ALGEBRA GRUPOWA, KATEGORYCZNIE
(TG '23/24 1.XIV I 1.XV [RRS])

Spis treści

Przedmiotem naszych rozważań będzie naturalna struktura algebraiczna na przestrzeni funkcji na grupie skończonej

$$(\Gamma, ., \mathrm{Inv}, \bullet \longmapsto e), \qquad |\Gamma| < \infty$$

(symbol operacji binarnej . będziemy na ogół pomijać) o wartościach w ciele liczb zespolonych

$$\big(\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2, +, \cdot, -(\cdot), (\cdot)^{-1}, \bullet \longmapsto (0,0), \bullet \longmapsto (1,0)\big)\,.$$

1. Rekwizyty

Zaczniemy od przypomnienia elementarnych faktów z teorii reprezentacji grup skończonych, przy czym przez reprezentację grupy Γ na przestrzeni $\mathbb{C}$-liniowej $\big(\mathcal{V}, +_{\mathcal{V}}, -_{\mathcal{V}}(\cdot), \bullet \longmapsto 0_{\mathcal{V}}; \triangleright_{\mathcal{V}}\big)$ będziemy rozumieć homomorfizm grup

$$\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}\left(\Gamma, \mathrm{GL}(\mathcal{V};\mathbb{C})\right)\,.$$

(1) **Każda skończeniewymiarowa reprezentacja ρ grupy skończonej Γ jest unitaryzowalna poprzez redefinicję iloczynu skalarnego $(\cdot|\cdot)$ na jej nośniku $\mathcal{V}_\rho$ indukowaną przez tę reprezentację,**

$$(\cdot|\cdot)_\rho := (\cdot|\cdot) \circ \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma\in\Gamma} \rho(\gamma) \times \rho(\gamma)\,.$$

Na tej podstawie będziemy zakładać, że na każdej rozpatrywanej poniżej przestrzeni $\mathbb{C}$-liniowej będącej nośnikiem takiej właśnie reprezentacji został wybrany iloczyn skalarny, względem którego reprezentacja ta jest unitarna. Iloczyn taki pozwala wybrać w $\mathcal{V}_\rho$ bazę ortonormalną

$$\{e_{\rho,i}\}_{i\in\overline{1,\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{V}_\rho}}\,, \qquad \big(e_{\rho,i}\,|\,e_{\rho,j}\big) = \delta_{i,j}\,,$$

dla której

$$e^*_{\rho,i} \equiv \big(e_{\rho,i}\,|\,\cdot\big)\,.$$

Wykorzystując kanoniczny izomorfizm skończenie wymiarowych przestrzeni $\mathbb{C}$-liniowych

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}_\rho) \cong \mathcal{V}^*_\rho \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_\rho\,,$$

otrzymujemy stąd bazę

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}_\rho) = \langle\, e^*_{\rho,i} \otimes_{\mathbb{C}} e_{\rho,j} \,|\, i,j \in \overline{1,\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{V}_\rho}\,\rangle_{\mathbb{C}}\,, \tag{1}$$

w której

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}_\rho) \ni \chi = \sum_{i,j=1}^{\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{V}_\rho} \big\langle e^*_{\rho,j}, \chi(e_{\rho,i})\big\rangle \dot{\triangleright} (e^*_{\rho,i} \otimes_{\mathbb{C}} e_{\rho,j}) =: \sum_{i,j=1}^{\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{V}} \chi_{\rho,ji} \dot{\triangleright} (e^*_{\rho,i} \otimes_{\mathbb{C}} e_{\rho,j})\,,$$

przy czym $\dot{\triangleright}$ symbolizuje (punktowe) działanie $\mathbb{C}$ na $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}_\rho)$

(2) Przestrzeń $\mathbb{C}$-liniowa

$$\big(\mathbb{C}^\Gamma, \dot{+}, \dot{-}(\cdot), \bullet \longmapsto 0; \odot\big)$$

funkcji na Γ o wartościach zespolonych (ze zdefiniowanymi punktowo: sumą $\dot{+}$, przeciwnością $\dot{-}(\cdot)$ i działaniem ciała skalarów $\odot$) jest wyposażona w naturalną strukturę hermitowską

$$(\cdot|\cdot)_\Gamma \;:\; \mathbb{C}^\Gamma \times \mathbb{C}^\Gamma \longrightarrow \mathbb{C} \;:\; (F,G) \longmapsto \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma\in\Gamma} \overline{F(g)} \cdot G(g)\,.$$

(3) **Zbiór $\widehat{\Gamma}$ klas Γ-ekwiwariantnego izomorfizmu (tj. równoważności) reprezentacji nieprzywiedlnych grupy Γ jest równoliczny ze zbiorem**

$$\Gamma/\mathrm{Ad}\,\Gamma = \{\ \mathrm{Ad}_\Gamma(\gamma) \quad | \quad \gamma \in \Gamma\ \}$$

klas sprzężoności Γ, więc – w szczególności – skończony, co wynika z tego, że stowarzyszone z klasami $[\pi]_\sim \in \widehat{\Gamma}$, $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}\big(\Gamma, \mathrm{GL}(\mathcal{V}_\pi;\mathbb{C})\big)$ charaktery

$$\chi_{[\pi]_\sim} \;:\; \Gamma \longrightarrow \mathbb{C} \;:\; \gamma \longmapsto \mathrm{tr}_{\mathcal{V}_\pi}\left(\pi(\gamma)\right)$$

tworzą bazę podprzestrzeni funkcji klas

$$\mathbb{C}^\Gamma_{\mathrm{kl}} = \{\ F \in \mathbb{C}^\Gamma \quad | \quad \forall_{\gamma\in\Gamma} \;:\; \mathrm{Ad}^*_\gamma F = F\ \}$$

ortonormalną względem $(\cdot|\cdot)_\Gamma$,

$$(\chi_{[\pi_1]_\sim}|\chi_{[\pi_2]_\sim})_\Gamma = \delta_{[\pi_1]_\sim,[\pi_2]_\sim}\,.$$

Konstatacja ta nadaje sens rozmaitym wyrażeniom wypisywanym poniżej, w których pojawia się suma wyrażeń indeksowanych elementami $\widehat{\Gamma}$.

