

Wykład XII

2024/25 

D: Jaka je $E_A = \langle R_A \rangle_R$, gdje (174)

$$\langle R_1 \cup R_2 \rangle_R = E_1 \oplus E_2, \text{ gdje (SP1) v.}$$

(SP2) jest petunij, gdje R_A jest SP
za E_A .

Jeli $\alpha, \beta \in R_A$ to $W_\alpha(\beta) \in R_A \subset R_1 \cup R_2$.

Jeli ustomost $\alpha_A \in R_A$, to $W_1(\alpha_2) = \alpha_2$

1 $W_{\alpha_2}(\alpha_1) = \alpha_1$, bo $(\alpha_1 | \alpha_2) = 0$ u $E_1 \oplus E_2$.

u sume nisc (SP3) v.



Procedura (SP4) wynika z twierdzenia (175)

$$A_{\alpha, \beta}^{\varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2} = \begin{cases} A_{\alpha, \beta}^{\varepsilon_A} \in \mathbb{Z} & \text{dla } \alpha, \beta \in R_A \\ 0 & \text{dla } \alpha \in R_1, \beta \in R_2. \end{cases} \quad \square$$

Uwaga: dla rozważanej klasyfikacji:

Str. 29. Niech $\alpha, \beta \in R$, przy czym $\beta \in \langle \alpha \rangle_{(R)}$
 a wtedy $\langle \alpha | \alpha \rangle \geq \langle \beta | \beta \rangle$. Wskazy załóżmy

dysjunkcyjne

$$(1) \langle \alpha | \beta \rangle = 0$$

$$(2) \langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \beta | \beta \rangle \wedge \chi(\alpha, \beta) \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\}$$

$$(3) \langle \alpha | \alpha \rangle = 2\langle \beta | \beta \rangle \wedge \chi(\alpha, \beta) \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$$

$$(4) \langle \alpha | \alpha \rangle = 3\langle \beta | \beta \rangle \wedge \chi(\alpha, \beta) \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

D: Oznaczmy $n_1 := 2 \frac{\langle \alpha | \beta \rangle}{\langle \alpha | \alpha \rangle}$, $n_2 := 2 \frac{\langle \beta | \alpha \rangle}{\langle \beta | \beta \rangle}$. (76)

Wiemy, że $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Jest $\swarrow$ wzrosty

$$n_1 \cdot n_2 = \frac{4 \langle \alpha | \beta \rangle^2}{\langle \alpha | \alpha \rangle \langle \beta | \beta \rangle} \equiv 4 \langle \hat{\alpha} | \hat{\beta} \rangle^2 \equiv 4 \cos^2 \theta$$

$\hat{\alpha} \quad \hat{\beta}$
 θ

stąd

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\langle \alpha | \alpha \rangle}{\langle \beta | \beta \rangle} \geq 1, \text{ o ile } \langle \alpha | \beta \rangle \neq 0 \text{ (założenie).}$$

$\mathbb{Z}$
 $\cup \text{ p.p. } n_1 = 0 = n_2$

W takim razie $0 \leq n_1 \cdot n_2 \leq 4$, czyli $n_1, n_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Przy tym jeśli $n_1 \cdot n_2 = 0$, to $\cos \theta = 0$, czyli $\alpha \perp \beta$, a jeśli $n_1 \cdot n_2 = 4$, to $\cos^2 \theta = 1$, czyli $\beta \in \langle \alpha \rangle$.
(pokażesz!)

Rozważamy powyższe przypadki:

(177)

$$(*) n_1 \cdot n_2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \theta \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\},$$

ale $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, więc $(n_1, n_2) \in \{(1, 1), (-1, -1)\}$.

$$(n_1, n_2) = (1, 1) \Rightarrow \langle \alpha | \beta \rangle > 0, \text{ zatem } \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$(n_1, n_2) = (-1, -1) \Rightarrow \langle \alpha | \beta \rangle < 0, \text{ zatem } \theta = \frac{2\pi}{3}$$

W obu przypadkach $\frac{n_2}{n_1} = 1$, czyli $\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \beta | \beta \rangle$.

$$(**) n_1 \cdot n_2 = 2 \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}, \text{ ale}$$

$n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ i $|n_2| \geq |n_1|$ (bo $\langle \alpha | \alpha \rangle \geq \langle \beta | \beta \rangle$), zatem

$$(n_1, n_2) \in \{(1, 2), (-1, -2)\}, \text{ przy czym}$$

$$(u_1, u_2) = (1, 2) \Rightarrow \langle \alpha | \beta \rangle > 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

(178)

$$(u_1, u_2) = (-1, -2) \Rightarrow \langle \alpha | \beta \rangle < 0 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

W obu przypadkach $\frac{u_2}{u_1} = 2 \Leftrightarrow \langle \alpha | \alpha \rangle = 2 \langle \beta | \beta \rangle$.

