uwagę swobodę wyboru form pierwotnych, (10)

$$\theta_i \mapsto \theta_i + d\psi_i, \quad \psi_i \in C^\infty(\theta_i, \mathbb{R})$$

$$\gamma_{ij} \mapsto \gamma_{ij} + (\psi_j - \psi_i)|_{\theta_{ij}} + \nu_{ij}, \quad \nu_{ij} \in \mathbb{R}$$

$$c_{ijk} \mapsto c_{ijk} + \delta^{\check{\nu}} \nu_{ijk},$$

stwierdzamy, że powyższe przyporządkowanie  $[\omega] \mapsto c$

ma sens wyłącznie na poziomie (klas) kohomologii,

tj. mamy dobrze określone

$$c.: H_{dR}^2(M) \ni [\omega] \mapsto [c] =: c_{[\omega]} \in \check{H}^2(M; \mathbb{R})$$

(NB: Wykorzystaliśmy dobroć  $\theta$ , stąd  $M$  po prawej stronie.)

NIECHAJ TERAZ  $C_\omega$  BĘDZIE 2-KO CYKLEM STOWARZYSZONYM (11)  
 Z 2-KO CYKLEM DE RHAMA  $\omega$  JAK WYŻEJ. PORÓWNAJMY  
 ODNOSINY 2-KO CYKLU  $\omega_{C_\omega}$  Z WYJŚCIOWYM  $\omega \dots$

WYKORZYSTUJĄC  $C_{ijk}|_{\partial_{ijk}} = (C_{jke} - C_{ike} + C_{ije})|_{\partial_{ijk}}$  ORAZ (P43),  
 STWIERDZAMY, ŻE NASTĘPUJE:  $(\sum_i dh_i \leq 0)$

$$\omega_{C_\omega}|_{\partial_\omega} \equiv - \sum_{ijk} C_{ijk} h_i dh_j \wedge dh_k|_{\partial_\omega} \equiv - \sum_{ijk} C_{ijk}|_{\partial_{ijk}} h_i dh_j \wedge dh_k|_{\partial_\omega}$$

$$= - \sum_{ijk} (C_{jke} - C_{ike} + C_{ije}) h_i dh_j \wedge dh_k|_{\partial_\omega}$$

$$= - \sum_{ijk} C_{jke} h_i dh_j \wedge dh_k|_{\partial_\omega} = - \sum_{jik} C_{jke} dh_j \wedge dh_k|_{\partial_\omega}$$

$$= d \left( - \sum_{j,k} c_{ljk} h_j dh_k \right) \Big|_{\partial L}, \quad \text{A PONIEWAŻ TEŻ} \quad (12)$$

(Z TYCH SAMYCH POWODÓW)

$$\left( - \sum_{j,k} c_{ljk} h_j dh_k + \sum_{j,k} c_{mjk} h_j dh_k \right) \Big|_{\partial_{Lm}}$$

$$= \sum_{j,k} (c_{jlm} - c_{klm}) h_j dh_k \Big|_{\partial_{Lm}} = - \sum_{j,k} c_{klm} h_j dh_k \Big|_{\partial_{Lm}}$$

$$= - \sum_k c_{lmk} dh_k \Big|_{\partial_{Lm}} = d \left( - \sum_k c_{lmk} h_k \right) \Big|_{\partial_{Lm}}$$

$$= d \left( - \sum_k (\gamma_{mk} - \gamma_{lk} + \gamma_{lm}) h_k \right) \Big|_{\partial_{Lm}}$$

$$= - d\gamma_{lm} + d \left( \sum_k (\gamma_{lk} - \gamma_{mk}) h_k \right) \Big|_{\partial_{Lm}}, \quad \text{PRZETO 1-FORMY}$$

$$\eta_i := \theta_i + \sum_{j,k} c_{ijk} h_j dh_k \Big|_{\theta_i} + d\left(\sum_j r_{ij} h_j\right) \Big|_{\theta_i} \in \Omega^1(\theta_i) \text{ SPECYFIKACJA (13)}$$

$$\begin{aligned} (\eta_j - \eta_i) \Big|_{\theta_{ij}} &= d\gamma_{ij} - d\gamma_{ji} + d\left(\sum_k (\gamma_{ik} - \gamma_{jk}) h_k\right) \Big|_{\theta_{ij}} \\ &\quad + d\left(\sum_k \gamma_{jk} h_k\right) \Big|_{\theta_{ij}} - d\left(\sum_k \gamma_{ik} h_k\right) \Big|_{\theta_{ij}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

SAŻ ZATEM OGRANICZENIAMI 1-FORMY GLOBALNIE GŁADKIEJ

$$\eta \in \Omega^1(M) \quad : \quad \eta \Big|_{\theta_i} = \eta_i$$

O WŁASNOŚCI

$$d\eta_i = d\theta_i - d\left(-\sum_{j,k} c_{ijk} h_j dh_k\right) \Big|_{\theta_i} = \omega \Big|_{\theta_i} - \omega_c \omega \Big|_{\theta_i} \quad ,$$

KTÓRA POZWALA NAM ZAPISAĆ

(14)

$$\omega = \omega_{c\omega} + d\eta, \text{ A ZATEM TAKŻE}$$

$$[\omega] = [\omega_{c\omega}].$$

POWYŻSZE POŁAZUJĄCE DOWODNIE, ŻE  $[\omega]$  JEST SURJEKTYWNY.

