

Wykład VII

2024/25



I ALGEBRA LIEGO

①

Def. 1. Skonieczeni wyznaczone

wyzymnte / zespolone ALGEBRA

LIEGO to para $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ gdzie $\mathfrak{g}$

* jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}/\mathbb{C} \equiv \mathbb{K}$

NAWIĄS LIEGO

** odzwierciedlenie $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$

o charakterystyce: (L1) $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}} \in L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}; \mathfrak{g})$ 2-lin. nad $\mathbb{K}$

(L2) $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}} \circ \tau = -[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}$ swojsza symetria

(L3) $\text{Jac}_{\mathfrak{g}} \equiv 0$ TOJSAWOC JACOBIEGO

Mońing 1) e g jest torus YUNA ②
lub abelowa, gdy $[\cdot, \cdot]_g \equiv 0$.

PROPOZYCJA 2.10 algebra Liego g
to podprzestrzeń $\mathfrak{h} \subset g$ o własności
 $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.

Jest g jest nad $\mathbb{C}$, a $\mathfrak{h} \subset g$
jest rzeczywista podprzestrzenią o tej własności
to mówimy, że $\mathfrak{h}$ jest rzeczywistą podalgebrą g.

Podalgebra $\mathcal{L} \subset \mathfrak{g}$ jest dwuliniowa
 miennym IDEALU, gdy

(3)

$$[\mathfrak{g}, \mathcal{L}]_{\mathfrak{g}} \subset \mathcal{L}.$$

CENTRUM algebry Liego $\mathfrak{g}$ to jej
 podalgebra komutacyjna

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) := \{ X \in \mathfrak{g} \mid \forall Y \in \mathfrak{g} : [X, Y]_{\mathfrak{g}} = 0 \}$$

Niech $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \text{Idi-}K}$ będzie bazą $\mathfrak{g}$, a wtedy
 stale $f_{\alpha\beta} \in K$ w relacji $[X_\alpha, X_\beta]_{\mathfrak{g}} = f_{\alpha\beta} X_\gamma$ nazywamy STANEM STRUKTURY.

Many arguments

(4)

Str. 1. Nied of - algebra Liepo,
 f_{AB}^C - is state structure.

Wdrgos

$$f_{BA}^C = -f_{AB}^C$$

$$f_{AB}^D f_{DC}^E + f_{CA}^D f_{DB}^E + f_{BC}^D f_{DA}^E = 0.$$

Przykłady : (1) $(\mathbb{R}^3, \times)$ iloczyn wektorowy (5)

(2) $(A, [\cdot, \cdot])$
 $\uparrow$
 algebra Pojna komutator

w symplektach

w symplektach

(6) $(T_2 G, [\cdot, \cdot]_{X(G)})$

(3) $(\text{End}_K(V), [\cdot, \cdot]) \cong \mathfrak{gl}(V)$

(4) $\mathfrak{sl}(V) \subset \mathfrak{gl}(V) : \text{tr} \equiv 0$

(5) $(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot]_{X(M)})$ zawsze Liego $\mathfrak{gl}^{sl(V)}$ wekt.

Def. 2. Riech $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ - algebr Liego ⑥
HOMOMORFISM ALGEBR LIEGO to odzobrazenie

$$\chi: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$$

o abstrakci

$$(H1) \quad \chi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$$

$$(H2) \quad [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}_2} \circ (\chi \times \chi) = \chi \circ [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}_1}.$$

W izyaznienii mozhno o mono-, epi-,
izo-, endo- i auto-morfizmach algebr Liego.

Przykład : Str. 2 Niech (M, λ) będzie ⑦
 równocześnie 3 dyfuzorem $\lambda : G \times M \rightarrow M$
 grupy Liego G o algebrze Liego $\mathfrak{g} = T_e G$, a wtedy

POLE FUNDAMENTALNE (LEWOSTRONNE)

$$\kappa_{\cdot, 1}(\cdot, 2) \equiv T_{(e, 2)} \lambda(\cdot, 1, 0_{T_2 M}) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$: X \mapsto T_{(e, 2)} \lambda(-X, 0_{T_2 M}) \equiv \kappa_X(\cdot, 2)$$

o wartościada $\kappa_X(u) \equiv T_{(e, u)} \lambda(-X, 0_{T_u M})$

due to $\mathfrak{g}$ -equivariant
homomorphism algebra Lieps ,

$$\forall x, y \in \mathfrak{g} : [\kappa_x, \kappa_y]_{\mathbb{H}^n} = \kappa_{[x, y]_{\mathfrak{g}}} \quad \triangle$$

$$\forall (x, g) \in \mathfrak{g} \times G : \lambda_{g*} \kappa_x = \kappa_{T_e \text{Ad}_g(x)}$$

