Wykład XIV

2024/25

Dotychczasowe ustalenia dostarczają narzędzi do łatwej weryfikacji wartości pewnych twierdzeń. (225)

Stw. 38. Działanie $W(E,R)$ na zbiorze otwartych komór Weyla jest **swobodne**. Ponadto $\forall C$ – otwarta komora Weyla $\forall v \in C$ $\forall \chi \in W(E,R)$:

$$\chi(v) = v \Longrightarrow \chi = \mathrm{id}_E .$$

punkt stały w zbiorze komór

D: Niechaj C będzie otwartą komorą Weyla i niech $\chi \in W(E,R)$ takie, że $\chi(C) = C$, a wtedy $\forall v \in C: \chi(v) \in C$, więc na mocy

Str. 37 zachodzi $\forall v\in C : \chi(v)=v$, stąd też

$\chi|_C = \mathrm{id}_C$, ale to oznacza, że $\chi \equiv \mathrm{id}_E$, bo

χ: komnaty Weyla $\circlearrowleft$ wraz ze ścianami, zatem – z racji ciągłości χ –
$\chi|_{\overline{C}} = \mathrm{id}_{\overline{C}}$, ale $\partial C = \overline{C}\setminus C$ ma postać Π_α, $\alpha\in\Delta_C$ – baza E (!),
więc $\Pi_\alpha = \chi(\Pi_\alpha) = \Pi_{\chi(\alpha)}$, a skoro $\chi : R\circlearrowleft$, to $\chi(\alpha)=\pm\alpha$, gdyby
jednak było $\chi(\alpha)=-\alpha$, to dla $v\in\Pi_\alpha$ byłoby: $v+\varepsilon\rhd\alpha\in C \xmapsto{\chi} \underset{\equiv v}{\chi(v)}-\varepsilon\rhd\alpha\notin C$ ↯,
przeto $\forall\alpha\in\Delta_C : \chi(\alpha)=\alpha$, to jednak oznacza – wobec bazowości Δ_C – $\chi\equiv\mathrm{id}_E$.

Ponadto, gdy dla pewnego $v\in C$ jest
$\chi(v)=v$, to w świetle Obserwacji 2) ze str. 202 (χ : komnaty $\to$ komnaty)
jest $\chi(C)=C$, a to na mocy wyżej udowodnionej tezy implikuje $\chi=\mathrm{id}_E$. □

Mamy też

str. 39. $\forall \Delta_1, \Delta_2$ - bazy R $\exists! X \in W(E,R)$:

$$\Delta_2 = X(\Delta_1).$$

D: Baza Δ_A, $A \in \{1,2\}$ wyznacza otwartą komorę Weyla — $\mathfrak{C}(E,R;\Delta_A)$. Wobec swobodnego i przechodniego działania grupy $W(E,R)$ na zbiorze otwartych komór Weyla (str. 38 i 36, odpowiednio) $\exists! X \in W(E,R)$:
$\mathfrak{C}(E,R;\Delta_2) = X(\mathfrak{C}(E,R;\Delta_1))$. Ale X przeprowadza

$\chi(\partial\mathfrak{E}(E,R;\Delta_1)) = \partial\mathfrak{E}(E,R;\Delta_2)$, więc

$\langle\alpha_1\rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} = \Pi_{\alpha_1}, \alpha_1\in\Delta_1$ $\qquad$ $\Pi_{\alpha_2}, \alpha_2\in\Delta_2$

też $\chi(\Delta_1) = \Delta_2$.

$$\chi(\Pi_{\alpha_1}) = \Pi_{\alpha_2} = \langle\alpha_2\rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$$
$$= \chi(\langle\alpha_1\rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}) \xrightarrow{\chi\in O(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)} \chi(\langle\alpha_1\rangle_{\mathbb{R}}) = \langle\alpha_2\rangle_{\mathbb{R}}$$

$\chi(n_{\alpha_1}\alpha_1 + n_{\alpha_2}\alpha_2 + \dots) = n_{\alpha_1}\chi(\alpha_1) + n_{\alpha_2}\chi(\alpha_2)$

