Wykład $\overline{\underline{XV}}$

2024/25

Z połączenia Thr. 10 i 12. wyprowadzamy istotne dla nas

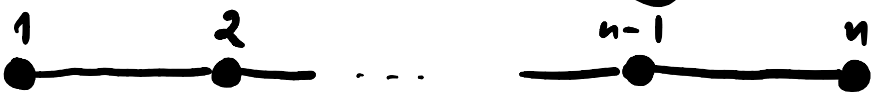
Corollarium Niechaj $\mathfrak{g}$ będzie półprostą a.L. o zwartej formie rzeczywistej $\mathfrak{k}$ i niech $\mathfrak{t}$ będzie jej podalgebrą Cartana odpowiadającą wyborowi $\mathfrak{t}$ maksymalnej podalgebry przemiennej w $\mathfrak{k}$. Wówczas $\mathfrak{g}$ jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy diagram Dynkina $(\mathfrak{t}\otimes i, Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}))$ jest spójny.

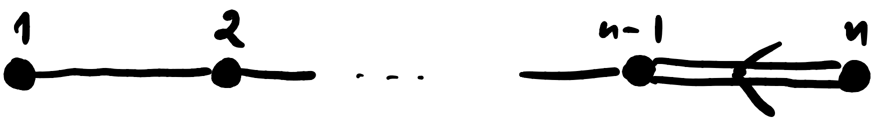
W podsumowaniu całej dotychczasowej dyskusji możemy wreszcie wysłowić

(249)

Tw. 13. [Klasyfikacyjne dla systemów pierwiastkowych]

Jedyne spójne diagramy Dynkina to

A_n :  $\mathfrak{su}(n+1)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

B_n :  $\mathfrak{so}(2n+1)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

C_n :  $\mathfrak{sp}(n)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$

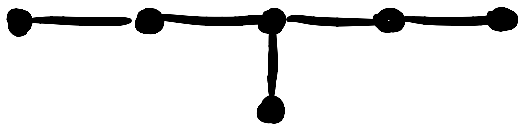
D_n :  $\mathfrak{so}(2n)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2,3\}$

oraz

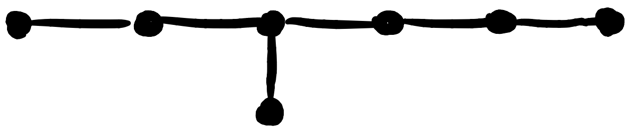
ALGEBRY WYJĄTKOWE

(250)

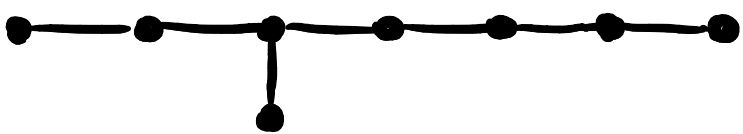
E_6 :



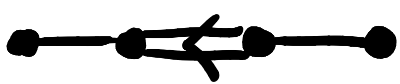
E_7 :



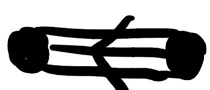
E_8 :



F_4 :



G_2 :



<u>NB.</u> : Wszystkie te diagramy odpowiadają systemom pierwiastkowym (pół)prostych algebr Liego!

D: Okazuje się, że zamiast klasyfikować diagramy Dynkina, w których występują wektory o różnej długości, co znajduje odzwierciedlenie w dekoracji krawędzi (podwójnymi) o walencji > 1, wystarczy zająć się diagramami Coxetera $\mathcal{C}$, które dostajemy w wyniku przenormowania:

$$\alpha_i \longmapsto \frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|},$$

co skutkuje zdjęciem dekoracji z krawędzi.

