TEORIA GRUP I

WYKŁADY XI, XII i XIII

(RUDYMENTY KRYSTALOGRAFII)

2023/24

NIEZBĘDNIK EUKLIDESOWY:

PRZEDMIOTEM NASZYCH ROZWAŻAŃ BĘDĄ PEWNE DYSKRETNE PODZBIORY $\mathbb{R}^{\times n}$ (OGRANICZYMY SIĘ DO $n \in \{2,3\}$) O WYSOKIEJ REGULARNOŚCI PRZEJAWIAJĄCEJ SIĘ W POWTARZALNOŚCI STRUKTURY ELEMENTARNEJ W n SKALACH LINIOWYCH W n LINIOWO NIEZALEŻNYCH KIERUNKACH O USTALONYCH KĄTACH WZGLĘDNYCH. „SKALE" i „KĄTY" TO POJĘCIA Z ZAKRESU ELEMENTARNEJ GEOMETRII METRYCZNEJ $\mathbb{R}^{\times n}$, KTÓRĄ TERAZ PRZYPOMNIMY W KONIECZNYM ZAKRESIE.

BĘDZIEMY OTÓŻ ROZWAŻAĆ ZBIÓR $\underline{\mathbb{R}}^{\times n} \equiv \mathbb{R}^{\times n}$ (PODKREŚLENIE DLA ODRÓŻNIENIA OD PRZESTRZENI WEKT. $\mathbb{R}^{\times n}$) Z METRYKĄ ZAINDUKOWANĄ Z EUKLIDESOWEJ STRUKTURY HERMITOWSKIEJ NA PRZESTRZENI $\mathbb{R}$-LINIOWEJ $\mathbb{R}^{\times n}$ WEDLE SCHEMATU:

$$d : \underline{\mathbb{R}}^{\times n} \times \underline{\mathbb{R}}^{\times n} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$(x, y) \longmapsto \sqrt{(x-y)^T \cdot (x-y)} \equiv \sqrt{(x-y|x-y)_E},$$

Def.: PARĘ $(\underline{\mathbb{R}}^{\times n}, d) =: \mathcal{E}_n$ JAK WYŻEJ OKREŚLAMY MIANEM EUKLIDESOWEJ PRZESTRZENI METRYCZNEJ.

AUTOMORFIZMY TAK OKREŚLONEJ STRUKTURY OPISUJE

Def-2.: Bijekcję $F \in \circlearrowleft_{\mathbb{R}^{\times n}}$ określamy mianem izometrii, ilekroć

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{\times n} : d(F(x), F(y)) = d(x, y).$$

Zbiór wszystkich izometrii $\mathcal{E}_n$ oznaczymy jako $\mathrm{Isom}(\mathcal{E}_n)$. Mamy oczywiste

Stw. 1. Dowolne odwzorowanie afiniczne

$$\mathbb{R}^{\times n} \ni x \longmapsto Ax + b \in \mathbb{R}^{\times n}$$

o składowej translacyjnej

$$\mathbb{R}^{\times n} \ni x \longmapsto x + b \in \mathbb{R}^{\times n}, \quad b \in \mathbb{R}^{\times n}$$

i liniowej

$$\mathbb{R}^{\times n} \ni x \longmapsto Ax \in \mathbb{R}^{\times n}, \quad A \in \mathbb{R}(n)$$

danej przez $A \in O(n; \mathbb{R})$ jest izometrią.

$$\equiv \{ M \in \mathbb{R}(n) \mid M^T M = 1_n = M M^T \}$$

OKAZUJE SIĘ, ŻE SŁUSZNE JEST TEŻ „ODWROTNE"

Tw. 1. [MAZURA–ULAMA, WERSJA DLA $\mathcal{E}_n$]

$$\forall F \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E}_n)\ \exists (A, b) \in O(n;\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\times n}:$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{\times n}: \quad F(x) = Ax + b =: \tau_b \circ A(x),$$

cj.

$$\underbrace{F = \tau_b \circ A}.$$

ODWZOROWANIA TEJ POSTACI, OKREŚLANE MIANEM RUCHÓW EUKLIDESOWYCH, TWORZĄ GRUPĘ, KTÓRĄ OZNACZAMY JAKO $E(n)$, PRZY CZYM $E(n) = \mathbb{R}^{\times n} \rtimes_{\mathrm{id}_{O(n;\mathbb{R})}} O(n;\mathbb{R})$. IZOMETRIE Z $SE(n) = \mathbb{R}^{\times n} \rtimes_{\mathrm{id}_{O(n;\mathbb{R})}} SO(n;\mathbb{R})$ NAZYWAMY WŁAŚCIWYMI, POZOSTAŁE ZAŚ – NIEWŁAŚCIWYMI.

D: ZACZNIEMY OD

LEMAT 1. NIECHAJ $F \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E}_n)$ I NIECH Λ BĘDZIE PROSTĄ W $\mathbb{R}^{\times n}$. WÓWCZAS TAKŻE $F(\Lambda)$ JEST PROSTĄ.

DL 1: TYM, CO CHARAKTERYZUJE PROSTĄ, JEST WYSYCANIE NIERÓWNOŚCI TRÓJKĄTA

$$d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$$

PRZEZ DOWOLNĄ TRÓJKĘ PUNKTÓW: x_1, x_2 I x_3 NA NIEJ. ZAŁÓŻMY PRZETO, ŻE $x_1, x_2, x_3 \in \Lambda$ I $d(x_1, x_3) = d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$.

WÓWCZAS $d(F(x_1), F(x_3)) = d(x_1, x_3)$
$= d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) = d(F(x_1), F(x_2)) + d(F(x_2), F(x_3))$,

TJ. $F(x_1), F(x_2)$ I $F(x_3)$ SĄ WSPÓŁLINIOWE. (5) □

NASTĘPNIE DOWODZIMY

LEMAT 2. NIECHAJ $F \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E}_n)$. ZACHODZI

$$F(0)=0 \implies F \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times n}).$$

DL2: JEDNORODNOŚĆ:

1° $x=0 \Rightarrow F(\lambda \triangleright x)=F(0)=0 \equiv \lambda \triangleright x$ ✓

2° $x \neq 0 \Rightarrow F(x) \neq 0$: MAMY

$$\|x\| \equiv d(x,0)=d(F(x),F(0))=d(F(x),0) \equiv \|F(x)\|.$$

ZAUWAŻMY, ŻE LEMAT 1. IMPLIKUJE

$$F(\langle x\rangle_{\mathbb{R}})=\langle F(x)\rangle_{\mathbb{R}},$$ A NADTO – GDY OZNACZYĆ $x_1=0$, $x_2=x$, $x_3=\lambda \triangleright x$, TO JEST JASNE, ŻE x_3 JEST JEDYNYM PUNKTEM $\langle x\rangle_{\mathbb{R}}$ ODLEGŁYM O $|\lambda|\cdot\|x\|$ OD x_1 I O $|\lambda-1|\cdot\|x\|$ OD x_2.

ANALOGICZNIE $\lambda \diamond F(x)$ JEST JEDYNYM PUNKTEM NA $F(\langle x\rangle_{\mathbb{R}}) = \langle F(x)\rangle_{\mathbb{R}}$ ODLEGŁYM O $|\lambda|\cdot\|F(x)\| = |\lambda|\cdot\|x\|$ OD $0 \equiv F(0)$ i O $|\lambda-1|\cdot\|F(x)\| = |\lambda-1|\cdot\|x\|$ OD $F(x)$.

ALE TEŻ $d(F(\lambda \triangleright x), 0) = d(F(\lambda \triangleright x), F(0)) = d(\lambda \triangleright x, 0)$

$\equiv |\lambda|\cdot\|x\|$

ORAZ $d(F(\lambda \triangleright x), F(x)) = d(\lambda \triangleright x, x) \equiv |\lambda-1|\cdot\|x\|$,

ZATEM $F(\lambda \triangleright x) = \lambda \diamond F(x)$.

ADDYTYWNOŚĆ: NIECHAJ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{\times n}$. Z RACJI IZOMETRYCZNOŚCI F, PUNKT $\frac{1}{2} \triangleright (x_1 + x_2) =: x_S$ JEST ODWZOROWYWANY PRZEZ F W ŚRODEK ODCINKA $[F(x_1), F(x_2)]$ PROSTEJ $F(\langle x_2 - x_1\rangle_{\mathbb{R}})$.

ISTOTNIE, $d(F(x_S), F(x_A)) = d(x_S, x_A)$, $A \in \{1,2\}$,

$\frac{1}{2} d(F(x_1), F(x_2)) = \frac{1}{2} \overset{''}{d}(x_1, x_2)$

7

W TAKIM RAZIE

$$F\left(\tfrac{1}{2}\cdot(x_1+x_2)\right)=\tfrac{1}{2}\cdot\left(F(x_1)+F(x_2)\right)$$

$$\underbrace{}_{\text{JEDNORODNOŚĆ}}\ \tfrac{1}{2}F(x_1+x_2)$$

$$\Downarrow$$

$$F(x_1+x_2)=F(x_1)+F(x_2).\ \square$$

NIECHAJ TERAZ $F\in \mathrm{Isom}(\mathcal{E}_n)$, A WTEDY DLA $G:=\tau_{-F(0)}\circ F$ SPRAWDZAMY TOŻSAMOŚĆ!!

$$G(0)=\tau_{-F(0)}\left(F(0)\right)=F(0)-F(0)=0,$$

WIĘC NA MOCY LEMATU 2. $G\in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times n})$.

W TAKIM JEDNAK RAZIE $F=\tau_{F(0)}\circ G$ JEST, ZGODNIE Z TEZĄ, AFINICZNE. PRZY TYM

$$\forall x,y\in\mathbb{R}^{\times n}:\ d(x,y)=d\left(F(x),F(y)\right)=d\left(G(x),G(y)\right)\quad (8)$$

IMPLIKUJE JUŻ WPROST $G \in O(n;\mathbb{R})$.

MAMY PRZY TYM PROSTE PRAWO SKŁADANIA ODWZOROWAŃ POWYŻSZEJ POSTACI:

$$(\tau_{b_1} \circ G_1) \circ (\tau_{b_2} \circ G_2)(x)$$

$$= (\tau_{b_1} \circ G_1)(G_2 x + b_2)$$

$$= G_1 G_2 x + G_1 b_2 + b_1,$$

TJ. $(b_1, G_1) \cdot (b_2, G_2) = (b_1 + G_1 b_2, G_1 G_2)$,

CO ODTWARZA POSTULOWANĄ STRUKTURĘ ILOCZYNU PÓŁPROSTEGO NA $E(n)$.

$\square$

9

W DALSZEJ CZĘŚCI NASZYCH ROZWAŻAŃ PODDAMY POWYŻSZY DOŚĆ ZGRUBNY OPIS DALSZEJ RAFINACJI I STRUKTURYZACJI. W TYM CELU ROZWAŻYMY NAJPIERW

<u>**Stw. 2.**</u> $\forall n \in 2\mathbb{N}+1 \ \forall A \in O(n;\mathbb{R}) \ \exists v \in \mathbb{R}^{\times n} \setminus \{0\}:$ $A v = \varepsilon \triangleright v$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, ZATEM $A\langle v\rangle_{\mathbb{R}} = \langle v\rangle_{\mathbb{R}}$, PRZY CZYM MOŻNA DOBRAĆ v TAK, BY ZACHODZIŁO $A\restriction_{\langle v\rangle_{\mathbb{R}}} = \det_{(n)} A \triangleright \mathrm{id}_{\langle v\rangle_{\mathbb{R}}}$, A WTEDY DLA $\det_{(n)} A = 1$ PROSTĄ $\langle v\rangle_{\mathbb{R}}$ O TEJ WŁASNOŚCI NAZYWAMY <u>OSIĄ OBROTU</u> A.

<u>**D:**</u> WIELOMIAN CHARAKTERYSTYCZNY A JEST $W_A \in \mathbb{R}_n[\cdot]$, ZATEM MA CO NAJMNIEJ JEDEN PIERWIASTEK RZECZYWISTY, TJ.

$$\mathrm{Sp}\, A \cap \mathbb{R} \neq \emptyset,$$

A PONIEWAŻ $\lambda \in \mathrm{Sp}A \cap \mathbb{R}$ i $v \in V(\lambda; A)$ SPEŁNIAJĄ

$$|\lambda| \cdot \|v\| = \|Av\| = \|v\| \Leftarrow A \in O(n;\mathbb{R}),$$

PRZETO $\lambda \in \{\pm 1\}$. TO KOŃCZY DOWÓD PIERWSZEJ CZĘŚCI TEZY.

ZAUWAŻMY DALEJ, ŻE SKORO $A^T A = 1_n$, TO $\det_{(n)} A \in \{\pm 1\}$.

1° $\det_{(n)} A = 1$ (OBRÓT)

ISTNIENIE $v \in \mathbb{R}^{\times n} \setminus \{0\}: Av = v$ JEST RÓWNOZNACZNE Z NIEODWRACALNOŚCIĄ $A - 1_n$, A TO $\Leftrightarrow \det_{(n)}(A-1) = 0$. ZACHODZI WSZAKŻE

$$\det_{(n)}(A-1) = \det_{(n)}(A^T - 1^T) = \det_{(n)}(A^{-1} - 1)$$

$$= \det(A^{-1}(1-A)) = \frac{1}{\det_{(n)} A} \cdot \det_{(n)}(1-A)$$

11

$= \det_{(n)}\big((-1)(A-1)\big) = (-1)^n \det_{(n)}(A-1)$

$= -\det_{(n)}(A-1) \Rightarrow \det_{(n)}(A-1) = 0$ ☒

2° $\det_{(n)} A = -1$

ISTNIENIE $v \in \mathbb{R}^{n} \setminus \{0\} : Av = -v$ JEST RÓWNO-ZNACZNE Z NIEODWRACALNOŚCIĄ $A + \mathbb{1}_n$, A TO $\Leftrightarrow \det_{(n)}(A+1) = 0$. ZACHODZI WSZAK ŻE

$\det_{(n)}(A+1) = \det_{(n)}(A^T + 1^T) = \det_{(n)}(A^{-1} + 1)$

$= \det_{(n)}\big(A^{-1}(1+A)\big) = \dfrac{1}{\det_{(n)} A} \cdot \det_{(n)}(A+1)$

$= -\det_{(n)}(A+1) \Rightarrow \det_{(n)}(A+1) = 0$ ☒

TO KOŃCZY DOWÓD. $\square$

SKUPIMY OBECNIE UWAGĘ NA $n = 2+1 = 3$.

