Wykład X

2024/25

Mocny Cukrowe

Tw. 5. Przyjmijmy założenia dotychczasowe.

$$\forall \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h}) \; \exists \, (F_\alpha, H_\alpha, E_\alpha) \in (\mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha) \setminus \{0_\mathfrak{g}\} :$$

$$[H_\alpha, E_\alpha]_\mathfrak{g} = 2E_\alpha$$

$$\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})_{(\alpha)} = \langle E_\alpha, F_\alpha, H_\alpha \rangle_\mathbb{C}$$

$$[H_\alpha, F_\alpha]_\mathfrak{g} = -2F_\alpha \quad \wedge \quad H_\alpha \in \langle \alpha \rangle_\mathbb{C} .$$

$$[E_\alpha, F_\alpha]_\mathfrak{g} = H_\alpha$$

Przy tym możemy wybrać $F_\alpha = E_\alpha^*$.

D: zacznijmy od

Lemat: $\forall (X, H, Y) \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$:

$$\left([Y, X]_{\mathfrak{g}} \,|\, H \right) = (\alpha | H) \cdot (X | Y^*) .$$

Dowód lematu: Korzystając ze stw. 18., liczymy

$$\left([Y, X]_{\mathfrak{g}} \,|\, H \right) \equiv \left(\mathrm{ad}_Y^{(\mathfrak{g})}(X) \,|\, H \right) = \left(X \,|\, \mathrm{ad}_{Y^*}^{(\mathfrak{g})}(H) \right)$$

$$= -\left(X \,|\, \mathrm{ad}_H^{(\mathfrak{g})}(Y^*) \right) , \text{ ale } Y \in \mathfrak{g}_\alpha$$

oznacza, że $Y^* \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ na mocy stw. 24, przeto $\left([Y, X]_{\mathfrak{g}} \,|\, H \right) = -\left(X \,|\, (-\alpha | H) \triangleright Y^* \right) = (\alpha | H) \cdot (X | Y^*)$. □

Zastosujmy powyższy Lemat do pary $(Y, X \equiv Y^*) \in \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$, a wówczas dostaniemy

$$\big([Y,Y^*]_{\mathfrak{g}} \,|\, H\big) = (\alpha|H)\cdot \underbrace{(Y^*|Y^*)}_{= \|Y^*\|^2 \neq 0 \text{ dla } Y^* \neq 0 \Leftrightarrow Y \neq 0},$$

zatem

$$\forall H \in \mathfrak{h} : \begin{cases} H \perp \alpha \implies [Y,Y^*]_{\mathfrak{g}} \perp H \\ \underset{\neq 0}{H} \not\perp \alpha \implies \big([Y,Y^*]_{\mathfrak{g}} \,|\, H\big) \neq 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow \\ \qquad\qquad\qquad [Y,Y^*]_{\mathfrak{g}} \neq 0 \end{cases}$$

Jest $\mathfrak{h} = \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}} \oplus \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}}^{\perp_{\mathfrak{h}}}$, widać więc, że $[Y,Y^*]_{\mathfrak{g}} \in \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$.

Istotnie, zważywszy $[Y,Y^*]_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{g}_{\alpha+(-\alpha)} = \mathfrak{g}_0 \equiv \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$,
możemy zapisać $[Y,Y^*]_{\mathfrak{g}} = \lambda \triangleright \alpha + \beta^i \triangleright e_i$, gdzie
$\{e_i\}$ jest pewną bazą ortonormalną w $\langle \alpha \rangle^{\perp}_{\mathbb{C}}$.
Licząc iloczyn $[Y,Y^*]_{\mathfrak{g}}$ z $H = \alpha$, stwierdzamy,
że $\lambda \neq 0$. Licząc iloczyn $[Y,Y^*]_{\mathfrak{g}}$ z $H = e_i$
natomiast, wyznaczamy $\beta^i \sim (\alpha | e_i) = 0$,
czyli – w rzeczy samej – $[Y,Y^*]_{\mathfrak{g}} = \lambda \triangleright \alpha \in \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}}$.