(4) Wymiary $d_\pi := \dim \pi$ reprezentacji nieprzywiedlnych Γ spełniają tożsamość

$$\sum_{[\pi]_\sim\in\widehat{\Gamma}} d_\pi^2 = |\Gamma|\,. \tag{2}$$

(5) **Rodzina funkcji**[1]

$$\{\ \pi_{ij} := \sqrt{d_\pi}\,\big(e_{\pi,i}|\pi(\cdot)e_{\pi,j}\big)_\pi \in \mathbb{C}^\Gamma \quad | \quad i,j \in \overline{1,d_\pi}\,, \quad [\pi]_\sim \in \widehat{\Gamma}\ \}$$

tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{C}^\Gamma$ ortonormalną względem $(\cdot|\cdot)_\Gamma$,

$$(\pi_{ij}|\pi'_{kl})_\Gamma = \delta_{[\pi]_\sim,[\pi']_\sim}\delta_{i,k}\,\delta_{j,l}\,.$$

(6) Operator P_π rzutu ortogonalnego na składnik $\bigoplus_{i=1}^{m_\pi} \mathcal{V}_\pi$, $m_\pi \in \mathbb{N}$ w sumie prostej

$$\mathcal{V} := \bigoplus_{[\pi]_\sim\in\widehat{\Gamma}} \bigoplus_{i=1}^{m_\pi} \mathcal{V}_\pi\,,$$

będącej nośnikiem reprezentacji

$$\pi_\oplus = \bigoplus_{[\pi]_\sim\in\widehat{\Gamma}} \bigoplus_{i=1}^{m_\pi} \pi$$

jest dany wzorem

$$\mathrm{P}_\pi = \frac{d_\pi}{|\Gamma|} \sum_{\gamma\in\Gamma} \overline{\chi_{[\pi]_\sim}(\gamma)} \dot{\triangleright} \pi_\oplus(\gamma)\,. \tag{3}$$

Ten punkt nie był wprost dowodzony w trakcie wykładu, stanowi on wszakże prosty wniosek z wcześniejszych rozważań, którego okazanie pozostawiamy uważnemu Czytelnikowi jako ćwiczenie.

[1]Zwracamy uwagę Czytelnika na niewinną zmianę notacji wzgl. reszty wykładu, polegającą na transpozycji indeksów bazowych niesionych przez elementy macierzowe dowolnego endomorfizmu. Zmiana ta nie zmienia w sposób jakościowy wniosków z dotychczasowych dociekań, które cytujemy we wprowadzeniu, okaże się natomiast wygodniejszą od tej wprowadzonej uprzednio w konkretnych rachunkach prowadzonych poniżej.

2. Konstrukcja właściwa

Punktem wyjścia do szczegółowej dyskusji struktury algebraicznej na zbiorze $\mathbb{C}^\Gamma$ jest wygodny wybór bazy – tę możemy przyjąć w postaci

$$\mathbb{C}^\Gamma = \langle\, \delta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma \,\rangle\,, \qquad \delta_\gamma \;:\; \Gamma \longrightarrow \mathbb{C} \;:\; \gamma' \longmapsto \begin{cases} (1,0) \equiv 1 & \text{dla } \gamma' = \gamma \\ (0,0) \equiv 0 & \text{w p.p.} \end{cases}\,,$$

zauważywszy, że dowolna funkcja $F \in \mathbb{C}^\Gamma$ spełnia tożsamość

$$F = \sum_{\gamma \in \Gamma} F(\gamma) \odot \delta_\gamma\,.$$

Obok standardowego punktowego iloczynu funkcji na $\mathbb{C}^\Gamma$ można określić dodatkową operację binarną, a mianowicie

Definicja 1. W przyjętych wcześniej oznaczeniach **splot funkcji** (na grupie skończonej) to odwzorowanie

$$\star \;:\; \mathbb{C}^\Gamma \times \mathbb{C}^\Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^\Gamma \;:\; (F,G) \longmapsto \sum_{\gamma \in \Gamma} F(\gamma) \odot \ell^*_{\gamma^{-1}} G\,,$$

zadane w terminach lewego działania regularnego Γ (na sobie),

$$\ell_\cdot \;:\; \Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{Grp}}(\Gamma) \;:\; \gamma \longmapsto \gamma\,\cdot\,,$$

czyli – mówiąc wprost –

$$F \star G(\gamma) = \sum_{\alpha \in \Gamma} F(\alpha) \cdot G(\alpha^{-1}\gamma) \equiv \sum_{\alpha \in \Gamma} F(\gamma\alpha^{-1}) \cdot G(\alpha)\,.$$

O tym, jak naturalną jest wprowadzona powyżej operacja algebraiczna, przekonuje

Stwierdzenie 1. Splot funkcji indukuje na zbiorze generującym

$$\Delta^\Gamma := \{\delta_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset \mathbb{C}^\Gamma$$

strukturę grupy kanonicznie izomorficznej z grupą Γ.

