

Wykład XIII

2024/25



Dotychczasowe rozważanie doprowadziło nas do

Def. 25. Niech (E, R) będzie systemem pierwiastkowy 200
i niech $\Pi_\alpha = \ker \langle \alpha | \cdot \rangle$, $\alpha \in R$. (OTWARCIA) KOMNATA

WEYLA systemu pierwiastkowego (E, R) to
spójne podzbiór $E \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \Pi_\alpha$. (OTWARCIA)

FUNDAMENTALNA KOMNATA WEYLA s.p. (E, R)

wzgl. bazy $\Delta = \{\alpha_i\}_{i \in \overline{1, r}}$ to zbiór

$$\mathcal{C}(E, R; \Delta) = \{ v \in E \mid \forall i \in \overline{1, r} : \langle \alpha_i | v \rangle > 0 \}.$$

(NB: $\langle \alpha_i | v \rangle = 0 \Leftrightarrow v \in \Pi_{\alpha_i}$, czyli jest to zbiór ograniczony przez $\Pi_{\alpha_i}, i \in \overline{1, r}$)

NB: $\forall v_1, v_2 \in \mathcal{C}(E, R; \Delta) \forall t \in [0, 1]$: ^{Pokazujemy, że $\mathcal{C}$ jest konwexą}
^{węzłą...}

$$v := t \triangleright v_1 + (1-t) \triangleright v_2 \in \mathcal{C}(E, R; \Delta)$$

Wzeczy samej $t, 1-t \geq 0$ i przynajmniej jedna z liczb $t, 1-t$ jest > 0 , co oznacza, że $\forall i \in I_R: \langle \alpha_i | v \rangle > 0$, czyli

$\mathcal{C}(E, R; \Delta)$ jest zbiorem wypukłym, więc jest

spójnym, a poniżej istnieją 1-formy φ na E :

$$\varphi(\alpha_i) = 1, i \in I_R, \text{ przy } i \in I_R$$



$$\text{wektor } v: \langle \alpha_i | v \rangle = 1, i \in I_R,$$

czyli $\mathcal{C}(E, R; \Delta) \neq \emptyset$. Wobec tego

$$\partial \mathcal{C}(E, R; \Delta) = \{v \in E \mid \exists i \in I_R: \langle \alpha_i | v \rangle = 0\} \cup \{v \in E \mid \text{niektóre } \alpha_i \text{ nie są konwexą węzłą}\}$$

1° Chcemy vektor: $\varphi(e_i) = 1$. Bierzemy $\{\varphi^i\}_{i \in \mathbb{N}}$: $\varphi^i(e_j) = \delta_{ij}$ (201½)

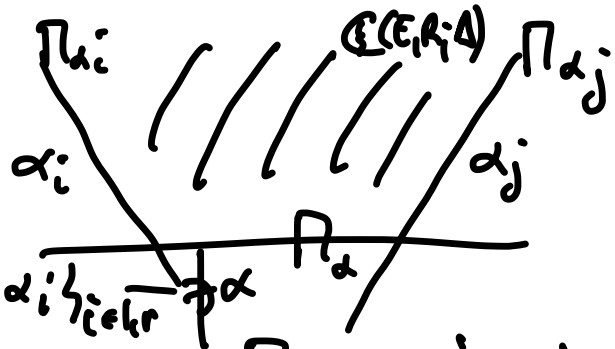
i wstawiamy $\varphi := \sum_{i=1}^r \varphi^i$.

2° Niech $v \in \mathbb{C} \cap \Pi_\Delta$, $\alpha \in \mathbb{R}$, czyli $\langle v | \alpha \rangle = 0$, ale $\alpha \in \langle \Delta \rangle_{\mathbb{N}} \vee \alpha \in \langle \Delta \rangle_{\mathbb{N}}^{\perp}$

(i) $\Rightarrow 0 = \langle v | \alpha \rangle = \sum_i |n_i| \cdot \langle v | \alpha_i \rangle \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \forall i: n_i = 0$ ⚡

(ii) $\Rightarrow 0 = \langle v | \alpha \rangle = - \sum_i |n_i| \cdot \langle v | \alpha_i \rangle \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \forall i: n_i = 0$ ⚡

3° Istotnie, nie może być



bo wtedy opisujemy $\mathbb{C}$ przez Π_α nie mogąc być ze słownym rozumem z warunków $\langle \alpha_i | v \rangle > 0$, i.e.!