WARTO ODNOTOWAĆ, ŻE PRZESTRZEŃ $\langle v \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp(\cdot|\cdot)_E}$ (ORTOGONALNA DO $\langle v \rangle_{\mathbb{R}}$) TAKŻE JEST ZACHOWYWANA PRZEZ A, OTO BOWIEM

$\forall x \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp(\cdot|\cdot)_E}$:

$$0 = (v|x)_E = (Av|Ax)_E = \det_{(3)} A \cdot (v|Ax)_E .$$

SKORO JEDNAK TAK, TO W BAZIE

$\mathcal{B} := \{v, v_1, v_2\}$, GDZIE v J/W,

A $\langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}} \equiv \langle v \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp(\cdot|\cdot)_E}$, DOSTAJEMY

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & \det_{(3)} A \end{pmatrix}, \text{ GDZIE}$$

$$\alpha := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2;\mathbb{R}), \text{ CZYLI}$$

$$\alpha^T \alpha = 1_2 \quad \wedge \quad \det_{(2)} \alpha = 1$$

PIERWSZY Z TYCH WARUNKÓW PRZEPISUJE SIĘ W POSTACI KONIUNKCJI

$$\begin{cases} a^2+c^2=1 \Rightarrow \exists \varphi \in [0,2\pi[: \begin{matrix} a=\cos\varphi \\ c=\sin\varphi \end{matrix} \\ b^2+d^2=1 \\ ab+cd=0 \end{cases}$$

KTÓREJ ROZWIĄZANIA

1° $a \neq 0 \Rightarrow b = -\frac{c}{a} d$, więc

$$\underbrace{\left(\frac{c^2}{a^2}+1\right)}_{=\frac{1}{a^2}} d^2 = 1 \iff \begin{matrix} d = \pm a = \pm \cos\varphi \\ b = \mp c = \mp \sin\varphi \end{matrix}$$

2° $c \neq 0 \Rightarrow d = -\frac{a}{c} b$, więc

$$\underbrace{b^2\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right)}_{=\frac{b^2}{c^2}} = 1 \iff \begin{cases} b = \pm c \\ d = \mp a \end{cases}$$

MOŻNA ZAPISAĆ W JEDNEJ Z DWÓCH POSTACI: (14)

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\underline{\vee}$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

JAKO ŻE $\det_{(2)} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = 1$

$\det_{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$, PRZETO

PO UWZGLĘDNIENIU DRUGIEGO Z WARUNKÓW NA α ZOSTAJEMY Z

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

OSTATECZNIE ZATEM OTRZYMUJEMY DWIE NIERÓWNOWAŻNE ZREDUKOWANE POSTACI „KANONICZNE" IZOMETRII ZACHOWUJĄCEJ O (!):

TYP I : OBRÓT WZGLĘDEM OSI (TUTAJ: x^3)

$$[A]_B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} =: R_+(\varphi)$$

TYP II : OBRÓT J/W POŁĄCZONY Z ODBICIEM LUSTRZANYM W PŁASZCZYŹNIE PROSTOPADŁEJ DO OSI

$$[A]_B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =: R_-(\varphi)$$

NA GRUNCIE POWYŻSZEJ REDUKCJI DOKONAMY OBECNIE ANALOGICZNEJ REDUKCJI DOWOLNEJ IZOMETRII...

Z POŁĄCZENIA TW. 1. I POWYŻSZYCH ROZWAŻAŃ WYŁANIA SIĘ ALTERNATYWA (WYMAGAJĄCA, RZECZ JASNA, ADAPTACJI UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH, REPREZENTOWANEJ PRZEZ WYBÓR BAZY $\mathcal{B}$):

$$F_{(\mathcal{B})} = \tau_b \circ R_+(\varphi) \quad (+)$$

ZAZNACZANY TO INDEKSEM $(\mathcal{B})$

$\underline{\vee}$

$$F_{(\mathcal{B})} = \tau_b \circ R_-(\varphi) \quad (-)$$

PRZYJRZYMY SIĘ NAJSAMPIERW DRUGIEMU JEJ CZŁONOWI...

<u>STW. 3.</u> DLA KAŻDEJ IZOMETRII $F \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E}_3)$ POSTACI $F_{(\mathcal{B})} = \tau_b \circ R_-(\varphi)$ $\varphi \neq 0 (!)$ ISTNIEJE UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH W $\mathbb{R}^{\times 3}$, POWIĄZANY Z WYJŚCIOWYM (TYM, W KTÓRYM F PRZYJMUJE

DANĄ POSTAĆ AFINICZNĄ) PRZEZ TRANSLACJĘ O STAŁY WEKTOR, W KTÓRYM

$$F_{(\mathcal{B}')} = R_-(\varphi).$$

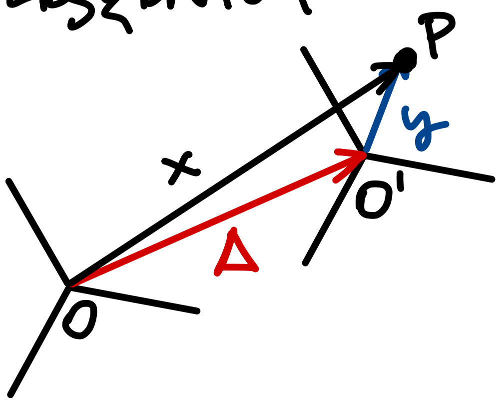
(INNYMI SŁOWY, POPRZEZ STOSOWNY WYBÓR UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH (PUNKTU „O" I KIERUNKÓW OSI) MOŻNA DOWOLNĄ IZOMETRIĘ O NIEWŁAŚCIWEJ SKŁADOWEJ LINIOWEJ (TJ. Z $O(3;\mathbb{R}) \setminus SO(3;\mathbb{R})$) SPROWADZIĆ DO POSTACI LINIOWEJ, W KTÓREJ JEST ONA DANA JAKO NIEWŁAŚCIWE ODWZOROWANIE ORTOGONALNE.)

<u>D</u>: ROZWAŻMY POSTAĆ F W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OTRZYMANYM Z $\mathcal{B}$ PRZEZ TRANSLACJĘ PUNKTU „O" O WEKTOR KTÓRY W TYMŻE $\mathcal{B}$ MA REPREZENTACJĘ (18)

Δ, CZYLI WE WSPÓŁRZĘDNYCH

$y = x - \Delta$, :

τ_1: $x = \tau_\Delta(y)$



ODWZOROWANIE

$$x \longmapsto R_{-}(\varphi)\,x + b \equiv F_{(B)}(x)$$

PRZEPISUJEMY W POSTACI

$$B' \leftarrow B \leftarrow B \leftarrow B'$$

$$F_{(B')}(y) \equiv \tau_\Delta^{-1} \circ F_{(B)} \circ \tau_\Delta(y)$$

y

$$\equiv F_{(B)}(y+\Delta) - \Delta$$

$$= R_{-}(\varphi)\,y + \overbrace{\big(R_{-}(\varphi) - 1\big)\Delta + b}^{=:\,b'}$$

POSTULUJEMY: $\exists \Delta: \; b' = 0$.

ISTOTNIE,

$$\det_{(3)}\left(R_-(\varphi)-1\right)=\det_{(3)}\begin{pmatrix}\cos\varphi-1 & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi-1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$=-2\left(\cos^2\varphi-2\cos\varphi+1+\sin^2\varphi\right)$$

$$=-4\left(1-\cos\varphi\right),$$ JEŚLI ZATEM $\varphi\neq 0$

(CZYLI OBRÓT NIE JEST TRYWIALNY), TO

RÓWNANIE MACIERZOWE

$$\left(R_-(\varphi)-1\right)\Delta=-b$$

MA DOKŁADNIE JEDNO ROZWIĄZANIE.

$\square$

WYNIK ANALOGICZNEJ REDUKCJI DLA PRZYPADKU (+) ZAWIERA

STW. 4. DLA KAŻDEJ IZOMETRII $F \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E}_3)$ POSTACI $F_{(B)} = \tau_b \circ R_+(\varphi)$ $\varphi \neq 0(!)$ ISTNIEJE UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH W $\mathbb{R}^{\times 3}$, POWIĄZANY Z WYJŚCIOWYM (TYM, W KTÓRYM F PRZYJMUJE DANĄ POSTAĆ AFINICZNĄ) PRZEZ TRANSLACJĘ O STAŁY WEKTOR, W KTÓRYM

$$F_{(B')} = \tau_{(0,0,\xi)} \circ R_+(\varphi) \quad (*)$$

(INNYMI SŁOWY, POPRZEZ STOSOWNY WYBÓR UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH (PUNKTU „0" I KIERUNKÓW OSI) MOŻNA DOWOLNĄ IZOMETRIĘ O WŁAŚCIWEJ SKŁADOWEJ LINIOWEJ (TJ. Z $SO(3;\mathbb{R})$) SPROWADZIĆ DO POSTACI LINIOWEJ, W KTÓREJ JEST ONA DANA JAKO PRZEKSZTAŁCENIE ŚRUBOWE $(*)$.

D: DOKONUJĄC TRANSFORMACJI WSPÓŁRZĘDNIOWEJ JAK UPRZEDNIO, DOSTAJEMY – DLA $y = \tau_{-\Delta}(x)$ –

$$F_{(B')}(y) = R_+(\varphi)\,y + \underbrace{(R_+(\varphi)-1)\Delta + b}_{b'},$$

PRZY CZYM TYM RAZEM

$$R_+(\varphi) - 1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi - 1 & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

WIĘC NIE JESTEŚMY W STANIE WYZEROWAĆ b'. PONIEWAŻ JEDNAK

$$\det_{(2)} \begin{pmatrix} \cos\varphi - 1 & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - 1 \end{pmatrix} = 2(1-\cos\varphi) \neq 0,$$

WIĘC ARGUMENTUJĄC JAK UPRZEDNIO MOŻEMY WYZEROWAĆ DWIE PIERWSZE SKŁADOWE b'. $\square$

NASZE ROZWAŻANIA PODSUMOWUJE

g.Tw.2. DOWOLNA IZOMETRIA WŁAŚCIWA $\mathcal{E}_3$ JEST PRZEKSZTAŁCENIEM ŚRUBOWYM, DOWOLNA ZAŚ IZOMETRIA NIEWŁAŚCIWA $\mathcal{E}_3$ JEST ODWZOROWANIEM ORTOGONALNYM NIEWŁAŚCIWYM.

OSTATNIM ELEMENTEM GEOMETRII EUKLIDESOWEJ, KTÓREJ BĘDZIEMY POTRZEBOWAĆ W NASZYCH DALSZYCH ROZWAŻANIACH, JEST PEWIEN ZABAWNY FAKT TRYGONOMETRYCZNY, O KTÓRYM MÓWI

TW. 3. [NIVENA]

$$\forall x\in\mathbb{R}: \ \frac{x}{\pi}\in\mathbb{Q} \wedge \cos(x)\in\mathbb{Q}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(x)\in\left\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\right\}.$$

D: ZACZNIJMY OD ZAUWAŻENIA, ŻE POWYŻSZE WARTOŚCI $\cos(x)$ WYRÓŻNIA JEDNOZNACZNIE TOŻSAMOŚĆ

$$2\cos(x)\in\mathbb{Z}.$$

JEDNOCZEŚNIE $\cos(x)\in\mathbb{Q} \Leftrightarrow 2\cos(x)\in\mathbb{Q}$.

TO PODPOWIADA – NA GRUNCIE INTUICJI WYROBIONEJ W ROZWAŻANIACH ZE STR. 45-46 WYKŁADÓW VIII, IX i X – WYBÓR KIERUNKU DALSZEGO

ROZUMOWANIA: JEŚLI TYLKO WSKAŻEMY WIELOMIAN O WSPÓŁCZYNNIKU PRZY NAJWYŻSZEJ POTĘDZE $= 1$ I WSZYSTKICH POZOSTAŁYCH $\in \mathbb{Z}$, KTÓREGO PIERWIASTKIEM JEST $2\cos(x)$, TO NA MOCY STW. 8-9-10.5 OTRZYMAMY POŻĄDANY WYNIK:

$$2\cos(x) \in \mathbb{A} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}.$$

ALE WOBEC $\frac{x}{\pi} \in \mathbb{Q}$ JEST $x = \frac{m}{n} \cdot \pi$ DLA PEWNEJ PARY $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\times}$ KO-PIERWSZYCH, ZATEM

$$2\cos(nx) = 2\cos(m\pi) = 2 \cdot (-1)^m,$$

A JEDNOCZEŚNIE

$$2\cos(nx) = e^{inx} + e^{-inx} =: z^n + z^{-n}$$

$$\overset{\tilde{*}}{=} (z+z^{-1})^n + a_{n-2}(z+z^{-1})^{n-2} + a_{n-4}(z+z^{-1})^{n-4}$$

$$+ \ldots + a_{\varepsilon_n}(z+z^{-1})^{\varepsilon_n}, \text{ GDZIE } \varepsilon_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$$

I GDZIE WSPÓŁCZYNNIKI $a_{n-2}, a_{n-4}, \ldots, a_{\varepsilon_n}$ SĄ OKREŚLONE JEDNOZNACZNIE PRZEZ $\tilde{*}$, ROZUMIANĄ JAKO RÓWNOŚĆ W $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ (NA MOCY LINIOWEJ NIEZALEŻNOŚCI JEDNOMIANÓW):

$$\left(\binom{n}{1} + a_{n-2}\right) z^{n-2} = 0 \Rightarrow \boxed{a_{n-2} = -\binom{n}{1}}$$

$$\left(\binom{n}{2} + \binom{n-2}{1} a_{n-2} + a_{n-4}\right) z^{n-4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_{n-4} = -\left[\binom{n}{2} + \binom{n-2}{1}\binom{n}{1}\right]}$$

$\vdots$

$$\left[\binom{n}{k} + \binom{n-2}{k-1} a_{n-2} + \binom{n-4}{k-2} a_{n-4} + \dots + \binom{n-2(k-1)}{1} a_{n-2(k-1)} + a_{n-2k}\right] z^{n-2k} = 0$$

$\Downarrow$

$$a_{n-2k} = -\left[\binom{n}{k} + \binom{n-2}{k-1} a_{n-2} + \binom{n-4}{k-2} a_{n-4} + \dots + \binom{n-2(k-1)}{1} a_{n-2(k-1)}\right]$$

$\vdots$

JAK JASNO WYNIKA Z POWYŻSZEJ OBSERWACJI, WSZYSTKIE WSPÓŁCZYNNIKI: $a_{n-2}, a_{n-4}, \dots, a_{\varepsilon_n} \in \mathbb{Z}$, ZATEM

$$W_n(2\cos(x)) = 2\cos(nx) = 2\cdot(-1)^m \in \mathbb{Z}$$

27

DLA $W_n = t^n + a_{n-2} t^{n-2} + a_{n-4} t^{n-4} + \ldots + a_{\varepsilon_n} t^{\varepsilon_n} \in \mathbb{Z}_n[\cdot]$,

CZYLI TEŻ DLA

$$\widetilde{W}_n = W_n + 2 \cdot (-1)^{m+1} \in \mathbb{Z}_n[\cdot]$$

MAMY OCZEKIWANĄ KONSTATACJĘ

$$2\cos(x) \in \widetilde{W}_n^{-1}(\{0\}) \,. \qquad \square$$

TAK PRZYGOTOWANI MOŻEMY PRZEJŚĆ!! DO ROZWAŻAŃ Z ZAKRESU (ELEMENTARNEJ) KRYSTALOGRAFII ...