NB: $\forall (x, f, m) \in \mathfrak{g} \times C^1(M; \mathbb{R}) \times M :$

$$\kappa_x(f)(m) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\lambda_{\exp(-tX)}(m)) \Rightarrow \kappa_x(f)(m) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\lambda_{\exp(tX)}(m))$$

0) między innymi homomorfizmami
algebry Liego i ich idealami,
który stawić te ostatnie na gruncie
analogicznych podgrup normalnych
w kategoriach grup, oraz

Str. 3. Istnieje wzajemnie jednoznaczna
odpowiedź między idealami algebry
Liego i podzbiórmi homomorfizmów —

D: Med $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{g}$ - Ideal. (10)

Wohin $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ operiert $\mathfrak{z}$ $\mathfrak{g}$ Struktur
algebra Liepo $\mathfrak{z}$ verschwindet

$$[X+\mathfrak{z}, Y+\mathfrak{z}]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{z}} := [X, Y]_{\mathfrak{g}} + \mathfrak{z},$$

ergibt dann wieder $\mathfrak{z}$ verschwindet

$$\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{z}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{z} : X \mapsto X + \mathfrak{z}$$

ist epimorpher algebra Liepo. $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$

also $\ker \pi_{g/h} \equiv 1$. (11)

1. Annahme, weil $\chi: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$

3. 2te Homomorphismen algebra

Liepo. Wegen $\forall (X, Y) \in \ker \chi \times \mathfrak{g}_1$:

$$\begin{aligned}\chi([X, Y]_{\mathfrak{g}_1}) &= [\chi(X), \chi(Y)]_{\mathfrak{g}_2} = [0_{\mathfrak{g}_2}, \chi(Y)]_{\mathfrak{g}_2} \\ &= 0_{\mathfrak{g}_2} \quad \square\end{aligned}$$

Def. 3 Niektóry $\mathfrak{g}$ -algebra Liego, ⁽¹²⁾
 $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ - jej ideal.

Algebra Liego $(\mathfrak{g}/\mathfrak{r}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{r}})$ nazywamy

ALGEBRA 1 LORAZOWA (LIEGO).

Naturalne operacje na algebrach 13
które zdefiniowane są na przestrzeni Vect_K^{∞}
opisane

Def. 4. Niech $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ - algebry Liego
(ZEWN.)
SUMA PROSTA ALGEBR LIEGO to algebra Liego

$(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, [\cdot, \cdot]_{\oplus})$ o nawiasie

$$\forall x_1, x_2 \in \mathfrak{g}_1, y_1, y_2 \in \mathfrak{g}_2 : [(x_1, y_1), (x_2, y_2)]_{\oplus} \\ = ([x_1, x_2]_{\mathfrak{g}_1}, [y_1, y_2]_{\mathfrak{g}_2})$$

Wskazać $g_1, g_2 \in \mathfrak{g}$ - podalgebra Weyla ⑭
algebra Liego $\mathfrak{g}$

i $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2]_{\mathfrak{g}} = 0$, mówimy, że

$\mathfrak{g}$ rozkłada się na sumę prostą $\mathfrak{g}_1$ i $\mathfrak{g}_2$.
(WBN.)

Def. 5. Mówimy (o $\mathfrak{g}$), że jest rozkładem algebra
Liego

Kompleksyfikacja $\mathfrak{g}$ to zespolona algebra
Liego

$$(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \equiv \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}})$$

• verifizierte Lemma

(15)

$$\forall X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g} :$$

$$[X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i, X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i]_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$$

$$:= ([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}} - [Y_1, Y_2]_{\mathfrak{g}}) \otimes 1$$

$$+ ([X_1, Y_2]_{\mathfrak{g}} + [Y_1, X_2]_{\mathfrak{g}}) \otimes i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C}) \\ X^T = -X \end{array} \right\}$$

Proposition : $u(n)^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$

Many

(16)

Str. 4. Niech $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ - rzeczywiste algebry
Liego,