OBSERWACJE :

(202)

$$1) \forall v \in \mathcal{E}(E; \Delta) \forall \alpha \in \mathbb{R}_+ : \langle \alpha | v \rangle > 0 \\ (\Leftarrow \alpha \in \langle \Delta \rangle_{\mathbb{N}})$$

$$2) \forall \chi \in W(E, \mathbb{R}) : \chi(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \wedge \chi \in O(E, \langle \cdot | \cdot \rangle) \\ \Rightarrow \chi(\{ \Pi_\alpha \}_{\alpha \in \mathbb{R}}) = \{ \Pi_\alpha \}_{\alpha \in \mathbb{R}} \quad \begin{aligned} & \text{bo } \chi(\Pi_\alpha) = \{ \chi(v) \mid (v|w) = 0 \} \\ & = \{ \chi(v) \mid (\chi(v) | \chi(w)) = 0 \} \\ & = \prod_{\chi(w) \in \mathbb{R}} \chi(w) \quad \text{określenie!} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall C - \text{komuta} \text{ Weyla} : \chi(C) - \text{komuta} \text{ Weyla}$$

(W(E, R) przyporządkowuje komuty w komuty.)

Okażemy, że, je zmięzeli poniędzy bezami
i fundamentalnymi) komutami Weyla jest 1:1...

Str. 34. $\forall C$ - ^{abstrakta} komutata Weyla $\exists! \Delta_C$ - baza R : 203

$$C \equiv \mathcal{E}(E, R; \Delta_C) \wedge R_+^{(\Delta_C)} \equiv \{ \alpha \in R \mid \forall v \in \mathcal{E}(E, R; \Delta_C) : \langle \alpha | v \rangle > 0 \}$$

Istnieje zatem jedno-podwojowe uporządkowanie parzysty
bazy R i otwarty komutator Weyla.

D: Niech $v \in C$ i wzajemny $\Pi_v = \langle v \rangle_R^\perp$.

Wprost z definicji C : v nie jest $\perp$ do żadnego
pionowego $\Pi_v \subset E \setminus R$ (nie zawiera
żadnego v). Na mocy Tw. 11 (1. część) istnieje
baza $\Delta_C = \{ \alpha_i \}_{i \in I}$ w której $E \setminus \Pi_v$ zawiera v .

plus je sign $\langle a_i, \cdot \rangle|_C = \text{const}$ (w p.p. przekazyjmy 204)

które z $\Pi_{a_i} \in \{\Pi_{a_i}\}_{a_i \in R}$, wtedy - wobec wyboru $\forall a_i \in R$ taki wybór

pojawia $\Delta_C - \forall u \in C \forall i \in \overline{1, r} : \langle a_i | u \rangle > 0$,

czyli też $\forall u \in C \forall \alpha \in R_+^{\Pi_C} : \langle u | \alpha \rangle > 0$, $\hat{\Delta}_C \in R_+^{\Pi_C}$

a ponieważ $R_+^{\Pi_C} \subset \langle \Delta_C \rangle_{\pm \mathbb{N}}$, więc $R_+^{\Pi_C}$ składa się

z tych i tylko tych (czyli pewnie wszystkie i tylko te) pierwiastków, które mają dodatni

iloczyn składowy z elementami C .

Oczywiście $C \equiv \mathbb{E}(E, R; \Delta_C)$. Pozostaje uściślić, co do jedności Δ_C .

Wiedząc Δ'_C będzie dowolną bazą o fundamentalny
kannowie Wayne $C \equiv \mathbb{E}(E, R; \Delta'_C)$. Wówczas (205)

$\forall \alpha \in \Delta'_C \forall v \in C : \langle \alpha | v \rangle > 0$, czyli $\Delta'_C \subset R_+^{\pi_r}$,
tj. w tej samej części co Δ_C .