<u>KRYSZTAŁY IDEALNE</u>

„POJĘCIEM PODSTAWOWYM" W NASZYCH DOCIEKANIACH BĘDZIE

SIEĆ KRYSTALOGRAFICZNA – ∞ DYSKRETUUM PUNKTÓW W $\mathbb{R}^{\times n}$, $n \in \{2,3\}$, KTÓRE REPREZENTUJĄ POŁOŻENIA ATOMÓW NIESKOŃCZONEGO KRYSZTAŁU, ROZMIESZCZONYCH REGULARNIE, PRZY CZYM MIARĄ REGULARNOŚCI JEST (∞) DYSKRETNA OKRESOWOŚĆ ROZKŁADU.

Def.: SIEĆ KRYSTALOGRAFICZNA TRANSLACYJNIE NIEZMIENNICZA (SKTN) TO DYSKRETUUM PUNKTÓW $\Lambda \subset \mathbb{R}^{\times n}$, $n \in \{2,3\}$ ZACHOWYWANE WYŁĄCZNIE PRZEZ TRANSLACJE POSTACI $T \in \langle T_{x_i} \equiv \tau_i \mid i \in \overline{1,n} \rangle \cong \langle \alpha_i \mid i \in \overline{1,n} \rangle$,

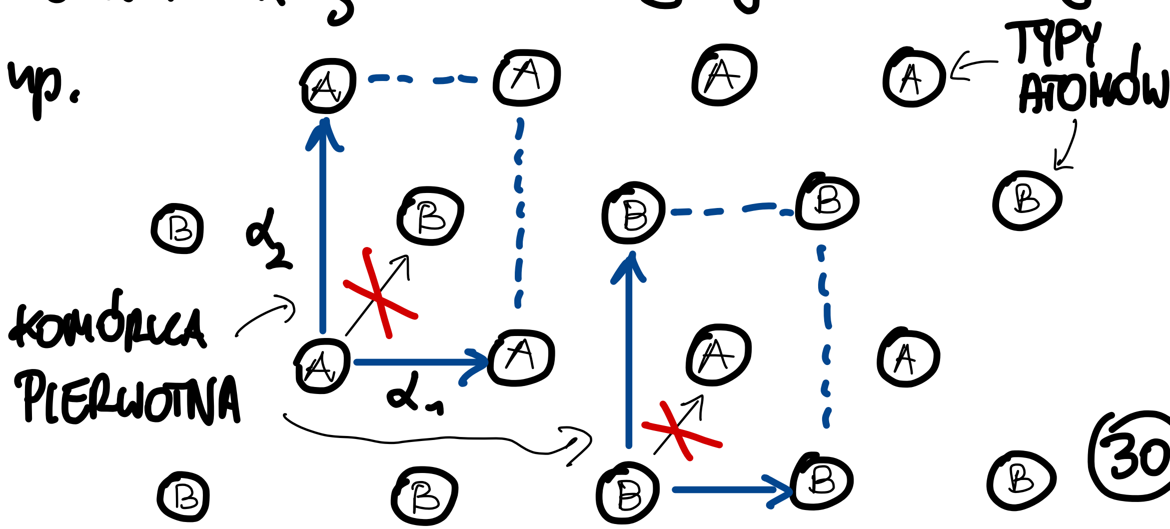
GDZIE α_i, $i \in [1,n]$ SĄ WEKTORAMI LINIOWO NIEZALEŻNYMI W $\mathbb{R}^{\times n}$, ZWANYMI **WEKTORAMI PIERWOTNYMI SIECI** Λ.

WIELO-n-ŚCIAN O ŚCIANACH α_i, $i \in [1,n]$ OKREŚLAMY MIANEM **KOMÓRKI PIERWOTNEJ** LUB **OBSZARU FUNDAMENTALNEGO**.

— x —

OBSERWACJA: SKTN JEST SUMĄ (ROZŁĄCZNĄ) KOMÓREK PIERWOTNYCH, CO WYNIKA Z TRANSLACYJNEJ NIEZMIENNICZOŚCI,

np.



JAK POKAZUJE POWYŻSZY PRZYKŁAD, W OGÓLNOŚCI (DLA SIECI O KILKU RÓŻNYCH TYPACH ATOMÓW) DZIAŁANIE GRUPY

$$\mathcal{T}_n(\Lambda) := \langle \alpha_i \mid i \in \overline{1,n} \rangle_{\mathbb{Z}}$$

NIE JEST PRZECHODNIE.

$$\Updownarrow$$

Λ ROZWARSTWIA SIĘ NA $n > 1$ ORBIT TEGO DZIAŁANIA.

WNIOSEK: SKTN JEST JEDNOZNACZNIE OKREŚLONA PRZEZ $\mathcal{T}_n(\Lambda)$ ORAZ ROZKŁAD ATOMÓW W KOMÓRCE PIERWOTNEJ.

Def.: ILEKROĆ DZIAŁANIE $J_3(\Lambda)$ NA Λ JEST PRZECHODNIE, SIEĆ Λ OKREŚLAMY MIANEM SIECI BRAVAIS'EGO. DLA TAKIEJ SIECI

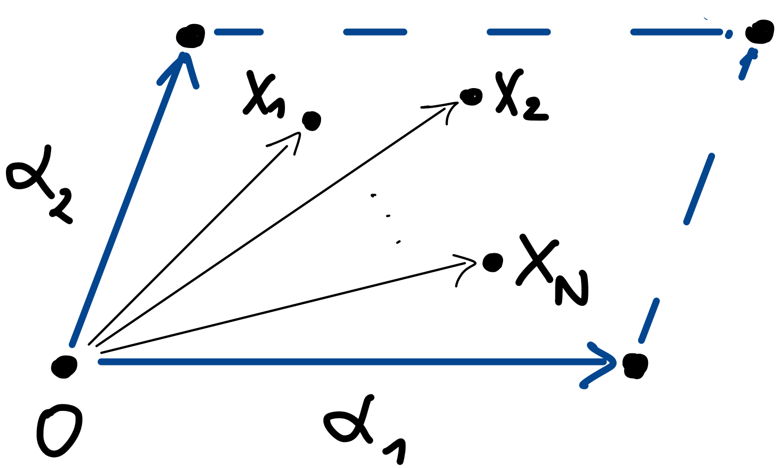
$$\Lambda \simeq \langle \alpha_i \mid i \in \overline{1,n} \rangle_{\mathbb{Z}} \quad \text{(TORSOR)}$$

OBSERWACJA: SIECI BRAVAIS'EGO RÓŻNIĄ SIĘ MIĘDZY SOBĄ KSZTAŁTEM KOMÓREK PIERWOTNYCH. SĄ PRZEPROWADZANE NA SIEBIE PRZEZ TRANSFORMACJE AFINICZNE (NIEKONIECZNIE IZOMETR.), TJ. $\exists!$ SIEĆ BRAVAIS'EGO mod $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^{\times n})$, GDZIE $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^{\times n}) \equiv \mathbb{R}^{\times n} \rtimes GL(n;\mathbb{R})$.

POWYŻSZE ROZWAŻANIA FORMALIZUJEMY W POSTACI

Def.: NIECHAJ Λ BĘDZIE SKTN I NIECH $\{X_i\}_{i\in\overline{1,N}}$, $N \in \mathbb{N}$ BĘDĄ ATOMAMI WEWNĄTRZ KOMÓRKI PODSTAWOWEJ, KTÓREJ WIERZCHOŁKIEM JEST ATOM $O \in \Lambda$. WÓWCZAS ZBIÓR WEKTORÓW $\{\vec{X_i} \equiv [\overrightarrow{O, X_i}]\}_{i\in\overline{1,N}}$ OKREŚLAMY MIANEM BAZY SIECI Λ.

ILUSTRACJA:



MAMY OCZYWISTE

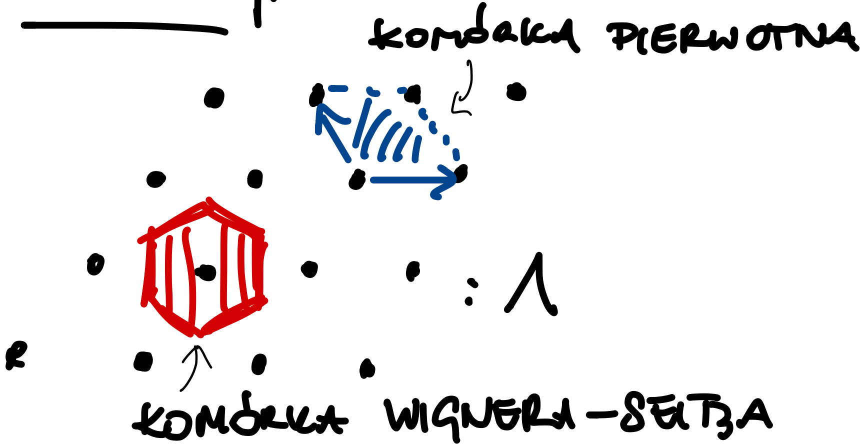
Stw. 5. SKTN JEST W PEŁNI OKREŚLONA PRZEZ WEKTORY PIERWOTNE $\{\alpha_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ I BAZĘ $\{X_j\}_{j\in\overline{1,N}}$.

D: OCZYWISTY.

GEOMETRIĘ SIECI KRYSTALICZNEJ BYWA WYGODNIE OPISYWAĆ PRZY UŻYCIU POJĘCIA, KTÓRE WPROWADZA

Def.: KOMÓRKA WIGNERA-SEITZA (LUB IN. KOMÓRKA SYMETRYCZNA) WOKÓŁ ATOMU $X\in\Lambda$ SKTN Λ TO JEJ (DOWOLNA) KOMÓRKA VORONOI WOKÓŁ X, CZYLI ZBIÓR PUNKTÓW $\mathbb{R}^{\times n}$ BLIŻSZYCH X NIŻ JAKIEMUKOLWIEK INNEMU ATOMOWI Λ (WZGL. $\delta_E^{(n,0)}$).

ILUSTRACJA:



W DALSZEJ CZĘŚCI WYKŁADU SKUPIMY UWAGĘ NA RUCHACH EUKLIDESOWYCH $E(n)$ ZACHOWUJĄCYCH DANĄ SKTN...

PRZYPOMNIENIE:

$$\forall g\in\mathcal{E}(n)\ \exists!\ (T,A)\in\mathbb{R}^{\times n}\times O(n;\mathbb{R}):\ g=T\circ A \qquad (*)$$

(DOWÓD DLA $n=2$ PRZEBIEGA ANALOGICZNIE JAK DLA $n=3$.)

Def.: NIECHAJ Λ BĘDZIE SKTN W $\mathbb{R}^{\times n}$, $n\in\{2,3\}$. PODGRUPĘ (DYSKRETNĄ)

$$\mathcal{E}_n(\Lambda):=\{\,g\in\mathcal{E}(n)\mid g(\Lambda)=\Lambda\,\}$$

OKREŚLAMY MIANEM KRYSTALOGRAFICZNEJ GRUPY PRZESTRZENNEJ SIECI Λ. ZAWIERA ONA JAKO PODGRUPĘ (NORMALNĄ) GRUPĘ TRANSLACJI SIECI

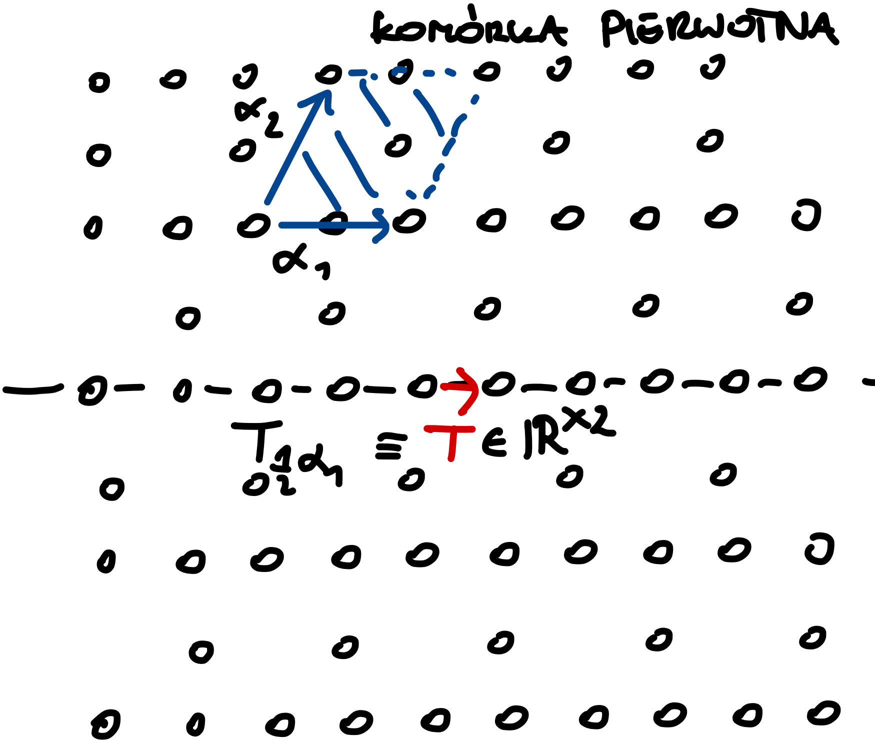
$$\mathcal{T}_n(\Lambda)\equiv\langle\, T_{\alpha_i}\mid i\in\overline{1,n}\,\rangle.$$

UWAGA: ODTĄD BĘDZIEMY ZAWSZE ZAKŁADAĆ, ŻE $0\in\Lambda$. (ATOM ZEROWY)

OBSERWACJA: T i A w rozkładzie $(*)$ elementu $g \in \mathcal{E}_n(1) \subset \mathcal{E}(n)$ NIE należą w ogólności (!) do $\mathcal{E}_n(1)$, tj.

$$\neg\left(T \circ A \in \mathcal{E}_n(1) \Rightarrow \begin{cases} T \in \mathcal{E}_n(1) \\ A \in \mathcal{E}_n(1) \end{cases} \right).$$

(KONTR-)PRZYKŁAD:



$T \circ P \in \mathcal{E}_2(1)$

ALE

$T_1 P \notin \mathcal{E}_2(1)$

$P \in O(2;\mathbb{R})$

KLUCZOWE Z PUNKTU WIDZENIA KLASYFIKACJI POJĘCIE KRYSTALOGRAFICZNE WPROWADZA

__Def.__: NIECHAJ Λ BĘDZIE SKTN. ZBIÓR

$$S_n(\Lambda) := \{ A \in O(n;\mathbb{R}) \mid \exists T \in \mathbb{R}^{\times n} : T \circ A \in \mathcal{E}_n(\Lambda) \}$$

OKREŚLAMY MIANEM KRYSTALOGRAFICZNEJ GRUPY PUNKTOWEJ SIECI Λ (LUB GRUPY SYMETRII SIECI Λ).