POZOSTAJE PRZEKONAĆ SIĘ JESZCZE, ŻE JEST INJEKTYWNY...

W TYM CELU ROZWAŻMY KLASĘ  $[c] \in \check{H}^2(M; \mathbb{R})$ , DLA KTÓREJ  $[\omega_c] = 0$ . 2-KOCHKI C MOŻEMY WYZNACZYĆ W ROZUMOWANIU

ZE STR. 8-9 Z DOKŁADNOŚCIĄ DO 2-KOBRZECU. JEST OTÓŻ

$$\omega_c = d\theta, \theta \in \Omega^1(M), \text{ ZATEM MOŻEMY POŁOŻYĆ } \theta_i = \theta|_{\sigma_i},$$

$$\text{A WTEDY } d\chi_{ij} = (\theta - \theta)|_{\sigma_{ij}} = 0, \text{ UJYLI MOŻNA WYRAZİĆ } \chi_{ij} \in \mathbb{R},$$

WTEDEY JEDNAK  $C = \check{\delta}^{(n)} \gamma$ , czyli  $[C] = 0$ , jak (15)  
OCZEKIWAŁEMY. OSTATECZNIE WIĘC

$$[\omega] : \check{H}^2(M; \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H_{\text{dR}}^2(M). \quad \square$$

CZYLI MOŻEMY W TYM OBRAZKU ZNALEŹĆ ŚLAD GRUPY

$$\check{H}^*(M; \mathbb{Z})?$$

ODPOWIEDŹ POZYNOŚĆ (RE)INTERPRETACJA KLAS DE RHAMA  $[\omega]$   
JAKO OBIEKTÓW DUALNYCH DO KLAS HOMOLOGII (SINGULARNEJ)  
 $M$ , CZYLI — MÓWIĄC WPROST — OBIEKTÓW DAJĄCYCH SIĘ  
CALKOWAĆ PO PODROZMAIŃCACH BEZ BRZEGU W  $M$   
W SPODÓB JAWNIE NIEZALEŻNY OD WYBORU REPREZENTANTA



(16)

KLASY  $[\omega]$  W KOHOMOLOGII DE RHAMA ANI  
 OD REPREZENTANTA KLASY  $[\Sigma]$  PODROZMAITOŚCI  $\Sigma$   
 (CYKLU) O  $\partial\Sigma = \emptyset$  I ORIENTACJI  $o, \tau$ . WEDLE SCHEMATU

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H_{\text{dr}}^p(M) \times H_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$: ([\omega], [\Sigma]) \mapsto \int_{(\Sigma, o)} \omega$$

GDZIE  $H_p(M)$  JEST GRUPĄ (Z OPERACJĄ BINARNĄ I  
 NA REPREZENTANTACH) KLAS  $p$ -PODROZMAITOŚCI BEZ BRZEGU W  $M$   
 WZGL. RELACJI  $\Sigma_1 \sim \Sigma_2 \Leftrightarrow \exists \Omega$   $(p+1)$ -PODROZMAITOŚĆ:  $\Sigma_1 \cup \bar{\Sigma}_2 = \partial\Omega$ ,  
 PRZY CZYM  $\bar{\Sigma}_2$  JEST TUTAJ ROZMAITOŚCIĄ  $\Sigma_2$  O PRZECIWNĄ ORIENTACJĄ.  
 (WIĘCEJ O DWOISTOŚCI MIĘDZY  $H_{\text{dr}}^p(M)$  I  $H_p(M)$  MOŻNA ZNALEZĆ  
 W MONOGRAFII BOTTA I TU.)

NIECHAJ ZATEM  $[\omega] \in H_{\text{dr}}^2(M)$ , KTORĘJ TRYWIALIZACJA (17)  
NAO POWYŻSZEJ (NP. DOBRYM)  $\{D_i\}_{i \in I}$  DĄŻE  $[c] \in \check{H}^2(M; \mathbb{Z})$  I NIECH  $[\Sigma] \in H_2(M)$ .

WYBIERZMY PAKIETAŻ  $\Sigma - T_j$ . ROZUŁAD  $\Sigma$  NA PŁASZCZYNIE  
 $\pi$ , TWORZĄCE ZBIÓR  $\Delta_2$ , O KRAWĘDZIACH  $e$ , TWORZĄCYCH  
ZBIÓR  $\Delta_1$ , O KONCACH  $v$ , TWORZĄCYCH ZBIÓR  $\Delta_0$  -  
PODPORZĄDKOWANY  $\mathcal{D}$ ,  $T_j$ . TAKI, DLA KTORÉGO  
ISTNIEJE ODWZROKOWANIE  $\iota : \Delta_2 \cup \Delta_1 \cup \Delta_0 \rightarrow I$

O WŁASNOŚCI:  $\forall \tau \in \Delta_2 \cup \Delta_1 \cup \Delta_0 : \tau \subset \mathcal{D}_{\iota_\tau}$ .

