Wykład XI

2024/25

W ramach przygotowań terminologicznych

Str. 27. Niech $\mathfrak{g}$ będzie rzeczywistą a.L.

$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ - prosta $\Longrightarrow$ $\mathfrak{g}$ - prosta.

D: $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ - prosta $\overset{ex}{\underset{def}{\Longrightarrow}}$ $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \geqslant 2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} \geqslant 2$. ✓

Ponadto jeśli $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ jest nietrywialnym ideałem $\Longrightarrow \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ — " —

— " — ⚡ $\square$

Momenty kluczowe

<u>Tw. 9.</u> Niechaj K będzie zwartą grupą Liego o algebrze Liego $\mathrm{Lie}\,K \equiv \mathfrak{k}$. Jeśli $\mathfrak{k}$ jest prosta, to $\underbrace{\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}}_{\cong \mathfrak{g}}$ jest prosta (jako $\mathbb{C}$-algebra).

<u>D:</u> W pierwszej kolejności musimy przeformułować pojęcie struktury $\mathbb{C}$-liniowej.

<u>Lemat 1.</u> Niechaj V będzie grupą przemienną. Wówczas poniższe zdania są równoważne:

(C1) Na V jest określone działanie $\mathbb{C}$, które czyni z niej przestrzeń $\mathbb{C}$-liniową

(C2) — " — " — $\mathbb{R}$ — " — $\mathbb{C}$-liniową.
$\mathbb{R}$-liniową,

a wedto $\exists\, I \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V \ : \ I \circ I = -\mathrm{id}_V$. (155)

Endomorfizm taki nazywamy mianem STRUKTURY ZESPOLONEJ na V.

DL 1.: $(C1) \Rightarrow (C2)$ Działanie $\mathbb{C}$ indukuje działanie $\mathbb{R}$ poprzez $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} : r \mapsto (r,0)$.
Mamy też $I = (0,1) \triangleright$.

$(C2) \Rightarrow (C1)$ Działanie $\mathbb{R}$ wraz z I indukuje

$$\mathbb{C} \times V \to V : ((x,y),v) \longmapsto x \triangleright v + I(y \triangleright v).$$

$\square$

Przenieśmy wyniki uogólnione z punktu (456) do kategorii algebr Liego:

__Lemat 2.__ Algebra Liego nad $\mathbb{R}$ $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ jest algebrą Liego nad $\mathbb{C}$ $\Longleftrightarrow$

$$\underset{\text{STRUKTURA ZESPOLONA}}{\exists\, I \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})} : \left(I \circ I = -\mathrm{id}_{\mathfrak{g}} \ \wedge\ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \circ (I \times \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) = I \circ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \right)$$

$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$

$\chi = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$

$$\Longleftrightarrow \exists\, \mathfrak{h} \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{LieAlg}_{\mathbb{C}},\ \chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) :$$

$I = \chi \circ i \circ \chi^{-1}$

$$\left(\exists\, \chi^{-1} \ \wedge\ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \circ (\chi \times \chi) = \chi \circ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}} \right).$$

__Dk 2:__ Proste ćwiczenie.

Lemat. Niech K będzie zwartą grupą Liego o nietrywialnej algebrze Liego $\mathfrak{k}$. Wówczas na $\mathfrak{k}$ nie istnieje struktura zespolona. (157)

Dowód: Załóżmy, przeciwnie, że $I \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{k})$ jest strukturą zespoloną. Wówczas ad_X, $X \in \mathfrak{k}$ jest $\mathbb{C}$-liniowe. Istotnie,

$$\forall Y \in \mathfrak{k} : \; ad_X \circ I(Y) = [X, I(Y)]$$

$$= -[I(Y), X] = -I([Y,X]) = I([X,Y]) = I \circ ad_X(Y).$$

Ale w świetle konstruktywnego (158)
dowodu Stw. 18. na $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ istnieje niejednoznaczna
struktura hermitowska, względem której
$ad_X^{\mathbb{C}}$ jest skośnie hermitowski, zatem
diagonalizowalny z $\mathrm{Sp}\, ad_X^{\mathbb{C}} \subset i\mathbb{R}$, o ile
więc wybierzemy $X \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{k})$, dostaniemy
$\mathrm{Sp}\, ad_X^{\mathbb{C}} \neq \{0\}$, czyli $ad_X^{\mathbb{C}}$ <u>NIE</u>
jest nilpotentny, co oznacza, że

ad_X nie jest nilpotentny. (159)