(***) Analogiczny pok. w przypadku (**), $\square$

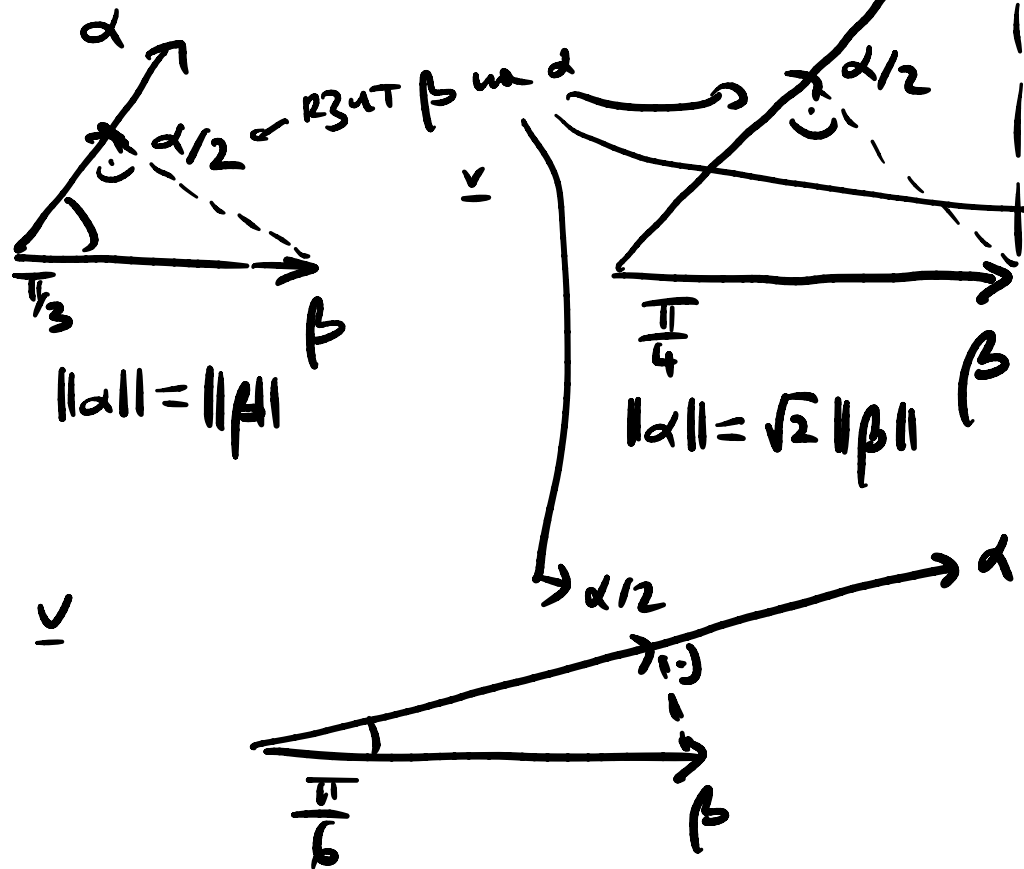
Corollarium: Niech $\alpha, \beta \in R$.

(i) $\nexists (\alpha, \beta) \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ (rozwarły) $\Rightarrow \alpha + \beta \in R$

(ii) $\nexists (\alpha, \beta) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ (ostry) $\Rightarrow \alpha - \beta, \beta - \alpha \in R$.

DC: Rozważamy go także możliwości (1)-(4)
ze zw. 29, zalecając $\langle \alpha | \alpha \rangle \geq \langle \beta | \beta \rangle$.