CAŁKA  $\langle [\omega], [\Sigma] \rangle$  DAJE SIĘ ZAPISAĆ JAKO

$$\int_{(\Sigma, \phi)} \omega = \sum_{\pi \in \Delta_2} \int_{(\pi, \phi|_{\pi})} \omega \equiv \sum_{\pi \in \Delta_2} \int_{(\pi, \phi|_{\pi})} d\theta_{\pi} = \sum_{\pi \in \Delta_2} \int_{\partial(\pi, \phi|_{\pi})} \theta_{\pi} \quad (18)$$

OSTATNIA SUMA MOŻEMY ŁATWO ZAMIENICIĆ NA SUMĘ PO  $\Delta_1$ ,  
 UZYSKUJĄC WSKAZĘ, IŻ KAŻDA KRAWĘDZ  $e$  — ORAZ KĄT  
 JEJ ORIENTACJE  $\theta_e$  — JEST SKŁADOWĄ BRZĘGU  $\partial\pi_+(e)$  JEDNEJ  
 Z PŁASZCZYN  $\pi_+(e)$ , OD KTÓREJ DZIEDZICZY ORIENTACJĘ,  
 T.J.  $\theta_e \equiv \partial\theta|_{\pi_+(e)}$ , I ZARAŻEM — SKŁADOWĄ BRZĘGU  
 $\partial\pi_-(e)$  INNEJ PŁASZCZYN  $\pi_-(e)$ , OD KTÓREJ DZIEDZICZY  
 ORIENTACJĘ PRZECIWNĄ DO TEJ PRZEZ NAS WYBRANEJ,  
 T.J.  $\theta_e = -\partial\theta|_{\pi_-(e)}$ , A ZATEM...

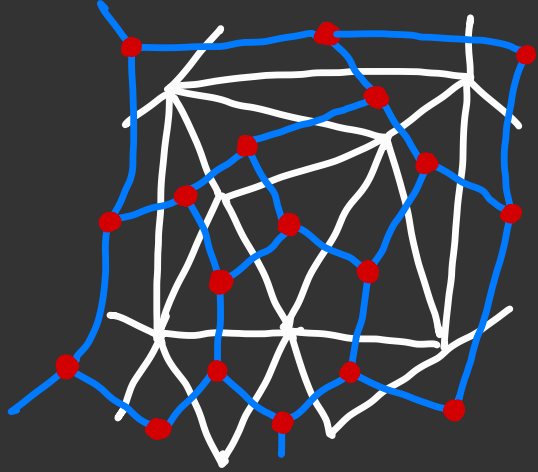
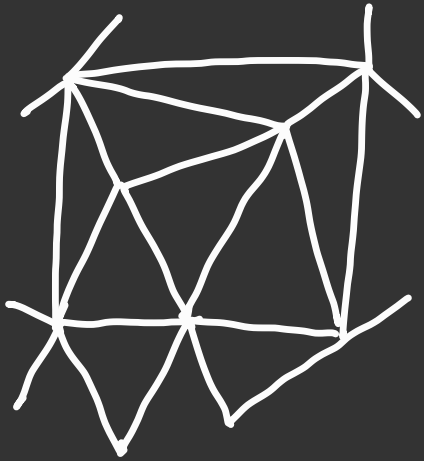
$$\int_{(\Sigma, \sigma)} \omega = \sum_{e \in \Delta_1} \int_{(e, \sigma_e)} (\theta_{\iota_{\pi_+(e)}} - \theta_{\iota_{\pi_-(e)}}) = \sum_{e \in \Delta_1} \int_{(e, \sigma_e)} d\gamma_{\iota_{\pi_-(e)} \iota_{\pi_+(e)}} \quad (19)$$

$$= \sum_{e \in \Delta_1} \int_{\partial(e, \sigma_e)} \gamma_{\iota_{\pi_-(e)} \iota_{\pi_+(e)}}$$

TAKŻE I TYM RAZEM MOŻEMY ZASTĄPIĆ SUMĘ KOŃCOWĄ SUMĄ PO ZBIORZE ELEMENTÓW PARIETAŻU WYMIARU O JEDEN NIŻSZEJO, PRZY CZYM DLA WYŁODY INTERPRETACJI WYNIKU DOKONANY NAJPIERW „SPRYTNEGO” WYBORU JEDNEGO PARIETAŻU. ZAŁOŻYMY OTÓŻ, ŻE TEN JEST TRIANGULACJĄ (DOWOLNĄ),

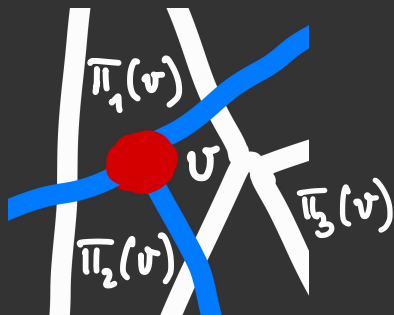
(20)

PO CZYM PRZEJDZIEMY DO TRIANGULACJI DUALNEJ  $\Delta^*$



KTÓRY - MAJĄC WIERZCHOŁKI PRZYPISANE PŁANETKOM  $\Delta$ ,  
 KRAWĘDZIE JĄS - TRANSWERSALNIE KRAWĘDZIOM  $\Delta$  -  
 MA ISTOTNĄ CECHĘ WYRÓŻNIĄJĄCĄ : DOWOLNY JEGO  
 WIERZCHOŁEK  $v$  MA WALENCJĘ 3, WYRÓŻNIA ZATEM 3

SĄSIADUJĄCE W PORZĄDKU  $\hookrightarrow$  PŁASZCZYZNY :  $\pi_1(v), \pi_2(v)$  (21)  
i  $\pi_3(v)$ ,