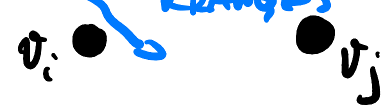
251

Żeby dobrze zrozumieć stojące przed nami zadanie, przeformułujemy dotychczasowe ustalenie: Mamy do czynienia ze zbiorem wektorów $\boxed{\text{liniowo niezależnych}}$ $\{\alpha_i\}_{i \in \overline{1,r}}$ etykietujących wierzchołki grafu. $\boxed{\text{Możliwe kąty}}$ między wektorami i ich $\boxed{\text{względne normalizacje}}$ to (Def. 26 oraz str. 175-178)

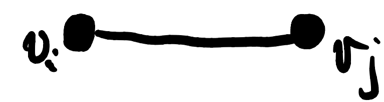
252

KĄT — LICZBY CARTANA — KRAWĘDŹ

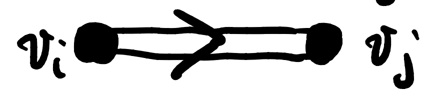
$1^\circ\ \measuredangle(\alpha_i,\alpha_j) = \frac{\pi}{2}$: $A_{i,j}$ $A_{ij} = 0 = A_{ji}$ $\quad n_{ij} := A_{ij} A_{ji}$ LICZBA LINII



$2^\circ\ \measuredangle(\alpha_i,\alpha_j) = \frac{2\pi}{3}$: $A_{ij} = -1 = A_{ji}$



$3^\circ\ \measuredangle(\alpha_i,\alpha_j) = \frac{3\pi}{4}$: $A_{ij} = -1$, $A_{ji} = -2$



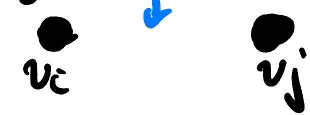
$4^\circ\ \measuredangle(\alpha_i,\alpha_j) = \frac{5\pi}{6}$: $A_{ij} = -1$, $A_{ji} = -3$

Dokonamy teraz zamiany:

$$\alpha_i \longmapsto \frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|} \equiv \hat{\alpha}_i \,, \quad i \in \overline{1,r}$$

Liczymy w poszczególnych przypadkach: $\hat{A}_{ij} \equiv 2\langle \hat{\alpha}_i | \hat{\alpha}_j \rangle$ (kiedy te same!)

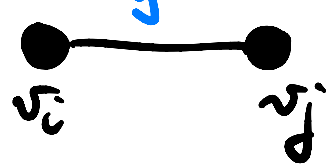
1° $\langle \hat{\alpha}_i | \hat{\alpha}_j \rangle = 0 \qquad \hat{A}_{ij} = 0 = \hat{A}_{ji} \Rightarrow \hat{A}_{ij} \cdot \hat{A}_{ji} = 0$



2° $$\langle \hat{\alpha}_i | \hat{\alpha}_j \rangle = \frac{\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle}{\|\alpha_i\| \cdot \|\alpha_j\|} = \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i | \alpha_i \rangle} \equiv \frac{1}{2} A_{ij} = -\frac{1}{2}$$

$\uparrow$ $\|\alpha_i\| = \|\alpha_j\|$

$$\hat{A}_{ij} = -1 = \hat{A}_{ji} \Rightarrow \hat{A}_{ij} \cdot \hat{A}_{ji} = 1$$



$$3^\circ \quad \langle \hat{\alpha}_i | \hat{\alpha}_j \rangle = \frac{\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle}{\|\alpha_i\| \cdot \|\alpha_j\|} \underset{\uparrow}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \frac{\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i | \alpha_i \rangle} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 254$$

$$\|\alpha_i\| = \sqrt{2}\|\alpha_j\|$$

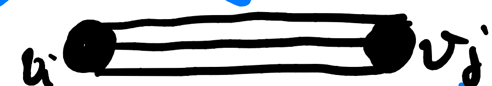
$$\hat{A}_{ij} = -\sqrt{2} = \hat{A}_{ji} \Rightarrow \hat{A}_{ij} \cdot \hat{A}_{ji} = 2$$