Dowód: Zauważmy przede wszystkim, że działanie $\star$ nie wyprowadza poza Δ^Γ,

$$\forall_{\gamma \in \Gamma} \;:\; \delta_\alpha \star \delta_\beta(\gamma) = \sum_{\theta \in \Gamma} \delta_\alpha(\gamma\theta^{-1}) \cdot \delta_\beta(\theta) = \delta_\alpha(\gamma\beta^{-1}) \equiv \delta_{\alpha\beta}(\gamma) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \delta_\alpha \star \delta_\beta = \delta_{\alpha\beta}\,.$$

Z powyższej równości wynikają natychmiast tożsamości

$$\delta_\gamma \star \delta_e = \delta_\gamma = \delta_e \star \delta_\gamma\,,$$

które identyfikują funkcję δ_e jako element neutralny operacji $\star$. Implikuje ona także relację

$$\delta_\gamma^{-1} = \delta_{\gamma^{-1}}\,.$$

Ostatecznie zatem stwierdzamy istnienie postulowanej struktury grupy

$$(\Delta^\Gamma, \star, \mathrm{Inv}^*, \bullet \longmapsto \delta_e)$$

i bez trudu wskazujemy izomorfizm grup, o którym mowa w tezie stwierdzenia,

$$\delta_\cdot \;:\; \Gamma \xrightarrow{\cong} \Delta_\Gamma \;:\; \gamma \longmapsto \delta_\gamma$$

□

Udokumentowawszy w ten (elementarny) sposób naturalność wprowadzonej uprzednio całkowicie *ad hoc* operacji splotu, możemy następnie sformułować

Definicja 2. W przyjętych wcześniej oznaczeniach **algebra splotowa** na grupie Γ to unitalna algebra łączna nad ciałem $\mathbb{C}$ określona jako

$$\big(\mathbb{C}(\Gamma) \equiv \mathbb{C}^\Gamma, \dot{+}, \dot{-}(\cdot), \bullet \longmapsto 0; \star, \bullet \longmapsto \delta_e\big)\,.$$

Nie jest to jeszcze właściwy obiekt naszych dalszych rozważań – ten otrzymujemy wykorzystując istnienie dwóch antyinwolucji: Inv na Γ i sprzężenia zespolonego na $\mathbb{C}$ do dalszego wzbogacenia struktury algebraicznej. Zdefiniujmy w tym celu jawnie anty-$\mathbb{C}$-liniowe odwzorowanie

$$\ddagger \ : \ \mathbb{C}(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{C}(\Gamma) \ : \ F \longmapsto \overline{\mathrm{Inv}^* F}\,,$$

przy czym używamy tu oznaczenia $\overline{F}(\gamma) \coloneqq \overline{F(\gamma)}$. Łatwo widać, że jest ono antyinwolucją,

$$\begin{aligned}(F \star G)^\ddagger(\gamma) \quad &\equiv \quad \overline{(F \star G)}(\gamma^{-1}) = \sum_{\alpha \in \Gamma} \overline{F(\gamma^{-1}\alpha^{-1})} \cdot \overline{G(\alpha)} \equiv \sum_{\alpha\gamma \in \Gamma} \overline{F(\gamma^{-1}\alpha^{-1})} \cdot \overline{G(\alpha\gamma\gamma^{-1})} \\ &= \quad \sum_{\beta \in \Gamma} F^\ddagger(\beta) \cdot G^\ddagger(\gamma\beta^{-1}) \equiv (G^\ddagger \star F^\ddagger)(\gamma)\,.\end{aligned}$$

Warunek niezwyrodnienia dla $F \neq 0$ sprawdzamy w rachunku

$$(F^\ddagger \star F)(e) = \sum_{\gamma \in \Gamma} F^\ddagger(e\gamma^{-1}) \cdot F(\gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \overline{F(\gamma)} \cdot F(\gamma) \equiv \sum_{\gamma \in \Gamma} |F(\gamma)|^2 \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad F^\ddagger \star F \neq 0\,.$$

Formalizacja powyższych obserwacji wymaga

Definicja 3. Algebrę $\mathfrak{A}$ nad ciałem $\mathbb{C}$ (z mnożeniem $\cdot_{\mathfrak{A}}$) określamy mianem **$\ast$-algebry (nad $\mathbb{C}$)**, jeśli jest dane odwzorowanie $\ast \ : \ \mathfrak{A} \circlearrowleft \ : \ a \longmapsto a^*$, zwane **inwolucją**, o własnościach

- $\forall_{\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{C}} \ \forall_{a_1,a_2 \in \mathfrak{A}} \ : \ (\lambda_1 \triangleright a_1 + \lambda_2 \triangleright a_2)^* = \overline{\lambda_1} \triangleright a_1^* + \overline{\lambda_2} \triangleright a_2^*$ (anty-$\mathbb{C}$-liniowość);
- $\forall_{a_1,a_2 \in \mathfrak{A}} \ : \ (a_1 \cdot_{\mathfrak{A}} a_2)^* = a_2^* \cdot_{\mathfrak{A}} a_1^*$ (antymultyplikatywność);
- $\ast \circ \ast = \mathrm{id}_{\mathfrak{A}}$ (inwolutywność);
- $\forall_{a \in \mathfrak{A}} \ : \ (\ a \neq 0_{\mathfrak{A}} \implies a^* \cdot_{\mathfrak{A}} a \neq 0 \ )$ (niezwyrodnienie).

Homomorfizm $\ast$-algebr (albo inaczej **$\ast$-homomorfizm**) $\mathfrak{A}_A, \ A \in \{1,2\}$ (o odnośnych inwolucjach $\ast_A$) to taki homomorfizm algebr $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$, który spełnia warunek $\chi \circ \ast_1 = \ast_2 \circ \chi$.

$\ast$-Algebry (nad $\mathbb{C}$) wraz z odnośnymi $\ast$-homomorfizmami tworzą **kategorię $\ast$-algebr (nad $\mathbb{C}$)**, którą będziemy oznaczać symbolem $\ast\mathbf{Alg}_{\mathbb{C}}$.