Δ_C jest niezgodne (takie jest założenie), ale Δ'_C
jest bazą $\mathbb{E}(3 \text{ zaf.})$, więc elementy Δ_C względem niej
w tej samej części Δ'_C gdyby te względem NIS były trywialne
(z jednym wyjątkiem $n_i \neq 0$, co można było $\Delta_C = \Delta'_C$),
to oznaczałoby zgodność odnośny do
elementów Δ_C (na mocy innych i pewnie też z dodatków
potwierdzenia). $\downarrow \square$

Str. 35. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \exists \Delta$ -baza $E : \alpha \in \Delta$. 206

D: Zauważmy, że zbiory $\partial \mathcal{C}(E, \mathbb{R}; \Delta \equiv \{ \alpha_i : i \in \mathbb{I} \})$

są fragmentami hiperpodprzestrzeni $\Pi_{\alpha_i}, i \in \mathbb{I}$.
(PATRZ: 201^{1/2})

Wystarczy zatem pokazać, że $\forall \alpha \in \mathbb{R} :$

Π_{α} ma przecięcie $\Pi_{\alpha} \cap \partial \mathcal{C}$, $\text{codim}_{\mathbb{R}}(\Pi_{\alpha} \cap \partial \mathcal{C}) = 1$

z brakuem pierwszej lematy Weyla $\mathcal{C}$.

Rozważmy zatem $\alpha \in \mathbb{R} :$ odnośny Π_{α} .

Ta ostatnia jest przestrzenią $\mathbb{R}$ -liniową

wymiar $\dim_{\mathbb{R}} \Pi_{\alpha} = \dim_{\mathbb{R}} E - 1$. Jej przynależność (207)

z hiperforyzowania Π_{β} , $\beta \in R \setminus \{\pm \alpha\}$ są
podprzestrzeniami w Π_{α} wymiaru co najwyżej

$\dim_{\mathbb{R}} \Pi_{\alpha} - 1$ (bo $\beta \neq \pm \alpha$), zatem ich skończona

suma unopoziciowa, $\bigcup_{\beta \in R \setminus \{\pm \alpha\}} (\Pi_{\beta} \cap \Pi_{\alpha})$ ($|R \setminus \{\pm \alpha\}| < \infty$!

jest nieciągłym podzbiorem Π_{α} ,

$\bigcup_{\beta \in R \setminus \{\pm \alpha\}} (\Pi_{\beta} \cap \Pi_{\alpha}) \subsetneq \Pi_{\alpha}$ (elementarna
alfabeta
liniowa),

czyli $\exists v \in \Pi_{\alpha} \setminus \bigcup_{\beta \in R \setminus \{\pm \alpha\}} \Pi_{\beta}$. (patrz: str. 186)

Dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ zachodzi
 wówczas $v_\varepsilon \equiv v + \varepsilon \Delta \alpha \in C$ dla pewnej stałej
 kątowej Weyla C (wzrost $v_\varepsilon \in E \setminus \bigcup_{\beta \in R} \Pi_\beta$).

Pokojujemy, że $\alpha \in \Delta_C$, gdzie Δ_C jest bazą,
 o której mowa Str. 34. $\{ \alpha : \exists i \in I, r$

Zauważmy $\langle \alpha | v_\varepsilon \rangle \stackrel{\leftarrow v \in \Pi_\alpha}{=} \langle \alpha | \varepsilon \Delta \alpha \rangle = \varepsilon \langle \alpha | \alpha \rangle > 0$,
 jest z pewnością $\alpha \in R_+^{\Delta_C}$. Zapiszmy przyto

bo $v_\varepsilon \in C$ (przy Str. 34) $\Gamma \alpha = \sum_{i=1}^r n^i \Delta \alpha_i$, $n^i \in \mathbb{N}$, a wtedy
 $\rightarrow$ skoro $\langle \alpha | v_\varepsilon \rangle > 0$, to nie ma $\tilde{v} \in C$: $\langle \alpha | \tilde{v} \rangle < 0$, bo byłoby $\langle \alpha | \tilde{v} \rangle = 0$ gdzieś
 wzdłuż, czyli $\Pi_{\Delta C} \neq \emptyset$ $\color{red}{\hookrightarrow}$

$$0 = \langle \alpha | v \rangle = \sum_{i=1}^r n^i \cdot \langle \alpha_i | v \rangle, \text{ a ponieważ}$$