__Stw. 6.__ $S_n(\Lambda)$ JEST GRUPĄ.

__D__: NORMALNOŚĆ $\mathbb{R}^{\times n} \subset \mathcal{E}(n)$ I JEDNOZNACZNOŚĆ ROZKŁADU $g \overset{(*)}{=} T \circ A$ DLA $g \in \mathcal{E}(n)$ IMPLIKUJĄ HOMOMORFICZNOŚĆ

$$\pi : \mathcal{E}(n) \to O(n;\mathbb{R}),$$
$$: T \circ A \longmapsto A$$

OTO BOWIEM

$$\pi\big((T_1 \circ A_1) \circ (T_2 \circ A_2)\big) = \pi\big(T_1 \circ \underbrace{(A_1 \circ T_2 \circ A_1^{-1})}_{\in \mathbb{R}^{\times n}} \circ A_1 \circ A_2\big)$$

$= A_1 \circ A_2 \equiv \pi(T_1 \circ A_1) \circ \pi(T_2 \circ A_2)$.

WOBEC TEGO $\mathrm{Im}(\pi\restriction_{\mathcal{E}_n(1)})$ JEST PODGRUPĄ W $\mathrm{Codom}(\pi\restriction_{\mathcal{E}_n(1)}) \equiv O(n;\mathbb{R})$ (WSZAK $\mathcal{E}_n(1) \subset \mathcal{E}(n)$ JEST PODGRUPĄ!), ALE $\mathrm{Im}(\pi\restriction_{\mathcal{E}_n(1)}) \equiv S_n(1)$. $\square$

STRUKTURĘ TEJ GRUPY IDENTYFIKUJEMY W

<u>Stw. 7.</u> $S_n(1) \simeq \mathcal{E}_n(1)/\mathcal{T}_n(1)$

<u>D:</u> NA MOCY TW. 1-2-3.1 ZACHODZI

$$\mathrm{Im}(\pi\restriction_{\mathcal{E}_n(1)}) \simeq \mathcal{E}_n(1)/\mathrm{Ker}(\pi\restriction_{\mathcal{E}_n(1)})$$

$$\equiv \mathcal{E}_n(1)/\mathrm{Ker}\,\pi \cap \mathcal{E}_n(1),$$ ALE

$\mathrm{Ker}\,\pi \equiv \mathbb{R}^{\times n}$ i $\mathcal{T}_n(1) \equiv \mathcal{E}_n(1) \cap \mathbb{R}^{\times n}$, ZATEM $S_n(1) \simeq \mathcal{E}_n(1)/\mathbb{R}^{\times n} \cap \mathcal{E}_n(1)$. $\square$

OBSERWACJA: W ŚWIETLE POPRZEDNIEGO PRZYKŁADU NIE JEST W OGÓLNOŚCI PRAWDĄ, ŻE $S_n(\Lambda) \subset \mathcal{E}_n(\Lambda)$.

ZAD. DOM.: SKONSTRUUJ 3-WYM. SKTN O SYMETRII DANEJ PRZEZ PRZEKSZTAŁCENIE ŚRUBOWE.

— × —

KOLEJNĄ GRUPĘ NATURALNĄ Z PUNKTU WIDZENIA ROZWAŻAŃ KRYSTALOGRAFICZNYCH WPROWADZAMY W

Def: NIECHAJ Λ BĘDZIE SKTN. GRUPA STACJONARNA SIECI Λ TO

$$H_n(\Lambda) := \mathcal{E}_n(\Lambda) \cap O(n;\mathbb{R}),$$

TJ. PODGRUPA $\mathcal{E}_n(\Lambda)$ ZŁOŻONA Z TYCH RUCHÓW EUKLIDESOWYCH, KTÓRE ZACHOWUJĄ ATOM $0 \in \Lambda$. WPROWADZAMY TEŻ

OSOBNE OZNACZENIE

$$H_n(\Lambda)_{(0)} := H_n(\Lambda) \cap SO(n;\mathbb{R})$$

DLA JEJ PODGRUPY OBROTÓW.

<u>OBSERWACJA</u>: $H_n(\Lambda) \subset S_n(\Lambda)$, LECZ W OGÓLNOŚCI $H_n(\Lambda) \not\equiv S_n(\Lambda)$ – PATRZ: PRZYKŁAD ZE STR. 37.

<u>Stw. 8.</u> NIECHAJ Λ BĘDZIE SKTN. WÓWCZAS $H_n(\Lambda) = \mathcal{E}_n(\Lambda) \cap S_n(\Lambda)$. PRZY TYM ILEKROĆ Λ JEST BRAVAIS'EGO, ZACHODZI $H_n(\Lambda) = S_n(\Lambda)$.

<u>D</u>: PIERWSZA CZĘŚĆ TEZY JEST TRYWIALNA. NIECHAJ ZATEM Λ BĘDZIE BRAVAIS'EGO I NIECH $A \in S_n(\Lambda)$, CZYLI $\exists\, T \in \mathbb{R}^{\times n}$: $T \circ A \in \mathcal{E}_n(\Lambda)$. ROZWAŻMY $T \circ A(0) = T(0) \in \Lambda$.

SKORO Λ JEST BRAVAIS'EGO, TO

$$\exists\, \tilde{T} \in \mathcal{T}_n(\Lambda) : T(0) = T \circ A(0) \underset{\Lambda}{=} \tilde{T}(0),$$

CZYLI $T = \tilde{T} \in \mathcal{T}_n(\Lambda)$,

A W TAKIM RAZIE

$$\mathcal{T}_n(\Lambda) \cdot \mathcal{E}_n(\Lambda) \ni \tilde{T}^{-1} \circ (T \circ A) \equiv (T^{-1} \circ T) \circ A = A$$

$$\mathcal{T}_n(\Lambda) \cdot \mathcal{E}_n(\Lambda) \subset \mathcal{E}_n(\Lambda) \cdot \mathcal{E}_n(\Lambda) \equiv \mathcal{E}_n(\Lambda) \qquad \square$$

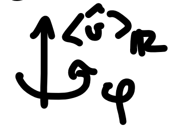
JAK SIĘ OKAZUJE, TRANSLACYJNA NIEZMIENNICZOŚĆ <u>WYDATNIE</u> OGRANICZA ZBIÓR DOPUSZCZALNYCH GRUP PUNKTOWYCH SKTN, CZEGO ZAPOWIEDŹ PRZYNOSI

<u>**Tw. 4**</u> NIECHAJ Λ BĘDZIE SKTN. GRUPA $H_n(\Lambda)(0)$ JEST <u>SKOŃCZONA</u>, A DOWOLNY

JEJ ELEMENT JEST OBROTEM O KĄT BĘDĄCYM CAŁKOWITOLICZBOWĄ KROTNOŚCIĄ $\frac{\pi}{3}$ LUB $\frac{\pi}{2}$.

<u>D</u>: (DOWÓD PRZEPROWADZIMY DLA $n=3$, W TAKI WSZAKŻE SPOSÓB, ŻE PRAWDZIWOŚĆ TEJŻE DLA $n=2$ BĘDZIE JEGO OCZYWISTĄ KONSEKWENCJĄ.) ROZWAŻAMY $\mathbf{R} \in H_3(\Lambda)_{(0)}$.

1° NIECHAJ Λ BĘDZIE BRAVAIS'EGO, TJ. NIECH DOWOLNY ATOM Λ BĘDZIE TRANSLATĄ $0 \in \Lambda$ O WEKTOR $n_1 \triangleright \alpha_1 + n_2 \triangleright \alpha_2 + n_3 \triangleright \alpha_3$ DLA PEWNYCH $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$. W ŚWIETLE STW.2. $\mathbf{R}$ JEST OBROTEM O PEWIEN KĄT φ WOKÓŁ PEWNEJ OSI $\langle v \rangle_{\mathbb{R}}$, TJ $\mathbf{R} = R(\hat{v}; \varphi)$.

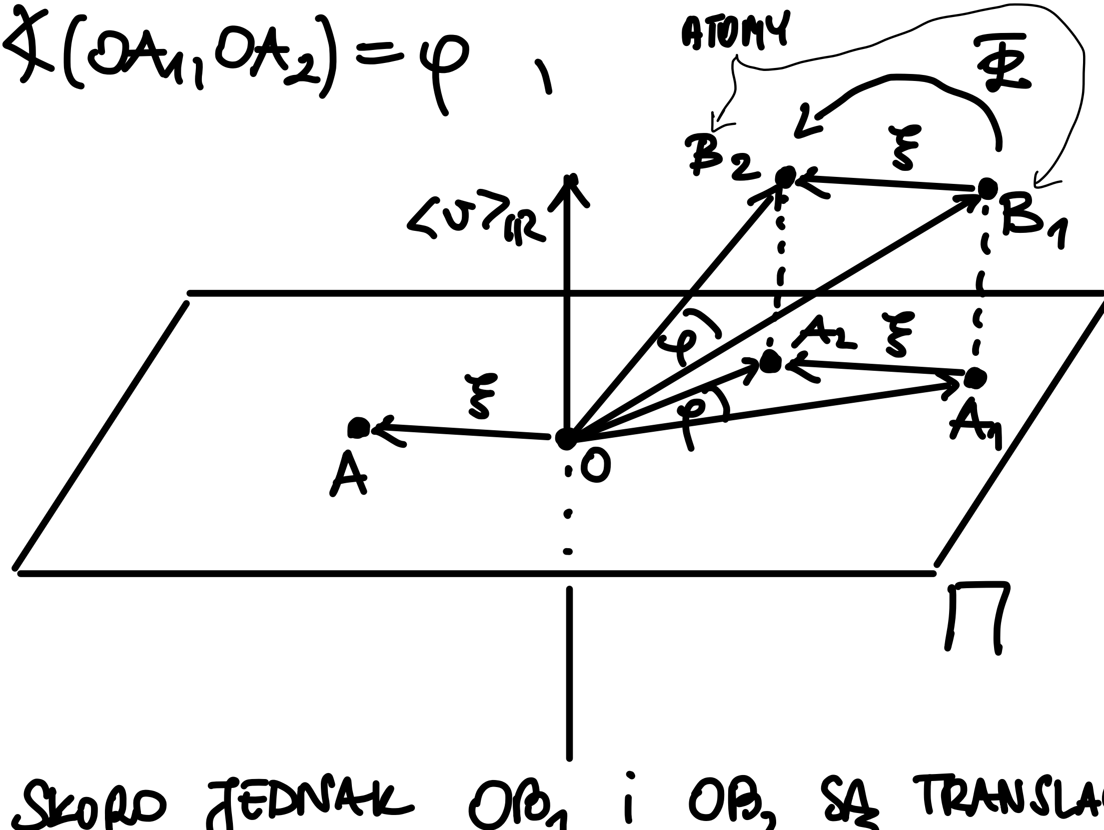


OZNACZMY $\Pi \equiv \langle v \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp_{\delta_E^{(3,0)}}}$. ZACHODZI $\Lambda = \langle \alpha_1 \rangle_{\mathbb{Z}} \oplus \langle \alpha_2 \rangle_{\mathbb{Z}} \oplus \langle \alpha_3 \rangle_{\mathbb{Z}}$, A MY ROZWAŻAMY $P_{\Pi}^{\langle v \rangle_{\mathbb{R}}}(\Lambda) \subset \Pi$. NIECHAJ $A_1 \in P_{\Pi}^{\langle v \rangle_{\mathbb{R}}}(\Lambda) \setminus \{0\}$

(RZUT PROSTOPADŁY NA Π WZDŁUŻ $\langle v \rangle_{\mathbb{R}}$)

BĘDZIE PUNKTEM $P^{\langle v\rangle_{\mathbb{R}}}_{\Pi}(\Lambda)$ NAJBLIŻSZYM O. OZNACZMY $B_2 := R(\hat{v};\varphi)B_1$ DLA $B_1 \in \Lambda$ O WŁASNOŚCI $P^{\langle v\rangle_{\mathbb{R}}}_{\Pi}(B_1) = A_1$, A WTEDY DLA $A_2 = P^{\langle v\rangle_{\mathbb{R}}}_{\Pi}(B_2)$ OTRZYMUJEMY RÓWNOŚĆ

$$\sphericalangle(OA_1, OA_2) = \varphi\,,$$



SKORO JEDNAK OB_1 i OB_2 SĄ TRANSLACJAMI SIECI Λ, TO TAKŻE $\xi = OB_2 - OB_1 \in J_3(\Lambda)$, ALE $\xi \parallel \Pi$, ZATEM $A := T_\xi(O) \in \Lambda$, A PONIEWAŻ A_1 (WIĘC i A_2) SĄ NAJBLIŻSZE O,

JEST $\|OA\| \geqslant \|OA_1\| \equiv \|OA_2\|$. PRZY TYM $\|OA\| = \|B_1B_2\| = \|A_1A_2\|$, PRZETO PODSTAWA TRÓJKĄTA RÓWNORAMIENNEGO A_1OA_2 MA DŁUGOŚĆ NIE MNIEJSZĄ NIŻ JEGO RAMIONA OA_1 i OA_2, SKĄD WNIOSEK:

$$(\pi \geqslant) |\varphi| \geqslant \frac{\pi}{3}.$$

STWIERDZAMY ZATEM, CO NASTĘPUJE

1.1° NIECH $\varphi \in]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$, TJ. $\varphi = \frac{\pi}{2} - \Delta$ DLA $\Delta \in]0, \frac{\pi}{6}[$, A WTEDY

$$5\varphi = \frac{5\pi}{2} - 5\Delta \equiv \frac{\pi}{2} - 5\Delta \mod 2\pi.$$

TAKI 5-KROTNY OBRÓT O φ WOKÓŁ $\mathbb{CP}_{\mathbb{R}}$ TO DOZWOLONA TRANSFORMACJA $\Lambda^{\circlearrowleft}$. ZACHODZI $5\Delta < \frac{\pi}{6}$, BO W PRZECIWNYM RAZIE MUSI BYĆ $5\Delta > \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ (WSZAK $|\varphi| > \frac{\pi}{3}$);

CZYLI $\Delta > \frac{\pi}{6}$ ↯

WÓWCZAS WSZAKŻE $4\varphi = \frac{4\pi}{2} - 4\Delta \equiv -4\Delta$ mod 2π,

A PRZY TYM $|-4\Delta| = 4\Delta < 5\Delta < \frac{\pi}{6}$,

CZYLI $|4\varphi| < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}$ ↯

ANALOGICZNE ROZUMOWANIE DLA $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}[$ WYKLUCZA TAKŻE TEN ZAKRES.

1.2° $\varphi = \frac{\pi}{3}$ JEST DOPUSZCZALNE, GDYŻ $\forall n \in \mathbb{Z}^{\times}: |n\varphi| \geq \frac{\pi}{3}$ (mod 2π).

1.3° $\varphi = \frac{\pi}{2}$ J/W

1.4° $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ J/W

1.5° $\varphi = \pi$ J/W

1.6° NIECH $\varphi \in]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}[$, TJ. $\varphi = \frac{\pi}{2} + \tilde{\Delta}$ DLA $\tilde{\Delta} \in]0, \frac{\pi}{6}[$, A WTEDY $4\varphi \equiv 4\tilde{\Delta}$ mod 2π.