BRAK DEKORACJI!

$$4^\circ \quad \langle \hat{\alpha}_i | \hat{\alpha}_j \rangle = \frac{\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle}{\|\alpha_i\| \cdot \|\alpha_j\|} \underset{\uparrow}{=} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \frac{\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i | \alpha_i \rangle} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\|\alpha_i\| = \sqrt{3}\|\alpha_j\|$$

$$\hat{A}_{ij} = -\sqrt{3} = \hat{A}_{ji} \Rightarrow \hat{A}_{ij} \cdot \hat{A}_{ji} = 3$$



BRAK DEKORACJI

W dalszych rozważaniach będziemy używać określenie **DIAGRAM DOPUSZCZALNY** w odniesieniu do tych diagramów Coxetera, które spełniają wszelkie więzy geometryczne wynikające z liniowej niezależności i dopuszczalnych kątów między wektorami $\{\hat{\alpha}_i\}_{i\in\overline{1,r}}$. Diagramy, które nie są dopuszczalne, nazwiemy **NIEDOPUSZCZALNYMI** i odrzucimy. Nasza strategia sprowadza się do znalezienia wszystkich diagramów dopuszczalnych i sprawdzenia, że każdy z nich po przypisaniu długości

odpowiada pewnemu systemowi pierwiastkowemu.

W istocie pokażemy, że każdy z nich odpowiada
(na ćwiczeniach)
systemowi pierwiastkowemu pewnej (pół)prostej
algebry Liego.

Nasze rozumowanie zorganizujemy
w formie ciągu lematów, które zawężą
spektrum dopuszczalnych diagramów Coxetera.

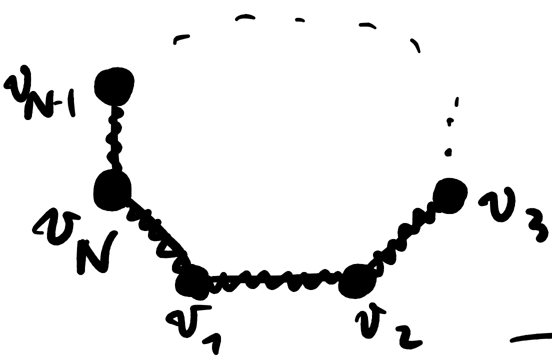
257

Lemat 0. Każdy poddiagram diagramu dopuszczalnego jest dopuszczalny.

DL 0: Oczywiste. ■

Lemat 1.: Jeśli C jest dopuszczalny, to C jest drzewem (tj. **nie** zawiera pętli). 258

Dl 1: A.a. Niechaj wierzchołki $\{v_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ tworzą pętlę,



(1) $\forall i\in\overline{1,N-1}: 2\langle\hat{\alpha}_i|\hat{\alpha}_{i+1}\rangle\leq -1$

(2) $2\langle\hat{\alpha}_N|\hat{\alpha}_1\rangle\leq -1$

(3) dla pozostałych par (i,j): $\langle\hat{\alpha}_i|\hat{\alpha}_j\rangle = 0$,

v_i ~~~ v_j ≡ co najmniej 1 linia, czyli $\hat{A}_{ij}\in\{-1,-\sqrt{2},-\sqrt{3}\}$

Liczymy: $\left\|\sum_{i=1}^{N}\hat{\alpha}_i\right\|^2=\sum_{i=1}^{N}\underbrace{\|\hat{\alpha}_i\|^2}_{=1}+2\Big[\sum_{i=1}^{N-1}\langle\hat{\alpha}_i|\hat{\alpha}_{i+1}\rangle+\langle\hat{\alpha}_N|\hat{\alpha}_1\rangle+\sum_{(i,j)\text{ poz.}}\underbrace{\langle\hat{\alpha}_i|\hat{\alpha}_j\rangle}_{=0}\Big]$

$\leq N+(-(N-1)-1)=0$, czyli $\sum_{i=1}^{N}\hat{\alpha}_i=0_E$ ↯ (wszak $\{\hat{\alpha}_i\}$ są LNZ). ■

Lemat 2.: Jeśli $\mathcal{C}$ jest dopuszczalny, to $\mathcal{C}$ nie zawiera wierzchołków o walencji > 3.