228

$\square$

UWAGA: JEŚLI JEST CHOĆ JEDEN $\alpha\in R_1$, W KTÓREGO ROZKŁADZIE $n_{\alpha_1}, n_{\alpha_2}\neq 0$, TO $\chi(\alpha_A) = \epsilon\,\alpha_{A'}$ BO INACZEJ $R_1^+ \to R_1^2$. MIESZANE, ALE $\chi(R_1) \subset R_2$! $R_2^+ \cup R_2^-$! ITD. W P.P. ZNOWU $\chi(\alpha)$ NIE MA ZNACZENIA, BO α I $-\alpha$ TO RÓWNIE DOBRY ELEMENT BAZY.

Doprecyzowujemy

Str. 40. Niech C – otwarta komora Weyla i niech $v\in E$. $\exists!\, \alpha\in\overline{C}\cap W(E,R)(v)$

orbita

D: Niech $v\in E$, więc też $v\in\overline{C_v}$, gdzie C_v jest pewną otwartą komorą Weyla. Na mocy str. 36 $\exists\, \chi\in W(E,R)$: $C = \chi(C_v)$, a wtedy także $\chi(\overline{C_v}) = \overline{C}$, zatem $\chi(v)\in\overline{C}$, czyli $W(E,R)(v) \cap \overline{C} \neq \emptyset$.

Przy tym jeśli takie $w \in W(E,R)(v) \cap \overline{C}$

to $X(v)$ i w są w tej samej orbicie (w orbicie v),

czyli $\exists\, \tilde{X} \in W(E,R)$: $w = \tilde{X}(X(v))$,

a to oznacza — w świetle str. 37 —

$w \equiv X(v)$, bo $X(v), w \in \overline{C}$. □

Na zakończenie tej części naszych rozważań dowodzimy ...

Str. 41. Niechaj Δ będzie bazą R i niech $\alpha \in \Delta$. $\forall \beta \in R_+^{\Delta} : \big(\beta \neq \alpha \implies w_\alpha(\beta) \in R_+^{\Delta}\big)$, (230)

czyli w_α jest permutacją pierwiastków dodatnich różnych od α.

D: Niech $\beta = \sum_{\gamma\in\Delta} n^{\gamma}\triangleright\gamma$, przy czym $\beta \neq \alpha$ implikuje $\exists\, \gamma_* \in \Delta\setminus\{\alpha\} : n^{\gamma_*} > 0$.

Na mocy aksjomatu (SP3) $w_\alpha(\beta) = \beta - N\triangleright\alpha$ dla pewnej liczby $N \in \mathbb{Z}$, a wobec tego

$w_\alpha(\beta) = \sum_{\gamma\in\Delta} \tilde{n}^\gamma \gamma$, gdzie $\tilde{n}^\gamma = \begin{cases} n^\alpha - N & \text{dla } \gamma=\alpha \\ n^\gamma & \text{w p.p.} \end{cases}$ (231)

W szczególności $\tilde{n}^{\gamma*} = n^{\gamma*}$.

Ale $R = R_+^\Delta \sqcup R_-^\Delta$, skoro więc $\tilde{n}^{\gamma*} > 0$, to także pozostałe $\tilde{n}^{\gamma\neq\gamma*} \geq 0$,

zatem $w_\alpha(\beta) \in R_+^\Delta$. □

——x——

Dotychczasowe rozważania przygotowały nas do podjęcia wyzwania klasyfikacji systemów pierwiastkowych...

Rekapitulacja :

- SYSTEM $\sqrt{\ }$ ⊃ BAZA SYSTEMU $\sqrt{\ }$ ← elementy NIEROZKŁADALNE
- wektory bazowe ↔ (1:1) ↔ BAZA

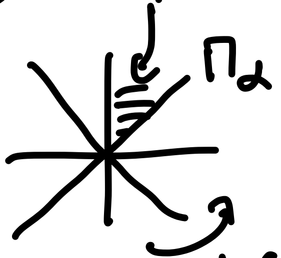
α → $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$

wzg ∂ $\Pi \cap R = \emptyset$

$\mathrm{codim}_{\mathbb{R}} \Pi = 1$

- KOMNATY WEYLA ⊃ FUNDAMENTALNA KOMNATA WEYLA

BAZA $\partial \mathcal{C} = \bigcup_i \tilde{\Pi}_{\alpha_i}$



$, \alpha \in R$

$W(E,R)$ działa na nich

- Γ : każdy może być bazowym !