ZAŻĄDAJMY $4\tilde{\Delta} > \frac{\pi}{3}$, BY OTRZYMAĆ

$3\varphi = \frac{3\pi}{2} + 3\tilde{\Delta} \equiv -\frac{\pi}{2} + 3\tilde{\Delta}$ mod 2π, CO DAJE

$$0 = -\frac{\pi}{2} + 3\cdot\frac{\pi}{6} > 3\varphi > -\frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4},$$

CZYLI $|3\varphi| = \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3}$ mod 2π ↯

1.7° NIECH $\varphi \in \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$, TJ. $\varphi = \pi - \tilde{\Delta}$ DLA $\tilde{\Delta} \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right[$, A WTEDY $2\varphi \equiv -2\tilde{\Delta}$ mod 2π, WIĘC TEŻ $|2\varphi| = 2\tilde{\Delta} < \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ ↯

OSTATECZNIE ZATEM

$$\varphi \in \left\{0, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{2\pi}{3}, \pi\right\} \blacksquare$$

W OCZYWISTY SPOSÓB POWYŻSZE SĄ JEDYNYMI DOPUSZCZALNYMI OBROTAMI SYMETRII SIECI PŁASKIEJ.

2° ROZWAŻMY NASTĘPNIE <u>DOWOLNĄ</u> SIEĆ PŁASKĄ Λ O WEKTORACH PIERWOTNYCH α_1 i α_2, A NA NIEJ – OBRÓT $\Phi = R(\varphi)$

O KĄT $\varphi \neq 0 \mod 2\pi$. WOBEC SKOŃCZONOŚCI Λ

$$\exists n \in \mathbb{N}^{\times}: \Phi^{n} = id_{\mathbb{R}^{\times n}}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{\times}: \varphi = \frac{2m}{n}\pi.$$

WZGL. PIERWSZE

(W PRZECIWNYM RAZIE KOLEJNE POTĘGI Φ WYGENERUJĄ ∞ WIELE ATOMÓW W KOMÓRCE PIERWOTNEJ Z DOWOLNEGO ATOMU W TEJŻE.)

SKORO ZAŚ $\underset{\Phi \circ T_{\alpha_1} \circ \Phi^{-1}}{\underset{\shortparallel}{T_{\Phi(\alpha_1)}}}, T_{\Phi^2(\alpha_1)}, \ldots, T_{\Phi^{n-1}(\alpha_1)} \in J_2(\Lambda)$,

TO $\forall k \in \overline{0, n-1}: \Phi^k(\alpha_1) \in \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$.

ILEKROĆ $\{\alpha_1, \Phi^2(\alpha_1)\}$ SĄ LINIOWO ZALEŻNE (NAD $\mathbb{R}$), JEST $\varphi \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, ZGODNIE Z TEZĄ.

ZAŁÓŻMY DALEJ, ŻE $\{\alpha_1, \Phi^2(\alpha_1)\}$ SĄ LINIOWO NIEZALEŻNE, TJ. $\mathbb{R}^{\times 2} = \langle \alpha_1, \Phi^2(\alpha_1) \rangle_{\mathbb{R}}$, CZYLI TEŻ $\Phi(\alpha_1) \in \langle \alpha_1, \Phi^2(\alpha_1) \rangle_{\mathbb{R}}$. MAMY

<u>LEMAT</u>: NIECHAJ Λ BĘDZIE SKTN W 2 WYMIARACH I NIECH $T_1, T_2 \in \mathcal{J}_2(\Lambda)$. WÓWCZAS

$$T := \lambda_1 \triangleright T_1 + \lambda_2 \triangleright T_2 \in \mathcal{J}_2(\Lambda) \Longrightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}.$$

<u>DL</u>: NIECH $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}^{\times 2}$ BĘDĄ TRANSLACJAMI O WEKTORY PIERWOTNE, A WTEDY

$$T_A = m_1^A \triangleright \tau_1 + m_2^A \triangleright \tau_2 \quad \text{DLA PEWNYCH } m_1^A, m_2^A \in \mathbb{Z}, \; A \in \{1,2\}.$$

WÓWCZAS TEŻ

$$T = (m_1^1 + m_1^2) \cdot \lambda_1 \triangleright \tau_1 + (m_2^1 + m_2^2) \cdot \lambda_2 \triangleright \tau_2,$$

ALE $T \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$, ZATEM

$$(m_\alpha^1 + m_\alpha^2) \cdot \lambda_\alpha \overset{!}{\in} \mathbb{Z}, \quad \alpha \in \{1,2\}$$

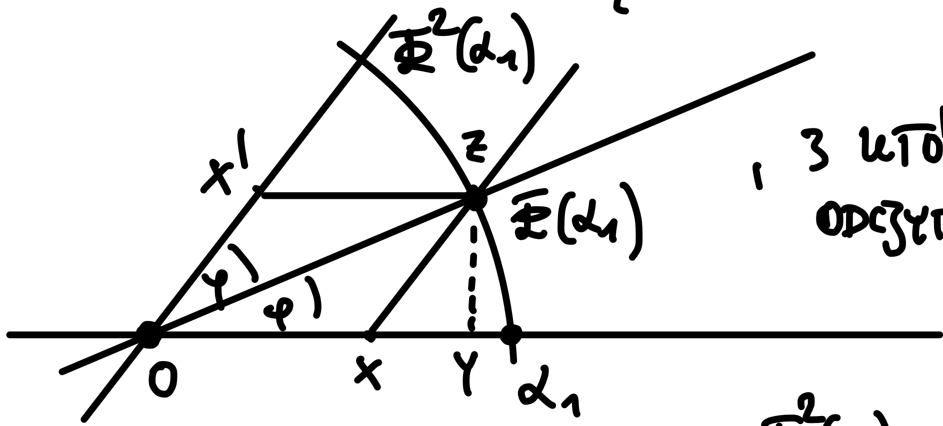
$$\Longleftrightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}. \quad \square$$

ZWRÓĆMY PRZY TYM UWAGĘ, ŻE $\alpha_1 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\vee$ $\alpha_2 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ DAWAŁOBY NAM ∞ WIELE ATOMÓW W KOMÓRCE PIERWOTNEJ, GENEROWANYCH PRZEZ $N \triangleleft T$ mod $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$, Z KTÓRYCH ŻADNE DWA NIE BYŁYBY TOŻSAME.

<u>WNIOSEK</u>: $\exists g_1, g_2 \in \mathbb{Q}$:

$$\Phi(\alpha_1) = g_1 \cdot \alpha_1 + g_2 \cdot \Phi^2(\alpha_1).$$

ROZPATRZMY ODPOWIEDNIĄ PLANIMETRIĘ...



, Z KTÓREJ ODCZYTUJEMY

$$\Phi(\alpha_1) = \|OX\| \cdot \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} + \|OX'\| \cdot \frac{\Phi^2(\alpha_1)}{\|\Phi^2(\alpha_1)\|}$$

$$= \frac{\|OX\|}{\|\alpha_1\|} \cdot (\alpha_1 + \mathcal{E}^2(\alpha_1)), \text{ ZATEM}$$

$$\frac{\|OX\|}{\|\alpha_1\|} \overset{!}{\in} \mathbb{Q} \quad (\Leftarrow \text{LEMAT})$$

Z DRUGIEJ STRONY

$$\|OX\| = \|OY\| - \|XY\|$$

$$= \|\mathcal{E}(\alpha_1)\| \cdot \cos\varphi - \|XZ\| \cdot \cos 2\varphi$$

$$= \|\alpha_1\| \cdot \cos\varphi - \|OX\| \cdot \cos 2\varphi,$$

PRZETO $\frac{\|OX\|}{\|\alpha_1\|} = \frac{\cos\varphi}{1+\cos 2\varphi} = \frac{\cos\varphi}{2\cos^2\varphi} = \frac{1}{2\cos\varphi}$.

DOSTAJEMY ZATEM WARUNEK

$\mathbb{Q} \overset{!}{\ni} \frac{1}{2\cos\varphi} \iff \cos\varphi \overset{!}{\in} \mathbb{Q}$, ALE $\frac{\varphi}{\pi} = \frac{2m}{n} \in \mathbb{Q}$,

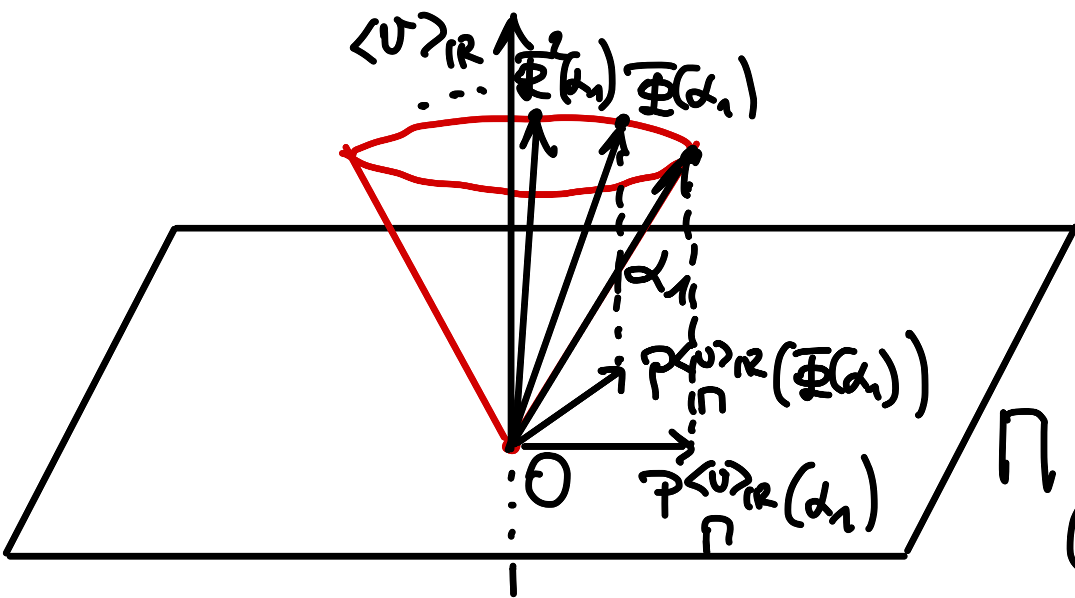
WIĘC W ŚWIETLE TW. 3. $\varphi \overset{!}{\in} \frac{\pi}{3}\mathbb{Z} \cup \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$

$\blacksquare$

3° POWRÓĆMY DO ANALIZY SIECI PRZESTRZENNEJ. ILEKROĆ JEDEN Z JEJ WEKTORÓW PIERWOTNYCH $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – NP. α_1 – JEST $\perp \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$, ARGUMENTACJA Z PUNKTU 2° ODNIESIONA DO $\alpha_1, \Phi(\alpha_1), \Phi^2(\alpha_1), \ldots$ PROWADZI NAS, JAK UPRZEDNIO, DO POŻĄDANEJ KONKLUZJI. ZAŁÓŻMY W TAKIM RAZIE, ŻE

$$\forall i \in \{1,2,3\} : \alpha_i \not\perp \langle v \rangle_{\mathbb{R}},$$

A WTEDY WYBRAWSZY DOWOLNY Z NICH – NP. α_1 – ROZWAŻAMY STOŻEK



WRAZ Z JEGO RZUTEM PROSTOPADŁYM

NA $\Pi \perp \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$, A W NICH —

$\alpha_1, \Phi(\alpha_1), \Phi^2(\alpha_1) \ldots$ ORAZ ODNOŚNE RZUTY

$P_{\Pi}^{\langle v \rangle_{\mathbb{R}}}(\alpha_1), P_{\Pi}^{\langle v \rangle_{\mathbb{R}}}(\Phi(\alpha_1)), P_{\Pi}^{\langle v \rangle_{\mathbb{R}}}(\Phi^2(\alpha_1)), \ldots$

$\underline{L}: \underline{\alpha}_1^{(0)}$ $\quad$ $\underline{L}: \underline{\alpha}_1^{(1)}$ $\quad \ldots$

I ZNOWU LINIOWA ZALEŻNOŚĆ

$\underline{\alpha}_1^{(0)}$ i $\underline{\alpha}_1^{(2)} \iff \varphi \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$,

A LINIOWA NIEZALEŻNOŚĆ TYCH WEKTORÓW

OZNACZA $\underline{\alpha}_1^{(1)} \in \langle \underline{\alpha}_1^{(0)}, \underline{\alpha}_1^{(2)} \rangle_{\mathbb{R}}$.

PODOBNIE JAK POPRZEDNIO

$\underline{\alpha}_1^{(1)} = \underline{\lambda}_1 \triangleright \underline{\alpha}_1^{(0)} + \underline{\lambda}_2 \triangleright \underline{\alpha}_1^{(2)}$

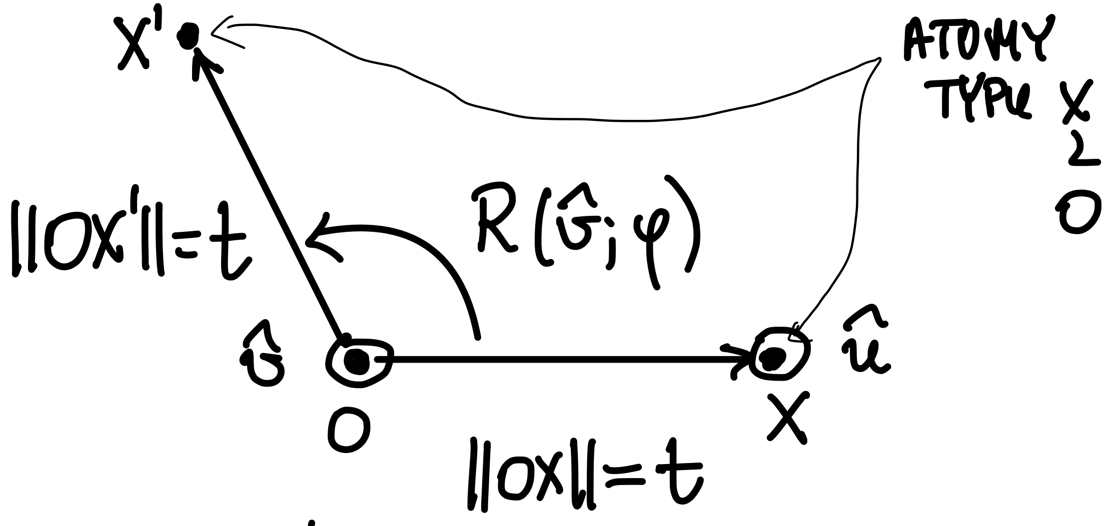
ZE WSPÓŁCZYNNIKAMI $\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2 \in \mathbb{Q}$,

BO W PRZECIWNYM RAZIE DOSTAJEMY ∞ WIELE TRANSLAT O W Π, KTÓRE MUSZĄ POCHODZIĆ OD ∞ WIELU TRANSLAT DOZWOLONYCH WZDŁUŻ STOŻKA, KTÓRE $\bmod \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle_{\mathbb{Z}}$ GENERUJĄ ∞ WIELE ATOMÓW W KOMÓRCE PIERWOTNEJ. ZNÓW ZATEM NIEODZOWNIE

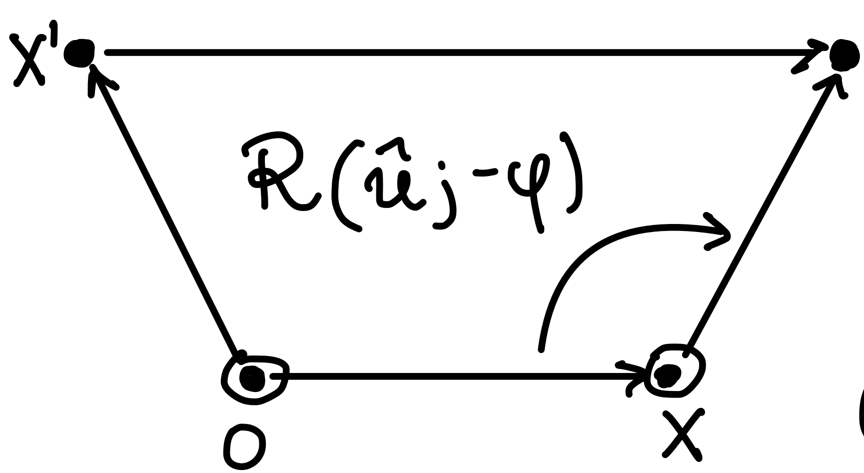
$$\varphi \in \frac{\pi}{3}\mathbb{Z} \cup \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}. \qquad \square$$

ZANIM PRZEKUJEMY POWYŻSZY REZULTAT W KLASYFIKACJĘ GRUP STACJONARNYCH W WYMIARZE 2 i 3, PRZEŚLEDZIMY ALTERNATYWNE SPOJRZENIA NA TEZĘ Tw. 4., ROZSZERZAJĄC TYM SPOSOBEM WYDATNIE POLE SKOJARZENIOWE i INTUICJĘ GEOMETRYCZNĄ...

