

Wykład VIII

2024/25



Nadzie możemy zrobić reprezentacji (43)
umierając algebr liczo 13 reprezentacje
zawarty jest liczo. Algebr 13 = 13
pochodzą, w paradygmaty

Def. 14. Niech G będzie grupą liczo
o algebrze liczo $\mathcal{A}$ i niech V będzie przestrzenią
wektorową nad $\mathbb{K}$. Niech $\rho : G \rightarrow GL(V; \mathbb{K})$
będzie reprezentacją G na V , więc homomorfizmem
grup liczo. Wówczas homomorfizm algebr liczo

$R \equiv T_e R : g \rightarrow gl(V)$ jest odwzorowaniem
wiodącym REPREZENTACJI POCHODNEJ g we V . (44)

namy

Str. 13. Przyjmijmy zdef. Def. 14, zakładając
Dodatkowo, że $K = \mathbb{C}$: we V jest określona
nieprzerwana struktura hermitowa

$$(\cdot | \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C} \quad (\text{iloczyn skalarny}).$$

Wówczas iloczyn R jest unitarny, tj.

$$\forall g \in G : (\cdot | \cdot) \circ (R(g) \times R(g)) = (\cdot | \cdot) \Leftrightarrow R(g)^T = R(g)^*$$

wskazując na bliżej reprezentację dR . (45)

D: skoro $\forall g \in G: R(g)^t = R(g)^{-1}$,

to w szczególności

$$\forall X \in \mathfrak{g}: R(\exp^G(tX))^t = R(\exp^G(-tX)),$$

de Str. 2-3-4-7.11 o naturalności $\exp$

pozwala zapisać $R \circ \exp^G = \exp^{GL(V;K)} \circ dR$,

zatem

$\forall X \in \mathfrak{g} : \quad R(\exp^G(t \triangleright X))^{\dagger} \stackrel{!}{=} R(\exp^G(-t \triangleright X)) \quad (46)$

$\quad \quad \quad \parallel \text{ nat.}$

$\exp^{GL(V;K)}(dR(t \triangleright X))^{\dagger} \quad \exp^{GL(V;K)}(dR(-t \triangleright X))$

$\quad \quad \quad \parallel \text{ nat.}$

$\quad \quad \quad \parallel \text{ "nagly" dispenses}$

$\quad \quad \quad \parallel$

$\quad \quad \quad \exp^{GL(V;K)}(dR(t \triangleright X))^{\dagger}$

$\quad \quad \quad \parallel$

$\quad \quad \quad \lambda_{dR(t \triangleright X)^{\dagger}} (1)$

$\quad \quad \quad \text{distribut' } dR \parallel$

$\quad \quad \quad \lambda_{t \triangleright dR(X)^{\dagger}} (1)$

$\quad \quad \quad \stackrel{!}{=} \quad \quad \quad \lambda_{dR(X)^{\dagger}}(t)$

$\quad \quad \quad \text{8hs. 2-3-4-7.7}$

$\quad \quad \quad \lambda_{dR(-t \triangleright X)} (1)$

$\quad \quad \quad \parallel \text{ distribut' } dR$

$\quad \quad \quad \lambda_{t \triangleright dR(-X)} (1)$

$\quad \quad \quad \parallel \text{ 8hs. 2-3-4-7.7}$

$\quad \quad \quad \lambda_{dR(-X)}(t)$

$\quad \quad \quad \lambda_{dR(X)^{\dagger}}(t)$

$\quad \quad \quad \text{just homo!}$

Różniczkując po czasie tożsamość określającą, (47)
obryzmy, po prostu otrzymujemy

$$\forall X \in \mathfrak{g} : dR(X)^T = dR(-X) = -dR(X). \quad \square$$

Pozostałe rzeczy ustalić możemy
określając, w jaki sposób mamy do czynienia
z reprezentacją różnych grup
Liego. O tym mówi...

Tw. 1. [Weyla-Schur-Hurwitz o uśrednianiu] (48)

Niech G będzie zwykłą grupą Liego.