(209)

$v \in \partial C$, przeto $\langle \alpha_i | v \rangle \geq 0$, czyli

$\forall i \in \bar{r} : (n^i > 0 \Rightarrow \langle \alpha_i | v \rangle = 0)$ Jednocześnie

$\forall \beta \notin \{\pm \alpha\} : v \not\perp \beta$, przeto β nie jest

w bazy, to nie wpisze w listę,

$\alpha = \sum n^i \alpha_i$? $n^i \geq 0$ i co najmniej dwa $n^i \neq 0$ i $i \neq j$

ale wtedy $\langle \alpha_i | v \rangle = 0 = \langle \alpha_j | v \rangle$, skąd $\alpha_i, \alpha_j \notin \{\pm \alpha\}$,
zatem $\alpha_i, \alpha_j \not\perp \beta$, więc sprzeczność.

W ustypnej kolejności zbiorowy przedstawienie
 $W(E, R)$ na zbiorze komut Weyla (210)
(patrz: obecnym 2) ze th. 202),
co doprowadzi nas do dyferencjalnej
reprezentacji systemu pierwiastków...

Str. 36. Niech (E, R) będzie systemem pierwiastków.
 $\forall \Delta$ -baza (E, R) : $W(E, R) = \langle w_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$.

Dzielenie $W(E, R)$ na zbiory struktury komut Weyla jest przechodnie.

D: Wybierzmy bazę Δ i rozważmy

podgrupy $W_\Delta \equiv \langle w_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle \subset W(E, R)$.

Niech C będzie dowolną skończoną kombinacją Węzł.

Wybierzmy $v \in \mathcal{C}(E, R; \Delta)$ i $w \in C$. Pokażemy,

że $\exists \chi \in W_\Delta : \chi(w) \in \mathcal{C}(E, R; \Delta)$. W tym celu

wyberzmy $\chi_* \in W_\Delta$ spełniające warunek

$$\|\chi_*(w) - v\|_E = \min_{\chi \in W_\Delta} \|\chi(w) - v\|_E$$

(jest dobrze określone, gdyż $|W_\Delta| \leq |W(E, R)| < \infty$).

Załóżmy, że $\chi_*(w) \notin \mathcal{E}(E, R; \Delta)$, a wtedy (212)

$\exists \alpha \in \Delta : \langle \alpha | \chi_*(w) \rangle < 0$, co jednak oznacza, że
 $(\cap_{\alpha, \alpha \in \Delta} \text{przestrzeni } \mathcal{E}(E, R; \Delta) \text{ (wzajemnie } \langle v | \alpha \rangle > 0 \text{) wobec } \langle v | \alpha \rangle > 0 -$

$$\| \chi_*(w) - v \|_E^2 - \| w_\alpha \circ \chi_*(w) - v \|_E^2$$

$$\equiv (\chi_*(w) - v | \chi_*(w) - v) - (w_\alpha \circ \chi_*(w) - v | w_\alpha \circ \chi_*(w) - v)$$

$$= (\cancel{w | w}) - 2(\cancel{\chi_*(w) | v}) + (\cancel{v | v}) - (\cancel{w | w}) + 2(w_\alpha \circ \chi_*(w) | v) - (\cancel{v | v})$$

$$= 2 \left(\cancel{\chi_*(w)} - 2 \frac{(\chi_*(w) | \alpha)}{(\alpha | \alpha)} \alpha - \cancel{\chi_*(w) | v} \right) = -4 \frac{(\chi_*(w) | \alpha) \cdot (\alpha | v)}{(\alpha | \alpha)},$$

czyli $\|u_\alpha \circ \chi_*(u) - v\| < \min_{\chi \in W_\Delta} \|\chi(u) - v\|$  (213)
(wzrost $u_\alpha \circ \chi_* \in W_\Delta$).