$\langle \alpha | \beta \rangle \neq 0 \Rightarrow$



$\begin{matrix} \text{KUT} \\ \text{OSTRY} \end{matrix}$

$\Rightarrow w_\alpha(\beta) = \beta - 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$
 $\equiv \beta - \alpha \in \mathbb{R},$
 α Hedy talize
 $-(\beta - \alpha) = \alpha - \beta \in \mathbb{R}.$

Jeśli $\chi(a, \beta)$ jest równy 1, to $\chi(-a, \beta)$ jest równy $\textcircled{180}$
 i równy poprzedniemu wartościom, przeto

$$P_{\langle a \rangle}^{\langle a \rangle^+}(\beta) = -\frac{a}{2}, \text{ a } \text{Agd } W_a(\beta) = \beta - 2 \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) = a + \beta \in R. \quad \square$$

↓ (POMINIĘTE!)

W powyższych studiach systemów pierwiastkowych
 postać algebry Liego uogólniamy na obiekty
 „dualne”, tj. kopierwiastki. Te wpisuje
 w nową część rozważań

Str. 30 Niech (E, R) będzie systemem pierwiastkowym.
 Wówczas (E, R^V) , gdzie $R^V = \{ \alpha^V = \frac{2}{\langle \alpha | \alpha \rangle} \alpha \mid \alpha \in R \}$

takie jest systemem pierwiastkowym, przy czym
 $W(E, R^V) = W(E, R)$; $(R^V)^V = R$. System
 ten określony nazywamy DUALNEGO (181)
SYSTEMU PIERWIASTKOWEGO, a jego elementy
 nazywamy KOPIERWIASTKAMI.

D: Obliczamy $\langle \alpha^V | \alpha^V \rangle = 4 \frac{\langle \alpha | \alpha \rangle}{\langle \alpha | \alpha \rangle^2} = \frac{4}{\langle \alpha | \alpha \rangle}$,

zatem $(\alpha^V)^V \equiv \frac{2}{\langle \alpha^V | \alpha^V \rangle} \circ \alpha^V = \frac{\langle \alpha | \alpha \rangle}{2} \cdot \frac{2}{\langle \alpha | \alpha \rangle} \circ \alpha = \alpha$.

Ponadto $A_{\alpha^V, \beta^V} \equiv 2 \frac{\langle \alpha^V | \beta^V \rangle}{\langle \alpha^V | \alpha^V \rangle} = \frac{\langle \alpha | \alpha \rangle}{2} \cdot \langle \frac{2}{\langle \alpha | \alpha \rangle} \circ \alpha | \frac{2}{\langle \beta | \beta \rangle} \circ \beta \rangle$

$$= \frac{2 \langle \alpha | \beta \rangle}{\langle \beta | \beta \rangle} \equiv A_{\beta | \alpha} \in \mathbb{Z}. \quad (182)$$

transpozycja w macierzy
Cortana

Wobec $\alpha^v \in \langle \alpha \rangle_R$ mamy też $w_{\alpha^v} \equiv w_\alpha$,
a przy tym

$$w_{\alpha^v}(\beta^v) \equiv w_\alpha\left(\frac{2}{\langle \beta | \beta \rangle} \circ \beta\right) = \frac{2}{\langle \beta | \beta \rangle} \circ w_\alpha(\beta)$$

$$\uparrow \quad \frac{2}{\langle w_\alpha(\beta) | w_\alpha(\beta) \rangle} \circ w_\alpha(\beta) \equiv w_\alpha(\beta)^v, \text{ co ma sens,}$$

$w_\alpha \in O(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ bo R jest zachowawcza
przy $w(E, R)$.

W takim razie $\forall w \in W(E, R^v) \equiv W(E, R) :$ 183
 $w(R^v) \subset R^v.$

Rzeczywiście $\langle \alpha^v \mid \alpha \in R^v \rangle \equiv \langle \alpha \mid \alpha \in R \rangle = E.$

Wniosek tej prostej charakterystyki α^v to to, że
 które dokładnie są charakterystyki α , czyli

$$(\pm \alpha)^v = \pm \alpha^v. \quad \square$$

N.B. $\forall \alpha, \beta \in R : \|\alpha\| = \|\beta\| \Rightarrow R^v \cong R.$

Isomorfizm taki może mieć miejsce
 nawet gdy mamy jednolity obiekt
 pierwiastek nie jest specyficznym (morfizmem nie
 funkcją)

KONIEC
 OBJAŚNIE

Najscie przydatniejsze wzory wyrażanie uporządk. (184)

Def. 23. Niech (E, R) będzie systemem pierwotnym.