DLA TAKIEGO WYBORU  
PARKIETAŻU :  $\Delta^*$  DOSTATEMNY  
WYNIK

$$\int_{(\Sigma, 0)} \omega = \sum_{v \in \Delta_0^*} \left[ \varepsilon_{12}(v) r_{\pi_1(v) \pi_2(v)} + \varepsilon_{23}(v) r_{\pi_2(v) \pi_3(v)} + \varepsilon_{31}(v) r_{\pi_3(v) \pi_1(v)} \right](v),$$

W KTÓREGO ZAPISIE  $\varepsilon_{ij}(v) \in \{-1, +1\}$  JEST ZADAWANY JEDNOZNACZNIE  
- W ODCYWNĄ SPOSÓB - PRZEZ ORIENTACJĘ KRAWĘDZI MIĘDZY  
 $\pi_i(v)$  i  $\pi_j(v)$  ORAZ  $v$  (JAKO KRAWĘDZI TEJ KOŃCA).

DLA USTALENIA UWAGI POTRZEBYMY  $\varepsilon_{ij}(v) = +1$  (WSZYSTKIE 22  
 KRAWĘDZIE WCHODZĄCE DO  $v$ ), A WÓWGAŚ ODNOŚNY  
 SKŁADNIK SUMY PO  $\Delta_0^*$  PRZYJMUJE ZNANĄ POSTAĆ

$$\left( r_{\iota_{\pi_1(v)} \iota_{\pi_2(v)}} + r_{\iota_{\pi_2(v)} \iota_{\pi_3(v)}} + r_{\iota_{\pi_3(v)} \iota_{\pi_1(v)}} \right)(v)$$

$$\equiv r_{\iota_{\pi_2(v)} \iota_{\pi_3(v)}}(v) - r_{\iota_{\pi_1(v)} \iota_{\pi_3(v)}}(v) + r_{\iota_{\pi_1(v)} \iota_{\pi_2(v)}}(v)$$

$$= c_{\iota_{\pi_1(v)} \iota_{\pi_2(v)} \iota_{\pi_3(v)}}.$$

WIDZIMY WIEC, ŻE OKRESY  $[\omega]$ , UŻYLI CAŁKI  $\int \omega$  PO  $\Sigma$   
 REPREZENTUJĄCYCH  $[\Sigma] \in H_2(M)$ , WYRAŻAJĄ SIĘ ...  $(\Sigma, 0)$

JAKO SUMY STAŁYCH LOCALNYCH  $C_{ijk}$  STOWARZYSZONYCH (23)

z w wzgl. wybranego pokrycia  $\mathcal{O}$ , któremu  
podporządkowujemy  $\Delta^*$ . Mamy przeto oczywistą

implikację

$$[(C_{ijk})] \in \check{H}^2(M, \mathbb{Z}) \Rightarrow \text{Per}([w]) \subset \mathbb{Z}$$

stow.  
z w

zbiór okresów  $[w]$

$\Updownarrow$  ex def

$$[w] \in H_{\text{dr}}^2(M, \mathbb{Z})$$

NB: klasa  $[c]$  pochodzi z trójwymiarowej  
2-formy w.

Implikacja odwrotna jest subtelniejsza: można pokazać,  
że dla każdej w j/w istnieje wyбір stowarzyszonego



z nią 2-kocyklu  $\mathbb{C}P^1$ , przy którym  $C_{ijk} \in \mathbb{Z}$ . (24)

Wybór taki może wymagać „poprawienia” wyjściowego  $(C_{ijk})$ , a twierdzenia zapewniające wykonalność stosownej „poprawki” dowodzą np. Bott i Tu w swojej monografii

pt. „DIFFERENTIAL FORMS IN ALGEBRAIC GEOMETRY” (Tw. 15.8.).

W powyższej dyskusji czai się jedna jeszcze – dużo poważniejsza – subtelność...

Otóż więc KOHOMOLOGIA SINGULARNA  $M$  O WARTOŚCIACH  
W  $\mathbb{Z}$ ,  $H^*(M; \mathbb{Z})$ ,  
której izomorficzność z  $\check{H}^*(M; \mathbb{Z})$  orzeka wzmiankowane

POWYŻEJ TWIERDZENIE, JEST STRUKTURĄ DUALNĄ (w Abgrp) (25)  
 WZGLĘDEM HOMOLOGII SINGULARNEJ  $H_*(M)$  ROZMAITOŚCI  $M$ ,

$$H^*(M; \mathbb{Z}) \equiv \text{Hom}_{\text{Abgrp}}(H_*(M), \mathbb{Z}),$$

I JAKO TAKA NA TZW. SKŁADOWĄ TORSYJNĄ,

$$H^*(M; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p_2\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/p_N\mathbb{Z}}_{\text{Tor } H^*(M; \mathbb{Z})}$$

[Cor.

DLA PEWNYCH  
 $p_i \in \mathbb{N}, i \in \overline{1, N}$

$\text{Tor } H^*(M; \mathbb{Z})$

ZANIM WSKAŻEMY TOPOLOGICZNE ŹRÓDŁO  $\uparrow$ , ODNOTUJMY KLUCZOWY  
 FAKT: W PROCESIE IR-LINEARYZACJI

$$H^*(M; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cdot \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}} H^*(M; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} \text{(NA GRANICIE} \\ \text{UNIWEERSALNEGO} \\ \text{TW. O WSPÓŁCZYNNIKACH)} \end{array} \quad (26)$$

KTÓREGO PRODUKTEM KOŃCOWYM JEST **KOHOMOLOGIA**  
**RZECZYWISTA**  $M$ ,

O MODELU  $H_{\text{dR}}^*(M; \mathbb{R})$ , GUBIMY TORSJĘ!

