TEORIA GRUP I

WYKŁADY VI i VII

2023/24

REPREZENTACJE GRUP

G - grupa ; $\mathbb{K}$ - ciało $(\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\})$

V - przestrzeń $\mathbb{K}$-liniowa wymiarowa

$\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$

ew. + struktura (np. unitarna)

Def: REPREZENTACJA GRUPY G TO PARA (V, ϱ) ZŁOŻONA Z

strukturalne działanie G na V

- $V \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}^{<\infty}$
- $\varrho : G \longrightarrow GL(V; \mathbb{K})$ w Grp

$\llcorner \{ m \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \mid \exists m^{-1} \}$

($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ - RZECZYWISTA ; $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ - ZESPOLONA ; CZASEM ROZWAŻAMY TEŻ $\mathbb{K} = \mathbb{H}$: prawe $\mathbb{H}$-moduły)

WYMIAR REPREZENTACJI (V, ϱ) TO $\dim_{\mathbb{K}} V$.

JEŚLI ϱ JEST MONO, TO (V, ϱ) NAZYWAMY WIERNĄ.

PODPRZESTRZEŃ $W \subseteq V$ O WŁASNOŚCI

$$\varrho(G)(W) \subset W$$

OKREŚLAMY MIANEM ϱ-NIEZMIENNICZEJ. PRZY TYM ILEKROĆ $W \in \{\{0_V\}, V\}$, MÓWIMY O TRYWIALNEJ PODPRZESTRZENI ϱ-NIEZMIENNICZEJ. W P.P. W NAZYWAMY NIETRYWIALNĄ.

JEŚLI JEDYNYMI PODPRZESTRZENIAMI ϱ-NIEZM. SĄ V i $\{0_V\}$, TO ϱ NAZYWAMY NIEPRZYWIEDLNĄ.

Def. NIECH (V_A, ϱ_A), $A \in \{1,2\}$ REPREZENTACJE G. SPLATACZ REPREZENTACJI (V_1, ϱ_1) i (V_2, ϱ_2) TO $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ O WŁASNOŚCI

$$\forall g \in G: \quad \chi \circ \varrho_1(g) = \varrho_2(g) \circ \chi .$$

równoważnie odwzorowanie G-ekwiwariantne

ILEKROĆ $\exists \chi^{-1}$, χ OKREŚLAMY MIANEM RÓWNOWAŻNOŚCI REPREZENTACJI, A SAME REPREZENTACJE NAZYWAMY RÓWNOWAŻNYMI I PISZEMY $(V_1, \varrho_1) \sim (V_2, \varrho_2)$ LUB $\varrho_1 \sim \varrho_2$.

E.g., (1) REPREZENTACJA TRYWIALNA

$$\varrho = \mathrm{id}_V .$$

(2) REPREZENTACJA DEFINIUJĄCA

$$\varrho : GL(V;\mathbb{K}) \longrightarrow GL(V;\mathbb{K})$$

$$\stackrel{\text{ozn.}}{\equiv} \mathrm{id}_{GL(V;\mathbb{K})}$$

(3) $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\varrho_n : \underset{\underset{|\cdot|^{-1}(\{1\})}{\shortparallel}}{U(1)} \longrightarrow GL(\mathbb{C};\mathbb{C}) \equiv \mathbb{C}^\times$$

$$: u \longmapsto u^n \triangleright \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$$

(4) REPREZENTACJA PERMUTACYJNA

$$\varrho : G_X \longrightarrow GL(\ell^2(X);\mathbb{C})$$

$$: \sigma \longmapsto (\sigma^{-1})^*$$

$$\vdots$$

$$f \longmapsto f \circ \sigma^{-1}$$

BAZA: $\delta_x \longmapsto \delta_{\sigma(x)}$, $x \in X$

Stw. 1. Niech (V_A, ρ_A), $A \in \{1,2\}$ reprezentacje G i niech $\chi \in \mathrm{Hom}_K(V_1, V_2)$ splatacz. Wówczas $\ker \chi \subseteq V_1$ i $\mathrm{Im}\, \chi \subseteq V_2$ są podprzestrzeniami niezmienniczymi.

D: $v_1 \in \ker \chi \Rightarrow \chi(\rho_1(g)(v_1)) = \rho_2(g)(\chi(v_1))$

$$= \rho_2(g)(0_{V_2}) = 0_{V_2}, \quad g \in G$$

$$v_2 \in \mathrm{Im}\, \chi \Leftrightarrow \exists v_1 \in V_1 : v_2 = \chi(v_1)$$

$$\Downarrow$$

$$\rho_2(g)(v_2) = \rho_2(g)(\chi(v_1))$$

$$= \chi(\rho_1(g)(v_1)) \in \mathrm{Im}\, \chi, \quad g \in G,$$

$\square$

NATURALNE OPERACJE NA REPREZENTACJACH:

(1) (V_α, ρ_α), $\alpha \in A$

$$\rightsquigarrow$$

SUMA PROSTA

$$\left(\bigoplus_{\alpha\in A} V_\alpha, \bigoplus_{\alpha \in A} \rho_\alpha\right)$$

$$\bigoplus_{\alpha\in A} \rho_\alpha : G \longrightarrow GL\left(\bigoplus_{\alpha\in A} V_\alpha ; \mathbb{K}\right)$$

$$\rho_\oplus : g \longmapsto \bigoplus_{\alpha\in A} \rho_\alpha(g),$$

czyli $$\rho_\oplus(g)(v_\alpha) = \left(\rho_\alpha(g)(v_\alpha)\right).$$

(2) (V_A, ρ_A), $A \in \{1,2\}$

$$\rightsquigarrow$$

ILOCZYN TENSOROWY

$$\left(V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2, \rho_1 \otimes \rho_2\right)$$

$$\rho_1 \otimes \rho_2 : G \longrightarrow GL(V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2 ; \mathbb{K}),$$

$$: g \longmapsto \rho_1(g) \otimes \rho_2(g),$$

czyli $(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)(v_1 \otimes_{\mathbb{K}} v_2) = \rho_1(g)(v_1) \otimes_{\mathbb{K}} \rho_2(g)(v_2)$