BAZA SYSTEMU PIERWOTNEGO to podzbiór Δ ch

o własnościach: (BSP_1) Δ jest bazą E

wzajemnie jest podzbiorem (BSP_2) $R = \langle \Delta \rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}^{101} \cup \langle \Delta \rangle_{\mathbb{Z}_{\leq 0}}^{101}$

Pierwotni $\alpha \in \langle \Delta \rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}^{101}$ dzielący się przez R_+^{101} DODATNICH.

Pierwotni $\alpha \in \langle \Delta \rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}^{101}$ dzielący się przez R_-^{101} Ujemnych.

Elementy Δ nazywamy DODATNIMI PIERWIASTKAMI PROSTYMI.

W dolnej części układu zbudowany geometrycznie...
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \text{wektory}$ w Δ ... (185)

Str. 31. $\forall \alpha, \beta \in \Delta : (\alpha \neq \beta \Rightarrow \langle \alpha | \beta \rangle \leq 0)$.

(czyli $\forall (\alpha, \beta) \in [\frac{\pi}{2}, \pi[)$).

D: A.e. Niech $\langle \alpha | \beta \rangle > 0$, a wtedy $\exists (\alpha, \beta) \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

nice na mocy Corollarii — $\alpha - \beta$ i $\beta - \alpha \in \mathbb{R}$.

Jedynym układem $\alpha - \beta$ w kącie Δ będący
 równym zeru (BSP2). ⚡ □

Możemy dowodzić

^{Pomocniczo użyjemy...}
Str. 32. $\exists \Pi \subset E, \text{codim}_{\mathbb{R}} \Pi = 1 : \Pi \cap R = \emptyset.$

D: Niechaj $\alpha \in R$ i niech $\Pi_{\alpha} := \langle \alpha \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} \equiv \text{Ker} \langle \alpha | \cdot \rangle$ 186

$(\dim_{\mathbb{R}} \Pi_{\alpha} = \dim_{\mathbb{R}} E - \dim_{\mathbb{R}} \text{Im} \langle \alpha | \cdot \rangle \equiv \dim_{\mathbb{R}} E - 1).$

$|R| < \infty \Rightarrow \exists h \in E \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \Pi_{\alpha}$ (intuicja:

$\langle e_1 \rangle_{\mathbb{R}} \cup \langle e_2 \rangle_{\mathbb{R}} \neq \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbb{R}}$ dla $e_1, e_2 \in \mathbb{N}$).

Niechaj teraz $\Pi_h = \langle h \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$, a wtedy

$\alpha \in \Pi_h$ oznacza $h \in \Pi_{\alpha}$, co nie może zachodzić
dla $\alpha \in R$. Π_h jest pryzmatycznym hiperpłaszczyzną. $\square$

Kolejny użył powyższego w

Def. 24. Niech (E, R) będzie systemem pierścieniowym i niech $\Pi \subset E$ jak w Str. 32, a wówczas

$R = R_+^\Pi \cup R_-^\Pi$, gdzie $R_\pm^\Pi$ jest zawarty w spójnej idealowej $E_\pm^\Pi$ co oznacza $E \setminus \Pi = E_+^\Pi \cup E_-^\Pi$.

Pierwiastek $\alpha \in R_\pm^\Pi$ nazywamy ROZKŁADALNYM,

iletność $\exists \beta, \gamma \in R_\pm^\Pi : \beta + \gamma = \alpha$. W przeciwnym razie mówimy, że α jest NIEROZKŁADALNYM.

Mamy teraz...

Th. 11. Niechaj (E, R) będzie SP, a $\Pi \subseteq E$ jak (188)
w Tw. 32, R_+^Π zaś - jak w Def. 24.

Wówczas zbiór niezerodowych elementów R_+^Π
jest bazą R . I odwrotnie, dla dowolnej bazy
 $\Delta \subseteq R$ istnieje $\Pi \subseteq E$: Δ jest podzbiorem
niezerodowych elementów $R_+^{\Pi_\Delta}$ (nazywamy Π_Δ).

D: $\Rightarrow$ Niechaj $\Delta \subseteq R_+^\Pi$ będzie zbiorem elementów
niezerodowych. Wybierzmy $h \perp \Pi$, mamy
 $E_+^\Pi = \{v \in E \mid \langle h | v \rangle > 0\}$.