ISTOTNIE,  $\forall p \in \mathbb{N}: \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = 0$ . [ĆWICZENIE]

ROZWAŻANE UPRZĘDNIŁO PRZĘJĘCIE OD  $\check{H}^*(M; \mathbb{R})$  DO  $H_{\text{dR}}^*(M)$   
POPĘDZA TAKĄ WŁAŚNIE  $\mathbb{R}$ -LINEARYZACJĄ  $\check{H}^*(M; \mathbb{Z})$ ,  
TJ. - W SZCZEGÓLNOŚCI - KOCYKLE ČECHA OPAZYMYWANE  
W WYNIKU TRYWIALIZACJI KOCYKLI DE RHAMA SĄ JUŻ „PRZEBRANE”  
- POMIODZĄ  $\check{H}^*(M; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ ,

CO OZNACZA NIEUSUWALNĄ NIE-WIERNOŚĆ PROCEDURY

PRZYPISYWANIA FORM RÓŻNICZKOWYCH CAŁKOWITYM KOCYKŁOM

CECHA: W PROCEDURZE TEJ GINĄ KOCYKLE DUALNE

DO TORSYJNYCH SKŁADOWYCH HOMOLOGII  $M$  (GRUPA

PRZEMIENNA Z SUMĄ ROZŁĄCZNĄ (NA REPREZENTANTACH) JAKO

OPERACJĄ BINARNĄ). SKĄD BIORĄ SIĘ TE OSTATNIE?

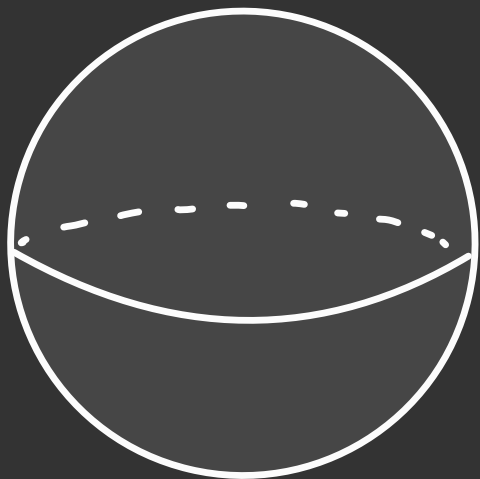
AŻEBY ODPOWIEDZIEĆ SOBIE KONSTRUKTYWNI NA TÓ PYTANIE,

TRZEBA WRÓCIĆ DO DEFINICJI  $H_*(M)$ . MAMY TU WŁEĆ

DO CZYNIEŃ Z SKOŃCZONYMI SUMAMI <sup>(z ułożeniami brzegowymi)</sup> ROZŁĄCZNYMI  $\nu$  CIĄGŁYCH

OBRAZÓW SYMPLEKSÓW  $(\mathbb{R}^{+\dim M})$  W  $M$ , O PUSTYM BRZEGU,

A PRZY TYM ROZPATRYWANYMI Z DOKŁADNOŚCIĄ DO TAKICHŻE (28)  
SUM BĘDĄCYCH BRZĘCAMI (OBRAZÓW) WIĘCEJ WYMIAROWYMI  
(SUM) SYMPLEKSÓW.  $k$ -CYKŁ TORSYJNY RZĘDU  $p$  (REPREZENTANT  
GENERATORA  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \subset H_*(M)$ ) TO TAKI CIĄGŁY OBRAZ  
 $k$ -SYMPLEKSU W  $M$ , KTÓRY MA PUSTY BRZĘC,  
A DO  $p$ -KROTNYM „ZŁOŻENIU” ZE SOBĄ (A ŚCIŚLEJ:  
ZE SOBĄ Z DOKŁADNOŚCIĄ DO  $k$ -BRZĘCU) ODTWARZA  
PEWIEŃ  $k$ -BRZĘC. SUBSTRATU DLA WIZUALIZACJI TAKOWEJ  
EWENTUALNOŚCI TOPOLOGICZNEJ DOSTARCZA WYOBRAŻENI  
STUDIUM PROSTEJ GEOMETRII RZUTOWEJ:  $\mathbb{R}P^2 \simeq S^2/\mathbb{Z}_2$ .

