GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA

I i II VARIETÉ

25/2 i 4/3

2025/26

Część I

STRUKTURA LINIOWA NA ZBIORACH $\mathbb{R}^{\times n}$, $n \in \mathbb{N}^{\times}$ CZYNI Z NICH WDZIĘCZNY OBIEKT ANALIZY:

- MNOGOŚĆ NATURALNYCH WYBORÓW WSPÓŁRZĘDNYCH (NIEMAL) GLOBALNYCH;
- PROSTOTA RÓŻNICZKOWANIA FUNKCJI $\mathbb{R}^{\times m} \to \mathbb{R}^{\times n}$ I POCHODNEGO POJĘCIA GŁADKOŚCI;
- KANONICZNY OPIS RUCHU (PRĘDKOŚCI), JEGO PRZYCZYN (SIŁY) I OGÓLNYCH FORM I GĘSTOŚCI;
- ELEMENTARNA TEORIA CAŁKOWANIA;
- KANONICZNA (EUKLIDESOWA) STRUKTURA METRYCZNA...

POWYŻSZE PRZYKŁADY SĄ NATURALNIE DZIEDZICZONE PRZEZ SUB-GEOMETRIE ZANURZONE W $\mathbb{R}^{\times n}$,

- k-POWIERZCHNIE SPARAMETRYZOWANE

$$x : \underset{\mathbb{R}^{\times k}}{\mathcal{P}_k \atop \cap} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times n}, \quad n > k$$

$$\mathrm{rk}\, Tx = k$$

- k-POWIERZCHNIE WIĘZÓW

$$W^{-1}(\{0\}), \quad W : \mathbb{R}^{\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times n-k}, \quad n > k$$

$$\dim_{\mathbb{R}} \ker TW = k$$

POŻĄDANĄ WYDAJE SIĘ WSZAKŻE MOŻNOŚĆ ABSTRAHOWANIA OD GEOMETRII ZANURZENIA – OT, CHOĆBY PO TO, BY MÓC OPISAĆ... WSZECHŚWIAT.

ZWAŻYWSZY NIEZNOŚNĄ LEKKOŚĆ BYTU W $\mathbb{R}^{\times n}$, ZASADNYM WYDAJE SIĘ PRZYJĘCIE ZASADY PORZĄDKUJĄCEJ:

LOKALNIE WSZYSTKO, CO ISTOTNE, WYGLĄDA JAK (W) $\mathbb{R}^{\times n}$.

TRZEBA JESZCZE „TYLKO" NADAĆ SENS FORMALNY SŁOWOM „LOKALNIE", „ISTOTNE" i „WYGLĄDA"...

WŁAŚNIE TO BĘDZIE PRZEDMIOTEM NASZYCH ROZWAŻAŃ.

1° NAJBARDZIEJ ELEMENTARNEGO POJĘCIA „LOKAL"-NOŚCI DOSTARCZA TOPOLOGIA ...

KATEGORIA **Top** :

DEF. 1. PRZESTRZEŃ TOPOLOGICZNA TO PARA $(X, \mathcal{T}(X))$

ZŁOŻONA ZE

* ZBIORU X
* PODZBIORU $\mathcal{T}(X) \subset 2^X$, ZW. TOPOLOGIĄ NA X,

O WŁASNOŚCIACH

(T1) $\mathcal{T}(X) \ni \emptyset, X$;

(T2) $\forall \, \tau \subset \mathcal{T}(X) : \bigcup_{\mathcal{O} \in \tau} \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X)$;

(T3) $\forall \, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}(X) : \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}(X)$.

Elementy $\mathcal{T}(X)$ nazywamy **zbiorami otwartymi** w X.

Morfizmem przestrzeni topologicznych $(X_a, \mathcal{T}(X_a))$, $a \in \{1,2\}$, albo inaczej **odwzorowaniem ciągłym**, nazywamy odwzorowanie między zbiorami $f : X_1 \to X_2$ o własności $\forall\, \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X_2) : f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}(X_1)$.

Izomorfizm nosi w tym przypadku miano **homeomorfizmu**.

