

TEORIA GRUP I

WYKŁADY VIII, IX : X

2023/24



W DALSZEJ CZĘŚCI WYKŁADU SKUPIMY
 UWAGĘ NA GRUPACH SKOŃCZONYCH,
 KTÓRYCH TEORIA REPREZENTACJI JEST
 - JAK WSKAZUJĄ DOTYCHCZASOWE
 ROZWAŻANIA - SZCZEGÓLNICZIE PRZYSTĘPNA.
 ZACZNIEMY OD UPROWADZENIA POJĘCIA
 PEŁNIEJEGO RÓŻY CENTRALNĄ W TAK
 ZORIENTOWANEJ ANALIZIE.

Def.: Niech $V \in \text{Object}_{\mathbb{C}}^{\leq \infty}$, (V, ρ) REPREZENTACJA.
 CHARAKTER (V, ρ) TO FUNKCJA

$$\chi_{\rho} : G \rightarrow \mathbb{C} : g \mapsto \text{tr}_V(\rho(g))$$

" $\chi_{\rho}(g)$

Obserwacja: $\chi_{\rho}(e) = \text{tr}_V(\rho(e))$
 $= \text{tr}_V(\text{Id}_V)$
 $= \dim_{\mathbb{C}} V.$

MAMY PODSTAWOWE

Stw. 1. Niech (V, ρ) j/w. $\exists \rho$
 charakter jest stały na klasach
 sprzężoności w G .

D: $\chi_{\rho}(hgh^{-1}) = \text{tr}_V(\rho(hgh^{-1}))$
 $= \text{tr}_V(\rho(h) \circ \rho(g) \circ \rho(h^{-1}))$
 $= \text{tr}_V(\rho(h^{-1}) \circ \rho(h) \circ \rho(g))$
 $= \text{tr}_V(\rho(h^{-1}h) \circ \rho(g)) = \text{tr}_V(\rho(e) \circ \rho(g))$
 $= \text{tr}_V(\text{id}_V \circ \rho(g)) = \text{tr}_V(\rho(g)) = \chi_{\rho}(g) \quad \square$

②

Powyższa prosta obserwacja wpisuje
charaktery w szereg KADR, który
wyznacza

Def.: Niech G - grupa.

na przestrzeni $\mathbb{C}$ -liniowej supp

$$\text{Map}_0(G, \mathbb{C}) = \{ f \in \text{Map}(G, \mathbb{C}) \mid |f'(G^x)| < \infty \}$$

Funkcji na G (o wartościach zespolonych)
o skończonym nośniku istnieje

struktura $\mathbb{C}$ -algebry łącznej z jednostką
zadawana przez SPLOT:

$$*: \text{Map}_0(G, \mathbb{C})^{\times 2} \rightarrow \text{Map}_0(G, \mathbb{C})$$

$$: (f_1, f_2) \mapsto \sum_{g \in G} p_g^* f_1 f_2(g) = f_1 * f_2,$$

gdzie $p: G \rightarrow G_G: g \mapsto p_g$, (3)

$$\rho_g : G \ni h \mapsto h \cdot g$$

JEST REPREZENTACJĄ PRAWĄ REGULARNĄ
G NA SOBIE, T.J.

$$f_1 * f_2(g) = \sum_{h \in G} f_1(g \cdot h^{-1}) f_2(h).$$

ALGEBRĘ TĘ OKREŚLAMY NIAWEM

ALGEBRA GRUPOWA G I OZNACZAMY
SYMBOLEM $\bigcirc_0[G]$.

UWAGA: POWYŻSZA DEFINICJA MA SENS,
OTO POWIEM

$$1^\circ \text{ supp}(f_1 * f_2) \subseteq \text{supp } f_1 \cdot \text{supp } f_2$$

$$2^\circ \forall f \in \text{Map}_0(G, \mathbb{C}) :$$

(4)

$$\begin{aligned}
 f * \delta_e(g) &= \sum_{h \in G} f(gh^{-1}) \cdot \delta_e(h) \\
 &= f(g \cdot e^{-1}) = f(g)
 \end{aligned}$$

or 13

$$\begin{aligned}
 \delta_e * f(g) &= \sum_{h \in G} \delta_e(g \cdot h^{-1}) \cdot f(h) \\
 &= \sum_{h \in G} \delta_h(g) \cdot f(h) = f(g).
 \end{aligned}$$

3° $\forall f_1, f_2, f_3 \in \text{Map}_0(G, \mathbb{C}) :$

$$\begin{aligned}
 (f_1 * f_2) * f_3(g) &= \sum_{h \in G} (f_1 * f_2)(gh^{-1}) f_3(h) \\
 &= \sum_{h, k \in G} f_1(g \cdot h^{-1} \cdot k^{-1}) f_2(k) f_3(h)
 \end{aligned}$$

(5)

$$\equiv \sum_{h, k \in G} f_1(g \cdot (k \cdot h)^{-1}) f_2((k \cdot h) \cdot h^{-1}) f_3(h)$$

$$\equiv \sum_{l, h \in G} f_1(g \cdot l^{-1}) f_2(l \cdot h^{-1}) f_3(h)$$

$$\equiv \sum_{l \in G} f_1(g \cdot l^{-1}) f_2 * f_3(l)$$

$$\equiv f_1 * (f_2 * f_3)(g)$$

4° Dwu- $\mathbb{C}$ -liniowość $*$ (względ.
 punktowej struktury $\mathbb{C}$ -liniowej
 na $\text{Map}_0(G, \mathbb{C})$) jest oczywistą
 konsekwencją dwu- $\mathbb{C}$ -liniowości
 mnożenia w $\mathbb{C}$. (6)

POWYŻSZA DEFINICJA POZWALA SPORZUCIĆ

Def.: NIECHAJ G - GRUPA.

FUNKCJA CENTRALNA NA G TO TAKA

$C \in \text{Map}_0(G, \mathbb{C})$, KTÓRA SPEŁNIA WARUNEK

$$\forall f \in \text{Map}_0(G, \mathbb{C}) : f * C = C * f.$$

PODALGEBRĘ ZŁOŻONĄ Z TAKICH FUNKCJI

OKREŚLAMY MIANEM CENTRUM $\mathbb{C}_0[G]$

I OZNACZAMY SYMBOLEM $Z(\mathbb{C}_0[G])$.

ZWIĄZEM Z POPRZEDNIMI ROZWAŻANAMI USTALA

LEM. 2. NIECH G - GRUPA.

$$Z(\mathbb{C}_0[G]) = \text{Map}_0(G, \mathbb{C})^{\text{Ad}^*},$$

GÓDZE PO PRAWEJ STRONIE MAMY

DO CZYNIEŃA (7)

} FUNKCJAMI NIEZMIENNICZYMI WZGLĘDEM
DZIAŁANIA KO-DODAJONEGO

$$\text{Ad}^* : G \rightarrow \text{Map}_0(G, \mathbb{C})$$

$$: g \mapsto \text{Ad}_g^*$$

$$\left(\text{Ad}_g^*(f) := f \circ \text{Ad}_g \right),$$

TJ. } FUNKCJAMI STAŁYMI NA Ad_g -ORBITACH,
CZYLI KLASACH PRZĘŻYNOŚCI

$$C(g) = \{ \text{Ad}_h(g) = h \cdot g \cdot h^{-1} \mid h \in G \},$$

$$g \in G.$$

D: BAZA $\text{Map}_0(G, \mathbb{C})$ JEST UKŁAD

$$\{ \delta_g \}_{g \in G}, \text{ A ZATEM}$$

⑧

$$\forall f \in \text{Map}_0(G, \mathbb{C}) : f * c = c * f$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall g \in G : \delta_g * c = c * \delta_g$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall g, h \in G : c * \delta_g(h) \equiv \sum_{k \in G} c(h \cdot k^{-1}) \delta_g(k)$$

$$\Downarrow$$

$$= c(h \cdot g^{-1})$$

$$\delta_g * c(h) \equiv \sum_{k \in G} \delta_g(h \cdot k^{-1}) c(k)$$

$$\Updownarrow$$

$$= c(g^{-1} \cdot h)$$

$$\forall a, b \in G : c(a \cdot b \cdot a^{-1}) = c(b)$$

$$\square \quad (9)$$

Corr.1. CHARACTER DEGREEJ KONJUGENCIE
WYMIAROWEJ REPREZENTACJI GRUPY G
JEST ELEMENTEM $Z(\mathbb{C}_0[G])$.