259

Dd2: Rozważmy dowolny wierzchołek v_0 połączony z wierzchołkami $\{v_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ (i tylko tymi), i przyjmijmy, że liczba linii między v_0 i v_i to L_i.

W świetle Lematu 1. wierzchołki v_i i v_j, $i\neq j\in\overline{1,N}$ **nie** są połączone, czyli $\forall_{i\neq j\in\overline{1,N}}: \langle\hat{\alpha}_i|\hat{\alpha}_j\rangle=0$.

Na tej podstawie liczymy, wykorzystując $\hat{\alpha}_0\notin\langle\hat{\alpha}_i \mid i\in\overline{1,N}\rangle_{\mathbb{R}}$

$$1=\|\hat{\alpha}_0\|^2 > \sum_{i=1}^{N}\langle\hat{\alpha}_0|\hat{\alpha}_i\rangle^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N} L_i \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{N} L_i < 4 \qquad \blacksquare$$

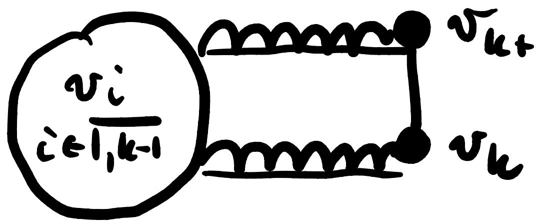
LICZBA LINII: $L_i=\hat{A}_{0i}\cdot\hat{A}_{i0}=4\langle\hat{\alpha}_0|\hat{\alpha}_i\rangle^2$

(260)

Lemat 3. Niech $\mathcal{C}$ będzie dopuszczalny i niech $v_k, v_{k+1} \in \mathcal{C}$ będą połączone pojedynczą linią $e_{k,k+1}$. Wówczas diagram $\mathcal{C}_{k*k+1}$ otrzymany z $\mathcal{C}$ poprzez usunięcie $e_{k,k+1}$ i utożsamienie $v_k \equiv v_{k+1}$ jest dopuszczalny.

DL 3: Rozważmy diagram $\mathcal{C}$:

(zawsze możemy tak ponumerować wierzchołki)



niedookreślony typ, jeśli $k > 1$, to chociaż jedna z nich niepusta!

Definiujemy:

$$\underline{\hat{\alpha}}_k := \hat{\alpha}_k + \hat{\alpha}_{k+1}$$

$$\underline{\hat{\alpha}}_i := \hat{\alpha}_i, \quad i \in \overline{1,k-1}$$

Liczymy: $\|\underline{\alpha}_k\|^2 = \|\hat{\alpha}_k\|^2 + \|\hat{\alpha}_{k+1}\|^2 + 2\langle\hat{\alpha}_k|\hat{\alpha}_{k+1}\rangle^{\equiv \hat{A}_{k,k+1} = -1}$

$$= 1 + 1 - 1 = 1 \;\checkmark, \qquad (261)$$

a zatem

$$\forall\, i \in \overline{1,k-1} : \langle\underline{\alpha}_i|\underline{\alpha}_k\rangle \equiv \langle\hat{\alpha}_i|\hat{\alpha}_k\rangle + \langle\hat{\alpha}_i|\hat{\alpha}_{k+1}\rangle$$