Przechodząc do $(\mathbb{K}, \mathbb{I})$, stwierdzamy, że $\mathrm{ad}_X \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{K})$ jako operator NIE-nilpotentny ma niezerową wartość własną $\lambda = (a,b) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Istnieje zatem $V \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$:

$$[X, V] \equiv \mathrm{ad}_X(V) = \lambda \triangleright V \equiv a \triangleright V + b \triangleright \mathbb{I}(V)$$

Rozważmy $\tilde{X} := \bar{\lambda} \triangleright X \equiv a \triangleright X - b \triangleright \mathrm{I}(X)$. (160)

Zachodzi $[\tilde{X}, V] \equiv [\bar{\lambda} \triangleright X, V] = \bar{\lambda} \triangleright [X, V]$

$$= \bar{\lambda} \triangleright (\lambda \triangleright V) = |\lambda|^2 \triangleright V.$$

Ale $\mathrm{ad}_{\tilde{X}}$ jest skośnie symetryczny względem struktury hermitowskiej (przypomnieć) na $\mathfrak{k}$, zatem

$$|\lambda|^2 (V|V) \equiv (\mathrm{ad}_{\tilde{X}}(V)|V) = -(V|\mathrm{ad}_{\tilde{X}}(V))$$

$$= -|\lambda|^2 (V|V) \Longrightarrow (V = 0 \lor \lambda = 0) \ \lightning \ \square$$

Możemy już teraz przystąpić do dowodu (161)

Twierdzenie ... $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ jest – wprost z definicji – redukcyjne, ale też zauważmy, że $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, bo w przeciwnym razie $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) - \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^* \neq 0$, bo inaczej $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{k} \otimes i$ – nie jest $\mathbb{C}$-podprzestrzenią

vele

PUNKTOWO! $\cap\, \mathfrak{g} - \mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{k} \otimes 1$ byłoby centrum $\mathfrak{k}(\otimes 1)$ ↯ (wszak $\mathfrak{k}$ prosta) $\Rightarrow \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ $\frac{1}{2}$ a.L.

Po drugie: załóżmy, przeciwnie, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ <u>NIE</u> jest proste, tj. – skoro jest półproste – istnieją przynajmniej dwie podalgebry proste $\mathfrak{g}_j \subset \mathfrak{g}$, $j \in \overline{1,N}$, $N \geq 2$

o własności $\mathfrak{g} \simeq \bigoplus_{j=1}^{N} \mathfrak{g}_j$.

161 1/2

1° $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})-\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})^* = 0$: $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \ni \zeta = \zeta_1 \otimes 1 + \zeta_2 \otimes i \implies \zeta - \zeta^* = 2\zeta_1 \otimes 1$

PUNKTOWO!

$$\zeta - \zeta^* = 0 \iff \zeta = \zeta_2 \otimes i,$$

tj. $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{k} \otimes i$ ↯

$\Downarrow$

2° $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})-\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})^* \neq 0$

$\Downarrow$

$2\zeta_1 \otimes 1$, $\zeta \in \mathfrak{k}$, przy czym jeśli $\exists X \in \mathfrak{k}$: $[\zeta_1, X]_{\mathfrak{k}} \neq 0_{\mathfrak{k}}$,

to $[\zeta, X \otimes 1]_{\mathfrak{g}} = [\zeta_1, X]_{\mathfrak{k}} \otimes 1 + [\zeta_2, X] \otimes i$

$$\zeta \notin \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \text{ ↯} \qquad \neq 0 \text{ w } \mathfrak{k} \otimes 1$$

NIEISTOTNE, bo w $\mathfrak{k} \otimes i$

$\mathbb{R}$-lin. niezal.