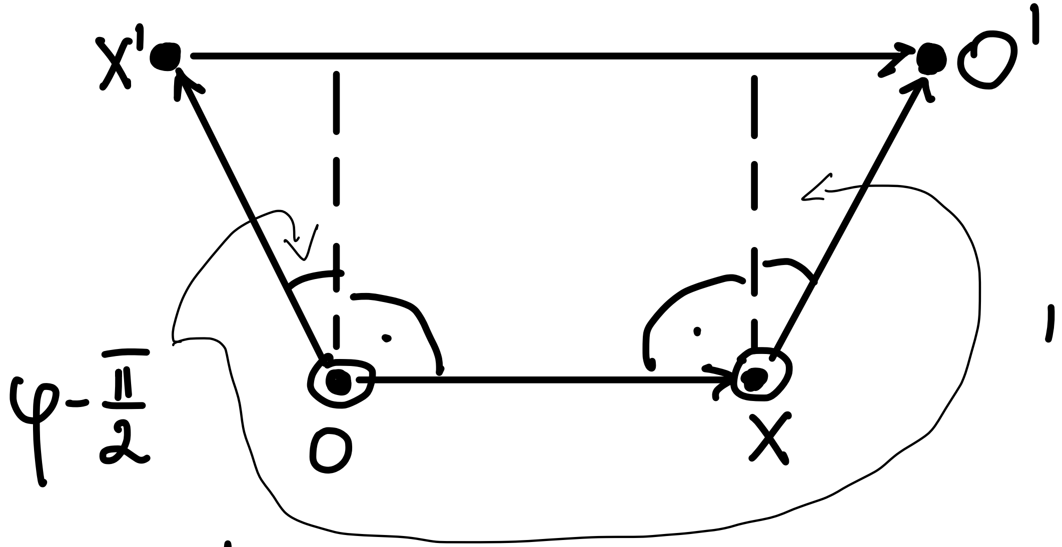
ZACZNIEMY OD ALTERNATYWNEGO ROZUMOWANIA PLANIMETRYCZNEGO: OGRANICZAJĄCE ZBIÓR DOPUSZCZALNYCH OBROTÓW ZAŁOŻENIE O ICH ZGODNOŚCI Z DYSKRETNĄ OKRESOWOŚCIĄ SIECI KRYSTALOGRAFICZNEJ OZNACZA, ŻE ILEKROĆ MAMY DO CZYNIENIA Z OBROTEM $R(\hat{v};\varphi)$ ZACHOWUJĄCYM SIEĆ Λ, W PŁASZCZYŹNIE $\Pi = \langle \hat{v} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ LEŻY ∞ WIELE PUNKTÓW $\neq O$, ROZMIESZCZONYCH REGULARNIE, TJ. OKRESOWO, WZGLĘDEM KTÓRYCH MOŻEMY PODDAWAĆ SIEĆ OBROTOM O KĄT φ (WOKÓŁ OSI PRZEZ NIE PRZECHODZĄCYCH $A \perp \Pi$). NIECH $X \in \Pi$ BĘDZIE JEDNYM Z TYCH PUNKTÓW = ATOMÓW (TEGO SAMEGO TYPU CO O). MAMY WÓWCZAS UKŁAD ATOMÓW



SKORO ZAŚ $R(\hat{v};\varphi)$ JEST SYMETRIĄ Λ, TO JEST NIĄ TEŻ $R(\hat{v};-\varphi)$, A ZATEM TAKŻE $R(\hat{u};-\varphi)$. OBSERWACJA TA POZWALA ODTWORZYĆ DODATKOWY FRAGMENT SIECI:



TYM SPOSOBEM OTRZYMUJEMY TRAPEZ RÓWNORAMIENNY



W KTÓRYM

$$\|X'O'\| = \|OX\| + \|OX'\| \cdot \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ \|XO'\| \cdot \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

WIĘC TEŻ - WOBEC IZOMETRYCZNOŚCI $R(\hat{v}; \varphi)$ i $R(\hat{u}; -\varphi)$ -

$$\|X'O'\| = \|OX\| \cdot \left(1 + 2\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \|OX\| \cdot (1 - 2\cos\varphi).$$

DYSKRETNA OKRESOWOŚĆ Λ IMPLIKUJE, TAK JAK W TEZIE LEMATU ZE STR. 50, RELACJĘ

$$\frac{\|x'O'\|}{\|Ox\|} \overset{!}{\in} \mathbb{Q} ,$$

CZYLI

$$1-2\cos\varphi \overset{!}{\in} \mathbb{Q} \iff \cos\varphi \overset{!}{\in} \mathbb{Q} ,$$

ALE TEŻ $\varphi/\pi \in \mathbb{Q}$, ZATEM NA MOCY TW. 3.

$$\varphi \in \frac{\pi}{3}\mathbb{Z} \cup \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} .$$

———— × ————

INNYM SPOSOBEM UZYSKANIA TEGO SAMEGO OGRANICZENIA JEST ANALIZA MOŻLIWYCH REGULARNYCH PARKIETAŻY Π ZŁOŻONYCH Z KOMÓREK WIGNERA–SEITZA (POD)SIECI Λ, PATRZ: STR. 34-35. SAMO ISTNIENIE PARKIETAŻU ODZWIERCIEDLA DYSKRETNĄ OKRESOWOŚĆ SIECI Λ.

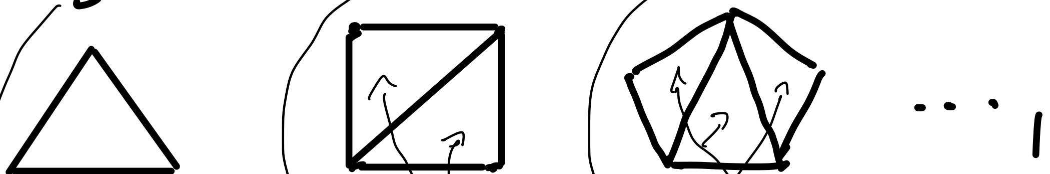
JEJ UZGODNIENIE Z SYMETRIĄ OBROTOWĄ WYMAGA SKOŃCZONOŚCI RZĘDU GENERATORA TEJ OSTATNIEJ – NIECH TO BĘDZIE $N \in \mathbb{N}^{\times}$ – ORAZ SYMETRII OBROTOWEJ (TEGOŻ RZĘDU N) PŁYTKI PARKIETAŻU. TO OZNACZA, ŻE PŁYTKA JEST REGULARNYM N-KĄTEM. ISTNIENIE (ŚCISŁEGO) PARKIETAŻU $\mathbb{R}^{\times 2}$ ZŁOŻONEGO Z TAKICH N-KĄTÓW OZNACZA, ŻE SKOŃCZONA KROTNOŚĆ KĄTA WEWNĘTRZNEGO φ_N PRZY WIERZCHOŁKU N-KĄTA OKREŚLONA PRZEZ LICZBĘ N-KĄTÓW PRZYLEGAJĄCYCH ŚCIŚLE W WIERZCHOŁKU PARKIETAŻU WYPEŁNIA KĄT π WOKÓŁ TEGO WIERZCHOŁKA. OZNACZMY TĘ LICZBĘ JAKO $M \in \mathbb{N}^{\times}$.

OTRZYMUJEMY WÓWCZAS TOŻSAMOŚĆ

$$M \cdot \varphi_N = 2\pi.$$

JAK POKAZUJE DOWODNIE PROSTE ROZUMOWANIE:

N: 3 4 5 ...



φ_N: $\frac{1}{3} \cdot \pi$ $\quad \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \pi$ $\quad \frac{1}{5} \cdot 3 \cdot \pi$

SUMA KĄTÓW WEWNĘTRZNYCH TRÓJKĄTA

ZACHODZI $\varphi_N = \frac{1}{N} \cdot (N-2) \cdot \pi$.

WOBEC TEGO OTRZYMUJEMY RELACJĘ

$$M = \frac{2N}{N-2} \text{ NA } \mathbb{N}^\times \times \mathbb{N}^\times \ni (M,N),$$

A W ISTOCIE — NA $\mathbb{N}_{\geq 3} \times \mathbb{N}_{\geq 3}$ (NIE MA SENSU MÓWIĆ O „WIERZCHOŁKU", W KTÓRYM PRZYLEGAJĄ DO SIEBIE 2 KOMÓRKI WIGNERA-SEITZA, TAK JAK NIE MA SENSU MÓWIĆ O KOMÓRCE O $(\leq)\, 2$ KĄTACH WEWNĘTRZNYCH).

WOBEC ŚCISŁEJ MONOTONICZNOŚCI FUNKCJI $\mathbb{R}_{>2} \ni x \stackrel{f}{\longmapsto} \frac{2x}{x-2} \in \mathbb{R}$, WYNIKAJĄCEJ Z RACHUNKU

$$\frac{df}{dx}(x) = -\frac{4}{(x-2)^2} < 0,$$

STWIERDZAMY ISTNIENIE SZTYWNYCH WĘZŁÓW: $3 \leq N \leq 6$ (DLA $N=7$ MAMY $M(N)=\frac{14}{5} < 3$).

(NAWIASEM MÓWIĄC, $M=1$ WYMAGAŁOBY $N=-2$ ↯, A $M=2$ DAJE WYNIK ABSURDALNY $0=-2$ ↯.)

MAMY PRZETO EWENTUALNOŚCI:

$N=3 \Longrightarrow M=6$ ✓

$N=4 \Longrightarrow M=4$ ✓

$N=6 \Longrightarrow M=3$ ✓

ORAZ WYKLUCZONĄ PRZEZ WARUNEK CAŁKOWITOŚCI M NIE-EWENTUALNOŚĆ

$N=5 \Longrightarrow M=\frac{10}{3} \notin \mathbb{N}$ ↯.

ROZUMOWANIE TO RZUCA NOWE ŚWIATŁO NA GEOMETRYCZNY SENS WYKLUCZENIA OBROTÓW RZĘDU 5 JAKO SYMETRII SKTN.

Z POWYŻSZEGO WYNIKA JUŻ WPROST

TW. 5. [KLASYFIKACYJNE DLA $H_2(1)_{(0)}$]

DLA DOWOLNEJ PŁASKIEJ SKTN Λ ZACHODZI

$$H_2(1)_{(0)} \cong C_n\,, \quad n \in \{1, 2, 3, 4, \cancel{5}, 6\}\,, \text{ GDZIE}$$

$$C_n = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & \sin\frac{2\pi k}{n} \\ -\sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}}_{\equiv R_n^k} \;\middle|\; k \in \overline{0, n-1} \right\} \cong \mathbb{Z}_n\,.$$

$$(C_1 \equiv 1)$$

D: PATRZ: ROZUMOWANIE WCZEŚNIEJSZE. □

PRZEJŚCIE OD $H_2(1)_{(0)}$ DO $H_2(1)$ WYMAGA DOPUSZCZENIA W ROLI SYMETRII Λ ODBICIA $P_{\hat{l}}$ W PROSTEJ $\langle \hat{l} \rangle$ (ZACHOWUJĄCEGO $0 \in \Lambda$). ROZSZERZENIE $H_2(1)_{(0)}$ J/W O TAKIE ODBICIE PROWADZI DO...

TW. 6. [KLASYFIKACYJNE DLA $H_2(\Lambda)$]

DLA DOWOLNEJ PŁASKIEJ SKTN Λ ZACHODZI $H_2(\Lambda) \simeq C_n$, $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ ALBO $H_2(\Lambda) \simeq D_n$, $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$, GDZIE $D_n \equiv C_n \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2$ JEST GRUPĄ DIEDRALNĄ O GENERATORACH R_n (JAK W TEZIE TW. 5.) I $P_{\hat{l}}$ SPEŁNIAJĄCYCH RELACJE (RP)

$$R_n^n = e = P_{\hat{l}}^2 \wedge (R_n P_{\hat{l}})^2 = e,$$

KTÓRA TO GRUPA JEST ILOCZYNEM PÓŁPROSTYM $C_n \simeq \mathbb{Z}_n$ I $\mathbb{Z}_2 = \{1, P_{\hat{l}}\}$ O STRUKTURZE ZADAWANEJ PRZEZ $\alpha : \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}\, C_n : P_{\hat{l}}^k \mapsto \mathrm{Inv}^k$, $k \in \{0, 1\}$.

(NALEŻY ZWAŻYĆ, ŻE C_n JEST PRZEMIENNA, STĄD AUTOMORFICZNOŚĆ Inv.)