Po pierwsze zauważamy, że

czyli: Δ_n generuje R_+^n
nad $\mathbb{N}$

(189)

* $\forall \alpha \in R_+^n \exists \{n_\delta\}_{\delta \in \Delta_n} \subset \mathbb{N} : \alpha = \sum_{\delta \in \Delta_n} n_\delta \cdot \delta.$

Zauważmy przede wszystkim, że R_+^n jest pierścieniem z jedynką i jest to pierścień skończony nad $\mathbb{N}$.
Zauważmy, że dla każdego $\alpha \in R_+^n$ istnieje taki współczynnik n_δ taki, że $n_\delta > 0$ dla $\delta \in \Delta_n$.
Zauważmy, że dla każdego $\alpha \in R_+^n$ istnieje taki $\delta \in \Delta_n$ taki, że $n_\delta > 0$ dla $\delta \in \Delta_n$.
Zauważmy, że dla każdego $\alpha \in R_+^n$ istnieje taki $\delta \in \Delta_n$ taki, że $n_\delta > 0$ dla $\delta \in \Delta_n$.

Oczywiście $\alpha \notin \Delta_n$ (bo elementy Δ_n mają tylko jeden niezerowy współczynnik), więc α jest sumą elementów z Δ_n .
 $\exists \beta_1, \beta_2 \in R_+^n : \alpha = \beta_1 + \beta_2$. Przy tym gdyby obie pierwiastki β_1 i β_2 były kombinacjami elementów Δ_n z współczynnikami z $\mathbb{N}$, to rang własność indukcyjna α .

W takim jednak razie jeden z nich,
np. β_1 , należy do $N\Delta_\Pi$. Ale

(90)

$$\underbrace{\langle h | \alpha \rangle}_0 = \underbrace{\langle h | \beta_1 \rangle}_0 + \underbrace{\langle h | \beta_2 \rangle}_0$$



$$\langle h | \beta_1 \rangle < \langle h | \alpha \rangle$$



(wzrost α ma
minimalny wzrost
w h !)

* Jeśli teraz $\alpha, \beta \in \Delta_\Pi$ i $\alpha \neq \beta$, to $\langle \alpha | \beta \rangle \leq 0$
(co mi jest wygodne na obecnym etapie,
bo mi potrzebujemy, że Δ_Π jest bazy).
Istotnie, skoro było $\langle \alpha | \beta \rangle > 0$, to $\alpha - \beta, -(\alpha - \beta) \in \Delta_\Pi$

ale ^{zauważcie!} $\forall p \in \mathbb{R}$ nie ma λ takiego, że $\lambda p \in \mathbb{R}_+^n$. (191)

$$\alpha - \beta \in \mathbb{R}_+^n \Rightarrow \alpha = (\alpha - \beta) + \beta \quad \text{--- rozkładanie}$$

$$\underline{\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+^n \Rightarrow \beta = (\beta - \alpha) + \alpha} \quad \text{---}$$

Ponadto zbiór Δ_n jest LNZ. ***

Stąd, jeśli $\sum_{\alpha \in \Delta_n} \lambda_\alpha \alpha = 0$ zakładamy, że $\lambda_\alpha \geq 0$ dla $\alpha \in \Delta_n$

$$\left(\begin{matrix} \Delta_n^1 & \Delta_n^2 \\ \Delta_n^1 & \Delta_n^2 \end{matrix} \right) \longrightarrow \sum_{\alpha_1 \in \Delta_n^1} |\lambda_{\alpha_1}| \alpha_1 - \sum_{\alpha_2 \in \Delta_n^2} |\lambda_{\alpha_2}| \alpha_2$$

czyli $\sum_{\alpha_1 \in \Delta_n^1} |\lambda_{\alpha_1}| \alpha_1 = \sum_{\alpha_2 \in \Delta_n^2} |\lambda_{\alpha_2}| \alpha_2$ 0: zał. $\alpha_2 \in \Delta_n^2$, $\alpha_1 \in \Delta_n^1$, a wtedy

$$\langle v | v \rangle \equiv \left\langle \sum_{\alpha_1 \in \Delta'_n} |\lambda_{\alpha_1}| \triangleright \alpha_1 \mid \sum_{\alpha_2 \in \Delta_n^2} |\lambda_{\alpha_2}| \triangleright \alpha_2 \right\rangle \quad (192)$$

$$= \sum_{\alpha_1 \in \Delta'_n} \sum_{\alpha_2 \in \Delta_n^2} |\lambda_{\alpha_1}| \cdot |\lambda_{\alpha_2}| \cdot \langle \alpha_1 | \alpha_2 \rangle \leq 0, \text{ item}$$