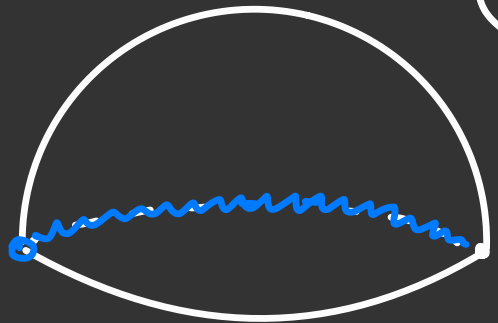


$S^2$



$$\vec{\pi} \sim -\vec{\pi}$$

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$



$$S^2 / \sim \equiv \mathbb{R}P^2$$

(29)

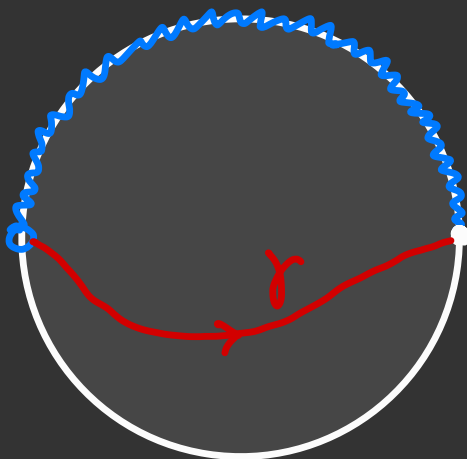
PRZY CZYM PODZBIÓR KOŁA WIELKIEGO ZAZNACZONY  
NA NIEBIESKO JEST utożsamiony z jego antypodalnym  
obrazem, TAKŻE W TYM KOLE. TORSTĘ ZOBRAZUJEMY  
NA STEREOGRAFICZNYM RZUCIE  $\mathbb{R}P^2$  NA PŁASZCZYZNĘ STYCZNĄ

DO  $B^2$  W „BIEGUNIE POŁEŃCZNYM”...

30



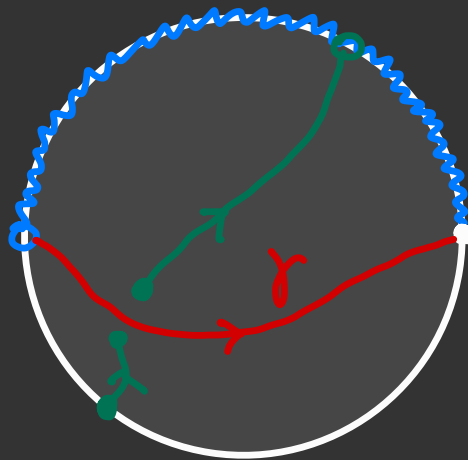
W NAKREŚLONEJ POWYŻEJ TOPOLOGII MAMY DO CZYNNIENIA  
Z KLASĄ (HOMOLOGIĄ) NIEŚCIAŁALNEJ PĘTLI  $\gamma$  ROZPIĘTEJ  
POMIĘDZY PUNKTAMI ANTYPODALNYMI NA KOŁE WIELKIM  
— NP.  $\bullet$  i  $\circ$  — i — JAKO TAKA — POCZODZĄCĄ OD ŚCIEŻKI  
W  $B^2$ :



O TYM, ŻE KRZYWA TA ISTOTNIE NIE ROZSPÓJNIA  $\mathbb{RP}^2$ ,  
 MOŻEMY ŁATWO SIĘ PRZEKONAĆ WYKRESLAJĄC CIĄGLĄ  
 KRZYWĄ  $\wedge$  ŁĄCZĄCĄ DOWOLNE DWA PUNKTY LEŻĄCE PO „OBU  
 STRONACH”  $\gamma$  W  $\mathbb{RP}^2$  BEZ PRZECINANIA SAMEJ  $\gamma$

— OTO ONA :





(WYKORZYSTALIŚMY  
UTOŻSAMIENIE  
PUNKTÓW ANTYPODALNYCH).

MAMY ZATEM  $[\gamma] \neq 0$  w  $H_1(\mathbb{RP}^2) \subset H_0(\mathbb{RP}^2)$ .

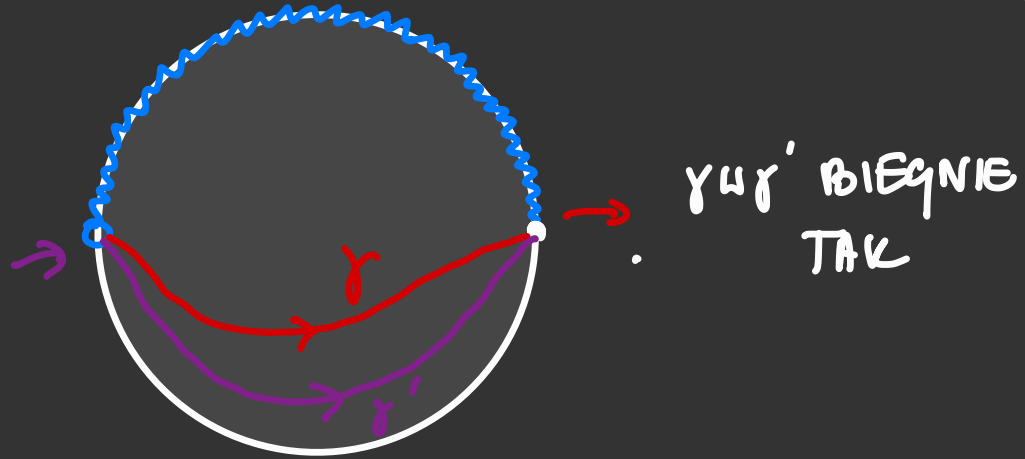
SPRÓBUJMY WYZNACZYĆ  $2[\gamma] \equiv [\gamma] \sqcup [\gamma]$ , WYBIERAJĄC

JAKO REPREZENTANTA DRUGIEGO SKŁADNIKA SUMY KRZYWAJĄ

$\gamma'$  HOMOTOPIJNIE RÓWNOWAŻNĄ  $\gamma$ , KTÓRĄ „DOKLEJAMY”  
w o.