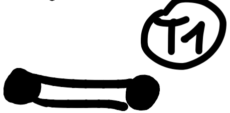
$\Longrightarrow$ jeden z iloczynów $= 0$

$$\left\{0, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

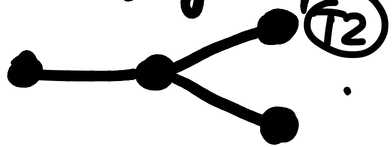
$$\forall\, i,j \in \overline{1,k-1} : \langle\underline{\alpha}_i|\underline{\alpha}_j\rangle \equiv \langle\hat{\alpha}_i|\hat{\alpha}_j\rangle \;\checkmark$$

<u>Wniosek</u>: $\{\underline{\alpha}_j\}_{j\in\overline{1,k}}$ ma cechy unormowanego systemu pierwiastkowego. $\blacksquare$

Lemat 4. Jeśli C jest dopuszczalny, to C nie zawiera dwóch lub więcej poddrzewców postaci (262)

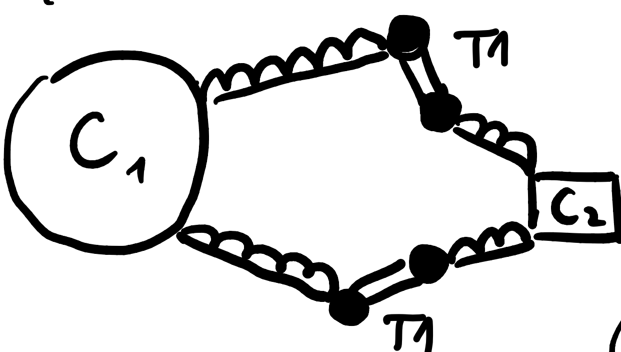


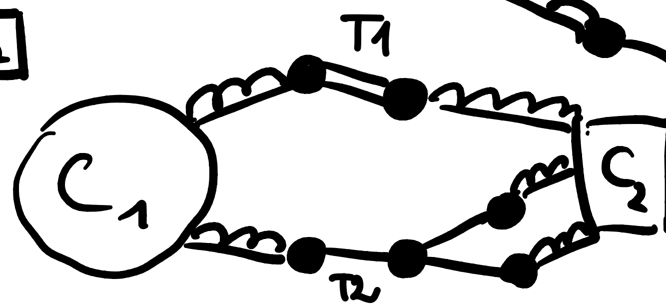
i

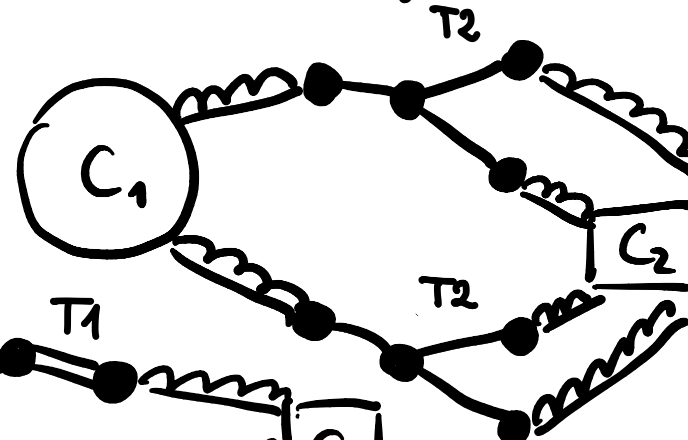


.

DL4.: A.a. Rozważmy C z co najmniej dwoma poddrzewcami j/w:







przy czym założyliśmy, że na ścieżce w drzewie 263

e pomiędzy poddrzewami nie ma

innych poddrzew tego typu (tj. wybieramy

dwa poddrzewa najbliższe), a wtedy

na tej ścieżce

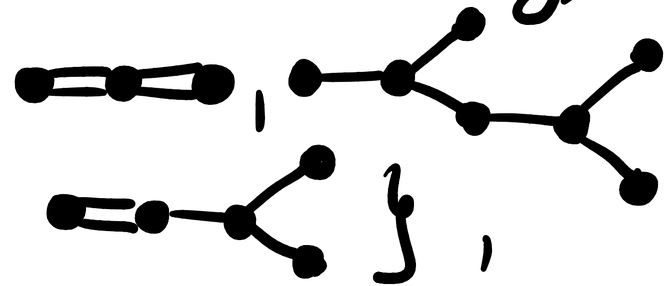
Łączy je pewien ciąg krawędzi postaci

$$\boxed{X} - v_1 - v_2 - \ldots - v_N - \boxed{Y} \qquad X, Y \in \{T_1, T_2\}$$