————— $\times$ —————
PODSTAWIĄC W KONTEKŚCIE TEORII REPREZENTACJI
WŁASNOŚĆ CHARAKTERÓW IDENTYFIKACJE

Stw.3. NIECHAJ $V \in \text{ObVect}_{\mathbb{C}}^{\infty}$ I NIECH
 $(V, \rho_A), A \in \{1, 2\}$ REPREZENTACJE.

WÓWCZAS $\rho_1 \sim \rho_2 \Rightarrow \chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$.

D: $\rho_1 \sim \rho_2 \Leftrightarrow \exists \chi \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V) :$

$$\chi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \chi \quad \wedge \quad \exists \chi^{-1}$$

$$\Rightarrow \rho_2(g) = \chi \circ \rho_1(g) \circ \chi^{-1}$$

$$\Rightarrow \chi_{\rho_2}(g) \equiv \text{tr}_V(\rho_2(g)) = \text{tr}_V(\chi \circ \rho_1(g) \circ \chi^{-1})$$

$$= \text{tr}_V(\chi^{-1} \circ \chi \circ \rho_1(g)) = \text{tr}_V(\text{id}_V \circ \rho_1(g))$$

$$= \text{tr}_V(\rho_1(g)) \equiv \chi_{\rho_1}(g). \quad \square \quad (10)$$

OBSERVATION:

$$(1) \chi_{e_1 \oplus e_2} = \chi_{e_1} + \chi_{e_2}$$

PROOF,

$$\begin{aligned} & \text{tr}_{V_1 \oplus V_2} (e_1(g) \oplus e_2(g)) \overset{[e_1 \oplus e_2(g)]}{=} [e_1(g)] \oplus [e_2(g)] \\ & = \text{tr}_{V_1} (e_1(g)) + \text{tr}_{V_2} (e_2(g)). \end{aligned}$$

$$(2) \chi_{e_1 \otimes e_2} = \chi_{e_1} \cdot \chi_{e_2}$$

PROOF,

BAZY DUALNE

$$\begin{aligned} & \text{tr}_{V_1 \otimes_K V_2} (e_1(g) \otimes e_2(g)) \left[\begin{array}{l} \varepsilon^i(e_j) = \delta_j^i \\ \varphi^A(f_B) = \delta_B^A \end{array} \right] \\ & = \sum_{i,A} \varepsilon^i \otimes \varphi^A ((e_1(g) \otimes e_2(g)) (e_i \otimes f_A)) \\ & = \sum_{i,A} \sum_{j,B} \varepsilon^i \otimes \varphi^A (e_1(g)_{ij} e_2(g)_{AB} e_j \otimes f_B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,A} \sum_{j,B} \rho_1(g)_{ij} \rho_2(g)_{AB} \varepsilon^i(e_j) \varphi^A(f_B) \\
&= \sum_{i,A} \sum_{j,B} \rho_1(g)_{ij} \rho_2(g)_{AB} \delta_j^i \delta_B^A \\
&= \sum_{i,A} \rho_1(g)_{ii} \rho_2(g)_{AA} \\
&= \sum_i \varepsilon^i(\rho_1(g)(e_i)) \sum_A \varphi^A(\rho_2(g)(f_A)) \\
&= \text{tr}_{V_1}(\rho_1(g)) \cdot \text{tr}_{V_2}(\rho_2(g))
\end{aligned}$$

(3) $\chi_{\bar{\rho}} = \overline{\chi_{\rho}}$ (PARTIZ: WYKŁADY $\bar{V}_I : \bar{V}_{II}$,
 str. 37)

ISTOTNIE,

$$\begin{aligned}
\text{tr}_{\bar{V}} \bar{\rho}(g) &\equiv \sum_i \bar{\rho}(g)_{ii} \equiv \sum_i \overline{\rho(g)_{ii}} = \overline{\sum_i \rho(g)_{ii}} \\
&\equiv \overline{\text{tr}_V \rho(g)} .
\end{aligned}$$

(12)

$$(4) \underbrace{\chi_\rho(e)}_{\text{tr}_V(\rho(e))} = \underbrace{\text{tr}_V(\text{id}_V)}_{\text{dim } V} = \text{dim } V$$

$$(5) |G| < \infty, \rho - \text{zesp\u0142ona}$$

$$\forall g \in G : \chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$$

$$\text{ISTOTNIE, } |G| < \infty \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall g \in G : g^N = e$$

$$\Rightarrow \forall g \in G : \text{Sp } \rho(g) \subset \sqrt[N]{1}, \omega \in \mathbb{C}$$

WYBRAWAMY BAZE JORDANOWSKIE $\rho(g)$,
WYZNACZAMY WPROST

$$\text{tr}_V(\rho(g^{-1})) = \text{tr}_V(\rho(g)^{-1}) = \sum_i \rho(g)^{-1}_{ii} \because$$

$$= \sum_{\lambda \in \text{Sp } \rho(g)} \dim_{\mathbb{C}} V(\lambda, \rho(g)) \cdot \lambda^{-1} = \sum_{\lambda \in \text{Sp } \rho(g)} \dim_{\mathbb{C}} V(\lambda, \rho(g)) \cdot \overline{\lambda}$$

$$= \sum_{\lambda \in \text{Sp } \rho(g)} \dim_{\mathbb{C}} V(\lambda, \rho(g)) \cdot \lambda \equiv \overline{\text{tr}(\rho(g))} \quad (13)$$

W DALSZEJ CZĘŚCI NASZYCH ROZWAŻAŃ
USTALAMY

→ G - GRUPA SKOŃCZONA, $|G| < \infty$

→ $\ell^2(G)$ - PRZESTRZEŃ UNITARNA
(FUNKCJI SUMOWALNYCH Z KWADRATEK)
: $\subseteq (\text{Map}(G, \mathbb{C}), (\cdot | \cdot))$

3 FORMĄ HERMITOWSKĄ

$(\cdot | \cdot) : \text{Map}(G, \mathbb{C})^{\times 2} \rightarrow \mathbb{C}$

: $(f_1, f_2) \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)} \cdot f_2(g)$

→ $[\text{Irr}(G)] =$ ZBIÓR KLAS RÓWNOWAŹNOŚCI
(NIERYWIALNYCH) REPREZENTACJI NIEPRZYWIEDLONYCH G

→ $\forall \alpha \in [\text{Irr}(G)]$: WYBIERAMY UNITARNEGO

REPREZENTANTA $(H_\alpha, \pi^\alpha) \in \alpha$, PATRZ: TW. 7.
A DLA NIEGO $\chi_\alpha \equiv \chi_{\pi_\alpha}$ WYKŁADY $\underline{VI}$: $\underline{VII}$ (14)

DOTYKĄCE USTALENIA LUBELNIA

Sw. 4 NIECHAJ G - GRUPA SKOŃCZONA,
(METRYZOWANA)
 (V, ϱ) JEST JEJ REPREZENTACJA NIEPRZYWIADAJĄCA,
WÓWczas $\dim \varrho \leq |G|$, więc w szczególności
 $\dim \varrho < \infty$.