W świetle Tw.3 rozkład powyższy jest jedyny z dokładnością do permutacji składników. Ale też $\mathfrak{g}$ rozkłada się na sumę prostą podalgebr $\overline{\mathfrak{g}_j}$, gdzie $\overline{X_1 \otimes 1 + X_2 \otimes i} = X_1 \otimes 1 - X_2 \otimes i$. Istotnie, „sprzężenie" (ściśle: $\mathbb{C}$-liniowe) $\bar{\cdot} : \mathfrak{g} \circlearrowleft$ zachowuje nawias Liego, 162

$$\overline{[X, Y]_{\mathfrak{g}}} = \overline{[X_1 \otimes 1, Y]_{\mathfrak{g}} + i \triangleright [X_2 \otimes 1, Y]_{\mathfrak{g}}}$$

$$= [X_1 \otimes 1, \overline{Y}]_{\mathfrak{g}} - i \triangleright [X_2 \otimes 1, \overline{Y}]_{\mathfrak{g}} = [\overline{X}, \overline{Y}]_{\mathfrak{g}} ,$$

zatem $\overline{g_j}$ spełniają te same relacje co g_j. Wobec powyższego

$$\forall j\in\overline{1,N}\ \exists k\in\overline{1,N}:\ \overline{g_j}=g_k.$$

Przypuśćmy, że $\exists j\in\overline{1,N}:\ \overline{g_j}=g_j$.

Wówczas $\forall X\in g_j:\ X+\overline{X}\in g_j\cap k$ i $g_j\cap k$

$[Y\otimes 1, X+\overline{X}]_g = [Y\otimes 1, X]_g+[Y\otimes 1,\overline{X}]_g = [Y\otimes 1, X]_g+\overline{[Y\otimes 1, X]_g}$ $\in g_j$ dow.!

jest $\neq 0$ ideałem w k. Ale $g_j\cap k\neq k$,

bo w p.p. $g_j=(g_j\cap k)^{\mathbb{C}}=k^{\mathbb{C}}=g$.

$= 0$ dla każdego $X = x\otimes i$ $\forall x\in g_j$, a to nie jest $\mathbb{C}$-podprz.!

W takim razie $\mathfrak{g}_j \cap K$ jest <u>niezmienniczym</u> ideałem w K. ↯

(wszak K – prosta)

Wniosek: $\neg \exists\, j \in \overline{1,N}$: $\overline{\mathfrak{g}_j} = \mathfrak{g}_j$.

Niech $j, k \in \overline{1,N}$, $j \neq k$: $\overline{\mathfrak{g}_j} = \mathfrak{g}_k$, a wtedy

$(\mathfrak{g}_j \oplus \mathfrak{g}_k) \cap K \subset K$ jest niezerowym ideałem,

(rozumowanie j/w, tylko teraz $\mathfrak{g}_j \oplus \mathfrak{g}_k$)

który wobec prostoty K jest tożsamy z K.

Stąd jedyny wniosek: $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_j \oplus \overline{\mathfrak{g}_j}$.

Mamy zatem <u>dwa</u> składniki proste, wzajem „sprzężone", $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_2 = \overline{\mathfrak{g}_1}$.