(3) (V, ϱ) , $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$

$\rightsquigarrow$ DUALIZACJA & REPREZENTACJA KONTRAGREDIENTNA

$(V^*, \check{\varrho})$

Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^* \times V \longrightarrow \mathbb{K}$

DWOISTOŚĆ KANONICZNA

Wówczas $\forall (\varphi, v) \in V^* \times V,\ g \in G$:

$$\langle \check{\varrho}(g)(\varphi), v \rangle := \langle \varphi, \varrho(g^{-1})(v) \rangle$$

tj. $\check{\varrho}(g)(\varphi) = \varphi \circ \varrho(g^{-1})$, czyli

$\check{\varrho}(g) = \varrho(g^{-1})^*$

(4) (V, ϱ) , $V \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$

$\rightsquigarrow$ KOMPLEKSYFIKACJA

$(V^{\mathbb{C}}, \varrho^{\mathbb{C}})$ $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ $\circlearrowleft \mathbb{C} \ni \lambda$

$: v \otimes_{\mathbb{R}} z \longmapsto v \otimes_{\mathbb{R}} \lambda \cdot z$

$$\varrho^{\mathbb{C}} : G \longrightarrow GL(V^{\mathbb{C}}; \mathbb{C})$$
$$: g \longmapsto \varrho(g) \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$$

Def.: REPREZENTACJĘ (V,ϱ) NAZYWAMY W PEŁNI PRZYWIEDLNĄ / ROZKŁADALNĄ, JEŚLI $\exists\, (V_\alpha,\varrho_\alpha)_{\alpha\in A}$:

$$(V,\varrho) \sim \bigoplus_{\alpha\in A} (V_\alpha,\varrho_\alpha)$$

NB: (1) REPREZENTACJA PRZYWIEDLNA (NIE-NIEPRZYW.) MOŻE BYĆ NIEROZKŁADALNA, e.g.,

$$\varrho : \mathbb{R} \to GL(2;\mathbb{R}) : r \mapsto \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MA $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$ NIEZM., ALE

$\neg \exists\, \widetilde{W} : \mathbb{R}^{\times 2} = W \oplus \widetilde{W}$, $\widetilde{W}$ NIEZM.

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\llcorner= \begin{pmatrix} a+r \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 1, \text{ ale wtedy } a+r \overset{!}{=} a$$

$$\Updownarrow$$

$$r = 0.$$

(2) KOMPLEKSYFIKACJA NIEPRZYWIEDLNEJ MOŻE BYĆ PRZYWIEDLNA, e.g.,

$$\rho : U(1) \to GL(2;\mathbb{R}) : e^{i\varphi} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi, & -\sin\varphi \\ \sin\varphi, & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$\rho^{\mathbb{C}}$ MA PRZ. NIEJM.

$$W_\pm := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^{\times 2} \equiv \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi - i\sin\varphi \\ \sin\varphi + i\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \\ ie^{-i\varphi} \end{pmatrix} = e^{-i\varphi}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

— x —

LEMATY SCHURA

TW. 1. NIECHAJ (V_A, ρ_A) - REPREZENTACJE NIEPRZYW.
I NIECH $\chi \in \mathrm{Hom}_K(V_1, V_2)$ - SPLATACZ.
WÓWCZAS $\chi = 0 \ \underline{\vee}\ \chi$ IZO.

D: Z TW. 1 $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}\,\chi$ NIEZM., ALE (V_2, ρ_2) NIEPRZYW.,
ZATEM $\mathrm{Im}\,\chi = \{0_{V_2}\} \ \underline{\vee}\ \mathrm{Im}\,\chi = V_2$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$\underline{\chi = 0}$ $\qquad$ χ EPI

ORAZ $\mathrm{Ker}\,\chi$ NIEZM., ALE (V_1, ρ_1) NIEPRZYW.,
ZATEM $\mathrm{Ker}\,\chi = V_1 \ \underline{\vee}\ \mathrm{Ker}\,\chi = \{0_{V_1}\}$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$\underline{\chi = 0}$ J/W $\qquad$ χ MONO

$$\Downarrow$$

$\underline{\chi \text{ IZO}}$.

$\square$

Tw. 2. NIECHAJ $V \in \mathrm{Obvect}_{\mathbb{C}}$ i (V, ϱ) NIEPRZYW.

ORAZ NIECH $\chi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ - SPLATACZ $(V, \varrho)^{\circlearrowleft}$.

WÓWCZAS $\exists \lambda \in \mathbb{C} : \chi = \lambda \triangleright \mathrm{id}_V$.

D: $\mathbb{C}$ JEST ALG. DOMKN. $\Rightarrow$ $\mathrm{Sp}\,\chi \neq \emptyset$.

NIECH $\lambda \in \mathrm{Sp}\,\chi$ i $v \in V_\lambda(\chi)$, A WTEDY

$$\chi(\varrho(g)(v)) = \varrho(g)(\chi(v)) = \varrho(g)(\lambda \triangleright v)$$

$$= \lambda \triangleright \varrho(g)(v), \text{ czyli}$$

$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,\chi : V_\lambda(\chi)$ NIEZM., ALE $V_\lambda(\chi) \neq \{0\}$,

ZATEM $V_\lambda(\chi) = V$ Z RACJI NIEPRZYWIEDLNOŚCI

$\Leftrightarrow \chi \equiv \lambda \triangleright \mathrm{id}_V$ $\square$

Tw. 3. NIECHAJ $V_1, V_2 \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^{<\infty}$ i (V_A, ρ_A), $A \in \{1, 2\}$ ORAZ NIECH $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Hom}_K(V_1, V_2)$ SPLATACZE. WÓWCZAS $\exists \lambda \in \mathbb{C} : \chi_2 = \lambda \triangleright \chi_1$.

D: $\chi_1 \neq 0 \underset{\text{Tw. 1.}}{\Longrightarrow} \exists \chi_1^{-1}$

$$\Downarrow$$

$$\chi_1^{-1} : \chi_2 \circ \chi_1^{-1} : (V_1, \rho_1) \circlearrowleft \text{ SPLATACZE}$$

$$\Downarrow \text{ Tw. 2.}$$

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} : \chi_2 \circ \chi_1^{-1} = \lambda \triangleright \mathrm{id}_{V_2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\chi_2 = \lambda \triangleright \chi_1 \quad \square$$

Corollarium

KAŻDA NIEPRZYWIEDLNA ZESPOLONA REPREZENTACJA GRUPY PRZEMIENNEJ JEST JEDNOWYMIAROWA.