TYM SPOSOBEM OTRZYMUJEMY

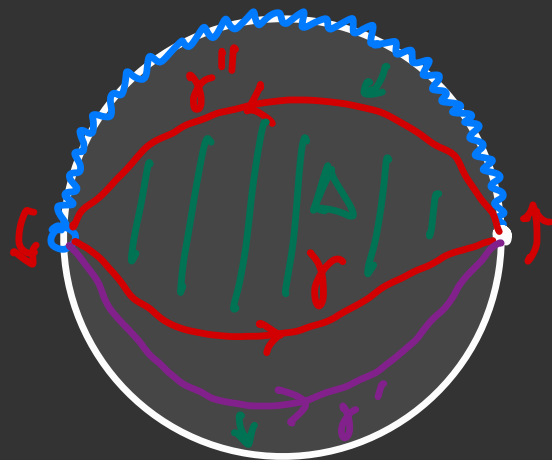
33



$\gamma$  i  $\gamma'$  BIEGNIE  
TAK

NA KONIEC, CELEM UZYSKANIA STANDARDOWEGO OBRAZKA,  
W KTÓRYM SKŁADOWE BRZĘCY MAJĄ WZAJEM UZGODNIONĄ  
ORIENTACJĘ, HOMOTOPIJNIE "PRZEPYCHAMY"  $\gamma'$  NA "DRUGĄ  
STRONĘ"  $\gamma$  PRZĘZ PÓŁKOLĘ WIELKIE...

(34)



OTRZYMUJĄC TYM SPOSOBEM  
 $\gamma \cup \gamma''$  BIEGNIE  $\gamma''$   
TAK

W ODCYWIŚTY SPOŚÓB

(TEN OBLĄZEK JEST TROKIE "NA SIĘ" GDYŻ  $\mathbb{R}P^2$  JEST NIEORIENTOWANA...)  
 Z DRUGIEJ STRONY TO "TYLKO" WŁASNOŚĆ GLOBALNA, A MY WSGADNIAMY LOKALNIE.  
 PRZY CZYM ROZUMOWANIE ANALOGICZNE DO TEGO POPROWADZONEGO  
 POPRZEDNIO PRZEKONUJE NAS, ŻE  $2[\gamma] = [\gamma \cup \gamma'']$  ROZCINA  
 $\mathbb{R}P^2$  NA Dwie SPÓJNE SKŁADOWE, KTÓRYCH NIE MOŻNA  
 POŁĄCZYĆ KĄZYNA CIĄGŁĄ BEZ ROZCIĘCIA  $\gamma \cup \gamma''$  - JEDNĄ Z NICH

OZNACZYLIŚMY NA RYSUNKU SYMBOLEM  $\triangle$  (i zakreślaliśmy). (35)

JEST  $\gamma \cup \gamma'' = \partial \Delta$ , ZATEM TEŻ

$$2[\gamma] = 0 \quad (\text{w } H_1(\mathbb{RP}^2)),$$

ZGODNIE Z ZANÓWIENIEM. POWYŻSZA PROSTA ILUSTRACJA

ZJAWISKA TORZI W (KO)HOMOLOGII SINGULARNEJ

ZAMYKA NASZĄ OGÓLNAJĄ DYSKUSJĘ STRUKTUR

KOHOMOLOGICZNYCH O ZNACZENIU FIZYKALNYM.

————— X —————

NA OBECNYM ETAPIE PORÓBĄ JĄZ „TYLKO” PRZEKONAĆ (36)  
SIĘ, ŻE NASZUCOWANY POWYŻEJ WIELCE ESTETYCZNY OBRAZ  
LOGICZNY ZNAJDUJE ZASTOSOWANIE PRAKTYCZNE,  
TJ. ŻE JESTEŚMY NA JEGO PODSTAWIE (CZASEM;  
Z PEWNOŚCIĄ PO UWZGLĘDNIENIU DAŁSZYCH REZULTATÓW  
ALGEBRY HOMOLOGICZNEJ W KATEGORII MAN,  
W SZCZEGÓLNOŚCI ZAS - TW. MAYERA - VICTORISA)  
USTALIĆ KONKRETNA ODPOWIEDZ NA PYTANIE - NP.-  
O ZNIKANIE INTERESUJĄCEJ NAS KLASY OBSTRUKCJI  
WZGL. POKLASYFIKOWAĆ KONSTRUKCJE (REDUKCJE, PROLONGACJE)  
NIERÓWNOWAŻNE...

O TYM, ŻE SPRAWA NIE JEST BEZNAADZIEJNA, (37)  
 PRZEKONUJE STUDIUM DWÓCH PRZYPADKÓW (JAWNIE  
 BEZTORSYJNYCH:  $S^1$  i  $S^2$  ORAZ KRÓTKIEGO  
 CIĄGU DOKŁADNEGO GRUP WSPÓŁCZYNNIKÓW:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2\cdot} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0 \\
 & & k & \mapsto & 2k & & \\
 & & & & l & \mapsto & l + 2\mathbb{Z}
 \end{array}$$

ROZWAŻYMY OTÓŻ DŁUGI CIĄG DOKŁADNY W KOHOMOLOGII  
 (ĆECHA) DLA  $S^1$  i  $S^2$  INDUKOWANY PRZECZ POWIŻSZY  
 KRÓTKI CIĄG DOKŁADNY ...