Niechaj teraz $H = [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}}^{(Y \neq 0)}$, a wtedy

$$\Big(\underbrace{[Y, Y^*]_{\mathfrak{g}} \,\big|\, [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}}\Big)}_{\neq 0} = \big(\alpha \,\big|\, [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}}\big) \cdot \underbrace{\big(Y^* \,\big|\, Y^*\big)}_{\neq 0},$$

przeto

$$\big(\alpha \,\big|\, [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}}\big) = \frac{\overbrace{\big([Y, Y^*]_{\mathfrak{g}} \,\big|\, [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}}\big)}^{\in \mathbb{R}_{>0}}}{\underbrace{\big(Y^* \,\big|\, Y^*\big)}_{\in \mathbb{R}_{>0}}} > 0$$

Możemy zatem zdefiniować

- dla dowolnego $Y \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ i $N_{\alpha, Y} := \frac{(\alpha \,|\, [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}})}{2} \in \mathbb{R}$ –

$$E_\alpha := \frac{1}{\sqrt{N_{\alpha, Y}}} \triangleright Y \in \mathfrak{g}_\alpha; \quad F_\alpha := \frac{1}{\sqrt{N_{\alpha, Y}}} \triangleright Y^* \in \mathfrak{g}_{-\alpha}; \quad H_\alpha := \frac{1}{N_{\alpha, Y}} \triangleright [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}},$$

a wtedy $(\alpha|H_\alpha) = \frac{2}{(\alpha|H)} \triangleright (\alpha|H) = 2$

i stąd $[H_\alpha, E_\alpha]_{\mathfrak{g}} = 2E_\alpha$, $[H_\alpha, F_\alpha]_{\mathfrak{g}} = -2F_\alpha$

oraz $[E_\alpha, F_\alpha]_{\mathfrak{g}} = \frac{1}{N_{\alpha,Y}}[Y, Y^*] \equiv H_\alpha$,

zatem – w istocie – spełnione są relacje z tezy Twierdzenia. $\square$

NB. Zauważmy przy okazji, że z równości $(\alpha|H_\alpha) = 2$ w połączeniu z ustaloną przynależnością $H_\alpha \in \langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}}$, czyli $H_\alpha = h_\alpha \triangleright \alpha$, wynika $2 = (\alpha|H_\alpha) = (\alpha|h_\alpha \triangleright \alpha) = h_\alpha \cdot (\alpha|\alpha)$,

tj.
$$\boxed{H_\alpha = \frac{2}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha}$$

Def. 20 Niech $\alpha \in Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{h})$. Wówczas
$$H_\alpha = \frac{2}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha \in \mathfrak{h}$$
określany mianem KOPIERWIASTKA stowarzyszonego z pierwiastkiem α.

$\times$

Zajmiemy się obecnie reprezentacją podalgebry $sl(2;\mathbb{C})_{(\alpha)} \subset \mathfrak{g}$ otrzymaną przez ograniczenie reprezentacji dołączonej ad.

Mamy kluczowe

<u>Tw. 6.</u> W dotychczasowym zapisie

$$\forall \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) : (1)\ \forall \lambda \in \mathbb{C} : \left(\lambda \triangleright \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \Rightarrow \lambda \in \{-1,1\} \right)$$

$$(2)\ \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_\alpha = 1 .$$

D: W ramach przygotowań do dowodu B0 tezy zasadniczej wygodnie będzie rozpatrzeć najpierw

Lemat: W powyższych oznaczeniach

$$|\lambda| > 1 \Longrightarrow \lambda \in \{-2, 2\}.$$

Dowód Lematu: Niechaj $X \in \mathfrak{g}_{\lambda \triangleright \alpha} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$, a wtedy

$$[H_\alpha, X]_{\mathfrak{g}} = (\lambda \triangleright \alpha | H_\alpha) \triangleright X = \bar{\lambda} \cdot (\alpha | H_\alpha) \triangleright X$$

$$\equiv \bar{\lambda} \cdot \left(\alpha \middle| \frac{2}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha\right) \triangleright X = 2\bar{\lambda} \triangleright X,$$

czyli $2\bar{\lambda} \in \operatorname{Sp} H_\alpha$. Tymczasem (31)

Tw. [ćwiczenie] W dowolnej (∞-wym.) reprezentacji (V, ϱ) algebry $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ zachodzi

(i) $\operatorname{Sp} \varrho(H) \subset \mathbb{Z}$

(ii) $n \in \operatorname{Sp} \varrho(H) \Rightarrow \{-|n|, -|n|+2, -|n|+4, \dots, |n|\} \subset \operatorname{Sp} \varrho(H)$.

zatem $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, czyli $\exists N \in \mathbb{Z} : \lambda = \frac{N}{2}$. Ale też dla dowolnego $Y \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$ dostajemy

$$[H_{\lambda \triangleright \alpha}, Y] = (\alpha | H_{\lambda \triangleright \alpha}) \triangleright Y = \left(\alpha \middle| \frac{2\lambda}{\lambda^2 (\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha\right) \triangleright Y = \frac{2}{\lambda} \triangleright Y,$$

wzięto takie $\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{N} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, tj.