Przykłady 1.
Niechaj V będzie dowolną (skończenie wymiarową) przestrzenią unitarną nad $\mathbb{C}$, tj. przestrzenią $\mathbb{C}$-liniową wyposażoną w iloczyn skalarny (czyli formę półtoraliniową niezwyrodniałą) $(\cdot|\cdot)$. Wówczas sprzężenie hermitowskie $\dagger$ względem $(\cdot|\cdot)$ określa na algebrze $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ endomorfizmów V (z superpozycją jako mnożeniem) naturalną strukturę $\ast$-algebry, którą będziemy oznaczać symbolem $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V, \dagger)$.

Jako wniosek z naszych ostatnich rachunków możemy sformułować kluczową

Definicja 4. W przyjętych wcześniej oznaczeniach **algebra grupowa** na grupie Γ to unitalna $\star$-algebra łączna nad $\mathbb{C}$ powstała z algebry splotowej przez wyróżnienie inwolucji $\ddagger$, tj. dana w postaci

$$\big(\mathbb{C}(\Gamma), \dot{+}, \dot{-}(\cdot), \bullet \longmapsto 0; \star, \bullet \longmapsto \delta_e; \ddagger\big)\,.$$

O naturalności i strukturalnym charakterze konstrukcji algebry grupowej zaświadcza

Twierdzenie 1. W przyjętych wcześniej oznaczeniach przyporządkowanie $\Gamma \longmapsto \mathbb{C}(\Gamma)$ ma charakter funktorialny, tzn. istnieje funktor kowariantny

$$\mathbb{C}(\cdot) \ : \ \mathrm{Grp}^{<\infty} \longrightarrow \star\mathrm{Alg}_{\mathbb{C}}$$

którego składowa obiektowa realizuje rzeczone przyporządkowanie.

<u>*Dowód:*</u> W pierwszej kolejności dowolnemu homomorfizmowi grup (skończonych) $\chi : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ przypiszemy $\star$-homomorfizm $\mathbb{C}(\chi) : \mathbb{C}(\Gamma_1) \longrightarrow \mathbb{C}(\Gamma_2)$ odnośnych algebr grupowych. Ten jest w szczególności odwzorowaniem $\mathbb{C}$-liniowym, wystarczy przeto zapostulować jego postać na bazie,

$$\mathbb{C}(\chi)(\delta_\gamma) \coloneqq \delta_{\chi(\gamma)}\,,$$

a następnie sprawdzić, czy otrzymany tą drogą jedyny homomorfizm przestrzeni $\mathbb{C}$-liniowych (oznaczany przez nas tym samym symbolem)

$$\mathbb{C}(\chi)(F) = \sum_{\gamma\in\Gamma} F(\gamma) \odot \delta_{\chi(\gamma)}$$

spełnia tożsamość

$$\mathbb{C}(\chi)(F \star_1 G) = \mathbb{C}(\chi)(F) \star_2 \mathbb{C}(\chi)(G)\,.$$

O tym, że tak w istocie jest, przekonujemy się porównując rezultat poniższego rachunku

$$\begin{aligned}\mathbb{C}(\chi)(F \star_1 G)(\gamma) &= \sum_{\alpha\in\Gamma_1} (F \star_1 G)(\alpha)\cdot\delta_{\chi(\alpha)}(\gamma) = \sum_{\alpha\in\chi^{-1}(\{\gamma\})} (F \star_1 G)(\alpha) \\ &= \sum_{\alpha\in\chi^{-1}(\{\gamma\})} \sum_{\beta\in\Gamma_1} F(\alpha\beta^{-1})\cdot G(\beta)\end{aligned}$$

z tym otrzymanym w rachunku

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{C}(\chi)(F) \star_2 \mathbb{C}(\chi)(G)\right)(\gamma) &= \sum_{\alpha,\beta\in\Gamma_1} F(\alpha)\cdot G(\beta)\cdot\left(\delta_{\chi(\alpha)} \star_2 \delta_{\chi(\beta)}\right)(\gamma) = \sum_{\alpha,\beta\in\Gamma_1} F(\alpha)\cdot G(\beta)\cdot\delta_{\chi(\alpha\beta)}(\gamma) \\ &\equiv \sum_{\beta\in\Gamma_1}\sum_{\alpha\beta\in\Gamma_1} F(\alpha\beta\beta^{-1})\cdot G(\beta)\cdot\delta_{\chi(\alpha\beta)}(\gamma) \\ &= \sum_{\beta\in\Gamma_1}\sum_{\alpha\beta\in\chi^{-1}(\{\gamma\})} F(\alpha\beta\beta^{-1})\cdot G(\beta)\,,\end{aligned}$$

w którym przywołaliśmy Stw. 1. Skoro też

$$\begin{aligned}\mathbb{C}(\chi)(F^{\ddagger_1})(\gamma) &= \sum_{\alpha\in\Gamma_1} F^{\ddagger_1}(\alpha)\cdot\delta_{\chi(\alpha)}(\gamma) = \sum_{\alpha\in\chi^{-1}(\{\gamma\})} \overline{F(\alpha^{-1})} \equiv \sum_{\alpha^{-1}\in\chi^{-1}(\{\gamma^{-1}\})} \overline{F(\alpha^{-1})} \\ &= \sum_{\beta\in\Gamma_1} \overline{F(\beta)}\cdot\delta_{\chi(\beta)}(\gamma^{-1}) \equiv \overline{\sum_{\beta\in\Gamma_1} F(\beta)\cdot\delta_{\chi(\beta)}(\gamma^{-1})} = \mathbb{C}(\chi)(F)^{\ddagger_2}(\gamma)\,,\end{aligned}$$

to jest jasnym, że $\mathbb{C}(\chi)$ jest $\star$-homomorfizmem algebr grupowych. Wystarczy teraz upewnić się, że przyporządkowanie $\chi \longmapsto \mathbb{C}(\chi)$ ma następujące własności

$$\mathbb{C}(\chi_2\circ\chi_1) = \mathbb{C}(\chi_2)\circ\mathbb{C}(\chi_1)\,,\qquad \mathbb{C}(\mathrm{id}_\Gamma) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}(\Gamma)}\,,\tag{4}$$