Def. 26. Niechaj (E,R) będzie systemem pierwiastkowym o bazie $\Delta = \{\alpha_i\}_{i\in\overline{1,r}}$.

DIAGRAM DYNKINA s.p. (E,R) to graf o r wierzchołkach $\{v_i\}_{i\in\overline{1,r}}$ połączonych krawędziami $e_{ij} = \overrightarrow{(v_i, v_j)}$, $i,j\in\overline{1,r}$ wedle przepisu: $n_1 : n_2$ linii (patrz: str. 176)

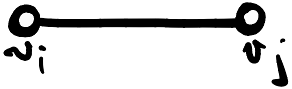
(patrz: str. 29. i 31.)

$n_1 \cdot \|\alpha_i\|_E^2 = 2\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle$

$n_2 \cdot \|\alpha_j\|_E^2 = 2\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle$

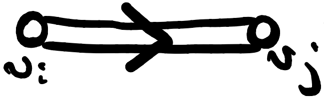
- $\sphericalangle(\alpha_i, \alpha_j) = \frac{\pi}{2} \implies e_{ij} =$

- $\sphericalangle(\alpha_i, \alpha_j) = \frac{2\pi}{3} \implies e_{ij} =$



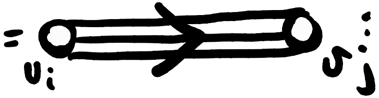
$: \|v_i\| = \|v_j\|$

- $\sphericalangle(\alpha_i, \alpha_j) = \frac{3\pi}{4} \implies e_{ij} =$



$: \|v_i\| = \sqrt{2}\|v_j\|$

- $\sphericalangle(\alpha_i, \alpha_j) = \frac{5\pi}{6} \implies e_{ij} =$



$: \|v_i\| = \sqrt{3}\|v_j\|$

Dwa diagramy Dynkina nazwiemy RÓWNOWAŻNYMI, jeśli istnieje bijekcja między zbiorami ich (233) wierzchołków zachowująca łączące je krawędzie (kolejność i „zwrot").

$(\forall \Delta_1, \Delta_2 - \text{bazy } (E,R)\ \exists!\ \chi \in W(E,R) : \Delta_2 = \chi(\Delta_1))$

×

OBSERWACJA: W świetle str. 39. i w konsekwencji zachowywania przez $W(E,R)$ kątów i długości dowolne dwie bazy (E,R) dają równoważne diagramy Dynkina, w tym zatem sensie diagram Dynkina jest stowarzyszony z systemem pierwiastkowym, nie zaś – z konkretną bazą.

Mamy kluczowe

234

Tw. 12. System pierwiastkowy jest nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jego diagram Dynkina jest spójny.

Ponadto diagramy Dynkina dwóch systemów pierwiastkowych są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy te systemy są izomorficzne.

<u>D:</u> Jeżeli $\boxed{\Rightarrow}$ system pierwiastkowy (E,R) rozkłada się na podsystemy :

$$(E,R) = (E_1,R_1) \oplus (E_2,R_2),$$

wybieramy bazę (E,R) w postaci $\Delta_1 \uplus \Delta_2$, gdzie Δ_A jest bazą (E_A,R_A), $A \in \{1,2\}$. Wtedy jedyne krawędzie między wierzchołkami należącymi do dwóch rozłącznych podbaz : Δ_1 i Δ_2 są puste, zatem diagram jest niespójny.

$\boxed{\Leftarrow}$ I odwrotnie, jeśli diagram Dynkina (E,R) jest niespójny, baza Δ rozpada się na podzbiory wzajem ortogonalne, $\Delta_1 \uplus \Delta_2 = \Delta$.