$N \in \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$, a skoro $\underset{= \frac{|N|}{2}}{|\lambda|} > 1$,

to w istocie $N \in \{-4, 4\}$, czyli $\lambda \in \{-2, 2\}$. $\square$

Wracamy do dowodu tezy pośredniej...

Wykorzystując skończoność wymiaru $\mathfrak{g}$,

konstatujemy istnienie najmniejszej

(niezerowej) krotności α w $Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{t})$

a następnie odnosimy do tego pierwiastka tego lematu, by wywnioskować, że (B3) jedyne skalarne krotności (tego minimalnego) α w $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})$ to $\pm\alpha$ i ewentualnie $\pm 2\alpha$.

Rozważmy następnie

wybór

$$\mathfrak{s}_\alpha := \langle E_\alpha, F_\alpha \equiv E_\alpha^*, H_\alpha \rangle_{\mathbb{C}}$$

i mimo

$$V_\alpha := \langle H_\alpha \rangle \oplus \bigoplus_{\beta \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h}) \cap \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}}} \mathfrak{g}_\beta \subset \mathfrak{g}$$

Łatwo przekonujemy się, że V_α jest podalgebrą Liego $\mathfrak{g}$. Istotnie, po pierwsze

1° NIE-PRZECIWNE PIERWIASTKI : (WYNIK $\notin \mathfrak{h}$)

$$\forall\, \beta_1, \underset{\neq -\beta_1}{\beta_2} \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h}) \cap \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}} : [\mathfrak{g}_{\beta_1}, \mathfrak{g}_{\beta_2}]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g}_{\beta_1+\beta_2}, \qquad (134)$$

$\Downarrow$

ale $\beta_1+\beta_2 \in \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}}$, więc $[\mathfrak{g}_{\beta_1}, \mathfrak{g}_{\beta_2}] \subset \bigoplus_{\beta \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h}) \cap \langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}}} \mathfrak{g}_\beta$. ✓

2° PRZECIWNE PIERWIASTKI: Niech teraz $\beta_1 = -\beta_2 = \beta$.

Lemat ze str. 123 implikuje dla $\beta \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h}) \cap \langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}}$, że dowolny element $[\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_{-\beta}]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{h}$ jest prostopadły do każdego elementu $\mathfrak{h}$ prostopadłego do β, czyli sam jest skalarną wielokrotnością β, więc też α, zatem – koniec końców – tkwi w H_α. Ujrzeć też...

$\forall X \in \mathfrak{g}_\beta : [H_\alpha, X]_{\mathfrak{g}} \in \langle X \rangle_{\mathbb{C}}$, co przeczy o słuszności naszej konkluzji.

Skoro jednak $V_\alpha \, (\supset \mathfrak{s}_\alpha)$ jest podalgebrą Liego w $\mathfrak{g}$, to $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}_\alpha}(V_\alpha) \subset V_\alpha$. Jest też $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}_\alpha}(\mathfrak{s}_\alpha) \subset \mathfrak{s}_\alpha$ (BO TO $\cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{g}$). Zważywszy, że $(E_\alpha^*, F_\alpha^*, H_\alpha^*) = (F_\alpha, E_\alpha, H_\alpha)$ (wszak $H_\alpha = \overset{\in \mathbb{R}_{>0}}{\frac{2}{(\alpha|\alpha)}} \triangleright \alpha$, $\alpha \in \mathfrak{I} \otimes i$), czyli $\mathfrak{s}_\alpha^* \subset \mathfrak{s}_\alpha$, stwierdzamy w świetle str. 18, (36)