z których pierwsza została zapisana dla dowolnych $\chi_n \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}^{<\infty}}(\Gamma_n,\Gamma_{n+1})$, $n \in \{1,2\}$. Oba sprawdzamy bez trudu na bazie dziedziny,

$$\mathbb{C}(\chi_2\circ\chi_1)(\delta_\gamma) = \delta_{(\chi_2\circ\chi_1)(\gamma)} \equiv \delta_{\chi_2(\chi_1(\gamma))} = \mathbb{C}(\chi_2)(\delta_{\chi_1(\gamma)}) = \mathbb{C}(\chi_2)\big(\mathbb{C}(\chi_1)(\delta_\gamma)\big) \equiv \big(\mathbb{C}(\chi_2)\circ\mathbb{C}(\chi_1)\big)(\delta_\gamma)\,,$$

$$\mathbb{C}(\mathrm{id}_\Gamma)(\delta_\gamma) = \delta_{\mathrm{id}_\Gamma(\gamma)} = \delta_\gamma \equiv \mathrm{id}_{\mathbb{C}(\Gamma)}(\delta_\gamma)\,.$$

Odwzorowanie $\mathbb{C}(\cdot)$ jest zatem – w istocie – funktorem kowariantnym. □

Zwięzłe wysłowienie strukturalnych własności przyporządkowania algebr grupowych grupom wymagało od nas użycia konstrukcji z teorii kategorii stanowiącej naturalną abstrakcję pojęcia reprezentacji grupy, czyli funktora. Wychodząc od tej obserwacji możemy antycypować, dokąd zaprowadzi nas próba uzwarcenia, w tym samym duchu kategorialnym, opisu mechanizmu indukcji reprezentacji algebr grupowych z reprezentacji odnośnych grup – ten szlak rozumowania zaprowadzi nas nieuchronnie do kategorii, której obiektami będą kategorie (takie jak kategoria reprezentacji unitarnych danej grupy) i której morfizmami będą funktory, o relacjach ustalanych za pośrednictwem odwzorowań naturalnych. Substancji do wypowiedzianych tu skojarzeń dostarcza wykład [Sus23].

3. Reprezentacje

Tytułem przygotowania bazy pojęciowej pod dyskusję mechanizmu indukcji reprezentacji algebry grupowej z reprezentacji odnośnej grupy wyabstrahujmy z definicji unitarnej reprezentacji grupy strukturę pewnego szczególnego funktora kontrawariantnego.

Definicja 5. W przyjętych wcześniej oznaczeniach **kategoria reprezentacji unitarnych grupy** Γ to (mała) kategoria $\mathrm{URep}(\Gamma)$, której obiektami są reprezentacje unitarne Γ, morfizmami zaś – Γ-ekwiwariantne odwzorowania unitarne między ich nośnikami.

Analogicznie określamy

Definicja 6. Kategoria $\star$-reprezentacji $\star$-algebry $\mathfrak{A}$ to (mała) kategoria $\star\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$, której obiektami są $\star$-reprezentacje $\mathfrak{A}$, tj. $\star$-homomorfizmy $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}, \dagger)$, morfizmami zaś – $\mathfrak{A}$-ekwiwariantne odwzorowania unitarne między ich nośnikami.

Możemy już teraz wyartykułować ważne stwierdzenie porządkujące naszą dotychczasową wiedzę.

Stwierdzenie 2. W przyjętych wcześniej oznaczeniach przyporządkowania $\Gamma \longmapsto \mathrm{URep}(\Gamma)$ i $\mathfrak{A} \longmapsto \star\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$ mają charakter funktorialny, tj. istnieją funktory *kontra*wariantne

$$\mathrm{URep} \;:\; \mathrm{Grp}^{<\infty} \longrightarrow \mathrm{Cat}\,, \qquad\qquad \star\mathrm{Rep} \;:\; \star\mathrm{Alg}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{Cat}$$

z kategorii grup skończonych wzgl. $\star$-algebr nad $\mathbb{C}$ w kategorię Cat wszystkich kategorii[2], których składowe obiektowe realizują odnośne przyporządkowania.

Dowód: W ramach konstruktywnego dowodu tezy stwierdzenia stowarzyszymy z dowolnymi homomorfizmami: $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}^{<\infty}}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ (grup skończonych) oraz $\xi \in \mathrm{Hom}_{\star\mathrm{Alg}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ ($\star$-algebr) morfizmy w Cat, czyli funktory

$$\mathrm{URep}(\chi) \;:\; \mathrm{URep}(\Gamma_2) \longrightarrow \mathrm{URep}(\Gamma_1)$$

oraz – odpowiednio –

$$\star\mathrm{Rep}(\xi) \;:\; \star\mathrm{Rep}(\mathfrak{A}_2) \longrightarrow \star\mathrm{Rep}(\mathfrak{A}_1)\,,$$

i to w taki sposób, aby homomorfizmom identycznościowym id_Γ wzgl. $\mathrm{id}_{\mathfrak{A}}$ były przyporządkowane (endo)funktory identycznościowe $\mathrm{id}_{\mathrm{URep}(\Gamma)}$ wzgl. $\mathrm{id}_{\star\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})}$ oraz by dla dowolnych par homomorfizmów $\chi_n \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}^{<\infty}}(\Gamma_n, \Gamma_{n+1})$, $n \in \{1,2\}$ wzgl. $\xi_n \in \mathrm{Hom}_{\star\mathrm{Alg}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}_{n+1})$, $n \in \{1,2\}$ zachodziły relacje

$$\mathrm{URep}(\chi_2 \circ \chi_1) = \mathrm{URep}(\chi_1) \diamond \mathrm{URep}(\chi_2)$$

wzgl.