D: NIECH $\rho : G \to GL(V; \mathbb{C})$ j/w.

PRZEMIENNOŚĆ $G \implies \forall a, b \in G : \rho(a \cdot b) = \rho(b \cdot a)$

$$\rho(a \cdot b) = \rho(a) \circ \rho(b), \quad \rho(b \cdot a) = \rho(b) \circ \rho(a)$$

$$\Downarrow$$

$\rho(b) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ SPLATA ρ ↺

$$\Downarrow \text{Tw. 2.}$$

$$\forall a \in G \quad \exists \lambda(a) \in \mathbb{C} : \rho(a) = \lambda(a) \circ \mathrm{id}_V.$$

$$\Downarrow$$

NIEPRZYWIEDLNA

$$\Updownarrow$$

$\dim_{\mathbb{C}} V = 1.$ $\square$

(R)

REPREZENTACJE GRUP NA PRZESTRZENIACH UNITARNYCH

MOTYWACJA FIZYCZNA : MECHANIKA KWANTOWA

Def.: PRZESTRZEŃ UNITARNA

TO PARA $(V, (\cdot|\cdot))$ ZŁOŻONA Z

- $V \in \mathrm{Obvect}_{\mathbb{C}}$
- $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$

O WŁASNOŚCIACH :

(PU1) $\forall u,v,w \in V : (u+v|w) = (u|w) + (v|w)$

(PU2) $\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \forall u,v \in V : (\lambda \triangleright u|v) = \lambda \cdot (u|v)$

(PU3) $\forall u,v \in V : (v|u) = \overline{(u|v)}$

(PU4) $\forall v \in V \setminus \{0_V\} : (v|v) > 0$

Reprezentacje unitarne:

Def: Niech $(V,(\cdot|\cdot))$ przestrzeń unitarna i niech (V,ρ) reprezentacja G. Nazwiemy ją **unitarną**, jeżeli

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr] & GL(V;\mathbb{C}) \\ & U(V,(\cdot|\cdot)) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

→ także relacja równoważna

Unitarna równoważność to taka, której splatacz jest odwzorowaniem unitarnym, tj. $X \in Hom_G(V_1, V_2)$:

$$(\cdot|\cdot)_2 \circ (X\times X) = (\cdot|\cdot)_1 .$$

Będziemy ją oznaczać jako $\rho_2 \simeq_u \rho_1$.

E.g., reprezentacja permutacyjna (4) ze str. 3 jest unitarna względem struktury unitarnej

$$\ell^2(X)\times \ell^2(X) \ni (f,g) \mapsto \sum_{x\in X} f(x)\overline{g(x)}$$

ISTOTNIE

$$\left(\rho(\sigma)(f)\,\middle|\,\rho(\sigma)(g)\right) = \sum_{x\in X} f(\sigma^{-1}(x))\,\overline{g(\sigma^{-1}(x))},$$

ALE $\sigma \in G_X$, WIĘC $\sum_{x\in X} \sigma^{-1}(x) = \sum_{x\in X} x$

$$= \sum_{y\in X} f(y)\,\overline{g(y)} = (f|g).$$

O NATURALNOŚCI POJĘCIA RÓWNOWAŻNOŚCI UNITARNEJ W KATEGORII UNITARNEJ OBJEKTA

<u>Tw. 4.</u> NIECHAJ $(V_A, (\cdot|\cdot)_A)$, $A\in\{1,2\}$ PRZESTRZENIE UNITARNE I NIECH (V_A, ρ_A), $A\in\{1,2\}$ REPREZENTACJE UNITARNE. JEŚLI $\rho_2 \sim \rho_1$, TO $\rho_2 \underset{u}{\sim} \rho_1$.

<u>D:</u> NIECH $X \in Hom_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)$ – SPLATACZ ODWRACALNY, WIĘC $Sp X \not\ni 0$.

ROZWAŻMY $\chi^\dagger \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_2, V_1)$:

$$\left(\chi^\dagger \circ \varrho_2(g)(v) \middle| \varrho_1(g)(w)\right)_1$$

$$\equiv \left(\varrho_2(g)(v) \middle| \chi \circ \varrho_1(g)(w)\right)_2$$

$$= \left(\varrho_2(g)(v) \middle| \varrho_2(g) \circ \chi(w)\right)_2$$

$$= \left(v \middle| \chi(w)\right)_2 \quad (\Leftarrow \varrho_2 \text{ UNITARNA!})$$

$$\equiv \left(\chi^\dagger(v) \middle| w\right)_1,$$ ALE TEŻ

$$\left(\chi^\dagger \circ \varrho_2(g)(v) \middle| \varrho_1(g)(w)\right)_1 \quad (\Leftarrow \varrho_1 \text{ UNITARNA})$$

$$= \left(\varrho_1(g)^\dagger \circ \chi^\dagger \circ \varrho_2(g)(v) \middle| w\right)_1,$$

ZATEM WOBEC NIEZWYRODNIENIA $(\cdot|\cdot)_1$ I DOWOLNOŚCI $v \in V_2$ I $w \in V_1$:

$$\varrho_1(g)^\dagger \circ \chi^\dagger \circ \varrho_2(g) = \chi^\dagger \Longleftrightarrow \text{(16)}$$

$\iff \chi^\dagger \circ \varrho_2(g) = \varrho_1(g) \circ \chi^\dagger,$

TJ. $\chi^\dagger$ SPLATA ϱ_2 Z $\varrho_1 \implies$

$\chi^\dagger \circ \chi$ SPLATA ϱ_1 Z $\varrho_1 \implies$

$(\chi^\dagger \circ \chi)^{-1/2}$ (KTÓRY JEST DOBRZE OKREŚLONY)

TAKŻE SPLATA ϱ_1 Z ϱ_1

W TAKIM RAZIE

$U_\chi = \chi \circ (\chi^\dagger \circ \chi)^{-\frac{1}{2}}$ SPLATA ϱ_1 Z ϱ_2.