Zatem $\chi_*(u) \in \mathcal{E}(E, R; \Delta)$, co wobec dowolności
w ogólności, że C można odwołać do $\mathcal{E}(E, R; \Delta)$
wzrost W_Δ , a ponieważ $\chi_* \in W_\Delta$ zachowuje łączy,
jest, ponieważ χ_* przekształca całą kolumnę
 C w $\mathcal{E}(E, R; \Delta)$, czyli $\chi_*(C) = \mathcal{E}(E, R; \Delta)$.
W takim razie ...

$\forall C_1, C_2$ - skrajne komnaty Weyla
 $\exists \chi \in W_\Delta : \chi(C_1) = C_2$, co oznacza,
 że W_Δ - tym bardziej niż W - skrajne
 przedziału na zbiorze komnat.

Postać przebiega się, je $W_\Delta = W$.
 Rozważmy $\alpha \in R$. W ścisłej Str. 35 $\left(\begin{smallmatrix} \forall \alpha \in R \\ \exists \text{ baza } \Delta \exists \alpha \end{smallmatrix} \right)$
 $\exists \Delta_{(\alpha)} \text{ baza} : \alpha \in \Delta_{(\alpha)}$, więc też - $\mathbb{E}(E, R; \Delta_{(\alpha)})$.
 Ustalamy $\chi \in W_\Delta : \chi(\mathbb{E}(E, R; \Delta_{(\alpha)})) = \mathbb{E}(E, R; \Delta)$.

Skoro jednak $\chi(\alpha) \in \Delta$, co wynika

z $\chi(\partial \mathcal{E}(E, R; \Delta_{\alpha})) = \partial \mathcal{E}(E, R; \Delta)$, to znowu χ
(z def.), jak i $W_{\chi(\alpha)}$ należy do W_{Δ} , ale...

Lemma: $\forall \alpha \in R \forall \chi \in W(E, R): W_{\chi(\alpha)} = \chi \circ W_{\alpha} \circ \chi^{-1}$

$$\begin{aligned} \underline{DL}: \forall v \in E: W_{\chi(\alpha)}(v) &\equiv v - 2 \frac{(v | \chi(\alpha))}{(\chi(\alpha) | \chi(\alpha))} \diamond \chi(\alpha) \\ &= \chi(\chi^{-1}(v)) - 2 \frac{(\chi(\chi^{-1}(v)) | \chi(\alpha))}{(\chi(\alpha) | \chi(\alpha))} \diamond \chi(\alpha) \end{aligned}$$

R -liniowość i izometryzacja χ

$$\downarrow = \chi \left(\chi^{-1}(v) - 2 \frac{(\chi^{-1}(v) | \alpha)}{(\alpha | \alpha)} \diamond \alpha \right) \equiv \chi(W_{\alpha}(\chi^{-1}(v))) \quad \square$$

Wobec powyższego dostajemy zatem:

(216)

$$W_\alpha = \chi^{-1} \circ W_{\chi(\alpha)} \circ \chi \in W_\Delta^{-1} \cdot W_\Delta \cdot W_\Delta \subset W_\Delta,$$

gdzie $\alpha \in R$ dowolne i $W_\alpha, \alpha \in R$ generują

$$W(E, R). \quad \square$$

Pójdziemy teraz w kierunku dowodu swobody
działania $W(E, R)$ na zbiorze modułów...