Zdefiniujmy następnie odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe:

$$\chi : \mathfrak{g}_1 \to \underset{\cong \mathfrak{k}\otimes 1}{\mathfrak{k}} : X \mapsto X + \overline{X}.$$

Wobec $\overline{X} \in \overline{\mathfrak{g}_1} = \mathfrak{g}_2$ jest $[Y, \overline{X}]_{\mathfrak{g}} = 0 \quad \forall\, Y \in \mathfrak{g}_1$, przeto

$$[\chi(X), \chi(Y)]_{\mathfrak{g}} = [X + \overline{X}, Y + \overline{Y}]_{\mathfrak{g}} = [X, Y]_{\mathfrak{g}} + [\overline{X}, \overline{Y}]_{\mathfrak{g}}$$

$$= [X, Y]_{\mathfrak{g}} + \overline{[X, Y]_{\mathfrak{g}}} = \chi([X, Y]_{\mathfrak{g}}).$$

Przy tym X jest mono, gdyż

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \mathfrak{g}_1}}{X} + \underset{\substack{\uparrow \\ \mathfrak{g}_2}}{\overline{X}} = 0 \iff X = 0 \quad \text{wobec } \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 = \{0\}.$$

Rachunek wymiarów (zespolonych)

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_1 = 2\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_1 = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} \geq \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}$$

pokazuje, że X jest izo, zatem w świetle Lematu 2. $\mathfrak{k}$ ma strukturę zespoloną, co stoi w sprzeczności z Lematem 3.

($\mathfrak{k}$ proste $\Rightarrow$ $\mathfrak{k}$ nieprzemienne $\Rightarrow$ $\mathfrak{k}$ nie ma $\mathbb{C}$-str.) ◻

Możemy wreszcie sformułować

<u>Tw. 10.</u> Niechaj $\mathfrak{g}$ będzie półprostą a.L. o zwartej formie rzeczywistej $\mathfrak{k}$ i niech $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ będzie podalgebrą Cartana $\mathfrak{g}$ stowarzyszoną z maksymalną podalgebrą przemienną $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$. Wówczas $\mathfrak{g}$ <u>nie</u> jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{h}$ rozkłada się na ortogonalną sumę prostą podprzestrzeni

$$\mathfrak{h} = \underset{\neq 0}{\mathfrak{h}_1} \oplus \underset{\neq 0}{\mathfrak{h}_2}$$

o własności

$$\forall \alpha \in R(\mathfrak{g};\mathfrak{h}) : \left(\alpha \in \mathfrak{h}_1 \ \underline{\vee}\ \alpha \in \mathfrak{h}_2\right).$$

D: $\boxed{\Rightarrow}$ Załóżmy najpierw, że $\mathfrak{g}$ nie jest proste, więc też – w świetle Tw. 9 – $\mathfrak{k}$ nie jest proste. Istnieje zatem nietrywialny ideał $\mathfrak{k}_1 \subsetneq \mathfrak{k}$. W świetle (adaptacji dowodu ⊛ verte!) Stw. 19 i przy dokonanym wyborze iloczynu skalarnego na $\mathfrak{k}$ (Ad_K-niezmienniczego) stwierdzamy, że także $\mathfrak{k}_1^\perp$ jest ideałem w $\mathfrak{k}$, czyli

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{k}_2 \,, \qquad \mathfrak{k}_2 \equiv \mathfrak{k}_1^\perp \,,$$

a zatem $\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_1^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{k}_2^{\mathbb{C}} \equiv \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 .$

(*) Niech $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$ ideał $\iff [\mathfrak{k},\mathfrak{h}]_{\mathfrak{k}} \subset \mathfrak{h}$
(dla $\mathbb{R}$-algebry Liego)

Oczywiście jako przestrzenie $\mathbb{R}$-lin.: $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$.

Niech $X \in \mathfrak{h}^{\perp} \iff (X|\mathfrak{h}) = \{0\}$, ale wtedy

$$(ad_{\mathfrak{k}}(X)|\mathfrak{h}) = -(X|ad_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{h})) \subset (X|\mathfrak{h}) = \{0\},$$

czyli

$$[\mathfrak{k},\mathfrak{h}^{\perp}]_{\mathfrak{k}} \subset \mathfrak{h}^{\perp} \implies \begin{array}{ccc} [\mathfrak{h},\mathfrak{h}^{\perp}]_{\mathfrak{k}} & \subset & \mathfrak{h}^{\perp} \\ \| \text{ ale też} & & \cap \;= \{0\}, \\ -[\mathfrak{h}^{\perp},\mathfrak{h}]_{\mathfrak{k}} & \subset & \mathfrak{h} \end{array}$$

Czyli $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}^{\perp}]_{\mathfrak{k}} = \{0\} \implies \mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$ jako A.L.