ALE

$$\left(\chi \circ (\chi^\dagger \circ \chi)^{-1/2}(v) \,\middle|\, \chi \circ (\chi^\dagger \circ \chi)^{-1/2}(w)\right)_2$$

$$= \left(\chi^\dagger \circ \chi \circ (\chi^\dagger \circ \chi)^{-1/2}(v) \,\middle|\, (\chi^\dagger \circ \chi)^{-1/2}(w)\right)_1$$

$$= \left((X^\dagger \circ X)^{-1/2} \circ X^\dagger \circ X \circ (X^\dagger \circ X)^{-1/2}(v) \middle| w \right)_1$$

$= (v|w)_1$, WIĘC U_X UNITARNY. $\square$

ZAUWAŻMY, ŻE

STW. 2. NIECHAJ $(V, (\cdot|\cdot))$ UNITARNA I NIECH (V, ϱ) UNITARNA. JEŚLI $W \leq V$ JEST ϱ-NIEZMIENNICZA, TO TAKŻE $W^\perp$ — II —.

D: WEŹMY $v \in W^\perp$, CZYLI

$$\forall w \in W : (v|w) = 0.$$

WÓWCZAS

$$\forall w \in W \; \forall g \in G : (\varrho(g)(v)|w) = (v|\varrho(g^{-1})(w))$$

ALE $\varrho(g)(W) = W$, ZATEM

$\forall v \in W^{\perp}, g \in G: \varrho(g)(v) \in W^{\perp}$

CZYLI $\varrho(g)(W^{\perp}) \subset W^{\perp}$. $\square$

SIŁĘ ZAŁOŻENIA O UNITARNOŚCI EKSPONUJE

__TW. 5.__ NIECHAJ $(V, (\cdot|\cdot))$ UNITARNA SKOŃCZENIE WYMIAROWA I NIECH (V, ϱ) UNITARNA. WÓWCZAS (V, ϱ) JEST W PEŁNI ROZKŁADALNA.

__D__: JEŚLI V JEST NIEPRZYWIEDLNA, TO TEZA ZACHODZI.

W P.P. NIECH $W \subsetneq V$ ϱ-NIEZMIENNICZA, A WTEDY TAKŻE $W^\perp$ ϱ-NIEZMIENNICZA I $V = W \oplus W^\perp$.

KAŻDA Z NICH JEST ALBO NIEPRZYWIEDLNA, ALBO ROZKŁADA SIĘ NA PODPRZESTRZEŃ WŁAŚCIWĄ ϱ-NIEZMIENNICZĄ I JEJ ϱ-NIEZMIENNICZE DOPEŁNIENIE $\perp$.

PO $<\infty$ LICZBIE KROKÓW – TEZA. $\square$

W KATEGORII UNITARNEJ OBOWIĄZUJE SWOISTA WERSJA LEMATU SCHURA:

<u>TW. 6.</u> NIECHAJ $(V_A, (\cdot|\cdot)_A)$, $A \in \{1,2\}$ – UNITARNE I NIECH (V_A, ϱ_A), $A \in \{1,2\}$ – –"– IRREPY, A $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)$ SPLATA ϱ_1 Z ϱ_2, PRZY CZYM ZAKŁADAMY, ŻE $\chi \neq 0$.

WÓWCZAS $\varrho_2 \underset{U}{\sim} \varrho_1$.

D: $X \neq 0 \Rightarrow X_{1,3,0}$

NA MOCY TW. 1.,

ALE W TAKIM RAZIE

$$\rho_1 \sim \rho_2 ,$$

CO W ŚWIETLE TW. 4.

IMPLIKUJE

$$\rho_1 \underset{U}{\sim} \rho_2 . \quad \square$$

O WYJĄTKOWYM STATUSIE REPREZENTACJI UNITARNYCH W ŚWIECIE GRUP SKOŃCZONYCH PRZEKONUJE NAS...

TW. 7. [O UNITARYZOWALNOŚCI REPREZENTACJI GRUP SKOŃCZONYCH]

NIECHAJ G - GRUPA SKOŃCZONA, $(V, (\cdot|\cdot))$ - PRZESTRZEŃ UNITARNA, (V, ϱ) - REPREZENTACJA G.

ISTNIEJE NA V ILOCZYN SKALARNY, WZGLĘDEM KTÓREGO ϱ JEST UNITARNA.

D: ZDEFINIUJMY

$$(\cdot|\cdot)_G : V \times V \to \mathbb{C}$$

$$: (v, w) \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\varrho(g)(v) | \varrho(g)(w)).$$

W OCZYWISTY SPOSÓB $(\cdot|\cdot)_G$ DZIEDZICZY WŁASNOŚCI $(\cdot|\cdot)$:

(PU1), (PU2), (PU3) – TRYWIALNE

(PU3) NIECH $(v|v)_G = 0$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \underbrace{(\varrho(g)(v)|\varrho(g)(v))}_{\geq 0}$$

$\Leftarrow$

$\forall g \in G: \ (\varrho(g)(v)|\varrho(g)(v)) = 0$

$\Downarrow$

$0 = (\varrho(e)(v)|\varrho(e)(v)) = (v|v) \Rightarrow v = 0.$

PRZY TYM

$\forall h \in G \ \forall v, w \in V:$

$$(\varrho(h)(v) | \varrho(h)(w))_G$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\varrho(g) \circ \varrho(h)(v) | \varrho(g) \circ \varrho(h)(w))$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\rho(gh)(v) \,|\, \rho(gh)(w) \right)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \left(\rho(k)(v) \,|\, \rho(k)(w) \right)$$

$$= (v|w)_G .$$

JEST ZATEM ρ REPREZENTACJĄ $(\cdot|\cdot)_G$-UNITARNĄ. $\square$

COROLLARIUM: KAŻDA REPREZENTACJA GRUPY SKOŃCZONEJ NA SKOŃCZENIE WYMIAROWEJ PRZESTRZENI WEKTOROWEJ JEST W PEŁNI ROZKŁADALNA.