Przestrzenie topologiczne wraz z odwzorowaniami ciągłymi pomiędzy nimi tworzą **kategorię topologiczną** **Top**.

E.G. 1 NA $\mathbb{R}^{\times n}$ ISTNIEJE NATURALNA TOPOLOGIA GENEROWANA PRZEZ KULE OTWARTE $B_n(x_0, r) := \{ x \in \mathbb{R}^{\times n} \mid d_E(x, x_0) < r \}$, ZDEFINIOWANE PRZY UŻYCIU STANDARDOWEJ ODLEGŁOŚCI EUKLIDESOWEJ $d_E(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$ DLA $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

POWYŻSZE ZDANIE OZNACZA, ŻE $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\times n})$ JEST SUMĄ DOWOLNEJ KOLEKCJI PRZECIĘĆ SKOŃCZONYCH KOLEKCJI KUL OTWARTYCH.

ODTĄD BĘDZIEMY ZAKŁADAĆ TEN WŁAŚNIE WYBÓR TOPOLOGII NA $\mathbb{R}^{\times n}$.

CELEM UNIKNIĘCIA ROZMAITYCH PATOLOGII NA TOPOLOGIĘ FORMALIZUJĄCĄ POJĘCIE „LOKAL"-NOŚCI NARZUCAMY PEWNE OGRANICZENIA, KTÓRE PRECYZUJĄ PONIŻSZE

DEF. 2. NIECH $(X, \mathcal{T}(X)) \in \mathbf{Top}$. TOPOLOGIĘ $\mathcal{T}(X)$ NAZYWAMY HAUSDORFFOWSKĄ, JEŚLI DOWOLNE DWA NIETOŻSAME PUNKTY ZAWIERAJĄ SIĘ W PEWNYCH ROZŁĄCZNYCH ZBIORACH OTWARTYCH,

$$\forall x, y \in X : \left(x \neq y \Longrightarrow \exists\, \mathcal{O}_x, \mathcal{O}_y \in \mathcal{T}(X) : \begin{cases} (x,y) \in \mathcal{O}_x \times \mathcal{O}_y \\ \mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y = \emptyset \end{cases} \right)$$

T.E.G., $(\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R})_{\sim}$, $(x,1) \sim (x,2)$ DLA $x \neq 0$ Z TOPOLOGIĄ DZIEDZICZONĄ Z $\mathbb{R}$.

DEF. 3. PRZESTRZEŃ TOPOLOGICZNĄ $(X, \mathcal{T}(X))$ NAZYWAMY PARAZWARTĄ, JEŚLI KAŻDE JEJ POKRYCIE OTWARTE

$$\mathcal{O} \subset \mathcal{T}(X) : \bigcup_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}} \mathcal{U} = X$$

MA ROZDROBNIENIE $\mathcal{O}' \subset \mathcal{T}(X) : \begin{cases} \bigcup_{\mathcal{U}' \in \mathcal{O}'} \mathcal{U}' = X, \\ \forall \mathcal{U}' \in \mathcal{O}' \ \exists \mathcal{U} \in \mathcal{O} : \mathcal{U}' \subset \mathcal{U} \end{cases}$

KTÓRE JEST LOKALNIE SKOŃCZONE, TJ.

$$\forall x \in X \ \exists \mathcal{O}_x \in \mathcal{T}(X) : \left(\mathcal{O}_x \ni x \ \wedge \ \left| \{ \mathcal{U}' \in \mathcal{O}' \mid \mathcal{U}' \cap \mathcal{O}_x \neq \emptyset \} \right| < \infty \right)$$

7 PRZYKŁADY SĄ ZAZWYCZAJ DOŚĆ „DZIKIE", WIĘC NIE BĘDZIEMY ICH POKAZAĆ.

DRUGIE ZE SŁÓW PODDAWANYCH FORMALIZACJI:

„WSZYSTKO"

JEST WYCZUWANIE POJEMNE, PRZEJDZIEMY PRZETO DO SŁOWA TRZECIEGO, KTÓREGO DOPRECYZOWANIE WYZNACZY NATURALNE RAMY TEJ POJEMNOŚCI...