Niechaj $\mathfrak{h}$ będzie maksymalną podalgebrą przemienną w $\mathfrak{k}$. Pokażemy, że $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$, gdzie $\mathfrak{h}_A \subset \mathfrak{k}_A$, $A \in \{1,2\}$. Przypuśćmy, że

NIE znaczy to, że $X_A, \tilde{X}_A \in \mathfrak{h}$!!!!

$H = X_1 + X_2$, $\tilde{H} = \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 \in \mathfrak{h}$, gdzie $X_A, \tilde{X}_A \in \mathfrak{k}_A$, $A \in \{1,2\}$.

Wówczas $$0 = [H, \tilde{H}]_{\mathfrak{k}} = \underbrace{[X_1, \tilde{X}_1]_{\mathfrak{k}}}_{\in\, \mathfrak{k}_1} + \underbrace{[X_2, \tilde{X}_2]_{\mathfrak{k}}}_{\in\, \mathfrak{k}_2}$$

(wszak $[\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2]_{\mathfrak{k}} = 0$),

zatem $[X_1, \tilde{X}_1]_{\mathfrak{k}} = 0_{\mathfrak{k}} = [X_2, \tilde{X}_2]_{\mathfrak{k}}$, a w takim razie

$[X_1, \tilde{H}]_{\mathfrak{k}} = [X_1, \tilde{X}_1]_{\mathfrak{k}} = 0_{\mathfrak{k}}$, czyli $[X_1, \mathfrak{h}]_{\mathfrak{k}} = 0_{\mathfrak{k}}$, co wobec maksymalności $\mathfrak{t}$ oznacza, że

$X_1 \in \mathfrak{t}$. Analogicznie pokazujemy, że $X_2 \in \mathfrak{t}$.

To jednak oznacza, że $\mathfrak{t} = \underbrace{(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_1)}_{=\mathfrak{t}_1} \oplus \underbrace{(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_2)}_{=\mathfrak{t}_2}$,

a zatem także $\mathfrak{h} \equiv \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_1^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{t}_2^{\mathbb{C}} \equiv \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$.

Dla dowolnych $\alpha \in Q(\underbrace{\mathfrak{g}_1}_{=\mathfrak{k}_1^{\mathbb{C}}}; \underbrace{\mathfrak{h}_1}_{=\mathfrak{t}_1^{\mathbb{C}}})$ i $X \in \mathfrak{g}_{1\alpha}$ ($\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$) oraz $\underset{\in\mathfrak{h}}{H} = \underset{\in\mathfrak{h}_1}{H_1} + \underset{\in\mathfrak{h}_2}{H_2}$ obliczamy

$$[H,X]_{\mathfrak{g}} = [H_1,X]_{\mathfrak{g}} + \underbrace{[\underset{\in \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}_2}{H_2},\underset{\in\mathfrak{g}_1}{X}]_{\mathfrak{g}}}_{=0} = [H_1,X]_{\mathfrak{g}} = (\alpha|H_1) \triangleright X \equiv (\alpha|H) \triangleright X \quad \left(\begin{matrix}\text{wszak } \alpha \in \mathfrak{t}_1 \otimes i \\ \alpha \perp \mathfrak{h}_2 \cong \mathfrak{t}_2 \otimes \mathbb{C}\end{matrix}\right),$$

a stąd wniosek, że także $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})$.

Analogicznie dowodzimy, że każdy $\beta \in Q(\mathfrak{g}_2;\mathfrak{T}_2)$ jest też w $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{T})$.