$$\star\mathrm{Rep}(\xi_2 \circ \xi_1) = \star\mathrm{Rep}(\xi_1) \diamond \star\mathrm{Rep}(\xi_2)\,,$$

w których zapisie użyliśmy symbolu $\diamond$ dla oznaczenia złożenia funktorów. Postulujemy przeto, dla dowolnych $\rho_i \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}\big(\Gamma_2, \mathrm{U}(\mathcal{V}_i, (\cdot|\cdot)_i)\big)$ i $R_i \in \mathrm{Hom}_{\star\mathrm{Alg}_{\mathbb{C}}}\big(\mathfrak{A}_2, \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}_i, \dagger_i)\big)$, $i \in \{1,2\}$ (dla pewnych iloczynów skalarnych $(\cdot|\cdot)_i$ i odnośnych sprzężeń hermitowskich $\dagger_i$ na przestrzeniach $\mathbb{C}$-liniowych $\mathcal{V}_i$),

$$(\mathcal{V}_i, \rho_i) \longmapsto (\mathcal{V}_i, \rho_i \circ \chi) \qquad \text{(składowa obiektowa)}$$

$$\mathrm{URep}(\chi) \;:\; \left(\begin{array}{c} (\mathcal{V}_1, \rho_1) \xrightarrow{\psi} (\mathcal{V}_2, \rho_2) \\ (\ \forall_{\gamma \in \Gamma_2} \;:\; \psi \circ \rho_1(\gamma) = \rho_2(\gamma) \circ \psi\ ) \end{array} \right) \longmapsto \left((\mathcal{V}_1, \rho_1 \circ \chi) \xrightarrow{\psi} (\mathcal{V}_2, \rho_2 \circ \chi) \right),$$

(składowa morfizmowa)

[2] Jej obiektami są kategorie, morfizmami zaś – funktorialne między nimi odwzorowania.

oraz

$$(\mathcal{V}_i, R_i) \longmapsto (\mathcal{V}_i, R_i \circ \xi) \qquad \text{(składowa obiektowa)}$$

$$\star\mathrm{Rep}(\xi)\ :\ \left(\begin{array}{c} (\mathcal{V}_1, R_1) \xrightarrow{\ \zeta\ } (\mathcal{V}_2, R_2) \\ (\ \forall_{X \in \mathfrak{A}_2}\ :\ \zeta \circ R_1(X) = R_2(X) \circ \zeta\ ) \end{array}\right) \longmapsto \left(\ (\mathcal{V}_1, R_1 \circ \xi) \xrightarrow{\ \zeta\ } (\mathcal{V}_2, R_2 \circ \xi)\ \right)\ .$$

$$\text{(składowa morfizmowa)}$$

Jako że, w rzeczy samej, $\rho_i \circ \chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}\big(\Gamma_1, \mathrm{U}(\mathcal{V}_i, (\cdot|\cdot)_i)\big)$ (złożenie homomorfizmów grup jest homomorfizmem grup) i $R_i \circ \xi \in \mathrm{Hom}_{\star\mathbf{Alg}_{\mathbb{C}}}\big(\mathfrak{A}_1, \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}_i, \dagger_i)\big)$ (złożenie $\star$-homomorfizmów jest $\star$-homomorfizmem), a nadto

$$\forall_{\gamma \in \Gamma_1}\ :\ \psi \circ (\rho_1 \circ \chi)(\gamma) = (\rho_2 \circ \chi)(\gamma) \circ \psi\,, \qquad \forall_{X \in \mathfrak{A}_1}\ :\ \zeta \circ (R_1 \circ \xi)(X) = (R_2 \circ \xi)(X) \circ \zeta\,,$$

widzimy, że obie powyższe definicje mają sens. Kontrawariantny charakter tych przyporządkowań jest oczywisty, oto bowiem – np. – (oznaczenia jak w Równości (4), a do tego $\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}\big(\Gamma_3, \mathrm{U}(\mathcal{V}, (\cdot|\cdot))\big)$ dla pewnego iloczynu skalarnego $(\cdot|\cdot)$ na przestrzeni $\mathbb{C}$-liniowej $\mathcal{V}$)

$$\begin{aligned} \mathrm{URep}(\chi_2 \circ \chi_1)(\mathcal{V}, \rho) &= \big(\mathcal{V}, \rho \circ (\chi_2 \circ \chi_1)\big) \equiv \big(\mathcal{V}, (\rho \circ \chi_2) \circ \chi_1\big) = \mathrm{URep}(\chi_1)(\mathcal{V}, \rho \circ \chi_2) \\ &= \mathrm{URep}(\chi_1)\,(\mathrm{URep}(\chi_2)(\mathcal{V}, \rho)) \equiv \mathrm{URep}(\chi_1) \diamond \mathrm{URep}(\chi_2)(\mathcal{V}, \rho) \end{aligned}$$

(dowód dla $\star\mathbf{Alg}_{\mathbb{C}}$ jest w pełni analogiczny, a sama własność jest trywialnie dziedziczona przez składowe morfizmowe funktorów). I wreszcie, wprost z definicji

$$\mathrm{URep}(\mathrm{id}_\Gamma) \equiv \mathrm{id}_{\mathrm{URep}(\Gamma)}\,, \qquad \star\mathrm{Rep}(\mathrm{id}_{\mathfrak{A}}) \equiv \mathrm{id}_{\star\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})}\,,$$

co kończy dowód funktorialności przyporządkowań $\Gamma \longmapsto \mathrm{URep}(\Gamma)$ i $\mathfrak{A} \longmapsto \star\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$. $\square$

W obecności trzech wprowadzonych tutaj funktorów układających się w diagram trójkątny