W takim jednak razie $E = \langle \Delta \rangle_{\mathbb{R}}$
$\cong \underset{\substack{\shortparallel \\ E_1}}{\langle \Delta_1 \rangle_{\mathbb{R}}} \oplus \underset{\substack{\shortparallel \\ E_2}}{\langle \Delta_2 \rangle_{\mathbb{R}}}$. Oznaczmy $R_A := R \cap E_A$.

Łatwo widać, że (E_A, R_A), $A \in \{1,2\}$ są systemami pierwiastkowymi. Jedyna własność wymagająca sprawdzenia to (SP3), a ściślej: Musimy pokazać, że $\forall \alpha,\beta \in R_A :\ \underset{\substack{\shortparallel \\ w_\alpha(\beta)}}{\beta - 2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha} \in R_A$. Oczywiście $w_\alpha(\beta) \in R$, pozostaje zatem upewnić się, że

$w_\alpha(\beta) \perp R_{A'}$, gdzie A' jest indeksem dopełniającym

Ale $\forall \gamma \in R_{A'}$: $\left(w_\alpha(\beta) \middle| \gamma\right) = \underset{\substack{\shortparallel \\ 0,\ \text{bo}\ \beta\perp\gamma}}{(\beta|\gamma)} - 2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\cdot \underset{\substack{\shortparallel \\ 0,\ \text{bo}\ \alpha\perp\gamma}}{(\alpha|\gamma)}$

$\equiv 0$. ✓

Jest przy tym oczywiste, że Δ_A jest bazą (E_A, R_A).

Pozostaje pokazać, że $\forall \alpha \in R : \alpha \in R_1 \ \underline{\vee}\ \alpha \in R_2$.

W świetle str. 36 : $W(E,R) = \langle w_\alpha \mid \alpha \in \Delta_1 \ominus \Delta_2 \rangle$,

a ponieważ $\forall \alpha \in \Delta_A : w_\alpha \restriction_{E_{A'}} = \mathrm{id}_{E_{A'}}$, przeto

$W(E,R) = W(E_1,R_1) \times W(E_2,R_2)$, przy czym $W(E_A,R_A) = \langle w_\alpha \mid \alpha \in \Delta_A \rangle$ działa trywialnie na $E_{A'}$.

Skoro jednak $\forall \alpha \in R$ jest – na mocy str. 35 – elementem pewnej kopy, a $W(E,R)$ działa – w świetle str. 34 i 35 – przechodnio na zbiorze kopy R, to jest pewne, że $\exists\, X = (X_1, X_2) \in W(E,R)$:

$\alpha \in X(\Delta_1 \uplus \Delta_2) \equiv X_1(\Delta_1) \uplus X_2(\Delta_2)$ (wszak X jest izometrią),

czyli $\alpha \in X_A(\Delta_A) < R_A$ dla $A=1 \vee A=2$. ⧄

Przechodząc do drugiej części tezy Twierdzenia, konstatujemy dozwolność wynikania $\boxed{\Leftarrow}$.

Istotnie, ...

Niech $\chi : (E_1,R_1) \to (E_2,R_2)$ będzie izomorfizmem. Obrazem bazy Δ_1 systemu (E_1,R_1) jest baza systemu (E_2,R_2) (χ jest izomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowych, a także przeprowadza bazę dziedziny Δ_1 w bazę przeciwdziedziny $\chi(\Delta_1)$ (BSP1); ponadto $R_2 = \chi(R_1) = \chi(\langle\Delta_1\rangle_+ \cup \langle\Delta_1\rangle_-)$

$$= \langle\chi(\Delta_1)\rangle_+ \cup \langle\chi(\Delta_1)\rangle_- \quad \text{(BSP2)}).$$

Mamy też $\forall \alpha, \beta \in R_1: \ w_{\chi(\alpha)}(\chi(\beta)) = \chi(w_\alpha(\beta))$. (240)