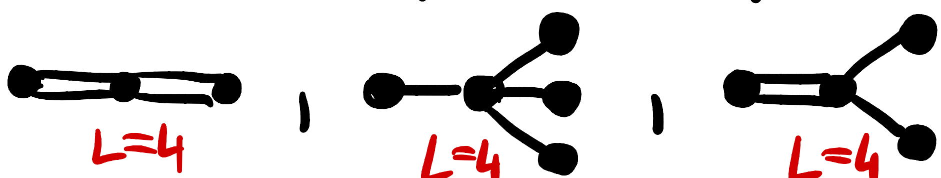
(krawędzie potrójne – wykluczone przez Lemat 2,

krawędzie podwójne – wykluczone przez założenie,

krawędź pojedyncza zwyczajna – jest).

Dokonując sklejenia wierzchołków (264)
$\{v_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ otrzymujemy diagram dopuszczalny,
ale w nim: $\boxed{X \mid Y} \in \{$  $\}$,

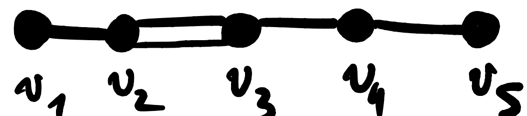
co po dalszym sklejeniu daje

$\{$ 

$\}$ ↯

∎

Lemat 5. Diagram  jest niedopuszczalny, w szczególności żaden diagram dopuszczalny nie zawiera go jako poddiagramu. 265

Dd 5.: Oznaczmy 

, a wtedy $\langle \hat{\alpha}_2 | \hat{\alpha}_3 \rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\langle \hat{\alpha}_1 | \hat{\alpha}_2 \rangle = \langle \hat{\alpha}_3 | \hat{\alpha}_4 \rangle = \langle \hat{\alpha}_4 | \hat{\alpha}_5 \rangle = -\frac{1}{2}$, natomiast pozostałe iloczyny skalarne $= 0$.

Zdefiniujmy $\alpha := \hat{\alpha}_1 + 2\hat{\alpha}_2$ i $\beta := 3\hat{\alpha}_3 + 2\hat{\alpha}_4 + \hat{\alpha}_5$.

Zachodzi

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \langle 2\hat{\alpha}_2 | 3\hat{\alpha}_3 \rangle = 6\langle \hat{\alpha}_2 | \hat{\alpha}_3 \rangle = -3\sqrt{2}, \qquad (266)$$

a ponadto

$$\|\alpha\|^2 = \|\hat{\alpha}_1\|^2 + \|2\hat{\alpha}_2\|^2 + 2\langle \hat{\alpha}_1 | 2\hat{\alpha}_2 \rangle = 1 + 4 - 2 = 3$$

$$\|\beta\|^2 = \|3\hat{\alpha}_3\|^2 + \|2\hat{\alpha}_4\|^2 + \|\hat{\alpha}_5\|^2 + 2\left(\langle 3\hat{\alpha}_3 | 2\hat{\alpha}_4 \rangle + \langle 2\hat{\alpha}_4 | \hat{\alpha}_5 \rangle\right)$$

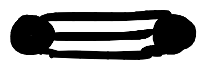
$$= 9 + 4 + 1 + 2(-3-1) = 6.$$

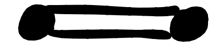
Dostajemy zatem $|\langle \alpha | \beta \rangle| \equiv \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$,

co – jak wiemy z kursu algebry liniowej – oznacza, że $\beta \in \langle \alpha \rangle_{\mathbb{R}}$. ↯ (wszak układ $\{\hat{\alpha}_i\}_{i \in \overline{1,5}}$ jest LNZ) ■

Wniosek 1.: Jeśli C jest dopuszczalny i zawiera krawędź wielokrotną, to jest typu B_n, C_n, F_4 lub G_2. 267

Uzasadnienie: W świetle Lematu 3 jedynym diagramem z linią potrójną jest

 $\equiv G_2$.