WZGLĘDY FIZYCZNE KAŻĄ NAM ROZSZERZYĆ KLASĘ WYRÓŻNIONYCH REPREZENTACJI GRUP NA ZESPOLONYCH PRZESTRZENIACH WEKTOROWYCH. AŻEBY TO UCZYNIĆ, WPROWADZAMY

Def: NIECH $V \in \mathrm{ob}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$. PRZESTRZEŃ (ZESPOLENIE) SPRZĘŻONA z działaniem $\triangleright_V$ DO V

TO $\overline{V} = V$ (JAKO ZBIÓR)

Z DZIAŁANIEM

$$\mathbb{C} \times \overline{V} \longrightarrow \overline{V} : (\lambda, \bar{v}) \longmapsto \bar{\lambda} \triangleright_V \bar{v}.$$

$\bar{v} \cong v \in V$ jako element $\overline{V}$; $\bar{\lambda} \triangleright_V \bar{v} \equiv \lambda \triangleright_{\overline{V}} v$

DOWOLNEMU $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)$

PRZYPORZĄDKOWUJEMY

$$\overline{\chi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\overline{V_1}, \overline{V_2}) : \overline{\chi}(\bar{v}) := \overline{\chi(v)}$$

PARA (V, α) ZŁOŻONA Z

- $V \in ob\, Vect_{\mathbb{C}}$, $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$
- $\alpha : V \xrightarrow[\mathbb{C}\text{-lin}]{\cong} \bar{V}^*$

O WŁASNOŚCI

$$(pU1) \quad \bar{\alpha}^* = \alpha \qquad (V^{**} \cong V)$$

$$(pU2) \quad (\cdot|\cdot)_\alpha : V \times V \to \mathbb{C}$$

FORMA PSEUDOHERMITOWSKA $: (v, w) \mapsto \langle \bar{v}, \alpha(w) \rangle$

JEST NIEZWYRODNIAŁA, tj.

$$\left(\forall v \in V : (v|w)_\alpha = 0 \right) \Rightarrow w = 0_V$$

OKREŚLAMY MIANEM PRZESTRZENI PSEUDOUNITARNEJ.

JEJ ENDOMORFIZM $\chi \in End_{\mathbb{C}} V$ NAZYWANY PSEUDOUNITARNYM, ILEKROĆ $\chi^{\dagger} = \chi^{-1}$,

GDZIE $\left(\chi^{\dagger}(v) \middle| w\right)_{\alpha} := \left(v \middle| \chi(w)\right)_{\alpha}$.

— x —

UWAGI PORZĄDKUJĄCE:

1° SENSOWNOŚĆ $\chi \mapsto \bar{\chi}$:

DLA DOWOLNYCH $\lambda \in \mathbb{C}$ i $v \in V_1$

JEST $$\bar{\chi}\left(\lambda \triangleright_{\bar{V}_1} \bar{v}\right) \equiv \overline{\chi\left(\lambda \triangleright_{\bar{V}_1} \bar{v}\right)}$$

$$\equiv \overline{\chi\left(\bar{\lambda} \triangleright_{V_1} \bar{v}\right)} = \overline{\bar{\lambda} \triangleright_{V_2} \chi(\bar{v})}$$

$$\equiv \bar{\bar{\lambda}} \triangleright_{\bar{V}_2} \overline{\chi(\bar{v})} = \lambda \triangleright_{\bar{V}_2} \bar{\chi}(\bar{v})$$

2° MOŻEMY UTOŻSAMIĆ $(\overline{V})^* \equiv \overline{V^*}$

$\subseteq : \overline{V}^*$

ISTOTNIE, NIECH $\varphi \in V^*$, CZYLI $\varphi : V \to \mathbb{C}$,

A WTEDY $\overline{\varphi} : \overline{V} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} \equiv \mathbb{C}$ (jako zbiór)

$\subseteq \varphi_i \,\overline{\triangleright}\, \overline{\varepsilon}^i$ $\quad \overline{\varepsilon}^i(\overline{e_j}) = \delta^i_j$

BAZA V, NA KTÓREJ $\overline{\triangleright}$-ROZPINAMY $\overline{V}$

$$\overline{\varphi}(\overline{v}) = \varphi_i \,\overline{\triangleright}\, \overline{\varepsilon}^i(\overline{v^j} \,\overline{\triangleright}\, \overline{e_j})$$

bo $\overline{v} = v^i \triangleright e_i$

$$= \varphi_i \,\overline{\triangleright}\, \overline{\varepsilon^i(v^j \triangleright e_j)}$$

$$= \varphi_i \,\overline{\triangleright}\, \overline{v^j \delta^i_j}$$

$$= \overline{\varphi_i} \cdot \overline{v^i} = \overline{\varphi_i \cdot v^i}$$

$$\overline{\varphi}(\lambda \triangleright \overline{v}) = \overline{\varphi}(\overline{\bar{\lambda} \triangleright v}) = \overline{\varphi}_i \cdot \overline{\lambda \cdot v^i}$$

$$= \bar{\lambda} \cdot \overline{\varphi}_i \overline{v^i} \equiv \bar{\lambda} \cdot \overline{\varphi}(\overline{v})$$

$$\equiv \lambda \,\bar{\cdot}\, \overline{\varphi}(\overline{v}) \quad \left(\equiv \overline{\lambda \cdot \overline{\varphi}(\overline{v})} \right)$$

mnożenie w $\overline{\mathbb{C}}$ ($\equiv \mathbb{C}$ jako zbiór)

$\Downarrow$

$\overline{\varphi}$ JEST $\mathbb{C}$-LINIOWE! NA $\overline{V}$

$\Downarrow$

$$\overline{\varphi} \in (\overline{V})^*$$

—— × ——

3° WARUNEK (pUI) TO WARUNEK SAMOSPRZĘŻONOŚCI MACIERZY α:

NIECH $\alpha : V \longrightarrow \bar{V}^*$

MA MACIERZ $\alpha(e_i) =: \alpha_{ij} \triangleright \varepsilon^j$,

A WTEDY WOBEC $\bar{\alpha} : \bar{V} \longrightarrow \overline{\bar{V}^*} = \overline{\bar{V}}^* \cong V^*$

JEST $\bar{\alpha}^* : V^{**} \longrightarrow \bar{V}^*$

$V^{**} \cong V$ (UTOŻSAMIAMY jedankowo: ev^V)

WARUNEK $\bar{\alpha}^* = \alpha$ MA PRZETO SENS!