Wówczas dowolna (składowa) reprezentacja R grupy G na nieprzerwanym (zespółym) przestrzeni unitarnej $(V, (\cdot|\cdot))$

jest UNITARYZOWALNA, tj. istnieje na V

nieprzerwana forma hermitowska, wzgl. którą R jest unitarna.

D: Niedrigst $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$. Repräsentierung darstellung (49)

element $\omega \in \wedge^{\dim G} \mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$ ist stimmig
 (unverändert) $\mathfrak{g}$ um bring RI $g h^{-1} \xrightarrow{p_h} g$

$$\Omega \in \wedge^{\dim G =: D}(G) : \Omega(g) := \omega \circ (T_g p_{g^{-1}} \times T_g p_{g^{-1}} \times \dots \times T_g p_{g^{-1}}), g \in G$$

$$\text{Invarianz} : \forall g, h \in G : \varphi_h^*(\Omega(g)) = \Omega(g) \circ T_{gh^{-1}} p_h^{\times \dim G}$$

$$\equiv \omega \circ T_g p_{g^{-1}}^{\times \dim G} \circ T_{gh^{-1}} p_h^{\times \dim G} = \omega \circ T_{gh^{-1}} (p_{g^{-1}} \circ p_h)^{\times \dim G}$$

$$= \omega \circ T_{gh^{-1}} p_{hg^{-1}}^{\times \dim G} = \omega \circ T_{gh^{-1}} p_{(gh^{-1})^{-1}}^{\times \dim G} \equiv \Omega(gh^{-1}).$$

(NB: $\omega = \omega_{A_1 A_2 \dots A_D} \tau^{A_1} \wedge \tau^{A_2} \wedge \dots \wedge \tau^{A_D} \Rightarrow \Omega = \omega_{A_1 A_2 \dots A_D} \theta_{A_1}^{A_1} \wedge \theta_{A_2}^{A_2} \wedge \dots \wedge \theta_{A_D}^{A_D}$!)

Trivialität TG formale um ist orientierung

(50)

ω na G jako ilosc bog $\Gamma(TG)$
 odznaczajac $(R_{X_1}, R_{X_2}, \dots, R_{X_{d-1}})$ do dwoch
 miedzy innymi $\{X_A\}_{A \in I, d-1} \circ$ odznaczajac

$$\omega(X_1, X_2, \dots, X_{d-1}) > 0.$$

Mozna Ω , mozemy zadac cos
 z dwoch innych pladkow $f \in C^\infty(G; \mathbb{R})$

wzorem

$$\int_G f := \int_{(G, \Omega)} f \circ \Omega, \quad \text{czy} \quad \text{czy}$$

$$f > 0 \Rightarrow \int_G f > 0 \quad (\text{wg\u0142e} \quad \text{\textcircled{51}} \\ \text{z tego} \\ \text{przez } \Omega).$$

Bez innych przychy\u0142\u0119\u0144\u0107, 1. 1^a
 co\u0142\u0105 to j\u0119st p - m\u0119\u0142\u0105\u0144\u0107
 w rozumieniu to\u017cmo\u015bci

$$\forall g \in G : \int_G p_g^* f = \int_G f \quad (\Leftrightarrow p_g^* \Omega = \Omega).$$

$\begin{cases} p_g^*(\sigma_\omega) = \sigma_\omega, \text{ bo} \\ p_g^* R_x = R_x \end{cases}$

Rozwijamy w szeregi i\u0144dziej\u0105ce
 przez $\forall x \in \mathbb{R}$ w\u0142\u0105\u017c\u0105 funkcji

$$f_{v,w} : G \xrightarrow{\substack{\cong \\ \{K \in \mathbb{C}\}}} K : g \mapsto (R(g)(v) | R(g)(w)), \quad \textcircled{52} \\ v, w \in V$$

Die $w=v \in V$ ist $f_{v,w} \geq 0$ ($i=0 \Leftrightarrow v=0$)

Es gilt $\int_G f_{v,v} \geq 0$ $i=0 \Leftrightarrow v=0$,

$$\text{f.} \quad (\cdot | \cdot)^G : V \times V \rightarrow K : (v, w) \mapsto \int_G f_{v,w}$$

folgt die nichtnegative Form hermitisch
(0 ist die identische Form $(\cdot | \cdot)$).