D: WYBIERZMY (DOWOLNE) $v \in V \setminus \{0\}$, A WTEDY
 $\varrho(G)v = \{ \varrho(g)(v) \mid g \in G \}$ JEST ϱ -NIEZMIENNIKA,
PONIEWAŻ JEDNAK $\varrho(G)v \neq \{0\}$,
PRZETO $\varrho(G)v = V$ Z RACJI NIEPRZYWIADAJĄCOŚCI
 ϱ , więc $\dim \varrho \leq |\varrho(G)v| = |G| < \infty$.
 $\square$

STĄD

$$\rightarrow \forall \alpha \in [\text{Irr}(G)] : d_\alpha := \dim \pi^\alpha$$

(gdzie π^α J/W)

(15)

W POWYŻSZYCH OZNACZENIACH FORMUŁUJEMY
ARCYWAŻNE

Tw. 1. Niechaj G - grupa o $|G| < \infty$

DLA DANEJ $(H_\alpha, \pi^\alpha) \in \mathcal{A} \in [\text{Irr}(G)]$ WYBIERAMY
(DOWOLNIE) BAZĘ $\{v_i^\alpha\}_{i \in \overline{d_\alpha}}$ ORTONORMALNĄ

$(H_\alpha, (\cdot | \cdot)_\alpha)$, A W NIOŻ - DLA $g \in G$ -

$$\pi_{ij}^\alpha(g) := (v_j^\alpha | \pi^\alpha(g)(v_i^\alpha)).$$

WÓWCZAS $\{ \sqrt{d_\alpha} \cdot \pi_{ij}^\alpha \mid i, j \in \overline{d_\alpha}; \alpha \in [\text{Irr}(G)] \}$

JEST ORTONORMALNY W $\ell^2(G)$.

D: USTALMY $\alpha \in [\text{Irr}(G)]$ I ROZWAŻMY

DOWOLNY $\chi \in \text{End}_\mathbb{C} H_\alpha$. TEN DEFINIUJE

$$\chi[\pi^\alpha] := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi^\alpha(g)^\dagger \circ \chi \circ \pi^\alpha(g) \in \text{End}_\mathbb{C} H_\alpha. \quad (16)$$

Wobec unitarności (H, π^d) zachodzi

$$\forall g \in G$$

$$\pi^d(g) \circ \chi[\pi^d] \equiv \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \pi^d(g) \circ \pi^d(h)^t \circ \chi \circ \pi^d(h)$$

$$\equiv \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \pi^d(g^{-1})^t \circ \pi^d(h)^t \circ \chi \circ \pi^d(h)$$

$$\equiv \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} (\pi^d(h) \circ \pi^d(g^{-1}))^t \circ \chi \circ \pi^d(h)$$

$$\equiv \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \pi^d(h \cdot g^{-1})^t \circ \chi \circ \pi^d(h \cdot g^{-1}) \circ \pi^d(g)$$

$$\equiv \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \pi^d(k)^t \circ \chi \circ \pi^d(k) \circ \pi^d(g)$$

$$\equiv \chi[\pi^d] \circ \pi^d(g), \text{ zatem}$$

(17)

$$\chi[\pi^*] \in C_{\text{End}_{\mathbb{C}} H_2}(\pi^*(G))$$

$$\{ \chi \in \text{End}_{\mathbb{C}} H_2 \mid \forall g \in G : [\chi, \pi^*(g)] = 0 \}$$

(CENTRALIZATOR PODZBIORU

$$\pi^*(G) = \{ \pi^*(g) \mid g \in G \}$$

W ALGEBRZE $\text{End}_{\mathbb{C}} H_2$)

JEDNAKOWOŚĆ NA MOCY Tw. 2. z warunków $\overline{v_i} \cdot v_j$

$$\text{JEST } C_{\text{End}_{\mathbb{C}} H_2}(\pi^*(G)) = \langle \text{id}_{H_2} \rangle_{\mathbb{C}},$$

$$\text{PRZETO } \exists \lambda_{\chi} \in \mathbb{C} : \chi[\pi^*] = \lambda_{\chi} \circ \text{id}_{H_2},$$

ZATEM TAKŻE

$$\text{tr}_{H_2}(\chi[\pi^*]) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}_{H_2}(\pi^*(g)^{\dagger} \circ \chi \circ \pi^*(g))$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}_{H_2}(\pi^*(g) \circ \pi^*(g^{-1}) \circ \chi) \quad (48)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}_{H_\alpha} (\pi^\alpha(g \cdot g^{-1}) \circ \chi)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}_{H_\alpha} (\pi^\alpha(e) \circ \chi)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}_{H_\alpha} (\text{id}_{H_\alpha} \circ \chi)$$

$$= \text{tr}_{H_\alpha}(\chi) \cdot \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} 1 = \text{tr}_{H_\alpha}(\chi)$$

$$= \text{tr}_{H_\alpha}(\lambda_\chi \circ \text{id}_{H_\alpha}) = \lambda_\chi \cdot \text{tr}_{H_\alpha}(\text{id}_{H_\alpha})$$

$$= \lambda_\chi \cdot d_\alpha, \text{ giv.}$$

$$\chi[\pi^\alpha] = \frac{\text{tr}_{H_\alpha}(\chi)}{d_\alpha} \circ \text{id}_{H_\alpha} \quad (\text{H1P1})$$

ЗАСТОСУЮЧЫ ПОВЫШЭЕ ДО ЭНДОМОРФИЗМУ

$$\chi = (v_j^\alpha | \cdot) \otimes v_i^\alpha \equiv \varepsilon_{ij}^\alpha, \text{ ДА КОРАГО}$$

$$\text{tr}_{H_d}(\varepsilon_{ij}) \equiv \sum_{k=1}^{d_\alpha} (v_k^\alpha | \varepsilon_{ij}^\alpha(v_k^\alpha))$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{d_\alpha} (v_k^\alpha | (v_j^\alpha | v_k^\alpha) \circ v_i^\alpha)$$

$$= \sum_{k=1}^{d_\alpha} \delta_{jk} (\sigma_k^\alpha | v_i^\alpha)$$

$$= (v_j^\alpha | v_i^\alpha) = \delta_{ij}$$

$$\text{ОРАЖ} \quad \pi^\alpha(g)^\dagger \circ \varepsilon_{ij}^\alpha \circ \pi^\alpha(g)$$

$$\leq \pi^\alpha(g)^\dagger \circ (v_j^\alpha | \pi^\alpha(g)(\cdot)) \otimes v_i^\alpha$$

$$= \pi^\alpha(g)^\dagger \circ (\pi^\alpha(g)^\dagger(v_j^\alpha) | \cdot) \otimes v_i^\alpha \quad (20)$$

$$\equiv (\pi^\alpha(g)^\dagger(v_j^\alpha) | \cdot) \otimes \pi^\alpha(g)^\dagger(v_i^\alpha).$$