$$v = 0, \text{ i.t.} \quad \sum_{\alpha_1 \in \Delta'_n} |\lambda_{\alpha_1}| \triangleright \alpha_1 = 0 = \sum_{\alpha_2 \in \Delta_n^2} |\lambda_{\alpha_2}| \triangleright \alpha_2,$$

tedy podle $0 = \langle h \mid \sum_{\alpha_1 \in \Delta'_n} |\lambda_{\alpha_1}| \triangleright \alpha_1 \rangle$

$$= \sum_{\alpha_1 \in \Delta'_n} |\lambda_{\alpha_1}| \cdot \langle h \mid \alpha_1 \rangle \text{ dle}$$

nam $|\lambda_{\alpha_1}| = 0$: analogicky $|\lambda_{\alpha_2}| = 0$.
 (vždy $\lambda_{\alpha_i} \neq 0$)
 (no $\alpha_i \in R_+^n$)

Koro jednak $R_+^\eta \subset \langle \Delta_n \rangle_{\mathbb{N}}$, to także
 $\alpha \mapsto -\alpha$ zachowuje R i mierza same rzuty $\langle \alpha | h \rangle \mapsto -\langle \alpha | h \rangle$ (193)
 $R_-^\eta \equiv -R_+^\eta \subset \langle \Delta_n \rangle_{-\mathbb{N}}$, a ponieważ

$E = \langle R \rangle_{\mathbb{R}}$ i myślo $E = \langle \Delta_n \rangle_{\mathbb{R}}$, co pokazuje,
 że Δ_n jest bazą E . $\blacksquare$

$\Leftarrow$ Niechaj teraz $\Delta = \{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ będzie bazą R ,
 czyli tej bazy E . Ustalamy (dowolnie)
 liczby $\lambda_i > 0$, $i \in \mathbb{N}$: odpowiadający im (jedynemu)
 element $\gamma \in E$: $\forall i \in \mathbb{N} : \langle \gamma | \alpha_i \rangle = \lambda_i$.

Komentarz: Niech $\{a_i\}_{i \in I}$ baza V , $\{\lambda_i\}_{i \in I} \subset K$ (dow.)

193 1/2

Szukamy $\varphi \in V^*$: $\forall i \in I : \varphi(a_i) = \lambda_i$.

Jest $\varphi = \sum \lambda_i a^i$, gdzie $a^i(a_j) = \delta_{ij}$.

Nieogrodzoności $\langle \cdot | \cdot \rangle$ pozwala przypisać

φ jedynemu wektorowi γ : $\varphi \equiv \langle \gamma | \cdot \rangle$.

Mając γ , stwierdzamy 17^e

194

we $R_+ \equiv R \cap \langle \Delta \rangle_N \ni \alpha$ jest $\langle \gamma | \alpha \rangle > 0$,

czyli $R_+ \subset E_+^\Gamma$, gdzie $\Gamma_\gamma = \langle \gamma \rangle_{\mathbb{R}}^\perp \subset E$.
(sh. 187)

Niedługo teraz $\alpha \in \Delta^{< R_+}$ i zafajnowy 17^e
 α rozkładamy na co najmniej dwa
elementy R_+ (oczywiście ze współczynnikiem N^*).
Oba elementy nie mogą być z $\langle \alpha \rangle_{\mathbb{R}}$.
bo $\langle \alpha \rangle_{\mathbb{R}} \cap R = \{\pm \alpha\}$, zatem $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ i $\beta_1 \neq \alpha$,
(np.)

czyli α rozkładzie $\checkmark$ ^{bazowo!} α występuje $\neq 2$
razem z $\tilde{\alpha} \in \Delta$ ($3 \neq 0$ współczynnikiem) (195)

- jeżeli β_1 rozkładający w bazie Δ . verte

To jednak oznacza, że Δ nie jest LN3. ⚡

Każdy zatem $\alpha \in \Delta$ jest nierozkładający.

W takim razie nie mamy udeśniennej
osi $\Rightarrow$ istnieje $\Delta \subset \Delta_{\Pi_g}$. Ale

Δ_{Π_g} jest bazą E , zatem $|\Delta_{\Pi_g}| = \dim E = |\Delta|$,

czyli $\Delta \equiv \Delta_{\Pi_g}$.