Taki zdefiniowana forma symplectic (53)
 wariant $\forall g \in G \forall v, w \in V$:

$$\begin{aligned} (R(g)(v) | R(g)(w))^G &\equiv \int_G f_{R(g)(v), R(g)(w)} = \int_{(G,0)} (R(\cdot)R(g)(v) | R(\cdot)R(g)(w)) \Omega(\cdot) \\ &= \int_{(G,0)} (R(\cdot \cdot g)(v) | R(\cdot \cdot g)(w)) \Omega(\cdot) \equiv \int_{(G,0)} (R \circ p_g(\cdot)(v) | R \circ p_g(\cdot)(w)) \Omega(\cdot) \end{aligned}$$

$$\equiv \int_G p_g^* f_{v,w} = \int_G f_{v,w} = (\sigma | w)^G, \text{ który oznacza}$$

moim zdaniem, że reprezentacja R jest uog. wj. unitarna $\square$

3) poligennie dwóch abstrakcyjnych (54)
wzrostu

Str. 14. Reprezentacje podrodnej algebry
Lego zwrócić się do uniwersalnej.

D: Ogólny.

Te same algebry Lego są zwrócić
spawiać, które algebry mogą na algebrach
Lego z nimi być stosowane.

Typy osiem sprowadzamy prostą, leży (55)
wider przydatne

Tw. 2. (Lemmaty Schur'a) Niech

σ -algebra $\mathcal{L}$ owo.

1° Niech $(V_1, \mathcal{F}_1) : (V_2, \mathcal{F}_2)$ - ję reprezentacje
nieprzegl.!

$\chi : (V_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (V_2, \mathcal{F}_2)$ - relacja.

Wówczas zachodzi dysjunkcja $\chi = 0 \vee \chi$ izo.

2° Med (V, φ) - ^{niezwykła} reprezentacja 56
 o zespole! ^{nie} zespole!
nie zespole! $\checkmark$

$\chi: (V, \varphi) \rightarrow \mathbb{C}$ - skalar

Wówczas $\exists \lambda \in \mathbb{C} : \chi = \lambda \cdot \text{id}_V$.

3° Med $(V_1, \varphi_1) : (V_2, \varphi_2)$ - ^{niezwykła} reprezentacja o zespole! ^{nie} zespole!
 $\neq 0$
 $\chi_1, \chi_2: (V_1, \varphi_1) \rightarrow (V_2, \varphi_2)$ - nie zespole! $\checkmark$
 Wówczas $\exists \lambda \in \mathbb{C} : \chi_1 = \lambda \cdot \chi_2$.

D, D1° Prosta liniowa domowa (57)
(zbiór wektorów własnych $\lambda \in \mathbb{C}$).

AD 2° Mamy - $\forall X \in \mathfrak{g} - X \circ f(X) = f(X) \circ X$,
a ponieważ $\mathbb{C}$ jest algebraicznie zamknięte
 $X \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ma co najmniej jeden
własny wektor, $\text{Sp} X \neq \emptyset$. Wobec
 $\forall X \in \mathfrak{g} : f(X)(V_{\lambda}(X)) \subset V_{\lambda}(X)$, czyli

$V_\lambda(X) \subseteq V$ jest podprzestrzenią
 0-wym. przy tym $\lambda \in \text{Sp} X$
 oznacza, że $V_\lambda(X) \neq \{0\}$, zatem
 wobec niepróżności φ zachodzi
 $V = V_\lambda(X)$, do jak oznacza,
 że $X \equiv X|_{V_\lambda(X)} \equiv \lambda \cdot \text{id}_{V_\lambda(X)} \equiv \lambda \cdot \text{id}_V$.

(58)

Ad 3° Show $\chi_2 \neq 0$, to us way (59)

1° space is just isomorphic.

Isom'ie given χ_2^{-1} i $\chi_1 \circ \chi_2^{-1} : (V_2, \beta_2) \rightarrow$
W suitable 2°, $\chi_1 \circ \chi_2^{-1} = \lambda \circ \text{id}_{V_2}$ space!