że w rozkładzie

$$V_\alpha = s_\alpha \oplus s_\alpha^\perp$$

(PRZYP.: $(\mathfrak{g}, (\cdot|\cdot))$ JEST NIEZWYR. $\rightsquigarrow$ MAMY DO DYSPOZYCJI ALGORYTM GRAMA-SCHMIDTA)

jest $ad_{s_\alpha}(s_\alpha) \subset s_\alpha$ oraz $ad_{s_\alpha}(s_\alpha^\perp) \subset s_\alpha^\perp$,

gdyż $X \in s_\alpha^\perp$ implikuje

$$(ad_{s_\alpha}(X) | s_\alpha) = (X | ad_{s_\alpha^*}(s_\alpha)) \subset (X | ad_{s_\alpha}(s_\alpha))$$

$$\subset (X | s_\alpha) = 0.$$

Ponieważ jednak $\beta \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h}) \cap \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}}$ są postaci $\beta \in \{\mp\alpha, \mp 2\cdot\alpha\}$, przeto

$$\mathrm{Sp}\left(\mathrm{ad}_{H_\alpha}\restriction_{V_\alpha}\right) \subset \{0, \mp(\alpha|H_\alpha), \mp 2(\alpha|H_\alpha)\}$$

$$\equiv \{0, \pm 2, \pm 4\} \subset 2\mathbb{Z} \ !$$

Załóżmy, że $\mathfrak{s}_\alpha^\perp \neq \{0_{\mathfrak{g}}\}$, a wtedy

$$\mathfrak{s}_\alpha^\perp \ni X \ : \ \mathrm{ad}_{H_\alpha}(X) = \lambda\cdot X, \quad \lambda \in \{0, \pm 2, \pm 4\},$$

więc jako przestrzeń $\mathfrak{s}_\alpha$-modułowa $\cong$ rep $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})_{(\alpha)}$, koniecznie zawiera wektor, $\underline{\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})_\alpha}$ stowarzyszony

$\underline{0}$ ✓ ; $-2, -2+2=\underline{0}$ ✓, $-2+4=2$; $-4, -4+2=-2, -4+4=\underline{0}, -4+6=2, -4+8=4$ ✓

z wartością własną 0. Jednakowoż jedynym takim wektorem jest $H_\alpha \in S_\alpha \perp S_\alpha^\perp$, czyli ten wektor $H_\alpha \in S_\alpha^\perp \cap S_\alpha = \{0\}$, tj. $H_\alpha = 0$ ↯, zatem $S_\alpha^\perp = \{0_g\}$,

co zaś oznacza, że $V_\alpha = S_\alpha$, skąd teza. □

Przyjrzyjmy się teraz geometrii $Q(g;T_r)$ (w duchu Kleina). W tym celu wprowadzimy ...

Def. 21. Przyjmijmy dotychczasowy język.

Z dowolnym pierwiastkiem $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ stowarzyszony endomorfizm ($\mathbb{C}$-liniowe!)

$$w_\alpha : \mathfrak{t} \circlearrowleft : H \longmapsto H - 2 \cdot \frac{(\alpha|H)}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha \,.$$

GRUPA WEYLA $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ to grupa wolna generowana przez w_α,

$$W(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) := \langle\, w_\alpha \mid \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \,\rangle \,.$$

Zauważmy, że ilekroć $H \in \mathfrak{F}\otimes i$, zachodzi – w świetle Stw. 23 (str. 118) i rzeczywistości $(\cdot|\cdot)$ na K (str. 79) – relacja

$$w_\alpha(H) = \underset{\mathfrak{F}\otimes i}{H} - 2\frac{(\alpha|H)^{\in\mathbb{R}}}{(\alpha|\alpha)_{\in\mathbb{R}}}\rhd\underset{\mathfrak{F}\otimes i}{\alpha} \in \mathfrak{F}\otimes i.$$

! nad R!!!

Jako endomorfizm $\mathfrak{F}\otimes i$ odwzorowanie to jest odbiciem w hiperpłaszczyźnie ortogonalnej do α, tj. $w_\alpha(H) = \begin{cases} H & \text{dla } H\perp\alpha \\ -H & \text{dla } H\in\langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}} \end{cases}$

Odbicie to określamy mianem **ODBICIA WEYLA**. Rzecz jasna odbicie jest izometrią $(\cdot|\cdot)$, tj.

$$W \subset O\left(\mathfrak{t}\otimes i, (\cdot|\cdot)\big|_{\mathfrak{t}\otimes i \times \mathfrak{t}\otimes i}\right)$$

to jest przestrzeń $\mathbb{R}$-liniowa
nie $\mathbb{C}$-lin..!
nad $\mathbb{R}$!!!