Pokażemy, że każdy $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{T})$ jest albo w $Q(\mathfrak{g}_1;\mathfrak{T}_1)$, albo w $Q(\mathfrak{g}_2;\mathfrak{T}_2)$. Niech $X = \underset{\in\mathfrak{g}_1}{X_1} + \underset{\in\mathfrak{g}_2}{X_2} \in \mathfrak{g}_\alpha$ i niech $H_1 \in \mathfrak{T}_1$ (dowolne), a wtedy

$$\underset{\in\mathfrak{g}_1}{[H_1,X_1]_{\mathfrak{g}}} \equiv [H_1,X_1]_{\mathfrak{g}} + \underbrace{[H_1,X_2]_{\mathfrak{g}}}_{=0} = [H_1,X]_{\mathfrak{g}} = (\alpha|H_1)\triangleright X$$

$$\equiv \underset{\in\mathfrak{g}_1}{(\alpha|H_1)\triangleright X_1} + \underset{\in\mathfrak{g}_2}{(\alpha|H_1)\triangleright X_2}$$

, zatem albo $X_2 = 0_{\mathfrak{g}}$, albo $(\alpha|H_1) = 0$, co wobec dowolności H_1 oznacza $\alpha \perp \mathfrak{T}_1$. Jeśli $X_2 = 0_{\mathfrak{g}}$, to $\forall H_2 \in \mathfrak{T}_2 : 0_{\mathfrak{g}} = [H_2,X_1]_{\mathfrak{g}} \overset{X_2=0_{\mathfrak{g}}}{\equiv} [H_2,X]_{\mathfrak{g}} = (\alpha|H_2)\triangleright X$, czyli $\alpha \perp \mathfrak{T}_2$, czyli $\alpha \in \mathfrak{t}_1$, wtedy jednak $\alpha \in Q(\mathfrak{g}_1;\mathfrak{t}_1)$.

W przeciwnym razie (gdy $x_2 \neq 0_{\mathfrak{g}}$), $\alpha \perp \mathfrak{t}_1$, czyli $\alpha \in \mathfrak{t}_2$,

co implikuje $\alpha \in Q(\mathfrak{g}_2;\mathfrak{t}_2)$. ☒

$\boxed{\Leftarrow}$ Przyjmijmy teraz, że $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1^{\times 0} \oplus \mathfrak{t}_2^{\times 0}$ $\qquad A \in \{1,2\}$

i $\forall \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) : (\alpha \in \mathfrak{t}_1 \,\underline{\vee}\, \alpha \in \mathfrak{t}_2)$. Oznaczmy $R_A = Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{t}_A$,

i zdefiniujmy $\mathfrak{g}_A := \mathfrak{t}_A \oplus \bigoplus_{\alpha \in R_A} \mathfrak{g}_\alpha$, $A \in \{1,2\}$, a wtedy

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, ale też $\begin{cases} \forall \alpha \in R_2 : [\mathfrak{t}_1, \mathfrak{g}_\alpha]_{\mathfrak{g}} = \overset{0}{(\alpha|\underset{\uparrow\,\mathfrak{t}_2}{\mathfrak{t}_1})} \triangleright \mathfrak{g}_\alpha = 0_{\mathfrak{g}} \\ \forall \alpha \in R_1 : [\mathfrak{t}_2, \mathfrak{g}_\alpha]_{\mathfrak{g}} = 0_{\mathfrak{g}} \end{cases}$

jako przestrzeni $\mathbb{C}$-lin. !

i oczywiście $[\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2]_{\mathfrak{g}} = 0_{\mathfrak{g}}$. Ponadto $\forall \alpha_A \in R_A : [\mathfrak{g}_{\alpha_1}, \mathfrak{g}_{\alpha_2}]_{\mathfrak{g}} = 0_{\mathfrak{g}}$, albowiem $\alpha_1 + \alpha_2 \notin R_1 \cup R_2 \equiv Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$. Ostatecznie więc $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ jako algebry Liego. □