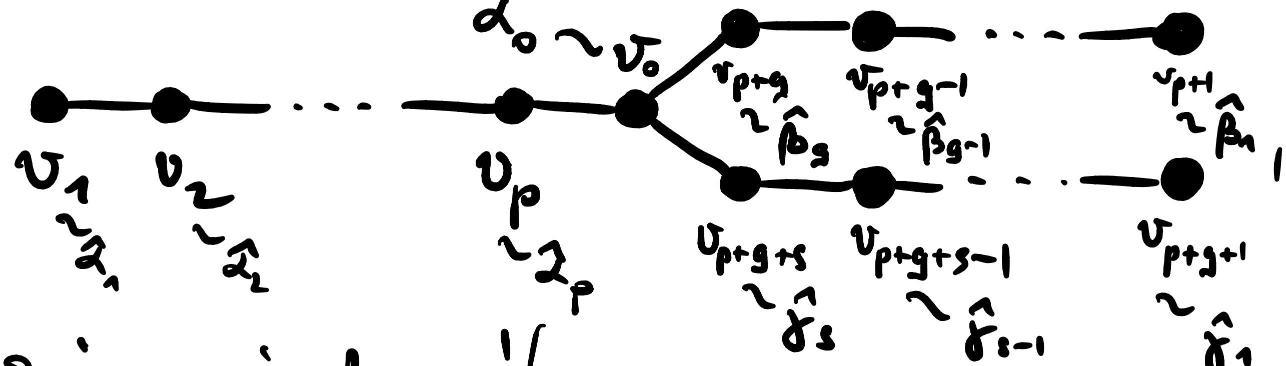
W przypadku linii podwójnej Lemat 4 zabrania występowania dwóch lub więcej krawędzi tego typu, a Lemat 5 dopuszcza jedynie kontynuację diagramu po jednej ze stron krawędzi , czyli

 B_n/C_n (nierozróżnialne bez orientacji)

lub  $\equiv F_4$. ☑ 268

Na obecnym etapie potrafimy sklasyfikować dopuszczalne drzewa o krawędziach pojedynczych.

Lemat 6. Jeśli C jest dopuszczalnym diagramem o krawędziach pojedynczych zawierającym poddiagram $T2$, czyli jest postaci



to zachodzi nierówność

$$\frac{p}{1+p} + \frac{q}{1+q} + \frac{s}{1+s} < 2.$$

DL6: Zdefiniujmy

$$X := \sum_{k=1}^{p} k \triangleright \hat{\alpha}_k \quad , \quad Y := \sum_{l=1}^{q} l \triangleright \hat{\beta}_l \, , \quad Z := \sum_{m=1}^{s} m \triangleright \hat{\gamma}_s .$$ 270

Obliczamy

$$\langle X | X \rangle = \sum_{k=1}^{p} \langle k \triangleright \hat{\alpha}_k | k \triangleright \hat{\alpha}_k \rangle + 2 \sum_{k=1}^{p-1} \langle k \triangleright \hat{\alpha}_k | (k+1) \triangleright \hat{\alpha}_{k+1} \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{p} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{p-1} k(k+1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{p} k^2 - \sum_{k=1}^{p-1} (k^2 + k)$$

$$= p^2 - \frac{(p-1) \cdot p}{2} = \frac{p^2 + p}{2} = \frac{p(p+1)}{2}$$

Analogicznie $\langle Y | Y \rangle = \dfrac{q(q+1)}{2}$, $\langle Z | Z \rangle = \dfrac{s(s+1)}{2}$.