The given isom'ie $\lambda \in \mathbb{C}$, as is shown

isom'ie $\chi_1 = \lambda \circ \chi_2$.

□

III ^{*} Wyjściowe reprezentacje $\mathfrak{su}(2)$. (60)

Reprezentujemy $\mathfrak{su}(2)$ na

$$V_n := \{ w \in \mathbb{C}_2[z_1, z_2] \mid \deg w = n \}$$

(jednorodne wielomiany stopnia 2)

$$w = \sum_{k=0}^n a_k z_1^{n-k} z_2^k$$

$$\text{Niech } X = X_{ij} \triangleright E_{ij}, \quad (E_{ij})^k_e = \delta_i^k \delta_{je},$$

(61)

a wtedy

$$\begin{aligned} \rho_j(X)(w) := & - \left(X_{11} \mathbb{Z}_1 + X_{12} \mathbb{Z}_2 \right) \frac{\partial W}{\partial \mathbb{Z}_1} \\ & - \left(X_{21} \mathbb{Z}_1 + X_{22} \mathbb{Z}_2 \right) \frac{\partial W}{\partial \mathbb{Z}_2} \end{aligned}$$

Jeżeli reprezentacja $\mathfrak{su}(2)$.

Niech $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- baza $\mathfrak{su}(2)$.

Wdwyer

(62)

$$\rho_n(H) = -x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2$$

$$\rho_n(E_+) = -x_2 \partial_1$$

$$\rho_n(E_-) = -x_1 \partial_2$$

spez. nuss
wählend
Lie's 2a(2).

i
Darstellung

weitergehend!

$$\rho_n(H) (x_1^{n-k} x_2^k) = (-n+2k) x_1^{n-k} x_2^k$$

(*)

$$\rho_n(E_+) (x_1^{n-k} x_2^k) = -(n-k) x_1^{n-k-1} x_2^{k+1}$$

$$\rho_n(E_-) (x_1^{n-k} x_2^k) = -k x_1^{n-k+1} x_2^{k-1}$$

Str. 15. $\forall n \geq 0 : (V_n, \beta_n)$ jest
mierznielna.

(62)

D. Wykazujemy, że dla dowolnego
 $\varepsilon \in (0, 1)$ — istnieje podzbiór $W_n \subseteq V_n$
taki, że dla dowolnego $W \in W_n$
gdzie W jest podzbiorem V_n ,
$$W = \sum_{k=0}^n a_k x_1^{n-k} x_2^k,$$

mamy $\exists k \in \overline{0, n} : a_k \neq 0$.

Wzrost k_0 : najwyższy indeks (64)
o większym $a_{k_0} \neq 0$. Rozważmy

$$f_n(E_+)^{n-k_0} w = w_0.$$

Operator $f_n(\bar{E}_+)$ podnosi potęgę z_2
o 1, zatem $f_n(\bar{E}_+)^{n-k_0}$ anihiluje
wzrostki pochodzące z w opisy
 $a_{k_0} z_1^{n-k_0} z_2^{k_0}$, ale $f_n(E_+)(z_1^{n-k} z_2^k) = 0$

$\Leftrightarrow k = n$, zatem

(65)

$$f_n(E_+)^{n-k_0} W = \lambda_0 \Delta \mathbb{Z}_2^n$$

$$\lambda_0 \neq 0$$

Stąd jest W_n jest $m(2)$ -wymiar.,
 do mniejszej zawiera $\mathbb{Z}_2^n$. Teraz jednak
 $f_n(E_-)^k \mathbb{Z}_2^n$, $k \in \overline{0, n}$ są — na mocy (*)
 niezależnymi wektorami $\mathbb{Z}_1^k \mathbb{Z}_2^{n-k}$,
 (zh. 50) —

zatem te należą do W. Pościągaj (66)
jednak mogą one być V_n ,
więc — słownie — $W_n = V_n$. $\square$

Pytanie teraz do dyskusji który algebra
Liego o reprezentacji podlegałby tej
stanowiłoby interesujący. I dla porównania
z zastosowaniem fizyki i ewentualnie tej samej
winną rozprawy...