W szczególności $\forall \alpha_i, \alpha_j \in \Delta_1: \ w_{\chi(\alpha_i)}(\chi(\alpha_j)) = \chi(w_{\alpha_i}(\alpha_j))$

$$\chi(\alpha_j) - 2\frac{(\chi(\alpha_j)|\chi(\alpha_i))}{(\chi(\alpha_i)|\chi(\alpha_i))}\cdot\chi(\alpha_i) \qquad \chi\left(\alpha_j - 2\frac{(\alpha_j|\alpha_i)}{(\alpha_i|\alpha_i)}\cdot\alpha_i\right)$$

$$\chi(\alpha_j) - 2\frac{(\alpha_j|\alpha_i)}{(\alpha_i|\alpha_i)}\cdot\chi(\alpha_i)$$

BAZA

$$\chi(\Delta_1) \to \chi(\alpha_i) \equiv \tilde{\alpha}_i \qquad \rightleftarrows$$

$$\tilde{\alpha}_{ij} = \frac{(\tilde{\alpha}_i|\tilde{\alpha}_j)}{(\tilde{\alpha}_i|\tilde{\alpha}_i)} = \frac{(\alpha_i|\alpha_j)}{(\alpha_i|\alpha_i)} =: \alpha_{ij} \quad \forall i,j$$

Zbadamy kąty między $\tilde{\alpha}_i$ i $\tilde{\alpha}_j$ i ich wzgl. długości (dla nieprostopadłych).

1) Na gruncie stw. 31 wystarczy sprawdzić kwadraty cosinusów kątów między $\tilde{\alpha}_i$ i $\tilde{\alpha}_j$.

$$\left(\frac{(\tilde{\alpha}_i|\tilde{\alpha}_j)}{\|\tilde{\alpha}_i\|\cdot\|\tilde{\alpha}_j\|}\right)^2 = \tilde{\alpha}_{ij}\cdot\tilde{\alpha}_{ji} = \alpha_{ij}\cdot\alpha_{ji} = \left(\frac{(\alpha_i|\alpha_j)}{\|\alpha_i\|\cdot\|\alpha_j\|}\right)^2 \quad \checkmark$$

2) $$\left(\frac{\|\tilde{\alpha}_i\|}{\|\tilde{\alpha}_j\|}\right)^2 = \frac{\|\tilde{\alpha}_i\|^2}{(\tilde{\alpha}_i|\tilde{\alpha}_j)}\cdot\frac{(\tilde{\alpha}_j|\tilde{\alpha}_i)}{\|\tilde{\alpha}_j\|^2} = \frac{\tilde{\alpha}_{ji}}{\tilde{\alpha}_{ij}} = \frac{\alpha_{ji}}{\alpha_{ij}} = \left(\frac{\|\alpha_i\|}{\|\alpha_j\|}\right)^2 \quad \checkmark$$

Widzimy więc, że – istotnie – χ przeprowadza diagram Dynkina (E_1, R_1) na diagram Dynkina (E_2, R_2). □

W przypadku $\boxed{\Rightarrow}$ ograniczymy się do sytuacji, w której oba diagramy
Dynkina są spójne, więc też – w świetle wcześniejszych ustaleń – oba systemy pierwiastkowe są nieprzywiedlne.

Rozważmy zatem systemy (E_1, R_1) o odnośnych bazach $\Delta_1 = \{\alpha_i^1\}_{i\in\overline{1,r}}$ uporządkowanych tak, że izomorfizm diagramów Dynkina przyporządkowuje $v_i^1 \longleftrightarrow v_i^2$, $i\in\overline{1,r}$.

Na (E_2, R_2) skalujemy iloczyn skalarny wedle schematu: $\langle \cdot | \cdot \rangle_2 \longmapsto \frac{\langle \alpha_1^1 | \alpha_1^1 \rangle_1}{\langle \alpha_1^2 | \alpha_1^2 \rangle_2} \cdot \langle \cdot | \cdot \rangle_2 \equiv \langle \cdot | \cdot \rangle_2^{\sim}$

DOPUSZCZALNE SKALOWANIE ⇑ ILOCZYNÓW SKALARNYCH, A NIE SAME ILOCZYNY

¡ AUTOMORFIZM S.P. !

uzyskując tym sposobem równość!