I KOHOLOGIA  $S'$  :

(38)

$$\check{H}^0(S'; \mathbb{Z}) \xrightarrow{2_*} \check{H}^0(S'; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_*} \check{H}^0(S'; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta^0} \check{H}^1(S'; \mathbb{Z})$$

$$\overset{12}{H}_0(S') \Rightarrow \overset{12}{\mathbb{Z}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \downarrow 2_*$$

$\overset{11}{\mathbb{Z}}$   
(spójność)

$$\mathbb{Z} \simeq \langle [S'] \rangle \equiv H_1(S') \simeq \check{H}^1(S'; \mathbb{Z})$$

$$\downarrow \pi_*$$

$$\check{H}^2(S'; \mathbb{Z}) \xleftarrow[\beta^1]{\quad} \check{H}^1(S'; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

$$0 \equiv H_2(S'; \mathbb{Z})$$

(3 przyczyn wymiarowych)

W INTERPRETACJI NAS CZĘŚCI MAMY JATEM:

(39)

$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_*} \check{H}^1(S'; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta'} 0 \quad (1) \\ \check{H}^2(S'; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

WNIOSKI: (2)  $\Rightarrow$   $\exists$  STRUKTURA SPINOWA NA  $S'$

$$(1) \Rightarrow \check{H}^1(S'; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \equiv \text{Ker } \beta' \stackrel{!}{=} \text{Im } \pi_*,$$

ALB TEŻ  $\text{Ker } \pi_* = 2\mathbb{Z}$ , WIĘC

$\exists$  DWIE KLASY  $\Leftarrow \check{H}^1(S'; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} / \text{Ker } \pi_* \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$   
STRUKTURA SPINOWA NA  $S'$



# II КОМОЛОГИЯ $S^2$ :

(40)

$$\check{H}^0(S^1; \mathbb{Z}) \xrightarrow{2 \cdot *} \check{H}^0(S^2; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_*} \check{H}^0(S^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta^0} \check{H}^1(S^2; \mathbb{Z})$$

$$\overset{12}{H}_0(S^1) \Rightarrow \overset{12}{\mathbb{Z}}$$

$$\Rightarrow \overset{0}{\cong} \downarrow 2 \cdot *$$

$$\overset{11}{\mathbb{Z}}$$

(СПОЇННОСТ)

$$0 \simeq H_1(S^2) \simeq \check{H}^1(S^2; \mathbb{Z})$$

(БРАК ПЕТЛ  
НІЄСЦІАГАЛНУХ)

$$\check{H}^1(S^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xleftarrow{\pi_*} \check{H}^1(S^2; \mathbb{Z}) \xleftarrow{2 \cdot *} \check{H}^2(S^2; \mathbb{Z}) \xleftarrow{\beta^1} \check{H}^1(S^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

$$\overset{\beta^2}{\downarrow} \quad \overset{12}{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \overset{21}{H}_2(S^2; \mathbb{Z}) = \langle [S^2] \rangle \simeq \mathbb{Z}$$

$$\check{H}^3(S^2; \mathbb{Z}) \simeq H_3(S^2) = 0 \text{ (3 ПРИЧИН ВІСНІАДОВУХ)}$$

MAMY ZATEM

(41)

$$0 \xrightarrow{\pi_*} \check{H}^1(S^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta^1} \mathbb{Z} \xrightarrow{2_*} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_*} \check{H}^2(S^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta^2} 0$$

WNIOSKI: (1)  $\text{Ker } \beta^1 = \text{Im } \pi_* = \{0\}$ , ZATEM

$$\check{H}^1(S^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \text{Im } \beta^1 = \text{Ker } 2_* = \{0\},$$

Tj. O ILE ISTNIEJE NA  $S^2$  STRUKTURA  
SPINOWA, JEST JEDYNA (Z DOKŁADNOŚCIĄ  
DO ISOMORFIZMU).

$$\begin{aligned} (2) \check{H}^2(S^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &\equiv \text{Ker } \beta^2 = \text{Im } \pi_* \simeq \mathbb{Z} / \text{Ker } \pi_* \\ &\simeq \mathbb{Z} / \text{Im } 2_* \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

NIE MOŻEMY WPRAWDZIĆ WYKLUCZYĆ  $SW_2(T\mathbb{S}^2) \neq 0$ , (42)  
WIEMY WSZAKŻE, GDZIE POSZUKIWAĆ STRUKTURY SPINOWEJ  
(JEDYNEJ!): WŚRÓD TYCH GEOMETRYZACJI\* KLAS  $H_{dR}^2(\mathbb{S}^2; \mathbb{Z})$ ,  
KTÓRE LEŻĄ W OBRAZIE  $2^*$ , T.J. SĄ ... PARZYSTE.

OWE KLASY TO POLA MAXWELLA  $F$  NA  $\mathbb{S}^2$   
O  $Per([F]) \in 2\mathbb{Z}$ , NIE POWINNO WIĘC DZIWIĆ,  
ŻE SZUKAMY WŚRÓD

\* WIAZEEK  $U(1)$  NAD  $\mathbb{S}^2$  O KRZYWIŹNIO (POWIĄZANIA  
GŁÓWNEGO) 2, 3 KTÓRYCH ... „WYCIĄGAMY PIERWIASTEK”.  
TO JEDNAK TEMAT NA INNĄ ROZMOWĘ...