JEST $\bar{\alpha}(\bar{e}_i) = \overline{\alpha(e_i)} = \overline{\alpha_{ij} \triangleright \varepsilon^j}$

$= \bar{\alpha}_{ij} \triangleright \bar{\varepsilon}^j$,

30

WOBEC CZEGO $\bar{\alpha}^*(e_i) = \bar{\alpha}^*_{ij} \,\bar{\triangleright}\, \bar{\varepsilon}^j$,

GDZIE $\bar{\alpha}^*_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$ I DOSTAJEMY

WARUNEK $\overline{\alpha_{ji}} \overset{!}{=} \alpha_{ij}$, CZYLI

$$[\alpha]^\dagger = [\alpha]$$

—— X ——

4° WARUNEK (pUI) JEST KONIECZNY I WYSTARCZAJĄCY DO TEGO, BY

$$\forall v, w \in V : \ (v|w)_\alpha = \overline{(w|v)_\alpha} .$$

ISTOTNIE,

$$(e_i|e_j)_\alpha \equiv \langle \bar{e}_i, \alpha(e_j) \rangle = \alpha_{jk} \,\bar{\triangleright}\, \langle \bar{e}_i, \bar{\varepsilon}^k \rangle$$

$$= \alpha_{ji} \,\bar{\triangleright}\, 1 = \alpha_{ji}$$

$$\overset{!}{=} \overline{(e_j|e_i)_\alpha} = \overline{\alpha_{ij}} = \alpha_{ij}$$

5° PRZEPISZEMY NAJPIERW WARUNEK PSEUDOUNITARNOŚCI:

SPRZĘŻENIE: $$(\chi^\dagger(v)|w)_\alpha = (v|\chi(w))_\alpha$$

$$\overline{(w|\chi^\dagger(v))_\alpha} \quad \overline{(\chi(w)|v)_\alpha}$$

$$\langle \bar{w}, \alpha\circ\chi^\dagger(v)\rangle \;\Leftrightarrow\; \stackrel{?}{=} \langle \overline{\chi(w)}, \alpha(v)\rangle$$

$$\equiv \langle \bar{\chi}(\bar{w}), \alpha(v)\rangle$$

$$= \langle \bar{w}, \bar{\chi}^*\circ\alpha(v)\rangle$$

$$\boxed{\chi^\dagger = \alpha^{-1}\circ\bar{\chi}^*\circ\alpha}$$

WOBEC TEGO OPERATOR PSEUDOUNITARNY SPEŁNIA TOŻSAMOŚĆ

$$\boxed{\bar{\chi}^* = \alpha\circ\chi^{-1}\circ\alpha^{-1}} \quad (32)$$

MOŻEMY JUŻ WRÓCIĆ DO ROZWAŻAŃ TEORIOGRUPOWYCH... ZACZYNAMY OD POMOCNICZEGO

<u>TW. 8.</u> $\varrho \sim \check{\varrho} \iff \exists\, \beta : V \times V \to \mathbb{K}$ 2-lin.

- NIEOSOBLIWA
- ϱ-NIEZM.

$(\dim_{\mathbb{K}} V < \infty)$

(OKREŚLA KANON. $\underline{\beta} : V \xrightarrow{\cong} V^*$)

PRZY TYM JEŚLI ϱ NIEPRZYWIEDLNA, $\underline{\beta}^* = \pm \underline{\beta}$ I OKREŚLONA JEDNOZNACZNIE Z DOKŁADNOŚCIĄ DO SKALARA.

<u>D:</u> $\varrho \sim \check{\varrho} \iff \exists\, \underline{\beta} : V \xrightarrow{\cong} V^* :$

$$\forall g \in G : \check{\varrho}(g) = \underline{\beta} \circ \varrho(g) \circ \underline{\beta}^{-1}$$

$$\stackrel{\circledast}{=} \varrho(g^{-1})^*$$

$\Updownarrow$

$$\forall g \in G : \varrho(g)^* \circ \underline{\beta} \circ \varrho(g) = \underline{\beta}$$

$\Downarrow$

$$\langle \varrho(g)(v), \underline{\beta}\circ\varrho(g)(w)\rangle = \langle v, \underline{\beta}(w)\rangle,$$

$\forall\, v,w \in V$ tj. $\beta : V\times V \to \mathbb{K}$

$: (v,w) \mapsto \langle v, \underline{\beta}(w)\rangle$

JEST ϱ-NIEZMIENNICZA,

A PONIEWAŻ $\exists\, \underline{\beta}^{-1}$, WIĘC $\underline{\beta}$ JEST NIEOSOBLIWA.

I ODWROTNIE, KAŻDA TAKA FORMA DEFINIUJE IZOMORFIZM

$$\underline{\beta} : V \xrightarrow{\cong} V^* : w \mapsto \beta(\cdot, w),$$

KTÓRY SPEŁNIA TOŻSAMOŚĆ

$$\underline{\beta}\circ\varrho(g)(w) = \beta(\cdot, \varrho(g)(w))$$

$$= \beta(\varrho(g)\circ\varrho(g^{-1})(\cdot), \varrho(g)(w))$$

$$= \beta(\varrho(g^{-1})(\cdot), w) \equiv \beta(\cdot, w) \circ \varrho(g^{-1})(\cdot)$$

$$\equiv \check{\varrho}(g) \circ \beta(\cdot, w) \equiv \check{\varrho}(g) \circ \underline{\beta}(w),$$

tj. $\underline{\beta} \circ \varrho(g) = \check{\varrho}(g) \circ \underline{\beta}$,

CZYLI $\underline{\beta}$ SPLATA ϱ Z $\check{\varrho}$.