W następnej kolejności dowodzenia - pomocniczo -
8Pr. 37. $\forall C$ - skończona komuta Weyla

(217)

$$\forall \sigma, w \in \bar{C} \quad \forall \chi \in W(E, R) : (w = \chi(v) \Rightarrow w = v).$$

D: Zgromienie $\Rightarrow$

Lemma: Niech Δ będzie bazą R i niech
 $\chi \in W(E, R) \setminus \{id_E\}$. Ustalmy ROZKŁAD MINIMALNY

$\chi = w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2} \circ \dots \circ w_{\alpha_k}$, $\alpha_i \in \Delta$, tj. taki, w którym M jest
najmniejszy z możliwych. Wówczas $\mathbb{E}(E, R; \Delta)$
i $\chi(\mathbb{E}(E, R; \Delta))$ leżą po przeciwnych stronach Π_{α_1} .

DL: ^(indukcyjny wst. M) skoro $\chi \neq \text{id}_E$, to $M \geq 1$. Jeżli $M=1$,
 to $\chi = w_{\alpha_1}$, a wtedy $\chi(E(E, R; \Delta)) \equiv w_{\alpha_1}(E(E, R; \Delta))$ 218
 jest odbiciem $E(E, R; \Delta)$ w hiperpłaszczyźnie Π_{α_1} ,
 zgodnie z tezs.

Zostajemy, że teza jest prawdziwa dla χ
 o rozkładach minimalnych i o stopotni $< M$.

Niech $\chi = w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2} \circ \dots \circ w_{\alpha_M}$ i rozważamy $\underline{\chi} := w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2} \circ \dots \circ w_{\alpha_{M-1}}$.

Rozkład $\underline{\chi}$ jest minimalny, gdyżby inaczej
 nie był, rozkład χ nie byłby minimalny.

wobec założenia. Na mocy założenia indukcyjnego
 $\underline{\chi}(\mathbb{E}(E, R; \Delta))$ i $\mathbb{E}(E, R; \Delta)$ leżą po przeciwnych ⁽²¹⁹⁾
 stronach Π_{α_1} . Gdyby zatem $\underline{\chi}(\mathbb{E}(E, R; \Delta))$
 leżał po tej samej stronie Π_{α_1} co $\mathbb{E}(E, R; \Delta)$,
 to również $\underline{\chi}(\mathbb{E}(E, R; \Delta))$ i $\underline{\chi}(\mathbb{E}(E, R; \Delta))$ leżałyby
 po przeciwnych stronach Π_{α_1} , $\underline{\chi}''(w_{\alpha_1}(\mathbb{E}(E, R; \Delta)))$
 czyli tej - wobec odwołania się $\underline{\chi}$ -
 $\mathbb{E}(E, R; \Delta)$ i $w_{\alpha_1}(\mathbb{E}(E, R; \Delta))$ leżałyby po przeciwnych
 stronach $\underline{\chi}^{-1}(\Pi_{\alpha_1}) = \Pi_{\underline{\chi}^{-1}(\alpha_1)}$.

Odwrotnie niż przedtem, że istnieje dokładnie
jedna hiperfleksyjna $\Pi_\beta, \beta \in \mathbb{R}$ o tej własności,
że $E(E, R; \Delta)$ i $W_{\Delta_H}(E(E, R; \Delta))$ są po przeciwnych
stronach Π_β — jest to Π_{Δ_H} . Istotnie,
 $E(E, R; \Delta)$ i $W_{\Delta_H}(E(E, R; \Delta))$ są po przeciwnych
stronach Π_{Δ_H} , a przy tym $\Pi_{\Delta_H} \cap \partial E(E, R; \Delta) \cap \partial W_{\Delta_H}(E(E, R; \Delta)) \neq \emptyset$
miedzy innymi $\sigma \in \partial E(E, R; \Delta) \cap \Pi_{\Delta_H} \setminus \bigcup_{\beta \in \mathbb{R} \setminus \{\pm \Delta_H\}} \Pi_\beta$
a wtedy odcięci $\{\sigma + t \Delta_H \mid t \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$
dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ zawiera parę punktów

Lemma: $\Pi_{\alpha_M} \cap \partial \mathcal{E}(E, R; \Delta) \neq \emptyset$, so $\alpha_M \in \Delta$ (220½)