IV Elementy teorii algebr potęgowych (67)

Def. 15 Niedzielnej $\mathfrak{g}$ będzie zespoloną
algebrą Liego. Istnieje
związka pury Liego K o algebrze
Liego K takie, że $\mathfrak{g} \simeq K^c$,

algebr $\mathfrak{g}$ rozpinający REDUKTYWNA.
Jestli ponadto $z(\mathfrak{g}) = 0$, to mówimy, że
 $\mathfrak{g}$ jest POTĘGOWA.

Die Darstellung 'einfacher' algebry 68
g algebry K wzywny ZWARTĄ FORMĄ
RZECZYWISTĄ g.

_____ x _____

NB: W literaturze występują różne inne
(odmienne) definicje prostoty, np.

* istnienie niezera idealu pierwszego

** ———— ———— ———— rozkładu

*** zerowość reszki (niezerowego idealu
rozkładu)

**** nieproduktywne FORMY KILUNGA (69)

$$\kappa : g \times g \rightarrow \mathbb{C}$$

$$: (X, Y) \mapsto \text{tr}_g([X, [Y, \cdot]])$$

Wykazywanie równoważności powyższych definicji
jest procesem nieproduktywnym - w rzeczywistości
wylucza się one wzajemnie niezależnie,
w tym samym wyborze definicji prowadzi do
nie najlepszej drożności do trójki statystyki
reprezentacji...

Pygylidae : (1) $sl(n; \mathbb{C})$, $n \geq 2$

(70)

(2) $so(n; \mathbb{C})$, $n \geq 3$

(3) $sp(n; \mathbb{C})$, $n \geq 1$

is $\mu^T \mu^{\text{prot}}$.

(1') $gl(n; \mathbb{C})$

(2') $so(2; \mathbb{C})$

is reducible, leg $\mu^T \mu^{\text{prot}}$.
(ev. CHUGENIA!)

Aby móc postąpić dalej, musimy $\textcircled{71}$
przejść z bliskiej sąsiedniej reprezentacji
podrodnej, której wprowadzamy $\checkmark$

Def. 16 Wiedząc G będzie grupą Liego

o algebrze Liego $\mathfrak{g}$. REPREZENTACJA

DOŁĄCZONA $\mathfrak{g}$ ma sobie to reprezentację

połączoną $(\mathfrak{g}, \text{ad} \equiv dT_e \text{Ad})$ stworzone

z REPREZENTACJA DOŁĄCZONA $(\mathfrak{g}, T_e \text{Ad})^{(\text{grupy})}$.

3 powyższym pojęciem, o fundamentalnym (72)
znaczeniu w dalszej części kursu, opiera nas

Str. 16 krótki zapis Def. 16.

$$\forall X \in \mathfrak{g} : \text{ad}_X \equiv \text{ad}(X) = [X, \cdot]_{\mathfrak{g}}.$$

D: Rozważmy działanie grupy G na $\mathfrak{g}$:

$$T_e \text{Ad}_g : \mathfrak{g} \equiv T_e G \hookrightarrow \text{dla } \text{Ad}_g : G \ni h \mapsto g \cdot h \cdot g^{-1}$$

o punkcie mamy $\text{Ad}_g(e) = e$.

$$\text{Zechceć } \forall X \in \mathfrak{g} : T_e \text{Ad}_g(X) \equiv T_{g^{-1}} \ell_g \circ T_e p_{g^{-1}}(X).$$

(73)

Przyjmujemy z braku str. 27-47.1 postać operacji binarnej

w formie $Tm : TG \times TG \rightarrow TG$,

$$T_{(g,h)} m = T_g p_h \circ m_1 + T_h l_g \circ m_2,$$

z której wyprowadzamy tożsamości:

$$T_e p_{g^{-1}}(X) = T_{(e,g^{-1})} m (X, O_{T_{g^{-1}}G}) \equiv X \cdot O_{TG}(g^{-1})$$