271

Na tej podstawie wyznaczamy

$$\left\langle \hat{\alpha}_0 \,\Big|\, \frac{1}{\|X\|} \triangleright X \right\rangle^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{p(p+1)}} \cdot \sum_{k=1}^{p} \langle \hat{\alpha}_0 | k \triangleright \hat{\alpha}_k \rangle \right)^2$$

$$= \frac{2}{p(p+1)} \cdot p^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{p}{2(p+1)}$$

oraz – analogicznie –

$$\left\langle \hat{\alpha}_0 \,\Big|\, \frac{1}{\|Y\|} \triangleright Y \right\rangle^2 = \frac{q}{2(q+1)} \quad , \quad \left\langle \hat{\alpha}_0 \,\Big|\, \frac{1}{\|Z\|} \triangleright Z \right\rangle = \frac{s}{2(s+1)}$$

Ponieważ $X \perp Y$, $X \perp Z$, $Y \perp Z$,

a ponadto $\hat{\alpha}_0 \notin \langle X, Y, Z \rangle_{\mathbb{R}}$, przeto

$$1 = \|\hat{\alpha}_0\|^2 > \left\langle \hat{\alpha}_0 \,\middle|\, \frac{1}{\|X\|} \triangleright X \right\rangle^2 + \left\langle \hat{\alpha}_0 \,\middle|\, \frac{1}{\|Y\|} \triangleright Y \right\rangle^2 + \left\langle \hat{\alpha}_0 \,\middle|\, \frac{1}{\|Z\|} \triangleright Z \right\rangle^2,$$

co jest właśnie postulowaną nierównością.

Na tym etapie pozostaje jeszcze tylko rozpatrzyć wszystkie ewentualności przewidywane przez tę nierówność.

Wniosek 2.: Jeśli $\mathcal{C}$ jest dopuszczalny i zawiera podgraf T2, to jest typu D_n, E_6, E_7 lub E_8. 273

Uzasadnienie: Wobec pełnej symetrii powyższej liczbami p, q i s ustalmy: $p \geq q \geq s$.

Jeśli $s \geq 2$, to $\frac{s}{s+1} \geq \frac{2}{3}$, zatem dostaję

$\frac{p}{p+1} \geq \frac{2}{3}$ i $\frac{q}{q+1} \geq \frac{2}{3}$, a wtedy $\frac{p}{p+1} + \frac{q}{q+1} + \frac{s}{s+1} \geq \frac{6}{3} = 2$ ⚡

$$p \geq q \geq s$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow \frac{p}{p+1} \geq \frac{q}{q+1} \geq \frac{s}{s+1} \left(\geq \frac{2}{3}\right)$$

Wobec powyższego $s = 1$, a stąd (s=0 nie daje T2!)

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q}{q+1} < 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

274

Jeśli $q \geqslant 3$, to $\frac{q}{q+1} \geqslant \frac{3}{4}$, a wtedy

$$\frac{p}{p+1} < \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \iff p < 3,$$ ale $p \geqslant q \geqslant 3$ $\lightning$

Pozostają zatem przypadki:

(q=0 nie daje B!)

$q = 1 \Rightarrow p \geqslant 1$ (D_n)

$q = 2 \Rightarrow 2 \leq p < 5$ (E_6, E_7, E_8). $\blacksquare$

Dotychczasowe rozważania wykluczają wszelkie diagramy inne niż te, o których mowa (275) w tezie Twierdzenia. Konstruktywnego dowodu na to, że każdy z nich jest diagramem pewnego systemu pierwiastkowego, dostarcza studium (g,T) postaci algebr Liego (którymi zajmowaliśmy się na ćwiczeniach). $\square$

? ?
la Fin !
Ceci n'est pas une ~~pipe~~.