Bez trudu dowodzimy

Tw. 7 $\forall w \in W(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) : w(Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})) \subset Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$

D: Zdefiniujmy automorfizm $\mathfrak{g}$ wzorem (dla dowolnego $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})$):

macierzowy!

$$S_\alpha := \exp(\mathrm{ad}_{X_\alpha}) \circ \exp(-\mathrm{ad}_{Y_\alpha}) \circ \exp(\mathrm{ad}_{X_\alpha})$$

(z którego odczytujemy $S_\alpha^{-1} = \exp(-\mathrm{ad}_{X_\alpha}) \circ \exp(\mathrm{ad}_{Y_\alpha}) \circ \exp(-\mathrm{ad}_{X_\alpha})$).

Dla dowolnego $H \in \mathfrak{h}$ o własności $H \perp \alpha$ zachodzi $[X_\alpha, H] = 0 = [Y_\alpha, H]$, a zatem także

$$[\mathrm{ad}_{X_\alpha}, \mathrm{ad}_H] = 0 = [\mathrm{ad}_{Y_\alpha}, \mathrm{ad}_H],$$

$$= \mathrm{ad}_{[X_\alpha,H]} = \mathrm{ad}_0 = \mathrm{ad}_{[Y_\alpha,H]}$$

przeto – w tym przypadku –

$$S_\alpha \circ ad_H \circ S_\alpha^{-1} = ad_H .$$

W bezpośrednim rachunku (ćwiczenie!) sprawdzamy dalej

$$S_\alpha \circ ad_{H_\alpha} \circ S_\alpha^{-1} = -ad_{H_\alpha},$$

zatem w sumie – wobec liniowości ad. i rozkładu $\langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ –

$$\forall H \in \mathfrak{t} : S_\alpha \circ ad_H \circ S_\alpha^{-1} = ad_{W_\alpha(H)} .$$

Weźmy teraz $\beta \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ i $X \in \mathfrak{g}_\beta \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$, a wtedy

$$[H, S_\alpha^{-1}(X)]_{\mathfrak{g}} \equiv ad_H \circ S_\alpha^{-1}(X) = S_\alpha^{-1} \circ (S_\alpha \circ ad_H \circ S_\alpha^{-1})(X)$$

$$= S_\alpha^{-1} \circ ad_{w_\alpha(H)}(X) \equiv S_\alpha^{-1}\big([\underset{\mathfrak{h}}{w_\alpha(H)}, \underset{\in \mathfrak{g}_\beta}{X}]_{\mathfrak{g}}\big)$$

$$= (\beta \,|\, w_\alpha(H)) \triangleright S_\alpha^{-1}(X) \equiv \big(w_\alpha(w_\alpha^{-1}(\beta)) \,\big|\, w_\alpha(H)\big) \triangleright S_\alpha^{-1}(X)$$

TU ROZWAŻALIŚMY Z UWAGI NA

Ale w_α jest $\mathbb{C}$-liniowe, zatem $\equiv \langle \mathfrak{t} \otimes i \rangle_{\mathbb{C}}$

PRZYSZŁE

jest izometrią na całym $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$, wszystko ROZW.

$$[H, S_\alpha^{-1}(X)] = (w_\alpha^{-1}(\beta) \,|\, H) \triangleright S_\alpha^{-1}(X),$$ skąd wniosek,

je $w_\alpha^{-1}(\beta) = w_\alpha(\beta) \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ jest pierwiastkiem **145**

w_α jest odbiciem $\Rightarrow w_\alpha^2 = id_{\mathfrak{t}}$

o wektorze pierwiastkowym $S_\alpha^{-1}(X)\ (\neq 0)$.

Skoro zaś generatory zachowują $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$, to $W(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ – także. $\square$

W istocie – wobec odwracalności w_α –

$$W(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \subset G_{Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})},$$ co wyprowadza

<u>Stw. 25.</u> $|W(\mathfrak{g};\mathfrak{t})| < \infty$ (grupa skończona)

D: Wynika to wprost z $|Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})| < \infty$ ($\Leftarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} < \infty$) $\square$

Zanim podamy dotychczasowe uogólnienia przydatnej abstrakcji, udowodnimy jeszcze

Stw. 26.

$$\forall\, \alpha,\beta \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) : \ 2\frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)} \equiv (\beta|H_\alpha) \in \mathbb{Z}.$$

Liczby $A_{\alpha,\beta} := 2\dfrac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)}$ nazywamy **LICZBAMI CARTANA**.

D: Niechaj $X \in \mathfrak{g}_\beta \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$ (wektor pierwiastkowy), a wówczas (147)

$$[H_\alpha, X]_{\mathfrak{g}} = \underbrace{(\beta|H_\alpha) \triangleright X}_{\equiv A_{\alpha,\beta} \triangleright X},$$

zatem $A_{\alpha,\beta}$ jest wartością własną H_α w reprezentacji (dołączonej) algebry $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})_{(\alpha)}$ na $\mathfrak{g}$.