MA BYĆ JEDYNE $W_{\chi(\alpha)} \circ \chi = \chi \circ w_\alpha$ ← TUTAJ ILORAZY

(*) $\langle \alpha_1^2 | \alpha_1^2 \rangle_2^{\sim} = \langle \alpha_1^1 | \alpha_1^1 \rangle_1$. Jako że krawędzie $e^1_{1j\neq 1}$ są identyczne z odnośnymi krawędziami $e^2_{1j\neq 1}$, przeto (!)

$$\frac{\langle \alpha_1^2 | \alpha_j^2 \rangle_2^2}{\langle \alpha_1^2 | \alpha_1^2 \rangle_2 \cdot \langle \alpha_j^2 | \alpha_j^2 \rangle_2} = \frac{\langle \alpha_1^1 | \alpha_j^1 \rangle_1^2}{\langle \alpha_1^1 | \alpha_1^1 \rangle_1 \cdot \langle \alpha_j^1 | \alpha_j^1 \rangle_1}$$

$$\| $$

(*) ↙↗

$$\langle \alpha_1^2 | \alpha_j^2 \rangle_2^{\sim 2} = \frac{\langle \alpha_j^2 | \alpha_j^2 \rangle_2^{\sim}}{\langle \alpha_j^1 | \alpha_j^1 \rangle_1} \cdot \langle \alpha_1^1 | \alpha_j^1 \rangle_1^2 \quad \Bigg| \quad \frac{\langle \alpha_1^2 | \alpha_j^2 \rangle_2^{\sim 2}}{\langle \alpha_1^2 | \alpha_1^2 \rangle_2^{\sim} \cdot \langle \alpha_j^2 | \alpha_j^2 \rangle_2^{\sim}}$$

: równość kątów $\measuredangle(\alpha_1^2, \alpha_j^2) = \measuredangle(\alpha_1^1, \alpha_j^1)$

PRZYPORZĄDKOWANIE DIAGRAMOWI S.P. WYMAGA WYBORU BEZWZGLĘDNYCH ILOCZYNÓW SKALARNYCH, BO DIAGRAM NIESIE INFORMACJĘ (W DEKORACJI KRAWĘDZI) O WZGLĘDNYCH RELACJACH METRYCZNYCH MIĘDZY ELEMENTAMI BAZY REPREZENTOWANYMI PRZEZ WIERZCHOŁKI. JEST TO SPÓJNE Z NASZĄ DEFINICJĄ IZOMORFIZMU S.P. : SKALOWANIA $(\cdot|\cdot)_E$ TO AUTOMORFIZMY S.P. (PATRZ: POPRZ. STR.).

(2) $$\frac{\langle\alpha_j^2|\alpha_j^2\rangle_2}{\langle\alpha_1^2|\alpha_1^2\rangle_2} = \frac{\langle\alpha_j^1|\alpha_j^1\rangle_1}{\langle\alpha_1^1|\alpha_1^1\rangle_1} \overset{\circledast}{\Longleftrightarrow} \underline{\langle\alpha_j^2|\alpha_j^2\rangle_2^\sim = \langle\alpha_j^1|\alpha_j^1\rangle_1} \quad (244)$$

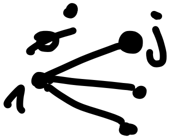
$$\equiv$$

$$\frac{\langle\alpha_j^2|\alpha_j^2\rangle_2^\sim}{\langle\alpha_1^2|\alpha_1^2\rangle_2^\sim}$$

: równość stosunków współczynników dla węzłów połączonych (✗)

z koniunkcji powyższych warunków otrzymujemy:

$$\begin{cases} \langle\alpha_1^2|\alpha_j^2\rangle_2^\sim = \langle\alpha_1^1|\alpha_j^1\rangle_1 \\ \langle\alpha_j^2|\alpha_j^2\rangle_2^\sim = \langle\alpha_j^1|\alpha_j^1\rangle_1 \end{cases} \quad (\text{dla } j \neq 1)$$