DLA ϱ NIEPRZYWIEDLNEJ:

DUALIZACJA ✱ ZE STR. 37 DAJE

$$\varrho(g^{-1}) = \underline{\beta}^{*\,-1} \circ \varrho(g)^{*} \circ \underline{\beta}^{*},$$

czyli

$$\overset{✱}{=} \underline{\beta}^{*\,-1} \circ \underline{\beta} \circ \varrho(g^{-1}) \circ \underline{\beta}^{-1} \circ \underline{\beta}^{*}$$

$$\Updownarrow \; g \leftrightarrow g^{-1}$$

$$\varrho(g) \circ \underline{\beta}^{*\,-1} \circ \underline{\beta} = \underline{\beta}^{*\,-1} \circ \underline{\beta} \circ \varrho(g),$$

ALE TO Z RACJI NIEPRZYWIEDLNOŚCI ϱ OZNACZA – W ŚWIETLE TW. 2. –

RÓWNOŚĆ

$$\beta^{*-1} \circ \beta = \lambda \circ \mathrm{id}_V \;, \lambda \in \mathbb{C}^\times$$

(WSZAK $\exists \beta^{-1}$)

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\beta^* = \mu \circ \beta \;, \mu \in \mathbb{C}^\times}$$

$$\Downarrow$$

$$\beta \equiv \beta^{**} = \mu \circ \beta^* = \mu^2 \circ \beta$$

$$\Updownarrow$$

$$\mu \in \{-1, 1\} \,,$$

CZYLI

$$\beta^* = \pm \beta \,.$$

DLA PARY β I $\tilde{\beta}$ O TYCH WŁASNOŚCIACH DOSTAJEMY SPLATACZ

ρ_S : $\beta^{-1} \circ \tilde{\beta} \underset{\text{TW. 2}}{\Longrightarrow} \tilde{\beta} = \nu \circ \beta$. □

PSEUDOUNITARNOŚĆ ρ KONTROLUJE RELACJĘ DO $\check{\rho}$ REPREZENTACJI, KTÓRĄ WPROWADZAMY W

Def: NIECH $V \in \mathrm{ob}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$ i (V, ρ) - REPREZENTACJA ZESPOLONA.

REPREZENTACJA (ZESPOLENIE) **SPRZĘŻONA** WZGLĘDEM ρ TO PARA $(\overline{V}, \overline{\rho})$, KTÓREJ DRUGI SKŁADNIK TO

$$\overline{\rho} : G \longrightarrow GL(\overline{V}; \mathbb{C})$$

$$: g \longmapsto \overline{\rho(g)} =: \overline{\rho}(g)$$

JEST OCZYWISTE, ŻE $\overline{\rho}$ JEST NIEPRZYWIEDLNA $\Leftrightarrow$ ρ JEST —||—.

MAMY WSTĘPNE I POMOCNICZE

Ćw. 3. $\left.\begin{array}{l}\varrho \sim \bar{\varrho} \\ \varrho \text{ IRREP}\end{array}\right\} \Longrightarrow$ SPLATACZ $\chi : V \xrightarrow{\sim} \bar{V}$ JEST OKREŚLONY Z DOKŁADNOŚCIĄ DO SKALARA, KTÓRY MOŻNA DOBRAĆ TAK, BY BYŁO $\bar{\chi} \circ \chi = id_V \ \veebar\ \bar{\chi} \circ \chi = -id_V$.

D: $\varrho \underset{\chi}{\sim} \bar{\varrho} \iff \forall g \in G:$

$$\bar{\varrho}(g) = \chi \circ \varrho(g) \circ \chi^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\varrho(g) = \bar{\chi} \circ \bar{\varrho}(g) \circ \bar{\chi}^{-1}$$

$$= \bar{\chi} \circ \chi \circ \varrho(g) \circ \chi^{-1} \circ \bar{\chi}^{-1}$$

ϱ IRREP! Tw. 2

$\exists \lambda \in \mathbb{C} : \bar{\chi} \circ \chi = \lambda \cdot id_V$

$$\Downarrow$$

$$\lambda \cdot \dim_{\mathbb{C}} V = \mathrm{tr}\left(\overline{X} \circ X\right) = \sum_{i,j} \overline{X}_{ij} X_{ji}$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{\lambda} \dim_{\mathbb{C}} V = \overline{\sum_{i,j} \overline{X}_{ij} X_{ji}} = \sum_{i,j} X_{ij} \overline{X}_{ji}$$

$$= \sum_{j,i} \overline{X}_{ji} X_{ij} = \lambda \cdot \dim_{\mathbb{C}} V$$

$$\Downarrow$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, A PONIEWAŻ

$\exists X^{-1}$, PRZETO $\lambda \in \mathbb{R}^{\times}$.

MAMY ZATEM $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \circ X$, DLA KTÓREGO

SPEŁNIONA JEST TEZA. $\square$

I WRESZCIE DŁUGO OCZEKIWANE

Tw. 9. NIECH (V, ϱ) IRREP j/w. REPREZENTACJA TA JEST PSEUDO-UNITARNA $\Longleftrightarrow$ $\check{\varrho} \sim \bar{\varrho}$.

JEŚLI PRZY TYM $\varrho \sim \check{\varrho}$ I JEST UNITARNA, TO β Z Tw. 8. I χ ZE Stw. 3 SPEŁNIAJĄ:

$$\beta^* = \beta \wedge \bar{\chi} \circ \chi = id_V$$

$$\vee$$

$$\beta^* = -\beta \wedge \bar{\chi} \circ \chi = -id_V.$$

D: ϱ PSEUDOUNITARNA SPEŁNIA

$$\varrho(g^{-1}) = \alpha^{-1} \circ \overline{\varrho(g)}^* \circ \alpha \quad \forall g \in G \quad (sl.36)$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha^* \circ \overline{\varrho(g)} = \varrho(g^{-1})^* \circ \alpha^* = \check{\varrho}(g) \circ \alpha^* \quad (**)$$

TJ. α^* SPLATA $\bar{\varrho}$ Z $\check{\varrho}$.
(IZOMORFIZM)

I ODWROTNIE, ILEKROĆ $\bar{\varrho} \sim \check{\varrho}$,
MAMY IZOMORFIZM $\alpha : V \xrightarrow{\sim} \bar{V}^*$
O WŁASNOŚCI (**), A ZATEM

$$\varrho(g) = \alpha^{-1} \circ \overline{\varrho(g^{-1})^*} \circ \alpha$$

$$= \alpha^{-1} \circ \overline{\left(\alpha^{-1} \circ \overline{\varrho(g)^*} \circ \alpha\right)^*} \circ \alpha$$

$$= \alpha^{-1} \circ \bar{\alpha}^* \circ \varrho(g) \circ \bar{\alpha}^{*-1} \circ \alpha$$

$\forall g \in G$
ϱ IRREP

$\Downarrow$ TW. 2.