Teza jest teraz konsekwencją Tw. [o całkowitości] (i) (str. 131). $\square$

Powyższy wynik ma prostą geometryczną interpretację: 148

Rzut prostopadły $\frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha$ pierwiastka β na $\langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}}$ jest $\frac{\mathbb{Z}}{2}$ - krotnością α.

$$\Updownarrow$$

$$W_\alpha(\beta) - \beta \in \langle \alpha \rangle_{\mathbb{Z}} .$$

$$\stackrel{\vee}{=} -2\frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha = -A_{\alpha\beta} \triangleright \alpha$$

Podsumujemy obecnie dotychczasowe (149) ustalenia dotyczące $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ ...

<u>Tw. 8.</u> $R \equiv Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ to skończony podzbiór niezwyrodniałej $\mathbb{R}$-liniowej przestrzeni kwadratowej $\left(E \equiv \mathfrak{t}\otimes i \,, (\cdot|\cdot)\restriction_{E\times E}\right)$ o własnościach

(1) $E = \langle R \rangle_{\mathbb{R}}$

(2) $\forall_{\alpha\in R}\, \forall_{\lambda\in \mathbb{R}} : \left(\lambda \triangleright \alpha \in R \Longrightarrow \lambda \in \{-1,1\}\right)$

(3) $\forall_{\alpha,\beta\in R} : W_\alpha(\beta) \in R$

(4) $\forall_{\alpha,\beta\in R} : A_{\alpha,\beta} \in \mathbb{Z}$

Abstrakcja :

Def. 22. SYSTEM PIERWIASTKOWY

to para $((E,\langle\cdot|\cdot\rangle),R)$ złożona z :

- $(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)\in \mathrm{Ob}\,\square\mathbf{Vect}^{<\infty}_{\mathbb{R}}$, niezerowymiarowa
- $R\subset E$ - podzbiór PIERWIASTKÓW

o własnościach : (SP1) $E=\langle R\rangle_{\mathbb{R}}$

(SP2) $\forall_{\alpha\in R}\forall_{\lambda\in\mathbb{R}} : (\lambda\triangleright\alpha\in R \Rightarrow \lambda\in\{-1,1\})$

(SP3) $\forall_{\alpha,\beta\in R} : W_\alpha(\beta):=\beta-2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\triangleright\alpha\in R$ ODBICIE WEYLA

(SP4) $\forall_{\alpha,\beta\in R} : A_{\alpha\beta}:=2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\in\mathbb{Z}$.

Przy tym $\dim_{\mathbb{R}}E$ nazywamy RZĘDEM SYSTEMU PIERWIASTKOWEGO

Podgrupa $W((E,\langle\cdot|\cdot\rangle),R) := \langle w_\alpha \mid \alpha\in R\rangle \subset O(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ (151)

określoną mianem GRUPY WEYLA SYSTEMU PIERWIASTKOWEGO. $\supset \mathfrak{G}_R$

MORFIZM SYSTEMÓW PIERWIASTKOWYCH $((E_A,\langle\cdot|\cdot\rangle_A),R_A)$, $A\in\{1,2\}$

to $\chi\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_1,E_2)$ o własnościach

(MSP1) $\chi(R_1)\subset R_2$

(MSP2) $\forall_{\alpha\in R_1} : \chi\circ \hat{w}^1_\alpha = \hat{w}^2_{\chi(\alpha)}\circ\chi$

dla rozszerzenia $\hat{w}^A_\alpha$ odbicia Weyla do E_A.

System pierwiastkowy nazywamy **PRZYWIEDLNYM**, ilekroć 152

$$\exists \underset{\neq 0}{E_1}, \underset{\neq 0}{E_2} \subset E : \left(E \simeq E_1 \overset{\text{ortog!}}{\oplus} E_2 \wedge \forall \alpha \in R : \alpha \in E_1 \veebar \alpha \in E_2 \right)$$

W przeciwnym razie mówimy o **NIEPRZYWIEDLNYM SYSTEMIE PIERWIASTKOWYM**.

X

W dalszej części będziemy analizować anatomię systemów pierwiastkowych. Przedtem jednak zbadamy dokładniej relacje między algebrami półprostymi i prostymi.