Dochy $\chi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ - homomorfizm rzeczyw. algebry
Liego

Indukuje kanonicznę homomorfizm

$\chi^{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$, który nazywamy KOMPLEKSYFIKACJĄ
HOMOMORFIZMU

D: $\forall x, y \in \mathfrak{g}_1 : \chi^{\mathbb{C}}(x \otimes 1 + y \otimes i) = \chi(x) \otimes 1 + \chi(y) \otimes i.$

Szereżone i pyczołne istotne typy 17
algebr Liego pinye

Def. 6. Algebra Liego $\mathfrak{g}$ nazywamy
NIEPRZYWIĘDLNĄ / NIEREDUKOWALNĄ, gdy jedynymi w niej
idealami $\mathfrak{h}$ $\mathfrak{g}$ i $\{0_{\mathfrak{g}}\}$. Nieprzywiedlna
algebra Liego wymiarem $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{g} \geq 2$
jest dwulicowa prostą.

NB. Kožda komutativna algebra preko
jeftinijeg jedinice 3 jedinice jedinice. (18)

jeftinijeg jedinice - nije jedinice - komutativna.

Ostalo, jedna komutativna algebra

koja je jeftinijeg jedinice, gdje

koja jeftinijeg jedinice algebra jeftinijeg
jedinice.

Przykład 2: Ex. 5. Algebra Liego (19)

$\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ jest prosta.

D: Nie definiujemy.

Df. 7. Niedziej $\mathfrak{g}$ -algebra Lieps (20)

Idea $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ obustronny under

IDEALU KOMUTATOROWEGO lub ALGEBRY POCHODNYCH.

Nierozrywaj cię podaje

$\mathfrak{g} : \mathbb{N} \rightarrow \text{ob Lie alg}_K : n \mapsto \mathfrak{g}_n$,

derelony relurencyjnie : $\mathfrak{g}_{n+1} = [\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_n]_{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$,

„litry” $\mathfrak{g}_n \subseteq \mathfrak{g}_{n-1}$ jako ideał,

nasymony CHAGIEM POCHODNYM $\mathfrak{g}$.

Hełmoć $\exists n \in \mathbb{N} : \mathcal{I}_n = \{0_{\mathcal{I}}\}$, (21)
algebra $\mathcal{I}$ maksymalny ROZWIĄZALNY.

NB: $\mathcal{I}_{n>1}$ nie są w ogólności idealami
w $\mathcal{I}$.

Def 8. Niedziński σ -algebra Liego

(22)

Minimalny ciąg idealów w σ

$g^{\cdot} : \mathbb{N} \rightarrow \text{obł. l. } \mathfrak{g}_{\mathbb{K}} : n \mapsto g^n$

określony rekurencyjnie : $g^{n+1} := [g, g^n]_g, g^0 = g$

mierzmy GÓRNYM CIĄGIEM CENTRALNYM σ .

Wtedy $\exists n \in \mathbb{N} : g^n = \{0_g\}$,

algebra σ mierzmy NILPOTENTNA.

Mały prost

(23)

Str. 6. Każda algebra nilpotentna jest rozmiagalna.

D : $\triangle$

Przykład : (1) Str. 7. Podprzestrzeń $\sigma \subset \mathbb{R}(3)$
macierzy będące formami kwadratowymi stopnia
2 w $(\mathbb{R}(3), [\cdot, \cdot])$ tworzy algebra Liego, w której
każda jest nilpotentna. D: Cw.

(2) Shr. 8. Podprezentzen!

(24)

$$\mathcal{O} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathbb{C}(2)$$

Opisuj $\mathcal{O}$ ($\mathbb{C}(2), \mathbb{C}[\cdot]$) strukturę algebry
liczby, względem której jest rozniekalna,
czy nie - nilpotentna.

D: Cwic.

Specjalny : szczególny rodzaj (25)
tych homomorfizmów

Def. 9. Niech $\mathfrak{g}$ -algebra Liego nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$.

REPREZENTACJA $\mathfrak{g}$ (zw. też $\mathfrak{g}$ -MODUŁEM)
to para (V, ρ) złożona z

* przestrzeni wektorowej V nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$

** homomorfizm algebr Liego $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$.

Jeli $\mathfrak{g}$ jest rzeczywisty algebra Liego, (26)

tożeg reprezentacji rzeczywistej

RZECZYWISTA, jeli ρ jest
zespolem algebra Liego, reprezentacji
wspierany ZESPOLONA, o ile

V jest zespolem rzeczywistym wektorów.
Wtedy ρ jest monomorfizmem, reprezentacja dwukrotna
nazywana WIERNOŚĆ.