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}^* : \ \bar{\alpha}^* = \lambda \cdot \alpha$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \overline{\lambda \cdot \alpha}^* = \bar{\lambda} \cdot \bar{\alpha}^* = |\lambda|^2 \cdot \alpha,$$

CZYLI $|\lambda| = 1$

OTRZYMUJEMY WIĘC NIEOSOBLIWE

ODWZ. $\tilde{\alpha} := \sqrt{\lambda} \triangleright \alpha$,

KTÓRE SPEŁNIA

$$\overline{\tilde{\alpha}}^* = \sqrt{\overline{\lambda}} \triangleright \overline{\alpha}^* = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \lambda \triangleright \alpha$$

$$= \sqrt{\lambda} \triangleright \alpha = \tilde{\alpha},$$

ZATEM ZADAJE NA V

STRUKTURĘ PSEUDOHERMITOWSKĄ,

WZGL. KTÓREJ

$$\overline{\varrho(g)}^* = \alpha \circ \varrho(g)^{-1} \circ \alpha^{-1}$$

$$\equiv \tilde{\alpha} \circ \varrho(g)^{-1} \circ \tilde{\alpha}^{-1},$$

CZYLI ϱ JEST PSEUDOUNITARNA.

PRZECHODZĄC DO OSTATNIEGO PUNKTU TEZY, STWIERDZAMY, ŻE REPREZENTACJA UNITARNA JEST W SZCZEGÓLNOŚCI PSEUDO-UNITARNA, ZATEM W ŚWIETLE DOTYCH-CZASOWYCH USTALEŃ

ρ UNITARNA
i NIEPRZYW. $\Longrightarrow \quad \rho \sim \check{\rho} \sim \bar{\rho}$, CZYLI

$$\rho \sim \check{\rho} \qquad \qquad \rho \sim \bar{\rho},$$

A TO OZNACZA, ŻE ISTNIEJE

$$\chi : V \xrightarrow{\cong} \bar{V} \quad \text{O WŁASNOŚCI}$$

$$\bar{\rho}(g) = \chi \circ \rho(g) \circ \chi^{-1}, \quad g \in G,$$

SKORO ZAŚ MAMY

$$\check{\rho}(g) \equiv \rho(g^{-1})^* = \alpha^* \circ \overline{\rho(g)} \circ \alpha^{*-1},$$

(WARUNEK PSEUDOUNITARNOŚCI)

TO Z POŁĄCZENIA OBU DOSTAJEMY

$$\check{\varrho}(g) = (\alpha^* \circ \chi) \circ \varrho(g) \circ (\alpha^* \circ \chi)^{-1},$$

WIĘC

$$\begin{cases} \underline{\beta} := \alpha^* \circ \chi \; : \; V \xrightarrow{\cong} \bar{V} \equiv \bar{V}^{**} \xrightarrow{\cong} V^* \\ \check{\varrho}(g) = \underline{\beta} \circ \varrho(g) \circ \underline{\beta}^{-1} \end{cases}$$

(por.: str. 37)

LICZYMY

$$(\overline{\chi(v)} \,|\, w)_\alpha \equiv \langle \chi(v), \alpha(w) \rangle$$

$(\bar{\bar{v}} = v)$

$$= \langle \alpha^* \circ \chi(v), w \rangle$$

$V^{**} \equiv V \to$

$$\equiv \langle w, \alpha^* \circ \chi(v) \rangle$$

$$\equiv \langle w, \underline{\beta}(v) \rangle \qquad \lambda$$

PRZY TYM WIEMY ZE STW. 3., ŻE χ MOŻNA DOBRAĆ TAK, BY BYŁO

$$\bar{\chi} \circ \chi \overset{(1)}{=} \varepsilon_1 \cdot \mathrm{id}_V, \quad \varepsilon_1 \in \{\pm 1\},$$

A Z TW. 8. – ŻE $\underline{\beta}$ SPEŁNIA

$$\underline{\beta}^* \overset{(2)}{=} \varepsilon_2 \cdot \underline{\beta}, \quad \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}.$$

WÓWCZAS ZACHODZI WSPANIAŁA TOŻSAMOŚĆ

$$(\overline{\chi(v)} \,|\, \overline{\chi(v)})_\alpha \overset{(1)}{=} \langle \overline{\chi(v)}, \underline{\beta}(v) \rangle$$

$$= \langle \underline{\beta}^*(\overline{\chi(v)}), v \rangle$$

$$\overset{(2)}{=} \varepsilon_2 \langle \underline{\beta}(\overline{\chi(v)}), v \rangle$$

$$\equiv \varepsilon_2 \langle v, \underline{\beta}(\overline{\chi(v)}) \rangle$$

$$\overset{(1)}{=} \varepsilon_2 \overline{(\chi(\overline{\chi(v)}) \,|\, v)_\alpha}$$

ex def $\quad \equiv \varepsilon_2 (\overline{\chi}(\chi(v)) \,|\, v)_\alpha$

$$\overset{(1)}{=} \varepsilon_1 \varepsilon_2 (v \,|\, v)_\alpha$$

UNITARNOŚĆ ϱ IMPLIKUJE

$(v|v)_\alpha > 0$ DLA $v \neq 0_V$,

ZATEM OSTATECZNIE

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 = \frac{(\overline{X(v)}\,|\,\overline{X(v)})_2}{(v|v)_2} > 0 ,$$

ALE $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$, PRZETO

$$\varepsilon_1 = \pm 1 = \varepsilon_2 ,$$

A TO DAJE TEZĘ DOWODZONEGO TWIERDZENIA. $\square$

<u>UWAGA</u>: ZJAWISKA ALGEBRAICZNE OPISANE POWYŻEJ OBJAWIAJĄ SIĘ W FIZYKALNIE ISTOTNYCH OKOLICZNOŚCIACH KONSTRUKCJI SPINORÓW, CZYLI NIEPRZYWIEDLNYCH REPREZENTACJI GRUPY Spin NAKRYWAJĄCEJ (UNIW.) GRUPĘ LORENTZA/OBROTÓW ...

CECI (N')EST (PAS) LA FIN...