PODLIZMY (k,l) -TY WYRAZ MACIERZOWY
 OBU STRON FORMULY (H1P1) JE STR. 19:

$$\underbrace{(v_l^\alpha | \mathcal{E}_{ij}[\pi^\alpha](v_k^\alpha))}_{\parallel} = \frac{\text{tr}_{H_2}(\mathcal{E}_{ij}^\dagger)}{d_\alpha} \delta_{k,l}$$

$$\begin{aligned} & (v_l^\alpha | \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\pi^\alpha(g)^\dagger(v_j^\alpha) | \cdot) \otimes \pi^\alpha(g)^\dagger(v_i^\alpha)(v_k^\alpha)) \\ & \quad \downarrow \\ & \equiv \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (v_l^\alpha | (\pi^\alpha(g)^\dagger(v_j^\alpha) | v_k^\alpha) \otimes \pi^\alpha(g)^\dagger(v_i^\alpha)) \\ & \equiv \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\pi^\alpha(g)^\dagger(v_j^\alpha) | v_k^\alpha) \cdot (v_l^\alpha | \pi^\alpha(g)^\dagger(v_i^\alpha)) \\ & \equiv \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (v_j^\alpha | \pi^\alpha(g)(v_k^\alpha)) \cdot \overline{(\pi^\alpha(g)^\dagger(v_i^\alpha) | v_l^\alpha)} \quad (21) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (v_j^\alpha | \pi^\alpha(g)(v_k^\alpha)) \cdot \overline{(v_i^\alpha | \pi^\alpha(g)(v_l^\alpha))}$$

$$\equiv \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\pi^\alpha(g)_{li}} \pi^\alpha(g)_{kj}$$

$$\equiv (\pi^\alpha(g)_{li} | \pi^\alpha(g)_{kj})$$

जहाँ जहाँ

$$(\sqrt{d_\alpha} \pi^\alpha(g)_{li} | \sqrt{d_\alpha} \pi^\alpha(g)_{kj}) = \delta_{k,l} \text{tr}_{H_\alpha}(\epsilon_{ij}^\alpha)$$

$$\equiv \delta_{k,l} \sum_{m=1}^{d_\alpha} (v_m^\alpha | \epsilon_{ij}^\alpha(v_m^\alpha))$$

$$= \delta_{k,l} \sum_{m=1}^{d_\alpha} (v_m^\alpha | (v_j^\alpha | \cdot) \otimes v_i^\alpha(v_m^\alpha))$$

$$\equiv \delta_{k,l} \sum_{m=1}^{d_\alpha} (v_m^\alpha | (v_j^\alpha | v_m^\alpha) \triangleright v_i^\alpha)$$

(22)

$$= \delta_{k,l} \sum_{m=1}^{d_k} \delta_{j,m} \delta_{m,i} = \delta_{k,l} \delta_{i,j}.$$

NIECHAJ TERAZ $\alpha, \beta \in [\text{Irr}(G)]$, $\alpha \neq \beta$,

czyli $(H_\alpha, \pi^\alpha) \not\sim (H_\beta, \pi^\beta)$, A WTEDY

DLA JAKIEGOC $\chi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(H_\beta, H_\alpha)$ INDUKOWANE
PRZEJĘCIEM ODWZROBIENIE $\mathbb{C}$ -LINIOWE

$$\chi[\pi^\alpha, \pi^\beta] := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi^\alpha(g)^\dagger \circ \chi \circ \pi^\beta(g)$$

JEST - PODOBNIEM JAK $\chi[\pi^\alpha] = \chi[\pi^\alpha, \pi^\alpha]$ -
SPŁATACZEM,

$$\forall g \in G : \chi[\pi^\alpha, \pi^\beta] \circ \pi^\beta(g) = \pi^\alpha(g) \circ \chi[\pi^\alpha, \pi^\beta],$$

WŁEC TĘ WÓWEC NIERÓWNOŚNOŚCI π^α I π^β

STWARDIAMY - NA GRUNCIE Tw. 1 z Wskazów
VI I VII - (23)

$\chi[\pi^a, \pi^b] \equiv 0$. w syzygicznych

też a ta równieżna do

$$\chi = (v_j^b | \cdot) \otimes v_i^a \equiv \sum_{i \in \overline{1, d_a}, j \in \overline{1, d_b}} \epsilon_{ij}^{ab}$$

DATE NAM

$$0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi^a(g)^+ \circ (v_j^b | \cdot) \otimes v_i^a \circ \pi^b(g)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\pi^b(g)^+ (v_j^b) | \cdot) \otimes \pi^a(g)^+ (v_i^a)$$

$\Downarrow$

$$0 = (v_k^a | \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\pi^b(g)^+ (v_j^b) | \cdot) \otimes \pi^a(g)^+ (v_i^a) (v_l^b))$$

(24)

$$\equiv \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\pi^b(g)^t(v_j^b) | v_L^b) \cdot \overline{(\pi^d(g)^t(v_i^d) | v_K^d)}$$

$$\equiv \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (v_j^b | \pi^b(g)(v_L^b)) \cdot \overline{(v_i^d | \pi^d(g)(v_K^d))}$$

$$\equiv \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\pi_{ki}^d(g)} \cdot \pi_{Lj}^b(g)$$

$$\equiv (\pi_{ki}^d | \pi_{Lj}^b), \text{ co w połączeniu}$$

z poprzednim wynikiem daje też:

$$(\sqrt{d_\alpha} \pi_{ij}^d | \sqrt{d_\beta} \pi_{KL}^b) = \delta_{\alpha\beta} \delta_{ik} \delta_{jL} \quad \square$$

MAMY ELEMENTARNE AŻ ISTOTNE (25)

Cor. 2. $|G| < \infty \Rightarrow |[Irr(G)]| < \infty$

D: $\dim_{\mathbb{C}} l^2(G) = |G|$ (Baza: $\{\delta_g\}_{g \in G}$),

ZATEM $\forall \{v_{\xi}\}_{\xi \in \Xi}$ ORTONORMALNY :

$$|\{v_{\xi}\}_{\xi \in \Xi}| = |\Xi| \leq |G|.$$

ALE DLA DANEGO $\alpha \in [Irr(G)]$ MAMY
 $d_{\alpha} \times d_{\alpha}$ FUNKCJI π_{ij}^{α} , PRZETO

$$\sum_{\alpha \in [Irr(G)]} d_{\alpha} \times d_{\alpha} \leq |G| < \infty$$

$$\Downarrow$$

$$|[Irr(G)]| < \infty. \quad \square$$

MOJEMY JUŻ TERAŹ WYSTOPIĆ I UDOWODNIĆ

Tw. 2. $|G| < \infty \Rightarrow \{ \chi_\alpha \mid \alpha \in [\text{Irr}(G)] \}$
Char(G): $\parallel$ JEST BAZĄ ORTONORMALNĄ
 $Z(\mathbb{C}[G])$.

D: ZACZNIEMY OD WSKAZANIA ORTONORMALNOŚCI
UKŁADU Char(G). W ŚWIELE Tw. 1.

(I W DOTYKAJĄCYM ZAPISIE) ZACHODZI

$$(\chi_\alpha \mid \chi_\beta) = \left(\sum_{i=1}^{d_\alpha} \pi_{ii}^\alpha \mid \sum_{j=1}^{d_\beta} \pi_{jj}^\beta \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{d_\alpha} \sum_{j=1}^{d_\beta} (\pi_{ii}^\alpha \mid \pi_{jj}^\beta)$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{d_\alpha} \sum_{j=1}^{d_\beta} \frac{1}{\sqrt{d_\alpha d_\beta}} (\sqrt{d_\alpha} \pi_{ii}^\alpha \mid \sqrt{d_\beta} \pi_{jj}^\beta) \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{d_\alpha} \sum_{j=1}^{d_\beta} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} \delta_{ij} \frac{1}{\sqrt{d_\alpha d_\beta}} \\
&= \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{d_\alpha} \sum_{i=1}^{d_\alpha} \sum_{j=1}^{d_\alpha} \delta_{ij} \delta_{ij} \\
&= \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{d_\alpha} \sum_{i=1}^{d_\alpha} 1 = \delta_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

CO JEST REZULTATEM ANTYPYPOWANYM.