Podprzestrzeń $W \subseteq V$ nazywamy invariantą (27)

(V, g) algebry g spełniającej warunki

$$g(g)(W) \subseteq W$$

względną $(g-)$ niezmienniczość. Przy
tym jeśli $W \in \{S_0, V\}$, to mówimy

o trywialnej podprzestrzeni niezmienniczości.

W przeciwnym razie podprzestrzeń nazywamy

olnó' bany mianem NIETRWAŁNY. (48)

Reprezentacja nieporządkowa, niezgodnych
podmykanych nieumieścił jest wyznaczone
NIEPRZYWIEDLNA.

_____ x _____
Wiedzą $(V_1, e_1) : (V_2, e_2)$ będą reprezentacji
aby być z. SPLATY sączy
tych reprezentacji to odwołanie

$$X \in \text{Hom}_K(V_1, V_2)$$

(29)

o formaci

$$\forall X \in \mathfrak{g} : X \circ \varphi_1(X) = \varphi_2(X) \circ X.$$

Sploty, ktory jst izomorfizmem
wzajemny, odwloamy wzorek

POWODUJĄCE REPREZENTACJE. Metoda

take istnieje, opasne reprezentacje wazymy
POWODUJĄCYMI : wzajemny $\varphi_1 \sim \varphi_2$.

Maury ogymste

(30)

8.9. Dowolna ^(izogymsta) reprezentacja (V, ρ)
izogymisty (!) algebry Liego $\mathfrak{g}$
na zespolonej przestrzeni wektorowej V
rozszerza się jednoznacznie do (zespolonej)
reprezentacji kompleksyfikacji $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ tejże,
 $(V, \rho^{\mathbb{C}})$. Przy tym ρ jest iniezykmalna
 $\Leftrightarrow \rho^{\mathbb{C}}$ —

D., Pierwsze zgoda jest trywialne. ③
Dla dwóch innych zgoda wystarczy
zauważyć, że

$$\xi(g \otimes_{\mathbb{R}} 1) \equiv \xi(g) + i \triangleright \xi(g) \quad \square$$

W następnej kolejności pokażemy
dobre przykłady reprezentacji i algorytm
konstrukcji innych reprezentacji ze standardu.

Przykłady:

(32)

(1) REPREZENTACJA TRYWIALNA ($\forall g \equiv 0$)

(2) REPREZENTACJA STANDARDOWA:

$(\mathbb{C}^n, \rho \equiv \text{id}_g)$ dla $g \in \mathbb{C}(n)$ - algebra
Liego

(3) REPREZENTACJA POŁĄCZONA:

$(g, \text{ad.} : g \rightarrow \mathfrak{gl}(g) : X \mapsto [X, \cdot]_g \equiv \text{ad}_X)$

NB: Kanonizm ad. wynika
z tożsamości Jacobi.

(4) REPRÉSENTATION CONTRAGRÉDIENTE / DUALNA (33)

$$(V^*, \varrho^* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V^*) : X \mapsto -\varrho(X)^*),$$

$$\text{soit } \forall (\varphi, \psi) \in V \times V^* : \langle \varrho(X)^*(\varphi), \psi \rangle := \langle \varphi, \varrho(X)(\psi) \rangle,$$

$$\text{c'est-à-dire } \varrho(X)^*(\varphi) \equiv \varphi \circ \varrho(X).$$

Mon
D: A

Sch. 10 (V, ϱ) représenté par $\Leftrightarrow$

$(V^*, \varrho^*) \xrightarrow{\quad} \text{---} \text{---}$

Sch. 11 $(V^{**}, (\varrho^*)^*) \sim (V, \varrho)$

Naturalne operacije na reprezentacijah

(34)

grupe:

Def. 10. Niz $\{(V_\alpha, \rho_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ - reprezentacije
skupine G .