← DLA TEGO W RELACJI Z α_1^1 MAMY PEŁNĄ INFO i WAR. POCZ. → ! (TAK $\circledast$) ⇒ OD NIEGO WYCHODZIMY JAK OD α_1^1

Powtarzając to rozumowanie (w odniesieniu → DOJDZIEMY WSZĘDZIE! ⇐ SPÓJNOŚĆ do każdego z wierzchołków $\neq 1$ ustalimy – wobec zgodności obu diagramów – tożsamość wszystkich (odnośnych) kątów i długości w bazach obu systemów, stwierdzając tym samym, że jedyne $\mathbb{R}$-liniowe rozszerzenie przyporządkowania

$$\alpha_i^1 \longmapsto \alpha_i^2$$

jest izometrią $: (E_1, \langle\cdot|\cdot\rangle_1) \underset{\mathcal{L}}{\cong} (E_2, \langle\cdot|\cdot\rangle_2^{\sim})$, a zatem – w szczególności –

$$\forall_{i\in\overline{1,r}} : \iota\circ W_{\alpha_i^1} = W_{\alpha_i^2}\circ\iota$$ (co jest warunkiem koniecznym równoważności).

Istotnie, $\forall_{\beta\in E_1} : \iota\circ W_{\alpha_i^1}(\beta) = \iota\left(\beta - 2\frac{\langle\beta|\alpha_i^1\rangle_1}{\langle\alpha_i^1|\alpha_i^1\rangle_1}\triangleright\alpha_i^1\right)$

$$= \iota(\beta) - 2\frac{\langle\beta|\alpha_i^1\rangle_1}{\langle\alpha_i^1|\alpha_i^1\rangle_1}\triangleright\iota(\alpha_i^1) = \iota(\beta) - 2\frac{\langle\iota^{-1}\circ\iota(\beta)|\iota^{-1}(\alpha_i^2)\rangle_1}{\langle\iota^{-1}(\alpha_i^2)|\iota^{-1}(\alpha_i^2)\rangle_1}\triangleright\alpha_i^2$$

przenormowanie w liczniku i mianowniku skracają się vente

$$\overset{\swarrow}{=} \iota(\beta) - 2\frac{\langle\iota(\beta)|\alpha_i^2\rangle_2^\sim}{\langle\alpha_i^2|\alpha_i^2\rangle_2^\sim}\triangleright\alpha_i^2 \equiv W_{\alpha_i^2}\circ\iota(\beta).$$

246½

Wyjaśnienie:

$$\frac{\langle \iota(\beta) \,|\, \alpha^2_i \rangle^{\sim}_2}{\langle \alpha^2_i \,|\, \alpha^2_i \rangle^{\sim}_2} = \frac{\dfrac{\langle \alpha^1_1 \,|\, \alpha^1_1 \rangle_1}{\langle \alpha^2_1 \,|\, \alpha^2_1 \rangle_2} \cdot \langle \iota(\beta) \,|\, \alpha^2_i \rangle_2}{\dfrac{\langle \alpha^1_1 \,|\, \alpha^1_1 \rangle_1}{\langle \alpha^2_1 \,|\, \alpha^2_1 \rangle_2} \cdot \langle \alpha^2_i \,|\, \alpha^2_i \rangle_2}$$

$$= \frac{\langle \iota(\beta) \,|\, \alpha^2_i \rangle_2}{\langle \alpha^2_i \,|\, \alpha^2_i \rangle_2}$$

W tabelce str. 34 i 35 dowolny pierwiastek $\alpha \in R_1$ możemy zapisać w postaci

$$\alpha = W_{\alpha^1_{i_1}} \circ W_{\alpha^1_{i_2}} \circ \ldots \circ W_{\alpha^1_{i_N}} (\alpha^1_j)$$

dla pewnych $j, i_1, i_2, \ldots, i_N \in \overline{1,r}$. W takim razie jednak

$$\iota(\alpha) = W_{\alpha^2_{i_1}} \circ W_{\alpha^2_{i_2}} \circ \ldots \circ W_{\alpha^2_{i_N}} (\alpha^2_j) \in R_2$$

(wszak $W(E_2, R_2)$ zachowuje R_2). Analogicznie pokazujemy, że $\iota^{-1}(R_2) \subset R_1$, skąd ostatecznie wniosek $\iota|_{R_1} : R_1 \simeq R_2$, który kończy dowód. $\square$