$\Downarrow$

$$W_{\alpha_M}(\Pi_{\alpha_M}) \cap W_{\alpha_M}(\partial \mathcal{E}(E, R; \Delta)) \neq \emptyset$$

"

$$\Pi_{\alpha_M} \cap \partial W_{\alpha_M}(\mathcal{E}(E, R; \Delta)) \neq \emptyset$$

$\exists \xi(E, R; \Delta)$ i $w_{\Delta M}(\xi(E, R; \Delta))$ i mi przejdzie
 jednej $\Pi_\beta, \beta \in R \setminus \{\pm \alpha_M\}$, czyli istnieje parę wektorów
 $(v + t\alpha_M, v - t\alpha_M)$ na tej samej stronie (221)
 wektorów $\Pi_\beta, \beta \in R \setminus \{\pm \alpha_M\}$.

Wróćmy do wcześniejszego rozumowania,
 konstatujemy, że gdyby $\xi(E, R; \Delta)$
 i $w_{\Delta M}(\xi(E, R; \Delta))$ leżały po przeciwnych stronach
 $\underline{\chi}^{-1}(\Pi_{\alpha_1}) = \Pi_{\underline{\chi}^{-1}(\alpha_1)}$, to byłoby $\Pi_{\underline{\chi}^{-1}(\alpha_1)} \equiv \Pi_{\alpha_M}$,

czyli też - w ściśle lewobocznej ze th. 215 -

$$W_{\alpha_M} \equiv W_{\underline{\chi}^{-1}(\alpha_1)} = \underline{\chi}^{-1} \circ W_{\alpha_1} \circ \underline{\chi}, \text{ a to dało by } (222)$$

$$\underline{\chi} \equiv \underline{\chi} \circ W_{\alpha_M} = \underline{\chi} \circ W_{\alpha_1} \circ \underline{\chi} \equiv (W_{\alpha_1} \circ W_{\alpha_1}) \circ W_{\alpha_2} \circ \dots \circ W_{\alpha_{M-1}}$$

$$= W_{\alpha_2} \circ W_{\alpha_3} \circ \dots \circ W_{\alpha_{M-1}}, \text{ czyli reprezentacja}$$

χ wyraża (o 2) od minimalnej.  $\square$

Wojenny już przystąpić do dalszych

obliczeń.

Przechodząc do metody indukcyjnej wzgl. stopnia L
 potrzebujemy minimalnego χ w rodzinie $\mathcal{W}_\Delta, \Delta \in \Delta_c$ (2.23)
 Jeśli $L=0$, to $\chi = id_E$ i tego jest spełniona
 trywialnie. Złożymy, że jest ona spełniona
 także, gdy $L < M$. Niech teraz $\chi = w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2} \circ \dots \circ w_{\alpha_n}$
 będzie odpowiednim minimalnym. W dalszej
 lematu $\mathcal{E}(E, R; \Delta_c) \equiv C$ i $\chi(\mathcal{E}(E, R; \Delta_c))$ leży
 w pewnym stronie Π_{α_1} i

$$\chi(\overline{\mathcal{E}(E, R; \Delta_c)}) \cap \overline{\mathcal{E}(E, R; \Delta_c)} \subset \Pi_{\alpha_1},$$

co oznacza, że $\chi(v) \equiv w \in \prod_{\alpha_1}$, więc dalej (224)

$$w_{\alpha_1} \circ \chi(v) = w_{\alpha_1}(w) \stackrel{\downarrow}{=} w$$

$$\stackrel{\subseteq}{=} \underbrace{w_{\alpha_2} \circ w_{\alpha_3} \circ \dots \circ w_{\alpha_M}}_{\chi}(v) \quad , \text{ czyli}$$

$$\underline{\chi}(v) = w \text{ dla } v, w \in \mathcal{F}(E, R; \Delta_c) \equiv C,$$

ale rozważ $\underline{\chi}$ na długości $M-1$,
niezależny z poprzednim założeniem indukcyjnym,
czyli prawdziwe, że w takim razie $v = w$.

□