SUMA PROSTA REPREZENTACIJA to reprezentacija

$$\left(\bigoplus_{\alpha \in A} V_\alpha, \bigoplus_{\beta \in A} \rho_\beta \right), \text{ kjer } \pi_\alpha \circ \rho_\oplus = \rho_\alpha$$

g. n. i. $\left[\begin{array}{c} \uparrow \\ \forall x \in G: \\ \bigoplus_{\alpha} V_\alpha \end{array} \right. \rho_\oplus(x)(v_\alpha) = (\rho_\alpha(x)v_\alpha),$

$\nwarrow$ tj. $\rho_\oplus(x) \circ j_\alpha = j_\alpha \circ \rho_\alpha(x)$

Mamy tylko

(35)

Def. 11. Niedwój $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ - algebry Liego nad $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
 (V_α, ρ_α) - reprezentacja $\mathfrak{g}_\alpha$ dla $\alpha \in \{1, 2\}$.

LOGICZNA TENSOROWA REPREZENTACJA

to reprezentacja algebry $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ (!)

dana w postaci: $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \rightarrow \mathfrak{gl}(V_1 \otimes_K V_2)$ $\left[\begin{smallmatrix} \text{SR} \\ \text{II} \end{smallmatrix} \right]!$

$(V_1 \otimes_K V_2, \rho_1 \otimes \rho_2 : (X_1, X_2) \mapsto \rho_1(X_1) \otimes \text{id}_{V_2} + \text{id}_{V_1} \otimes \rho_2(X_2))$

Wprowadzamy nader istotne pojęcie (36)

Def. 12. Reprezentacja (V, ρ) nazywamy

(w pełni) PRZYKIEDLOWA / ROJUTADALNA,

gdz jest izomorfna z sumą prostą

reprezentacji nieprzywiedliwych,

$$\text{tj. } \exists (V_\alpha, \rho_\alpha)_{\alpha \in I} : (V, \rho) \sim \bigoplus_{\alpha \in I} (V_\alpha, \rho_\alpha).$$

Algebra Liego, której cejda (konieczni wprowadzić)

Reprezentacja jest w pełni przynależna,
jest określona unieś W P&TM
PRZYWIĘDNIŃ / REDUKOWAŃ. (37)

NB: Powyższa cecha nie jest
generyczna — wyrażenie bliskie
algabz. Li'epo, który zaskłony
ny' po dalszej części kursu.

Wprowadzenie do kategorii

(38)

Def. 13. Niech $\mathcal{A}$ - asocjatywna algebra

KONWENCJA: $(\cdot | \cdot)$ jest liniowa w 2 !!!

Wtedy, $(V, (\cdot | \cdot))$ - przestrzeń wewnętrzna

Reprezentacja (V, ρ) nazywamy UNITARNA,

$$\text{gdz } \forall X \in \mathcal{A} : \rho(X)^{\dagger} = -\rho(X),$$

$$\text{gdzie } \forall v, w \in V : (\rho(X)^{\dagger}(v) | w) := (v | \rho(X)(w))$$

↑

Nowy state

(39)

Str. 12. Dowlne reprezentacje
antenna na stonczem wyznaczonej
pysztym antony jest co pelni
pysztym.

D : Nied (V, g) bode antony uprzed
pysztym, alchy bode of. Dymyzy dymy-
dymy na V pelni (1.1.).

Nach $W \subseteq V$ habe Adjektivierung
 σ -Wichtigkeit, $W^\perp$ ist dann
(1.) orthogonal. Folgerung:

$$V = W \oplus W^\perp$$

Behauptung, je $W^\perp$ ist σ -Wichtig.

Behauptung, $\forall (w, v) \in W \times W^\perp \forall X \in \sigma$:

$$(w | \rho(X)v) \equiv (\rho(X)^T(w) | v) = -(\rho(X)(w) | v) \\ = 0, \text{ d.h. } \rho(X)(w) \in W \quad (\Leftarrow W \text{ ist } \sigma\text{-Wichtig})$$

Jestli (V, φ) NIE jest uupyzmidka, (41)

do istnieje $0 \neq W \subseteq V$, która jest
 φ -uupym. i wtedy $V = W \oplus W^\perp$
: $W^\perp$ φ -uupym. czyli

$(W, \varphi|_W)$ do (40) upezentacye
unitarnej

Przyn tym albo $(W, \varphi|_W)$ uupyzmidka,
albo rozkłada się na $\tilde{W} \oplus \tilde{W}^\perp$. Analogicznie

musieli być drugą do WT. (42)

Wszystkie powyższe procedury
prowadzi (w szczególności liczbie
kroków) do pełnego rozkładu

(V_i) na podreprezentatywne podzestyki