UDOWODNIENIE ZUPETNOŚCI $\text{Char}(G)$

WYMAGA NASTĘPUJĄCEJ KONSTRUKCJI POMOCNICZEJ:

LEMAT: $\forall (H, \pi) \in \text{Rep}(G)^{<\infty}$:

$(\mathbb{C}[G] \ni f \xrightarrow{\tilde{\pi}} \sum_{g \in G} f(g) \circ \pi(g)) \in \text{Hom}_{(\text{LĄCZNYCH})}(\mathbb{C}[G], \text{End}(H))$
 (TJN. JEST HOMOMORFIZMEM $\mathbb{C}$ -ALGEBR Z JEDNOŚCIĄ). (28)

Dł : $\mathbb{C}$ -LINIOWAŚĆ $\widetilde{\pi}$ JEST OGCYWIŚTA,
SPRAWDZAMY PRZETO TYLKO

* HOMOMORFIZMAŁ : $\forall f_1, f_2 \in \mathbb{C}_0[G] :$

$$\widetilde{\pi}(f_1) \circ \widetilde{\pi}(f_2) \equiv \sum_{g \in G} f_1(g) \triangleright \pi(g) \circ \sum_{h \in G} f_2(h) \triangleright \pi(h)$$

skończoność sum

$$\stackrel{\downarrow}{=} \sum_{g, h \in G} f_1(g) \cdot f_2(h) \triangleright \pi(g) \circ \pi(h)$$

$$= \sum_{g, h \in G} f_1(g) \cdot f_2(h) \triangleright \pi(g \cdot h)$$

$$\equiv \sum_{k \in G} \left(\sum_{\substack{g, h \in G \\ g \cdot h = k \Rightarrow g = k \cdot h^{-1}}} f_1(g) \cdot f_2(h) \right) \triangleright \pi(k)$$

$$= \sum_{k \in G} \left(\sum_{h \in G} f_1(k \cdot h^{-1}) f_2(h) \right) \triangleright \pi(k)$$

$$= \sum_{k \in G} f_1 * f_2(k) \triangleright \pi(k) = \tilde{\pi}(f_1 * f_2) \quad \checkmark$$

**** UNITALNOŚĆ :**

$$\tilde{\pi}(\delta_e) = \sum_{g \in G} \delta_e(g) \triangleright \pi(g) = \pi(e) = \text{id}_H \quad \checkmark$$

— x —————

Rozważmy $\mathcal{C} := \bigoplus_{\alpha \in [\text{Irr}(G)]} \langle \chi_\alpha \rangle_{\mathbb{C}}$ dla $|G| < \infty$.

Jest to niezwyrodniała podprzestrzeń

$C(\mathbb{C}[G])$, zatem

$$C(\mathbb{C}[G]) = \mathcal{C} \oplus_{(\cdot, \cdot)} \mathcal{C}^{\perp(\cdot, \cdot)}$$

(Dopełnienie
($\cdot, \cdot$)-ortogonalne)

Niech $f \in \mathcal{C}^{\perp(\cdot, \cdot)}$, tj. $\forall \alpha \in [\text{Irr}(G)] : f \perp \chi_\alpha$,

A wtedy $\tilde{\pi}^\alpha(\bar{f}) = \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \triangleright \pi^\alpha(g) \in \text{End}_{\mathbb{C}} H_\alpha$ (30)

SPĘDZIA TOŻSAMOŚĆ - $\forall g \in G$:

$$\pi^d(g) \circ \widetilde{\pi}^d(\bar{f}) \equiv \sum_{h \in G} \overline{f(h)} \circ \pi^d(g) \circ \pi^d(h)$$

$$= \sum_{h \in G} \overline{f(h)} \circ \pi^d(gh) \equiv \sum_{h \in G} \overline{f(h)} \circ \pi^d(\text{Ad}_g(h)) \circ \pi^d(g)$$

ALG $f \in C(\mathbb{C}[G]) = \text{Map}(G, \mathbb{C})$ $\xrightarrow{\text{Ad}^*}$ NA NOCY $\xrightarrow{\text{L}^*}$

Stw. 2., PRZECH $f(h) \equiv f(\text{Ad}_g(h))$,

A ZATEM

$$* \equiv \left(\sum_{h \in G} \overline{f(\text{Ad}_g(h))} \circ \pi^d(\text{Ad}_g(h)) \right) \circ \pi^d(g)$$

$$\equiv \left(\sum_{k \in G} \overline{f(k)} \circ \pi^d(k) \right) \circ \pi^d(g)$$

$$\equiv \widetilde{\pi}^d(\bar{f}) \circ \pi^d(g) , \text{ GYU}$$

$$\widetilde{\pi}^d(\bar{f}) \in C_{\text{End}_{\mathbb{C}} H_d}(\pi^d(G)) \stackrel{\text{Tw. VI-VII.2}}{=} \langle \text{id}_{H_d} \rangle_{\mathbb{C}} \quad (31)$$

$$\underline{\text{WNIOSEK}}: \exists \mu_\alpha^f \in \mathbb{C} : \tilde{\pi}^\alpha(\bar{f}) = \mu_\alpha^f \triangleright \text{id}_{H_\alpha}.$$

$$\Rightarrow \text{tr}_{H_\alpha}(\tilde{\pi}^\alpha(\bar{f})) = \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \triangleright \text{tr}_{H_\alpha}(\pi^\alpha(g))$$

$$\text{tr}_{H_\alpha}(\mu_\alpha^f \triangleright \text{id}_{H_\alpha})$$

$$\sum_{g \in G} \overline{f(g)} \cdot \chi_\alpha(g)$$

$$\mu_\alpha^f \cdot \text{tr}_{H_\alpha}(\text{id}_{H_\alpha})$$

$$|G| \cdot (f | \chi_\alpha)$$

$$\mu_\alpha^f \cdot d_\alpha$$

$$0 \text{ (3.4.!)}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu_\alpha^f = 0 \Leftrightarrow \tilde{\pi}^\alpha(\bar{f}) = 0$$

ROZWAŻMY NASTĘPNIE REPREZENTACJĘ UNITARNĄ

(H, ρ) , która po przywołaniu Tezy

Tw.5. z wykładu VI : VII MOŻEMY
PRZEDSTAWIĆ W POSTACI

$$\rho \sim \bigoplus_{\alpha \in [\text{Irr}(G)]} \bigoplus_{i=1}^{n_\alpha} \pi^\alpha \quad \text{DLA PEWNYCH}$$
$$\subseteq \bigoplus_{\substack{\text{ON.} \\ \alpha \in [\text{Irr}(G)]}} n_\alpha \cdot \pi^\alpha$$

$n_\alpha \in \mathbb{N}$ (LICZBA $\pi \in \alpha$ W ROZKŁADZIE ρ
NA SKŁADNIKI NIEPRZYWIEDNE), CZLI

$$\exists \chi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}\left(\bigoplus_{\alpha \in [\text{Irr}(G)]} H_\alpha, H\right) \quad \forall g \in G :$$

$$\rho(g) = \chi \circ \bigoplus_{\alpha \in [\text{Irr}(G)]} n_\alpha \cdot \pi^\alpha \circ \chi^{-1},$$

A W TAKIM RZĘDZIE

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}(\bar{f}) &\equiv \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \circ \chi \circ \bigoplus_{\alpha \in [\text{Irr}(G)]} n_{\alpha} \cdot \pi^{\alpha}(g) \circ \chi^{-1} \\
&= \chi \circ \bigoplus_{\alpha \in [\text{Irr}(G)]} n_{\alpha} \cdot \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \circ \pi^{\alpha}(g) \circ \chi^{-1} \\
&\equiv \chi \circ \bigoplus_{\alpha \in [\text{Irr}(G)]} n_{\alpha} \cdot \tilde{\pi}^{\alpha}(\bar{f}) \circ \chi^{-1} \\
&\equiv \bigcirc
\end{aligned}$$

ODNIESIŃY POWYŻSZY WYNIK DO WYRÓŻNIONYCH
 REPREZENTACJI UNITARNYCH, JAKŻE JEST
 REPREZENTACJA PERMUTACYJNA (4) ze sk. VI-VII.3
 (PATRZ: sk. VI-VII.14-15):

$$\begin{aligned}
\lambda : G &\rightarrow U(\ell^2(G)) : g \mapsto \lambda_{g^{-1}}^* \equiv \lambda(g) \\
\lambda_{g^{-1}}^* : \ell^2(G) &\hookrightarrow : f \mapsto f \circ \lambda_{g^{-1}} \quad , \quad (34)
\end{aligned}$$

gdzie $\lambda_{g^{-1}} : \mathbb{C}G : h \mapsto g^{-1} \cdot h$.