$\forall g \in G$
 $\forall X \in g$

$$T_{g^{-1}} l_g(v) = T_{(g,g^{-1})} m (O_{TG}, v) \equiv O_{TG}(g) \cdot v$$

$v \in T_{g^{-1}}G$

Te formalny przepis

(74)

$$T_e Ad_g(X) = D_{Tg}(g) \cdot X \cdot D_{Tg}(g^{-1})$$

co wobec gładkości Tm oraz ciętej przez

$D_{Tg} \in \Gamma(TG)$ daje gładkość działania

$T_e Ad$, umożliwiając nie zdefiniowanie

działania ad jako działania pochodnego.

W następnym lekcji wykorzystujemy str. 2-3-4-7.
(czyli 7.) 6 i 12.

also zeigen - die Darstellung $X, Y \in \mathfrak{g}$ - (75)

$$[L_X, L_Y]_{\Gamma(G)} \equiv \mathcal{L}_{L_X} L_Y \equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi_{L_X}(-t; \cdot)_* L_Y$$

$$= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} P \exp^G(-tX) * L_Y = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} L_{\text{Ad}_{\exp^G(-tX)}(Y)}$$

Sk. 7-8
Wieder VII $\leftarrow$ das ist die fundamentale! $\nearrow$ die p. $\searrow$ also

$$= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} L_{\text{Ad}_{\exp^G(tX)}(Y)}$$

$$[X, Y]_{\mathfrak{g}} \equiv [L_X, L_Y]_{\Gamma(G)}(e) \stackrel{\downarrow}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} L_{\text{Ad}_{\exp^G(tX)}(Y)}(e)$$

$$= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} T_e \text{Ad}_{\exp^G(tX)}(Y) \equiv d T_e \text{Ad}(X)(Y) . \quad \square$$

Nasze rozważania prowadzi tej do 76

Skr. 17. W odrydyzowanej notacji zachodzi
 bynajmniej $T_e \text{Ad} \circ \exp^G = \exp^{G(\alpha)} \circ \text{ad}.$

D: Wystarczy skorzystać ze skr. 2-3-4-7.11
 i skr. 16. $\square$

Ponieważ stąd nie wynika
 do fundamentalnego

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{T_e \text{Ad.}} & G(\alpha) \\
 \uparrow \exp^G & & \uparrow \exp^{G(\alpha)} \\
 \mathfrak{g} & \xrightarrow[\text{ad}]{d T_e \text{Ad.}} & \mathfrak{g}(\alpha)
 \end{array}$$

Str. 18. Niedziej $\mathfrak{g}$ będzie prosty (77)

algebra Liego o zwartej formie rzeczywistej
 K . Istnieje nieupodobniona forma hermitowska

$$(\cdot | \cdot) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$$

o postaci $(\cdot | \cdot)|_{K \times K} : K \times K \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (na $K = K \otimes 1 \subset \mathfrak{g}$)

i taka, je działanie adżugane $\text{ad}^{\mathbb{C}} : K^{\text{'''}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$

jest unitarne w sensie wyrażenia powyższego $\text{ad}^{\mathbb{C}} \otimes \text{id}_K$

$$\forall X \in K, Y, Z \in \mathfrak{g} : (\text{ad}_X^{\mathbb{C}}(Y) | Z) = - (Y | \text{ad}_X^{\mathbb{C}}(Z)).$$

(2)

3 definiujemy anty- $\mathbb{C}$ -liniową involucję: 78

$$* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} : X \otimes 1 + Y \otimes i \mapsto -X \otimes 1 + Y \otimes i, \quad \downarrow \\ (X, Y \in \mathbb{K}) \qquad \qquad \qquad \equiv "(-\overline{(X \otimes 1 + Y \otimes i)})"$$

a wówczas powyższa mapa hermitowa

spełnia

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g} : (\text{ad}_X^{(g)}(Y) | Z) = (Y | \text{ad}_{X^*}^{(g)}(Z)),$$

czyli $\text{ad}_X^{(g)\dagger} = \text{ad}_{X^*}^{(g)}$.

(*)

↑
obejmuje
porządek
przypadek