□

Gdyby było: $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ i $\text{długość} \sim \alpha_i$ w β_1 (195 $\frac{1}{2}$)

znosi się ze $\text{długość} \sim \alpha_i$ w β_2
(tym samym: α nie ma długość ,
 długość)

to pewnie, β_1, β_2 będą z $R_{-}^{n \times n}$!
Wzajemnie transponowane, je $\text{długość} \in R_{+}$.

_____ X _____

Zachodzi też

Str. 33. Niech Δ będzie bazy R .

(196)

Wówczas $\{a^\vee\}_{a \in \Delta}$ jest bazy $R^\vee$.

D: Zaświadczenie $\Rightarrow$

Leemat: Niech Δ będzie bazy R ,

a $R_+ \equiv R \cap \langle \Delta \rangle_{\mathbb{N}}$ - zbiorem pierwiastków dodatnich.

$$\forall a \in \Delta : a \notin \langle R_+ \setminus \{a\} \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}.$$

DL: ^{A.a.} Oznaczmy dla uproszczenia $a_1 = a$ i $\Delta \setminus \{a\} = \{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$.

Przyjmijmy, że $a_1 = \sum_{\beta \in R_+ \setminus \{a\}} \lambda_\beta \beta$, $\lambda_\beta \in \mathbb{R}$.

Skoro $R_+ \subset \langle \Delta \rangle_{\mathbb{N}}$, to dostajemy równość

$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^r \mu_i \alpha_i, \quad \mu_i \geq 0$$

(197)

Wobec liniowej niezależności $\{\alpha_i\}_{i \in \overline{r}}$

musi być $\mu_i = \delta_{i1}$, ale każdy $\beta \in \langle \Delta \rangle$,
 zatem $\downarrow$ implikacje $\forall \beta$ w rozkładzie: $\beta \in \langle \alpha_1 \rangle_{\mathbb{R}}$,
 czyli $\forall \beta$ w rozkładzie: $\beta = \alpha_1$ (innych $\mathbb{R}$ -krotności
 nie ma w R_+). $\Leftarrow$ (możliwe $\beta \in R_+ \setminus \{\alpha_1\}$) $\square$

Wracamy do dowodu stwierdzenia...

Ustalamy $\Pi_{\Delta} \subset R$, co do $\Pi_{\Delta} = 1$ w relacji z Δ
 pole w $\frac{1}{\Gamma_{\Delta} \cdot (1,1)_{\text{ch. 18.8}}}$ oznaczałoby przy tym pole E_+

podzbiór E zawierający Δ , tj. R_+ na
przestrzeni dodatniej wzgl. Δ . (198)

Wtedy także $\{\alpha^\vee\}_{\alpha \in R_+} \subset E_+$ i $\{\beta^\vee\}_{\beta \in R_-} \subset E_-$.

Na mocy Tw.11: $\exists \Delta^\vee$ bazy $R^\vee$: $R_+^\vee = \{\alpha^\vee\}_{\alpha \in R_+}$
kierunki dodatnie
wzgl. $\Delta^\vee$

Jeśli teraz $d \in R_+ \setminus \Delta$, to $d \in \bigoplus_{i=1}^r \langle \alpha_i \rangle_{\mathbb{N}}$

czyt. jest przynajmniej dwa niepodzielne
w jego rozkładzie w bazie $\neq \emptyset$. Wobec
 $\alpha^\vee \in \bigoplus_{i=1}^r \langle \alpha_i^\vee \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$: przynajmniej dwa niepodzielne

r jest niepodzielne $n \neq 0$. Ale

$\forall i \in \overline{1, r} : \alpha_i^v \in R_+^v \wedge \alpha_i^v \neq \alpha^v$ (199)
byłoby $(\alpha^v)^v = (\alpha_i^v)^v \equiv \alpha_i$ (th. 181). Mamy
 $\equiv \alpha$ nie jest jednym z α_i^v , a byłby większy niż α_i (4)

zatem powyższe jest lematem, nie jest
by stwierdzić, że $\alpha^v \notin \Delta^v$. W takim
co $\Delta^v \subset \{\alpha_i^v\}_{i \in \overline{1, r}}$, a ponieważ Δ^v
jest bryłą E , mamy $|\Delta^v| = |\Delta| = r$,
zpli $\Delta^v = \{\alpha_i^v\}_{i \in \overline{1, r}}$. $\square$