wnioskujemy: $\tilde{\lambda}(\bar{f}) = 0$,

czyli w szczególności

$$0 = \tilde{\lambda}(\bar{f})(\delta_e) = \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \triangleright \lambda(g)(\delta_e)$$

$$= \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \triangleright \delta_e \circ \lambda_{g^{-1}} = \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \triangleright \delta_g = *$$

$$\left(\delta_e \circ \lambda_{g^{-1}}(h) = \delta_e(g^{-1} \cdot h) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } e = g^{-1} \cdot h \\ 0 & \text{w pp.} \end{cases} \right. \\ \left. = \delta_g(h) \right)$$

$* = \overline{f} \iff f = 0$, zatem
(rozważając w bazie $\{\delta_g\}_{g \in G}$) $\varphi \perp (\cdot, \cdot) = 0$,

Wz. $C(\mathbb{C}[G]) = \mathbb{C}$. $\square$ (35)

MOŻEMY JUŻ TERAZ WSKAZAĆ

Tw.3. $|G| < \infty \Rightarrow$

$$(i) |[Irr(G)]| = |\{C(g) \mid g \in G\}|;$$

$$(ii) (H, \pi) \in Rep(G)^{<\infty}$$

$$\bigoplus_{\alpha \in [Irr(G)]} n_{\alpha} \cdot \pi^{\alpha} \Rightarrow \forall \alpha \in [Irr(G)]:$$
$$n_{\alpha} = (\chi_{\alpha} | \chi_{\pi}),$$

CZYLI ROZKŁAD JEST W PEŁNI JEDNOZNACZNIE
OKREŚLONY PRZEZ χ_{π} ;

$$(iii) (H, \pi) \in Rep(G)^{<\infty} (J/\omega)$$

$$(\chi_{\pi} | \chi_{\pi}) \in \mathbb{N} : = 1 \Leftrightarrow \pi \text{ IRREP};$$

$$(iv) \chi_{\pi_2} = \chi_{\pi_1} \Rightarrow \pi_2 \sim \pi_1. \quad (36)$$

D: $\text{Ad}(i) \quad \forall f \in Z(\mathbb{C}[G])$

$$\stackrel{||}{=} \text{Map}(G, \mathbb{C})^{\text{Ad}^*}$$

$$f = \sum_{C(g) \in \{C(h) \mid h \in G\}} f(g) \circ \eta_{C(g)},$$

где $\eta_{C(g)}(h) = \begin{cases} 1, & \text{если } h \in C(g) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

(ФУНКЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНА $C(g)$),

Поэтому $\dim_{\mathbb{C}} Z(\mathbb{C}[G]) = |\{C(g) \mid g \in G\}|$,

АЛЕ ТЕЖ - ВОЗЕЧ ТН. 2. -

$$\dim_{\mathbb{C}} Z(\mathbb{C}[G]) = |\{\chi_{\alpha} \mid \alpha \in [\text{Irr}(G)]\}|$$

$$\equiv |[\text{Irr}(G)]| \quad \checkmark$$

Ad(ii) w notacji ze l.u. 33 :

$$\chi_{\pi} \equiv \text{tr}_H \left(\chi \circ \bigoplus_{\alpha \in [\text{Irr}(G)]} n_{\alpha} \cdot \pi^{\alpha} \circ \chi^{-1} \right)$$

$$= \text{tr} \bigoplus_{\alpha \in [\text{Irr}(G)]} \bigoplus_{i=1}^{n_{\alpha}} H_{\alpha} \left(\bigoplus_{\alpha \in [\text{Irr}(G)]} n_{\alpha} \cdot \pi^{\alpha} \right)$$

$$= \sum_{\alpha \in [\text{Irr}(G)]} n_{\alpha} \cdot \text{tr} \circ \pi^{\alpha} \equiv \sum_{\alpha \in [\text{Irr}(G)]} n_{\alpha} \cdot \chi_{\alpha},$$

миже теж - на нолу Тв.2. -

$$(\chi_{\alpha} | \chi_{\pi}) = \sum_{\beta \in [\text{Irr}(G)]} n_{\beta} \cdot (\chi_{\alpha} | \chi_{\beta})$$

$$= \sum_{\beta \in [\text{Irr}(G)]} n_{\beta} \delta_{\alpha\beta} = n_{\alpha} \cdot \vee \quad (38)$$

Ad (iii) Wobec rozkładu

$$\pi \sim \bigoplus_{\alpha \in [\text{Irr}(G)]} n_{\alpha} \cdot \pi_{\alpha} \quad \text{jest}$$

- jak pokazaliśmy wcześniej -

$$\chi_{\pi} = \sum_{\alpha \in [\text{Irr}(G)]} n_{\alpha} \chi_{\alpha}, \quad \text{zatem}$$

- w świetle
Tw. 2. -

$$(\chi_{\pi} | \chi_{\pi}) = \sum_{\alpha, \beta \in [\text{Irr}(G)]} \bar{n}_{\alpha} n_{\beta} \cdot (\chi_{\alpha} | \chi_{\beta})$$

$$\equiv \sum_{\alpha, \beta \in [\text{Irr}(G)]} n_{\alpha} n_{\beta} \cdot \delta_{\alpha\beta}$$

$$= \sum_{\alpha \in [\text{Irr}(G)]} n_{\alpha}^2 \in \mathbb{N} \quad \checkmark$$

Przy tym równaś'ci $(\chi_{\pi} | \chi_{\pi}) = 1$ (39)

Jest równoznaczna z $\exists! \alpha \in [\text{Irr}(G)]$:

$$n_2 = 1$$

$$\forall \beta \in [\text{Irr}(G)] \setminus \{\alpha\}:$$

$$n_\beta = 0$$

$$\pi \sim \pi^2$$

JEST NIEPRZYWIEDLNA.

$$\text{Ad (iv)} \quad \chi_{\pi_2} = \chi_{\pi_1} = \sum_{\alpha \in \text{Irr}(G)} n_{\alpha}^1 \cdot \chi_{\alpha}$$

$$\hookrightarrow \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} n_{\chi}^2 \chi$$

$$\sum_{\alpha \in [\text{Ir}(G)]} (n_{\alpha}^2 - n_{\alpha}^1) \cdot \chi_{\alpha} = 0, \text{ co wobec}$$

UNIOWEJ NIEZALEŻNOŚCI χ_{α}

ИРИКУЖЕ $\chi^2_L = \chi^1_L \quad \forall L \in [\text{Irr}(G)]$

$$\Leftrightarrow \pi_2 \sim \bigoplus_{\lambda \in \text{Irr}(G)} n_\lambda^\perp \cdot \pi_2 \sim \pi_1. \quad \square \quad (40)$$

JAKO BEZPOŚREDZĄ A NIETRYWIALNĄ
KONSEKWENCJĘ TW.2. OTRZYMUJEMY
WŁADNE (BO WŁĄŻĄCE d_α)

Tw. 4. $|G| < \infty \Rightarrow \sum_{\alpha \in [\text{Irr}(G)]} d_\alpha^2 = |G|$

D: ROZWAŻMY NA POKRÓT REPREZENTAJCĘ
PERMUTACYJNĄ $(\ell^2(G), \lambda)$ z Przyk. (4)
ZE STR. VI-III.3 - $\xrightarrow{\text{JEST}}$ BAZA δ_g !