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{Grp}^{<\infty} \arrow[dl, "\mathbb{C}(\cdot)"'] \arrow[dr, "\mathrm{URep}"] & \\ \star\mathbf{Alg}_{\mathbb{C}} \arrow[rr, "\star\mathrm{Rep}"'] & & \mathbf{Cat} \end{tikzcd}$$

pojawia się naturalne pytanie o relację między funktorami URep i $\star\mathrm{Rep} \diamond \mathbb{C}(\cdot)$. Prostej odpowiedzi na nie dostarcza

Twierdzenie 2. W przyjętych wcześniej oznaczeniach istnieje transformacja naturalna

$$\mathbb{C}.\langle\cdot\rangle\ :\ \mathrm{URep} \Longrightarrow \star\mathrm{Rep} \diamond \mathbb{C}(\cdot)\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Musimy wykazać istnienie rodziny morfizmów (czyli funktorów *ko*wariantnych)

$$\{\ \mathbb{C}_\Gamma\,\langle\cdot\rangle \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}\big(\mathrm{URep}(\Gamma), \star\mathrm{Rep}\big(\mathbb{C}(\Gamma)\big)\big)\ \}_{\Gamma \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Grp}^{<\infty})}\,,$$

spełniających dla dowolnego $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}^{<\infty}}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ tożsamości[3]

(5)
$$\mathbb{C}_{\Gamma_1}\,\langle\cdot\rangle \diamond \mathrm{URep}(\chi) = \star\mathrm{Rep}\big(\mathbb{C}(\chi)\big) \diamond \mathbb{C}_{\Gamma_2}\,\langle\cdot\rangle\,.$$

Składowa obiektowa takowego funktora indukuje $\star$-reprezentację algebry grupowej Γ z zadanej (dowolnie) reprezentacji grupy Γ. Postulujemy ją w najprostszej możliwej postaci, tj. z zachowaniem nośnika reprezentacji:

$$\mathbb{C}_\Gamma\,\langle\cdot\rangle\ :\ (\mathcal{V}, \rho) \longmapsto \big(\mathcal{V}, \mathbb{C}_\Gamma\,\langle\rho\rangle\big)\,,$$

[3]Należy pamiętać o *kontra*wariantnym charakterze funktorów URep i $\star$Rep.

przy czym homomorfizm $\star$-algebr $\mathbb{C}_\Gamma \langle\rho\rangle \in \mathrm{Hom}_{\star\mathrm{Alg}_\mathbb{C}}\big(\mathbb{C}(\Gamma), \mathrm{End}_\mathbb{C}(\mathcal{V}, \dagger)\big)$ zadajemy na bazie dziedziny wzorem

$$\mathbb{C}_\Gamma \langle\rho\rangle (\delta_\gamma) \coloneqq \rho(\gamma)\,,$$

po czym rozszerzamy (w sposób jednoznaczny) do odwzorowania $\mathbb{C}$-liniowego,

$$\mathbb{C}_\Gamma \langle\rho\rangle (F) \equiv \mathbb{C}_\Gamma \langle\rho\rangle \big(\sum_{\gamma\in\Gamma} F(\gamma) \odot \delta_\gamma\big) = \sum_{\gamma\in\Gamma} F(\gamma) \dot{\triangleright} \rho(\gamma)\,.$$

Pozostaje jeszcze sprawdzić tożsamości

$$\mathbb{C}_\Gamma \langle\rho\rangle (F \star G) = \mathbb{C}_\Gamma \langle\rho\rangle (F) \circ \mathbb{C}_\Gamma \langle\rho\rangle (G)$$

oraz

$$\mathbb{C}_\Gamma \langle\rho\rangle (F^\ddagger) = \mathbb{C}_\Gamma \langle\rho\rangle (F)^\dagger\,,$$

co czynimy bez trudu w bezpośrednich rachunkach:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_\Gamma \langle\rho\rangle (F) \circ \mathbb{C}_\Gamma \langle\rho\rangle (G) &= \big(\sum_{\alpha\in\Gamma} F(\alpha) \dot{\triangleright} \rho(\alpha)\big) \circ \big(\sum_{\alpha\in\Gamma} G(\beta) \dot{\triangleright} \rho(\beta)\big) = \sum_{\alpha,\beta\in\Gamma} F(\alpha) \cdot G(\beta) \dot{\triangleright} \rho(\alpha\beta) \\
&= \sum_{\alpha\in\Gamma} \sum_{\alpha\beta\in\Gamma} F(\alpha) \cdot G(\alpha^{-1}\alpha\beta) \dot{\triangleright} \rho(\alpha\beta) \equiv \sum_{\gamma\in\Gamma} \sum_{\alpha\in\Gamma} F(\alpha) \cdot G(\alpha^{-1}\gamma) \dot{\triangleright} \rho(\gamma) \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} (F \star G)(\gamma) \dot{\triangleright} \rho(\gamma) = \mathbb{C}_\Gamma \langle\rho\rangle (F \star G)
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_\Gamma \langle\rho\rangle (F^\ddagger) &= \mathbb{C}_\Gamma \langle\rho\rangle \big(\sum_{\gamma\in\Gamma} \overline{F(\gamma)} \odot \delta_\gamma^\ddagger\big) = \mathbb{C}_\Gamma \langle\rho\rangle \big(\sum_{\gamma\in\Gamma} \overline{F(\gamma)} \odot \delta_{\gamma^{-1}}\big) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \overline{F(\gamma)} \dot{\triangleright} \rho(\gamma^{-1}) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \overline{F(\gamma)} \dot{\triangleright} \rho(\gamma)^\dagger \\
&= \big(\sum_{\gamma\in\Gamma} F(\gamma) \dot{\triangleright} \rho(\gamma)\big)^\dagger \equiv \mathbb{C}_\Gamma \langle\rho\rangle (F)^\dagger\,,
\end{aligned}$$

przy czym przedostatnia równość jest konsekwencją unitarności ρ. Konstrukcję funktora $\mathbb{C}_\Gamma \langle\cdot\rangle$ wieńczy definicja jego składowej morfizmowej (zapisana w konwecji dowodu Stwierdzenia 2)