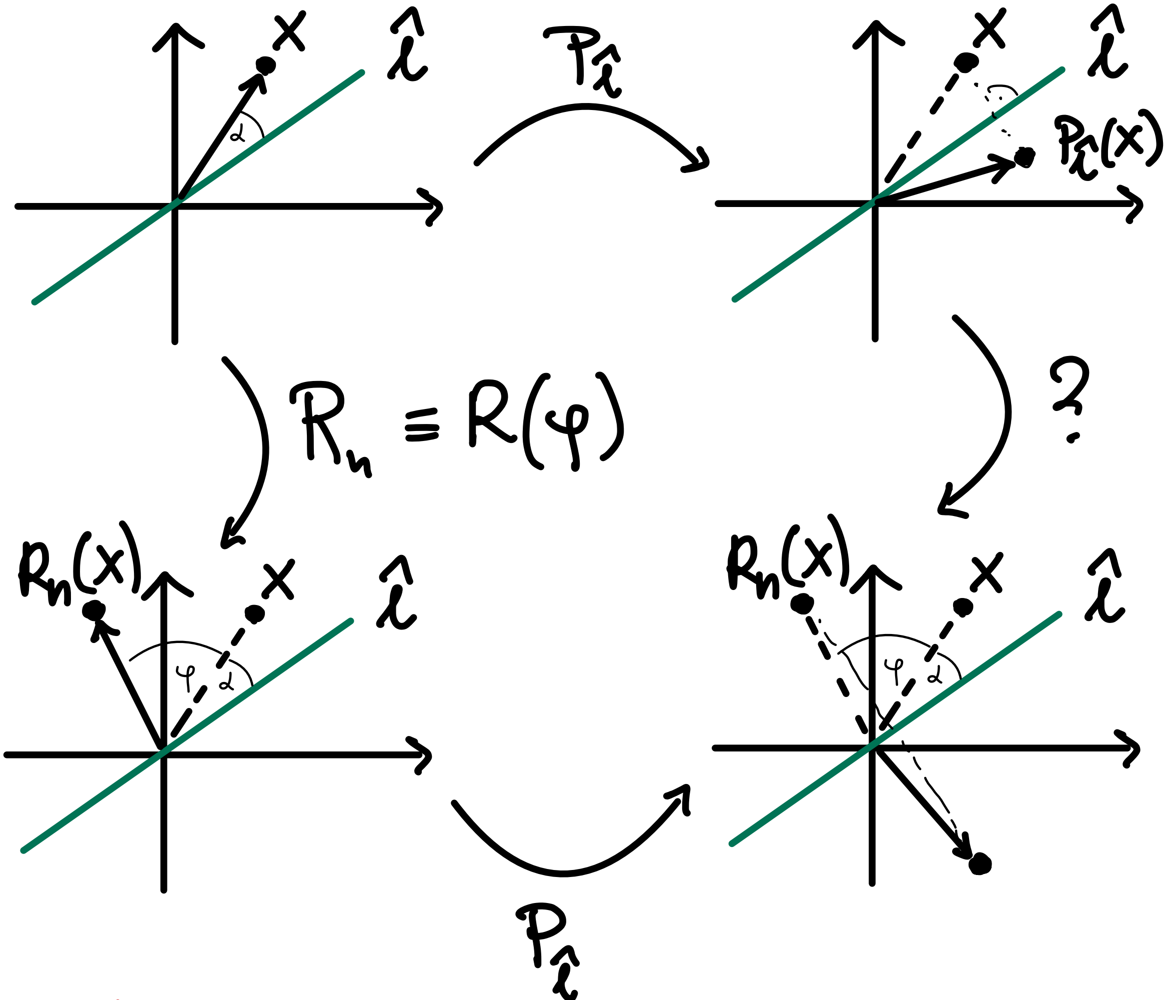
D: W ŚWIETLE TW. 5. JEDYNYM, CO WYMAGA OKAZANIA, JEST RELACJA (RP), KTÓRĄ ODZWIERCIEDLA TEŻ WIERNIE IDENTYFIKACJA $\alpha(P_{\hat{i}}) = \mathrm{Inv}$ — ISTOTNIE,

$$(R_n P_{\hat{i}})^2 = e \; (\equiv P_{\hat{i}}^2) \iff$$

$$P_{\hat{i}} R_n P_{\hat{i}}^{-1} \equiv P_{\hat{i}} R_n P_{\hat{i}} = R_n^{-1} \equiv \mathrm{Inv}(R_n),$$

PATRZ: SKW. 1-2-3.24 i 1-2-3.25.

PRAWDZIWOŚĆ (RP) DOKUMENTUJE SEKWENCJA TRANSFORMACJI GEOMETRYCZNYCH ZOBRAZOWANA PONIŻEJ:



$$? \overset{!!!}{\equiv} R(-\varphi) = R_n^{-1}. \qquad \square$$

UWAGA HISTORYCZNA:
GRUPY C_n i D_n O $n \in \{1,2,3,4,6\}$, WIĘC NIE C_5 i D_5, SĄ GRUPAMI SYMETRII PARKIETAŻY PŁASZCZYZNY I JAKO TAKIE BYŁY WYKORZYSTYWANE PRZEZ ARABSKICH ORNAMENTATORÓW I ARCHITEKTÓW PRZY KONSTRUKCJI MOZAIK W BUDOWLACH SAKRALNYCH I ŚWIECKICH. POJAWIAJĄ SIĘ ONE TAKŻE W ORNAMENTYCE STAROEGIPSKIEJ (W NIEJ SPOTYKAMY DE FACTO WSZYSTKIE GRUPY $E_2(1)$! (17)). PRÓBY NARZUCENIA SYMETRII C_5/D_5 PROWADZIŁY NIEODMIENNIE (I NIEODPZOWNIE!) DO MOZAIK Z DEFEKTAMI ZAPEŁNIANYMI WSTAWKAMI (PŁYTKAMI) O GEOMETRII ODMIENNEJ OD GEOMETRII „KOMÓRKI WIGNERA-SEITZA" – POWSTAŁY W TEN SPOSÓB TZW. WARIANTY KOMPROMISOWE.

CZAS WRESZCIE ZMIERZYĆ SIĘ Z WYZWANIEM, JAKIM JEST KLASYFIKACJA (SKTN WEDLE) SYMETRII W WYMIARZE $n=3$. TO W SWEJ POSTACI ZUPEŁNEJ JEST POZA NASZYM ZASIĘGIEM – STUDIUM PEŁNEJ LISTY (219) KLAS RÓWNOWAŻNOŚCI TYCH GRUP, SPORZĄDZONEJ PRZEZ FEDOROVA I SCHOENFLIESA, ZAJĘŁOBY NAM JESZCZE WIELE WYKŁADÓW. ZRESZTĄ TAKIE SZCZEGÓŁOWE STUDIUM W RAMACH WYKŁADU Z PODSTAW TEORII GRUP WYDAJE SIĘ BEZCELOWE – TEGO DYSKUSJĘ POZOSTAWIAMY KRYSTALOGRAFOM, TEORETYKOM SPEKTROMETRII, CHEMIKOM I IN. MY NATOMIAST, W RAMACH

ROZSZERZONEJ ILUSTRACJI ZASTOSOWAŃ FIZYCZNYCH TEORII GRUP SKOŃCZONYCH, OGRANICZYMY SIĘ DO OMÓWIENIA SKOŃCZONYCH PODGRUP GRUPY OBROTÓW

$$SO(3) \supset S_3(\Lambda)_{(0)} \supset H_3(\Lambda)_{(0)}.$$

CZĘŚĆ Z NICH MOŻEMY WSKAZAĆ WPROST NA GRUNCIE DOTYCHCZASOWYCH ROZTRZĄSAŃ: SĄ TO GRUPY INDUKUJĄCE W PEWNEJ PŁASZCZYŹNIE OBROTY Z C_n LUB – OGÓLNIEJ – ODWZOROWANIA Z D_n. ISTOTNIE, ROZWAŻMY OBRÓT $R(\vec{v}, \varphi)$ O KĄT $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ WOKÓŁ OSI $\langle \vec{v} \rangle_{\mathbb{R}}$. TEN ZACHOWUJE OŚ I INDUKUJE WŁAŚNIE ROZPATRYWANY OBRÓT

$$R_+^{(n)}(\varphi) = \begin{pmatrix} R_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ GENERUJE ON

GRUPĘ $C_n^1 = \{ R_+^{(n)}(\varphi)^k \mid k \in \overline{0, n-1} \}$

$$\cong C_n \cong \mathbb{Z}_n,$$

KTÓREJ RZĄD PODLEGA OGRANICZENIU KRYSTALOGRAFICZNEMU: $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

MAMY TEŻ GRUPĘ ODWZOROWAŃ POSTACI

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \in D_n, \quad n \in \{1, 2, 3, 4, 6\},$$

$$\subseteq C_n \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2,$$

ZAWIERAJĄCA OBOK TYCH Z C_n^1 TAKŻE ICH SUPERPOZYCJE Z ODBICIAMI W $P_{\hat{\ell}}$, $\hat{\ell} \subset \Pi \equiv \langle \hat{v} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} \delta_E^{(3,0)}$.

O PRZYNALEŻNOŚCI TRANSFORMACJI

$$P_l' = \begin{pmatrix} P_l & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in C_n \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2$$

DO PODGRUPY <u>WŁAŚCIWYCH</u> IZOMETRII $\mathbb{R}^{\times 3}$ (CZYLI OBROTÓW PRZESTRZENNYCH) PROWADZI BANALNA OBSERWACJA:

$$P_l' \equiv R(\hat{l}; \pi).$$

DOŁĄCZENIE 3. WYMIARU POZWALA OBRACAĆ Π WOKÓŁ DOWOLNEJ JEJ 1-WYMIAROWEJ PODPRZESTRZENI (AFINICZNEJ)!

POZOSTAJE JESZCZE USTALIĆ JAWNĄ POSTAĆ TYCH OBROTÓW W D_n', KTÓRE POWSTAJĄ ZE ZŁOŻENIA OBROTÓW Z C_n Z GENERATOREM P_l' SKŁADOWEJ $\mathbb{Z}_2 \subset D_n'$. TA WYNIKA BEZPOŚREDNIO Z NATURALNEJ INTERPRETACJI

TOŻSAMOŚCI

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$\equiv\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\\ \cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} & -\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}-\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix}$$

$$\equiv\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2} & -\sin\frac{\varphi}{2}\\ \sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2} & \sin\frac{\varphi}{2}\\ -\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix}$$

$$\equiv R\left(\frac{\varphi}{2}\right)^{-1}P_{0x}R\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

KTÓRA POZWALA POSTRZEGAĆ TRANSFORMACJĘ Π GENEROWANĄ PRZEZ DOWOLNY TAKI OBRÓT W $\mathbb{R}^{\times 3}$ (REPREZENTOWANĄ PRZEZ WYJŚCIOWY ILOCZYN MACIERZY) JAKO SEKWENCJĘ TRANSFORMACJI: PRZEJŚCIA $R\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ DO UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

O OSIACH OBRÓCONYCH WZGL. WYJŚCIOWYCH O KĄT $\frac{\varphi}{2}$, ODBICIA P_{OX} W OSI OX NOWEGO UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH I POWROTU $R(\frac{\varphi}{2})^{-1} = R(-\frac{\varphi}{2})$ DO WYJŚCIOWEGO UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH, WIĘC W SUMIE ... ODBICIA WZGLĘDEM ŚRODKOWEJ DOWOLNEGO Z KĄTÓW OBROTU W C_n.

MAMY PRZETO $k \in \overline{0,n-1}$

$$P'_{OX} R_+(\varphi)^k = R_+\left(\frac{k}{2}\varphi\right)^{-1} P'_{OX} R_+\left(\frac{k}{2}\varphi\right),$$

CZYLI n DODATKOWYCH OBROTÓW O π WOKÓŁ TYCHŻE ŚRODKOWYCH DLA n KĄTÓW $\frac{2\pi}{n}\cdot k$, $k \in \overline{0,n-1}$ W Π (ŚRODKOWE TWORZĄ KĄTY $\frac{\pi}{n}\cdot k$ Z OSIĄ W Π, WZGL. KTÓREJ MIERZONY JEST $\varphi = \frac{2\pi}{n}$).

IDENTYFIKACJA POZOSTAŁYCH PODGRUP SKOŃCZONYCH W SO(3) WYMAGA SZCZEGÓŁOWEJ ANALIZY ORBIT ICH DZIAŁANIA, KTÓRĄ PRZEPROWADZAMY W DOWODZIE

<u>Tw. 7.</u> [KLASYFIKACYJNE DLA PODGRUP SKOŃCZONYCH SO(3)]

DOWOLNA SKOŃCZONA PODGRUPA GRUPY SO(3) JEST IZOMORFICZNA Z JEDNĄ Z GRUP PONIŻSZYCH: C'_m, $m \in \mathbb{N}^\times$; D'_n, $n \in \mathbb{N}^\times$; T (GRUPA SYMETRII CZWOROŚCIANU FOREMNEGO ≡ TETRAEDRU); W (GRUPA SYMETRII SZEŚCIANU, WIĘC I OŚMIOŚCIANU FOREMNEGO ≡ OKTAEDRU); P (GRUPA SYMETRII DWUNASTOŚCIANU FOREMNEGO ≡ DODEKAEDRU, WIĘC I DWUDZIESTOŚCIANU FOREMNEGO ≡ IKOZAEDRU).

D: NIECHAJ $\Gamma \subset SO(3)$ BĘDZIE PODGRUPĄ SKOŃCZONĄ I OZNACZMY $|\Gamma| =: N$.

WYBIERZMY OBRÓT $R(\hat{v}; \varphi) \in \Gamma$ RZĘDU n, TJ. OBRÓT O KĄT $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ WOKÓŁ PEWNEJ OSI $\langle \hat{v} \rangle_{\mathbb{R}}$, I ROZWAŻMY GRUPĘ

$$C_n(\hat{v}) := \langle R(\hat{v}; \varphi) \rangle \equiv \{ R(\hat{v}; \varphi)^k \}_{k \in \overline{0, n-1}}$$

$$\overset{\frown}{\Gamma} \cong \mathbb{Z}_n$$

NA GRUNCIE TW. LAGRANGE'A (COR. 1-2-3.2) WNIOSKUJEMY, ŻE

$$\nu := \frac{N}{n} \big(\equiv (\Gamma ; C_n(\hat{v})) \big) \in \mathbb{N}^\times .$$

MAMY ROZKŁAD NA WARSTWY

$$\Gamma = \bigsqcup_{i=1}^{\nu} \gamma_i C_n(\hat{v}),$$

W KTÓREGO ZAPISIE γ_i, $i \in \overline{1, \nu}$ SĄ PEWNYMI REPREZENTANTAMI ODNOŚNYCH ORBIT DZIAŁANIA

PODGRUPY $C_n(\hat{v})$ NA Γ.

ZAUWAŻMY, ŻE ZBIÓR WEKTORÓW

$$\{\gamma_i(\hat{v})\}_{i\in\overline{1,\nu}} \subset \mathbb{S}^2 (\subset \mathbb{R}^{\times 3})$$

JEST ν-ELEMENTOWY, TJ.

$$\forall_{i,j\in\overline{1,\nu}} : \left(i\neq j \Longrightarrow \gamma_i(\hat{v}) \neq \gamma_j(\hat{v})\right),$$

BO W PRZECIWNYM RAZIE BYŁOBY

$$\gamma_i^{-1}\cdot\gamma_j \in C_n(\hat{v}).$$

↯

STABILIZATORY TYCH WEKTORÓW (W Γ) SĄ – W ŚWIETLE STW. 4.5.10 – WZAJEM SPRZĘŻONE, CO DOKUMENTUJE TOŻSAMOŚĆ

$$\gamma_i \circ R(\hat{v};\varphi)\circ\gamma_i^{-1} = R(\gamma_i(\hat{v});\varphi), \quad (**)$$

ZA KTÓRĄ STOI PROSTA GEOMETRYCZNA (NIECO OGÓLNIEJSZA) INTUICJA:

ROZWAŻMY OBRÓT ZŁOŻONY

$$R(\hat{v}_2;\varphi_2)\circ R(\hat{v}_1;\varphi_1)\circ R(\hat{v}_2;-\varphi_2)=:R_{12}$$

Z PARY OBROTÓW $R(\hat{v}_A;\varphi_A)$, $A\in\{1,2\}$.