$$\chi_\lambda(g) \equiv \text{tr}_{\ell^2(G)}(\lambda_g) \equiv \sum_{h \in G \atop h \equiv e v_h} \delta_h^*(\lambda_g(\delta_h))$$

$$= \sum_{h \in G} \lambda_g(\delta_h)(h) \equiv \sum_{h \in G} \delta_h(\lambda_{g^{-1}}(h))$$

$$= \sum_{h \in G} \delta_h(g^{-1} \cdot h) \equiv \sum_{h \in G} \delta_{h, g^{-1} \cdot h} = \sum_{h \in G} \delta_{e, g^{-1} \cdot h}$$

$$= \sum_{h \in G} \delta_{e, g^{-1} \cdot h} = \delta_{e, g^{-1}} \sum_{h \in G} 1 = |G| \delta_{g, e} \quad (41)$$

A WOBEC TEGO

$$(\chi_\alpha | \chi_\lambda) \equiv \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_\alpha(g)} \chi_\lambda(g)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_\alpha(g)} \cdot |G| \cdot \delta_{g,e}$$

$$= \overline{\chi_\alpha(e)} \equiv \overline{\text{tr}_{H_\alpha}(\pi_\alpha(e))}$$

$$= \overline{\text{tr}_{H_\alpha}(\text{id}_{H_\alpha})} = \overline{d_\alpha} = d_\alpha,$$

СЛУ - W SWOTUE TW.2. -

$$\chi_\lambda = \sum_{\alpha \in [\text{Irr}(G)]} d_\alpha \cdot \chi_\alpha \Rightarrow$$

$$|G| = \chi_\lambda(e) = \sum_{\alpha \in [\text{Irr}(G)]} d_\alpha \cdot \chi_\alpha(e) = \sum_{\alpha \in [\text{Irr}(G)]} d_\alpha^2 \quad \square$$

(42)

3. POWTÓRZĄCY WPROWADZAMY

Cor. 3. $\chi \sim \bigoplus_{\alpha \in [\text{Irr}(G)]} d_{\alpha} \cdot \pi^{\alpha}$

D: Patrz: OSTATNIA LINIJKA NA str. 42
i Tw. 3. (iv).

— x —

Cor. 4. $\forall g \in G^{\times} : \sum_{\alpha \in [\text{Irr}(G)]} d_{\alpha} \chi_{\alpha}(g) = 0$

D: $\sum_{\alpha \in [\text{Irr}(G)]} d_{\alpha} \chi_{\alpha}(g) = \chi_{\lambda}(g) = \delta_{g,1} |G| = 0. \square$

— x —

MOJEMY TEŻ GUZ „POPRAWIĆ” TW. 1...

Cor. 5. [TWIERDZENIE FROBENIUSA - SCHUR
- PETERA - WEYLA]

$\equiv: B$

$$\{ \sqrt{d_\alpha} \pi_{ij}^\alpha \mid i, j \in \overline{d_\alpha}, \alpha \in [\text{Irr}(G)] \} \subset \ell^2(G)$$

TO UKŁAD BĄZOWY ORTONORMALNY.

D: Tw. 1. opiewa, że B jest
układem ortonormalnym, więc w szczególności
liniowo niezależnym. Wystarczy zatem
wykazać, że $|B| = |\{\delta_g\}_{g \in G}| = |G|$.

$$\text{jest } |B| = \sum_{\alpha \in [\text{Irr}(G)]} \sum_{i,j=1}^{d_\alpha} 1 = \sum_{\alpha \in [\text{Irr}(G)]} d_\alpha \cdot d_\alpha \left\| \sqrt{d_\alpha} \pi_{ij}^\alpha \right\|$$

$$|G|$$

□

(44)

INTERNEZIO ALGEBRAICNE:

Def.: LICZBY ALGEBRAICZNE:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}^* \exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus (0, \dots, 0) : \\ a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = 0\}.$$

CALKOWITE LICZBY ALGEBRAICZNE

$$A := \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}^* \exists (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, 1) \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\} : \\ a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n = 0\}$$

z.g. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sqrt[n]{1} \in A \subset \mathbb{Z}$

Stw. 5. $A \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ ←

D.: Niech ^{A.a.} $z \in A \cap \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, czyli

$$z = \frac{p}{q}, \quad q \geq 2 \quad (p, q) - \text{ko-pierwsze}$$

Alle $z \in A \Rightarrow \exists a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n = 1 \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{p^n}{g^n} + \frac{p^{n-1}}{g^{n-1}} a_{n-1} + \frac{p^{n-2}}{g^{n-2}} a_{n-2} + \dots + a_0 = 0 \quad \parallel \cdot g^n$$

$$p^n = -g \underbrace{\left(p^{n-1} a_{n-1} + g p^{n-2} a_{n-2} + \dots + g^{n-1} a_0 \right)}_{\in \mathbb{Z}}$$

$$g \mid p^n \Rightarrow g \mid p \quad \hookrightarrow \quad \square$$

(g, p) ko-pierwsze

DEFINICJA A okazuje się dopuszczalne
INTERLUJACE PRZETFORMOWANIE...

Slw. 6. $z \in A \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \exists M \in \mathbb{Z}(n)$
 $z \in \text{Sp } M.$

D: NIECHAJ $M \in \mathbb{Z}(n)$. JEŻ
WIELOMIAN CHARAKTERYSTYCZNY W_M
SPĘNIA RÓWNANIE

$$W_M(\zeta) = 0 \Leftrightarrow \zeta \in \text{Sp } M$$

$$\equiv \det_{(n)} (M - \zeta \circ \mathbb{1}_n)$$

$$= (-1)^n \zeta^n + a_{n-1} \zeta^{n-1} + a_{n-2} \zeta^{n-2} + \dots + a_0,$$

GDZIE $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0 \in \mathbb{Z}$ $\because (-1)^n$
(JAKO WYNIKI DZIAŁAŃ ALGEBRAICZNYCH
NA $M; j \in \mathbb{Z}$)

JEST ZATEM $\zeta \in \text{Sp } M \Rightarrow \zeta \in A$ (47)

1 ODWROTNIK,

$$S \in A \Rightarrow \exists a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n = 1 :$$

$$S^n + a_{n-1}S^{n-1} + a_{n-2}S^{n-2} + \dots + a_0 = 0$$



$$(-1)^n \det_{(n)} \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & 0 \\ & 0 & -1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & 0 & & & 0 & -1 \\ b_0 & - & - & - & b_{n-2} & b_{n-1} \end{pmatrix} - S \mathbb{1}_n$$

$\parallel$
0

$$\text{gdzie } b_k = (-1)^{n+k+1} a_k, \quad k \in \overline{0, n-1}$$

$\cap$
 $\mathbb{Z}$

□

Corr. 6. A JEST PIERŚCIENIEM.

$$\underline{D}: z_1, z_2 \in A \Leftrightarrow \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*: \exists M_A \in \mathbb{Z}(n_A),$$

stw. 6

$A \in \{1, 2\} :$

$z_A \in \text{Sp}(M_A)$ (48)

Wtedy jedyna:

$$\rightarrow z_1, z_2 \in \text{Sp}(M_1 \oplus M_2)$$

$$\overset{\cap}{\mathbb{Z}}(n_1, n_2)$$

$$\rightarrow z_1 + z_2 \in \text{Sp}(M_1 \oplus \mathbb{I}_{n_2} + \mathbb{I}_{n_1} \oplus M_2)$$

$$\overset{\mathbb{Z}(n_1)}{\downarrow}$$

$$\rightarrow -z_1 \in \text{Sp}(-M_1) \quad \square$$

Cor. 7. $\forall n \in \mathbb{N}^* \forall z_1, z_2, \dots, z_n \in A$

$\exists m \in \mathbb{N} \exists v \in \mathbb{C}^{x_m} \wedge M_1, M_2, \dots, M_n \in \mathbb{Z}(m):$

$$M_i(v) = z_i \triangleright v, i \in \overline{1, n}$$

D: $z_1, z_2, \dots, z_n \in A \xRightarrow{\text{stw. 6.}} \exists \underline{M}_i \in \mathbb{Z}(m_i):$
 $v_i \in \mathbb{C}^{x_{m_i}}$

$$\underline{M}_i(v_i) = z_i \triangleright v_i \quad i \in \overline{1, n}$$

UTWORZMY

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathbb{C}^{x_{u_1} u_2 \dots u_n}$$

$$\psi := v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \in \mathbb{C}^{x_{u_1}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{x_{u_2}} \otimes_{\mathbb{C}} \dots \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{x_{u_n}}$$

$$M_i := \mathbb{1}_{u_1} \otimes \mathbb{1}_{u_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}_{u_{i-1}} \otimes M_i \otimes \mathbb{1}_{u_{i+1}} \otimes \mathbb{1}_{u_{i+2}} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}_{u_n}$$