$$\mathbb{C}_\Gamma \langle\cdot\rangle \;:\; \big(\, (\mathcal{V}_1, \rho_1) \xrightarrow{\;\psi\;} (\mathcal{V}_2, \rho_2)\, \big) \longmapsto \big(\, \big(\mathcal{V}_1, \mathbb{C}_\Gamma \langle\rho_1\rangle\big) \xrightarrow{\;\psi\;} \big(\mathcal{V}_2, \mathbb{C}_\Gamma \langle\rho_2\rangle\big)\, \big)\,,$$

której sensowność wynika wprost z $\mathbb{C}$-liniowości ψ. Jej trywialną konsekwencją są tożsamości

$$\mathbb{C}_\Gamma \langle\psi_2 \circ \psi_1\rangle = \mathbb{C}_\Gamma \langle\psi_2\rangle \circ \mathbb{C}_\Gamma \langle\psi_1\rangle\,, \qquad \mathbb{C}_\Gamma \big\langle \mathrm{id}_{(\mathcal{V},\rho)} \big\rangle = \mathrm{id}_{(\mathcal{V}, \mathbb{C}_\Gamma\langle\rho\rangle)}\,,$$

nieodzowne dla funktorialności $\mathbb{C}_\Gamma \langle\cdot\rangle$.

Skonstruowawszy poszukiwane funktory, sprawdzamy tożsamość (5). Przywołując jawną postać funktorów $\mathrm{URep}(\chi)$ i $\star\mathrm{Rep}(\xi)$, $\xi = \mathbb{C}(\chi)$ z dowodu Stwierdzenia 2, stwierdzamy pożądaną równość składowych obiektowych,

$$\begin{aligned}
\big(\mathbb{C}_{\Gamma_1} \langle\cdot\rangle \diamond \mathrm{URep}(\chi)\big)(\mathcal{V}_i, \rho_i) &= \mathbb{C}_{\Gamma_1} \langle (\mathcal{V}_i, \rho_i \circ \chi) \rangle = \big(\mathcal{V}_i, \mathbb{C}_{\Gamma_1} \langle \rho_i \circ \chi \rangle\big) \equiv \big(\mathcal{V}_i, \mathbb{C}_{\Gamma_2} \langle\rho_i\rangle \circ \mathbb{C}(\chi)\big) \\
&= \star\mathrm{Rep}\big(\mathbb{C}(\chi)\big)\big(\mathcal{V}_i, \mathbb{C}_{\Gamma_2} \langle\rho_i\rangle\big) \equiv \star\mathrm{Rep}\big(\mathbb{C}(\chi)\big) \diamond \mathbb{C}_{\Gamma_2} \langle\cdot\rangle (\mathcal{V}_i, \rho_i)\,,
\end{aligned}$$

zasadzającą się na ciągu trywialnych równości

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_{\Gamma_1} \langle \rho_i \circ \chi \rangle (F) &= \sum_{\gamma\in\Gamma_1} F(\gamma) \dot{\triangleright} \mathbb{C}_{\Gamma_1} \langle \rho_i \circ \chi \rangle (\delta_\gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma_1} F(\gamma) \dot{\triangleright} (\rho_i \circ \chi)(\gamma) \equiv \sum_{\gamma\in\Gamma_1} F(\gamma) \dot{\triangleright} \rho_i\big(\chi(\gamma)\big) \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma_1} F(\gamma) \dot{\triangleright} \mathbb{C}_{\Gamma_2} \langle\rho_2\rangle (\delta_{\chi(\gamma)}) \equiv \mathbb{C}_{\Gamma_2} \langle\rho_2\rangle \big(\sum_{\gamma\in\Gamma_1} F(\gamma) \odot \delta_{\chi(\gamma)}\big) = \big(\mathbb{C}_{\Gamma_2} \langle\rho_2\rangle \circ \mathbb{C}(\chi)\big)(F)\,.
\end{aligned}$$

Identycznościowy charakter składowych morfizmowych wszystkich składanych funktorów czyni składową morfizmową dowodzonej równości oczywistą. □

Na zakończenie spożytkujemy zgromadzoną wiedzę oraz fakty przytoczone w Rozdziale 1 formułując nietrywialne, a zarazem całkowicie konstruktywne

Twierdzenie 3. W przyjętych wcześniej oznaczeniach funktorialny obraz reprezentacji

$$\pi_\oplus = \oplus_{[\pi]_\sim \in \widehat{\Gamma}} \pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}^{<\infty}}\big(\Gamma, \bigoplus_{[\pi]_\sim \in \widehat{\Gamma}} \mathrm{U}(\mathcal{V}_\pi, (\cdot|\cdot)_\pi)\big)$$

względem komponenty obiektowej transformacji naturalnej $\mathbb{C}_\Gamma \langle \cdot \rangle$ z tezy Twierdzenia 2 jest $\star$-izomorfizmem,

$$\mathbb{C}_\Gamma \langle \pi_\oplus \rangle \ : \ \mathbb{C}(\Gamma) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{[\pi]_\sim \in \widehat{\Gamma}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}_\pi, \dagger_\pi)\,,$$

który w połączeniu z (dowolnym) wyborem bazy w każdej z przestrzeni $\mathbb{C}$-liniowych $\mathcal{V}_\pi$ (z odnośnymi sprzężeniami hermitowskimi $\dagger_\pi$) określa konkretną macierzową realizację algebry grupowej wymiaru $|\Gamma|$.

Dowód: $\square$

C.D.N. . . .

Literatura

[Sus23] R. R. Suszek, *"W $15\frac{1}{2}$ strony od teorii grup do teorii kategorii"*, notatki do wykładu z Metod Algebry Wyższej w Fizyce, i wielu innych, 2023.