JEGO OSIĄ JEST $R(\hat{v}_2;\varphi_2)(\hat{v}_1)\equiv\hat{v}_{12}$, OTO BOWIEM

$$R_{12}(\hat{v}_{12})\equiv R(\hat{v}_2;\varphi_2)\circ R(\hat{v}_1;\varphi_1)(\hat{v}_1)$$
$$=R(\hat{v}_2;\varphi_2)(\hat{v}_1)\equiv\hat{v}_{12}.$$

WIEMY ZATEM, ŻE DOWOLNY WEKTOR $\xi\perp\hat{v}_{12}$ JEST PRZEZ R_{12} OBRACANY O PEWIEN KĄT ψ. IZOMETRIA $R(\hat{v}_2;-\varphi_2)$ ZACHOWUJE ROZKŁAD $\mathbb{R}^{\times 3}=\langle\hat{v}_{12}\rangle_{\mathbb{R}}\oplus\langle\hat{v}_{12}\rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$, ZATEM PRZEPROWADZA ξ W $\tilde{\xi}=R(\hat{v}_2;-\varphi_2)(\xi)\in\langle\hat{v}_1\rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$, PO CZYM JEST ON OBRACANY W $\langle\hat{v}_1\rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ O KĄT φ_1 PRZEZ $R(\hat{v}_1;\varphi_1)$, A WYNIK OBROTU WRACA Z $\langle\hat{v}_1\rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ DO $\langle\hat{v}_{12}\rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$

ALE IZOMETRIA ODWROTNA $R(\hat{v}_2;\varphi_2)$ ZACHOWUJE KĄTY MIĘDZY WEKTORAMI (DANE W TERMINACH STOSOWNYCH KOSINUSÓW SKALARNYCH), ZATEM KĄT MIĘDZY $R(\hat{v}_2;\varphi_2)\big(R(\hat{v}_1;\varphi_1)(\tilde{\xi})\big)$ I $R(\hat{v}_2;\varphi_2)(\tilde{\xi}) \equiv R(\hat{v}_2;\varphi_2)\big(R(\hat{v}_2;-\varphi_2)(\xi)\big) \equiv \xi$ JEST TAKI SAM JAK PRZED OBROTEM, WIĘC RÓWNY φ_1. MAMY WSZAKŻE – Z KONSTRUKCJI –

$$R(\hat{v}_2;\varphi_2)\big(R(\hat{v}_1;\varphi_1)(\tilde{\xi})\big) \equiv R_{12}(\xi) \equiv R(\hat{v}_{12};\psi)(\xi),$$

SKĄD WNIOSEK: $\psi \equiv \varphi_1$. OSTATECZNIE ZATEM DOSTAJEMY TOŻSAMOŚĆ

$$R(\hat{v}_2;\varphi_2)\circ R(\hat{v}_1;\varphi_1)\circ R(\hat{v}_2;-\varphi_2)$$
$$= R\big(R(\hat{v}_2;\varphi_2)(\hat{v}_1);\varphi_1\big),$$

KTÓRA W PRZYPADKU $R(\hat{v}_2;\varphi_2) \equiv \gamma_i$ ODTWARZA WYJŚCIOWĄ RÓWNOŚĆ (**).

NIECHAJ TERAZ P_i BĘDZIE JEDNYM Z PARY PUNKTÓW W $\langle \gamma_i(\vec{v}) \rangle_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{S}^2 \left(\subset \underline{\mathbb{R}}^{\times 3} \right)$ – NAZWIEMY GO BIEGUNEM $C_n(\vec{v})$, ALBO n-BIEGUNEM. MAMY ZATEM INTERPRETACJĘ TOŻSAMOŚCI

$$\forall P \in \mathbb{S}^2 \,.\, n_P\text{-BIEGUN} : \; N = n_P \cdot \nu_P$$

n_P – KROTNOŚĆ (n_P-) BIEGUNA P:

$$= |\Gamma_P| \equiv |C_{n_P}(\vec{v}_P)|$$

ν_P – MOC Γ-ORBITY P NA $\mathbb{S}^2$.

W NASTĘPNEJ KOLEJNOŚCI DOKONAMY ZLICZENIA – NA DWA RÓŻNE SPOSOBY – PAR (S, P) ZŁOŻONYCH Z BIEGUNA P I OBROTU $\neq id$ Z Γ ZACHOWUJĄCEGO BIEGUN P.

Z JEDNEJ STRONY MAMY $N-1$ OBROTÓW $\neq \mathrm{id}$ W Γ, A KAŻDY STABILIZUJE 2 BIEGUNY ($|\langle \hat{v} \rangle_{\mathbb{R}} \cap S^2| \equiv 2$), ZATEM

$$|\{(s,p)\}| = 2\cdot(N-1)$$

Z DRUGIEJ STRONY KAŻDEMU BIEGUNOWI P ODPOWIADA DOKŁADNIE $n_p - 1$ OBROTÓW $\neq \mathrm{id}$ (W JEGO $C_{n_p}(\hat{v}_p)$), KTÓRE GO STABILIZUJĄ, PRZETO

$$|\{(s,p)\}| = \sum_{p \in B_\Gamma} (n_p - 1),$$

B_Γ ← ZBIÓR BIEGUNÓW

A PONIEWAŻ $Q \sim_\Gamma P \Longrightarrow \Gamma_Q \cong \Gamma_P$ (NA MOCY STW. 4-5.10), WIĘC n_p JEST STAŁE NA Γ-ORBITACH, SKĄD WNIOSEK:

$$|\{(s,p)\}| = \sum_{i \in B_\Gamma/\Gamma} \nu_i (n_i - 1).$$

ν_i ← MOC ORBITY

n_i – BIEGUNA

B_Γ/Γ ← ZBIÓR Γ-ORBIT

PRZY TYM $\forall i \in B_\Gamma/\Gamma : \nu_i \cdot n_i = N$, ZATEM OSTATECZNIE

$$2(N-1) = \sum_{i \in B_\Gamma/\Gamma} \nu_i (n_i - 1) = N \sum_{i \in B_\Gamma/\Gamma} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$2 - \frac{2}{N} = \sum_{i \in B_\Gamma/\Gamma} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right)$$

ROZWAŻYMY MOŻLIWE $\Gamma \neq 1$ (CZYLI $N > 1$), DLA KTÓRYCH $1 < 2 - \frac{2}{N} < 2$. DLA TAKICH GRUP $|B_\Gamma/\Gamma| \geqslant 2$, BO $|B_\Gamma/\Gamma| = 1$ DAJE

$$\sum_{i \in B_\Gamma/\Gamma} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = 1 - \frac{1}{n_1} < 1,$$ W SPRZECZNOŚCI

Z $2 - \frac{2}{N} > 1$. $\lightning$

PONIEWAŻ PONADTO $\forall i \in B_\Gamma/\Gamma : n_i > 1$ (WPROST Z DEFINICJI), PRZETO

$|\mathcal{B}_\Gamma/\Gamma| \leq 3$, GDYŻ $|\mathcal{B}_\Gamma/\Gamma| > 3$ DAJE

$$\sum_{i\in \mathcal{B}_\Gamma/\Gamma}\left(1-\frac{1}{n_i}\right) = 4 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_3} - \frac{1}{n_4} + \Delta$$

$\Delta \geq 0$ (WKŁADY $1-\frac{1}{n_i} > 0$ OD EW. DODATKOWYCH Γ-ORBIT),

GDYŻ

$$\sum_{i\in \mathcal{B}_\Gamma/\Gamma}\left(1-\frac{1}{n_i}\right) \geq 4 - 4\cdot\frac{1}{2} = 2,$$

W SPRZECZNOŚCI Z $2-\frac{2}{N} < 2$. ↯

WNIOSKUJEMY ZATEM, ŻE

$$\Omega \equiv |\mathcal{B}_\Gamma/\Gamma| \in \{2,3\}.$$

ROZPATRZYMY PO KOLEI WSZYSTKIE MOŻLIWE PRZYPADKI...

1° $\Omega = 2$: MAMY

$$2 - \frac{2}{N} = 1 - \frac{1}{n_1} + 1 - \frac{1}{n_2} = 2 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}$$

$$\Updownarrow$$

$$2 = \nu_1 + \nu_2 \iff \nu_1 = 1 = \nu_2$$

i $N = n_1 = n_2$, TJ.

$\exists$ 2 N-BIEGUNY, KAŻDY STABILIZOWANY PRZEZ $\Gamma \simeq C'_N$.

2° $\Omega = 3$: MAMY

$$2 - \frac{2}{N} = 1 - \frac{1}{n_1} + 1 - \frac{1}{n_2} + 1 - \frac{1}{n_3} = 3 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_3}$$

$$\Updownarrow$$

$$1 + \frac{2}{N} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$$

PRZYJMIJMY (BEZ UTRATY OGÓLNOŚCI ROZWAŻAŃ) PORZĄDEK $n_1 \leq n_2 \leq n_3$.

OBSERWACJA: $n_1 > 2$ ($\Rightarrow n_1, n_2, n_3 \geq 3$)

IMPLIKUJE $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \leq 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$,

CO JEST SPRZECZNE Z $1 + \frac{2}{N} > 1$. $\lightning$

WNIOSEK: $n_1 = 2$ (WSZAK $n_1 > 1$)

STĄD
$$\begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{2}{N} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \\ n_1 = 2 \end{cases}$$

OBSERWACJA: $n_2 > 3$ ($\Rightarrow n_3, n_3 \geq 4$)

IMPLIKUJE $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \leq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$,

CO JEST SPRZECZNE Z $\frac{1}{2} + \frac{2}{N} > \frac{1}{2}$. $\lightning$

WNIOSEK: $n_2 \in \{2, 3\}$

POZOSTAJE ROZPATRZEĆ PODPRZYPADKI:

2.1° $n_1=2=n_2$:

$$\begin{cases} \frac{1}{n_3} = \frac{2}{N} \\ n_1 = 2 = n_2 \end{cases} \iff \begin{cases} N = 2n_3 \\ n_1 = 2 = n_2 \end{cases}, \text{ TJ.}$$

$\exists$ 2 ORBITY 2-BIEGUNÓW, KAŻDA MOCY n_3

1 ORBITA n_3-BIEGUNÓW, MOCY 2

$\Downarrow$

$\Gamma = D'_{n_3}$ (PATRZ: STR. 73-74)

2.2° $n_1=2$, $n_2=3$:

$\frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{N}$, ALE $n_3 \geq n_2 = 3$, ZATEM

2.2.1° $n_1=2$, $n_2=3$, $n_3=3$, $N=12$, TJ.

$\exists$ 1 ORBITA 2-BIEGUNÓW, MOCY 6

2 ORBITY 3-BIEGUNÓW, MOCY 4

4 3-BIEGUNY MUSZĄ BYĆ ROZMIESZCZONE

REGULARNIE NA $\mathbb{S}^2$, ZATEM DEFINIUJĄ TETRAEDR WPISANY W $\mathbb{S}^2$. OBROTY RZĘDU 3 STABILIZUJĄCE BIEGUN TO SYMETRIE TRÓJKĄTNEJ ŚCIANY TETRAEDRU NAPRZECIWKO TEGOŻ BIEGUNA = WIERZCHOŁKA. ANTYPODALNIE WZGLĘDEM KAŻDEGO Z BIEGUNÓW LEŻY RZUT NA $\mathbb{S}^2$ ŚRODKA ŚCIANY TETRAEDRU LEŻĄCEJ NAPRZECIWKO (J/W), DOPEŁNIAJĄCY BIEGUN ANTYPODALNY DO PARY PRZECIĘĆ $\langle \hat{v}_p \rangle_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{S}^2$.

OBROTY RZĘDU 3 (ŚRODKÓW) STABILIZUJĄCE ŚCIANY TETRAEDRU TO TE SAME OBROTY CO WCZEŚNIEJ.

WRESZCIE 6 2-BIEGUNÓW TO RZUTY ŚRODKÓW KRAWĘDZI TETRAEDRU NA $\mathbb{S}^2$, POŁĄCZONE W PARY POCHODZĄCE OD „NAPRZECIWLEGŁYCH" KRAWĘDZI (WSPÓŁOSIOWE)

OBROTY JE STABILIZUJĄCE TO OBROTY KRAWĘDZI O KĄT π WOKÓŁ OSI PRZECHODZĄCEJ PRZEZ TAKĄ PARĘ BIEGUNÓW.

$$\Downarrow$$

$$\Gamma = T$$

2.2.2° $n_1=2$, $n_2=3$, $n_3=4$, $N=24$, TJ.

$\exists$ 1 ORBITA 2-BIEGUNÓW, MOCY 12

1 ORBITA 3-BIEGUNÓW, MOCY 8

1 ORBITA 4-BIEGUNÓW, MOCY 6

ROZMIESZCZONE REGULARNIE NA S^2

$\equiv$ WIERZCHOŁKI SZEŚCIANU LUB OKTAEDRU OPISANEGO NA / WPISANEGO W S^2

W OPISIE W TERMINACH OKTAEDRU 3-BIEGUNY REPREZENTUJĄ ŚRODKI JEGO ŚCIAN,

A 2-BIEGUNY – ŚRODKI KRAWĘDZI.

⇓

$$\Gamma = W$$

$2.2.3°$ $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$, $N = 60$, TJ.

∃ 1 ORBITA 2-BIEGUNÓW, MOCY 30

1 —"— 3 - -"— , —"— 20

1 —"— 5 -"— , —"— 12

!

ROZMIESZCZONE REGULARNIE NA S^2

≡ WIERZCHOŁKI DODEKAEDRU LUB IKOZAEDRU
OPISANEGO NA S^2 WPISANEGO W

W OPISIE W TERMINACH DODEKAEDRU 3-BIEGUNY
REPREZENTUJĄ ŚRODKI JEGO ŚCIAN,
A 2-BIEGUNY – ŚRODKI KRAWĘDZI.

⇓

$$\Gamma = P \supset C_5 \ !$$

2.2.4° $n_1=2,\ n_2=3,\ n_3 \geq 6$ DAJE

$$\frac{2}{N} = \frac{1}{n_3} - \frac{1}{6} \leq \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0 \ \lightning$$

$\square$

<u>OBSERWACJA</u>: UWZGLĘDNIENIE OGRANICZENIA KRYSTALOGRAFICZNEGO POZOSTAWIA NAM GRUPY C_n', $n \in \{1,2,3,4,6\}$; D_n', $n \in \{2,3,4,6\}$ ORAZ T i W JAKO KANDYDATÓW NA STRUKTURY SYMETRII SKTN. UWZGLĘDNIENIE SYMETRII ODBICIOWEJ i UZGODNIENIE IZOMETRII Z DYSKRETNĄ SYMETRIĄ TRANSLACYJNĄ PROWADZI DO PEŁNEJ KLASYFIKACJI 219 GRUP KRYSTALOGRAFICZNYCH STOWARZYSZONYCH Z 32 GRUPAMI PUNKTOWYMI. WIĘCEJ O NICH – NA KURSIE KRYSTALOGRAFII!