TE SPEŁNIATA $M_i(v) = z_i \circ v$. $\square$

MANY JESZCZE

glw. 7. $M \in A(n) \Rightarrow \text{Sp } M \subset A$

D: NIECH $M = (M_{ij})_{i,j \in \overline{1,n}}$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ A \end{matrix} \quad \text{Corr. 7.}$$

$\exists m \in \mathbb{N}^+, v \in \mathbb{C}^{x_m}, A_{ij} \in \mathbb{Z}(m) :$

$A_{ij}(v) = M_{ij} \circ v \quad E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & & j \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} :$

UTWORZMY $B := E_{ij} \otimes A_{ij} \in \mathbb{Z}(n) \otimes \mathbb{Z}(m) \cong \mathbb{Z}(n \cdot m) \quad (50)$

NIECH ξ - wektor własny M .
 STOWARZYSZONY Z $\lambda \in \text{Sp} M$.
 TWORZYMY $\Xi := \xi \otimes v \in \mathbb{C}^{n \cdot n}$,

A WTEDY

$$\begin{aligned} B(\Xi) &= E_{ij}(\xi) \otimes A_{ij}(v) \\ &= E_{ij}(\xi) \otimes M_{ij} \triangleright v \\ &= M_{ij} \triangleright E_{ij}(\xi) \otimes v \\ &= M(\xi) \otimes v \\ &= \lambda \triangleright \xi \otimes v = \lambda \triangleright (\xi \otimes v), \end{aligned}$$

CZYLI $\lambda \in \text{Sp} B$, $B \in \mathbb{Z}(n \cdot n)$

$\Rightarrow$ $\lambda \in A$. $\square$ (51)

TAK PRZYGOTOWANI WRACAMY DO NASZYCH
ROZWAŻAŃ TEORII REPREZENTACJI, KTÓRE W POZORNIE
EGZOTYCZNYM KONTEKŚCIE ALGEBRAICZNYM OSADZA
Słw. 8 $|G| < \infty$ ^{NIECH}, (H, π) REPREZENTACJA
o $\dim \pi < \infty$

$$\forall g \in G : \chi_{\pi}(g) \in A.$$

$$\underline{D} : |G| < \infty \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}^* \forall g \in G : g^N = e$$

$$\Rightarrow \forall \zeta \in \text{Sp } \pi(g) : \zeta^N = 1$$

$$(\pi(g)(v) = \zeta \cdot v \Rightarrow v = \pi(g)^N(v) = \zeta^N \cdot v)$$

$$\Rightarrow \chi_{\pi}(g) = \text{tr}_H(\pi(g)) = \sum_{\zeta \in \text{Sp } \pi(g)} \dim_{\mathbb{C}} V(\zeta, \pi(g)) \cdot \zeta$$

($< \infty$) SUMA PIERWIASTKÓW!

Cor. 6. 3.1

$$\chi_{\pi}(g) \in A \quad \square$$

(52)

AŻEBY WYCIĄGNĄĆ Z POWIĄZANEJ
 DOKŁADNIEJ WNIOSKI, POTRZEBUJEMY
 JESZCZE TECHNICZNEGO

LEM. 9. NIECH $|G| < \infty$, (H, π) UNITARNY
 IRRED

Wówczas $\chi_\pi * \chi_\pi = \frac{|G|}{d} \circ \chi_\pi$ $\left. \begin{array}{l} \dim \pi = d \\ \hat{\infty} \end{array} \right\}$

D: $\forall g \in G$ OBLICZAMY

$$\begin{aligned} \chi_\pi * \chi_\pi(g) &= \sum_{h \in G} \chi_\pi(g \cdot h^{-1}) \chi_\pi(h) \\ &= \sum_{h \in G} \sum_{i=1}^d \pi(g \cdot h^{-1})_{ii} \sum_{j=1}^d \pi(h)_{jj} \\ &= \sum_{h \in G} \sum_{i,j,k=1}^d \pi(g)_{ik} \pi(h^{-1})_{ki} \pi(h)_{jj} \varepsilon_{jj}^*, \end{aligned}$$

ALC π UNITARNA, PRZETO

(53)

$$= \sum_{h \in G} \sum_{i,j,k=1}^d \pi(g)_{ik} \pi(h)_{ki}^* \pi(h)_{jj}$$

$$= \sum_{h \in G} \sum_{i,j,k=1}^d \pi(g)_{ik} \overline{\pi(h)_{ik}} \pi(h)_{jj}$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^d \pi(g)_{ik} \cdot |G| \cdot \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \overline{\pi(h)_{ik}} \pi(h)_{jj}$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^d \pi(g)_{ik} \cdot \frac{|G|}{d} \cdot (\sqrt{d} \pi_{ik} | \sqrt{d} \pi_{jj})$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^d \pi(g)_{ik} \frac{|G|}{d} \delta_{ij} \delta_{kj}$$

Tw. 1

$$= \frac{|G|}{d} \sum_{i=1}^d \pi(g)_{ii} = \frac{|G|}{d} \chi_{\pi}(g) \quad \square$$

54

NASZE ROZWAJANIA WIENCZY

Tw. 5. NIECHAJ $|G| < \infty$, (H, π) ^{UNITARNY}
_{IRREP}

WÓWczas $d \mid |G|$. $\dim \pi = d < \infty$

D: INTERPRETUJEMY RÓWNOŚĆ Z TEŻY
SW. 9. JAKO RÓWNANIE MACIERZOWE.
W TYM CELU DEFINIUJEMY

$$\begin{cases} A_{g,h} := \chi_{\pi}(g \cdot h^{-1}), & g, h \in G \\ v_k := \chi_{\pi}(k), & k \in G \end{cases}$$

I PRZEPISUJEMY

$$\left(\begin{array}{ccc} \sum_{h \in G} \chi_{\pi}(g \cdot h^{-1}) \chi_{\pi}(h) & = & \frac{|G|}{d} \chi_{\pi}(g) \\ \parallel & & \parallel \\ \sum_{h \in G} A_{g,h} v_h & & \frac{|G|}{d} v_g \end{array} \right)_{g \in G}$$

JAKO

$$Av = \frac{|G|}{d} v, \text{ gdzie}$$

$$v = (v_g)_{g \in G} \in \mathbb{C}^G \equiv \mathbb{C}^{|G|};$$

$$A = (A_{g,h})_{g,h \in G} \in \mathbb{C}(|G|),$$

$$\text{A WTEDY } \frac{|G|}{d} \in \text{Sp } A.$$

ALE W ŚWIETLE lew. 8.

$$A_{g,h} \in \mathbb{A}, \text{ PRZETO } A \in \mathbb{A}(|G|).$$

WOBEC TEGO JEDNAK - NA MOCY lew. 7 -

$$\frac{|G|}{d} \in \mathbb{A} \text{ i JEDNOCZEŚNIE } \frac{|G|}{d} \in \mathbb{Q},$$

$$\text{ZATEM } \frac{|G|}{d} \in \mathbb{A} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z} \text{ (lew. 5.)} . \quad \square \quad (56)$$