3° WYBÓR Z PUNKTU 1° PODPOWIADA – PRZY BRAKU DODATKOWEJ STRUKTURY A PRIORI – NATURALNY SENS „WYGLĄDA"-NIA: DO MODELOWANIA UŻYWAMY IZOMORFIZMÓW Z KATEGORII, DO KTÓREJ NALEŻY I TO, CO MODELOWANE, I TO, CO MODELUJE, CZYLI Top.

AŻEBY MODELOWANIE TAKIE UCZYNIĆ EFEKTYWNYM, TJ. AŻEBY UMODELOWAĆ CAŁĄ INTERESUJĄCĄ NAS PRZESTRZEŃ TOPOLOGICZNĄ, MUSIMY DOPUŚCIĆ NIEPUSTE PRZECIĘCIA OTWARTYCH DZIEDZIN MODELUJĄCYCH HOMEOMORFIZMÓW. NATURALNYM WARUNKIEM SPÓJNOŚCI PROCEDURY MODELOWANIA STAJE SIĘ WÓWCZAS ZGODNOŚĆ (POD-)MODELI TYCHŻE PRZECIĘĆ W RAMACH STRUKTURY OBECNEJ NA PRZESTRZENI MODELUJĄCEJ $\mathbb{R}^{\times n}$ — TU POJAWIA SIĘ SWOBODA WYNIKAJĄCA Z BOGACTWA STRUKTURY NA $\mathbb{R}^{\times n}$: MOŻEMY OTÓŻ ŻĄDAĆ IZOMORFICZNOŚCI O DOWOLNYM STOPNIU GŁADKOŚCI.

PO TYCH ROZWAŻANIACH PRZYGOTOWUJĄCYCH MOŻEMY JUŻ WRESZCIE WYSŁOWIĆ DEFINICJĘ STRUKTURY BĘDĄCEJ PRZEDMIOTEM NASZEGO ZAINTERESOWANIA:

DEF. 4. USTALMY $n \in \mathbb{N}$ ORAZ $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$. n-WYMIAROWA ROZMAITOŚĆ RÓŻNICZKOWA KLASY (GŁADKOŚCI) C^k TO PARA $\big((X, \mathcal{T}(X)), [(\mathcal{O}, \kappa)]\big)$ ZŁOŻONA Z

* PARAZWARTEJ PRZESTRZENI TOPOLOGICZNEJ $(X, \mathcal{T}(X))$ O TOPOLOGII HAUSDORFFOWSKIEJ $\mathcal{T}(X)$;
* KLASY RÓWNOWAŻNOŚCI PAR $(\mathcal{O}, \kappa)$, ZWANYCH ATLASAMI i ZŁOŻONYCH Z POKRYCIA OTWARTEGO $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ PRZESTRZENI $(X, \mathcal{T}(X))$ WRAZ Z RODZINĄ

11

HOMEOMORFIZMÓW $\{\kappa_i : \mathcal{O}_i \xrightarrow{\cong} U_i \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\times n})\}_{i \in I}$, ZWANYCH LOKALNYMI MAPAMI LUB UKŁADAMI WSPÓŁRZĘDNYCH I SPEŁNIAJĄCYMI WARUNKI ZGODNOŚCI:

$$\forall i, j \in I : \mathcal{O}_{ij} \equiv \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j \neq \emptyset \implies \underbrace{\kappa_i \circ \kappa_j^{-1} \restriction_{\kappa_j(\mathcal{O}_{ij})}}_{\text{ODWZOROWANIA PRZEJŚCIA}} \in C^k(\kappa_j(\mathcal{O}_{ij}), \kappa_i(\mathcal{O}_{ij})), \qquad \text{(W3)}$$

PRZY CZYM RÓWNOWAŻNOŚĆ ATLASÓW KLASY C^k ZACHODZI WÓWCZAS, GDY ICH KONKATENACJA JEST ATLASEM TEJ SAMEJ KLASY C^k.

W PRZYPADKACH SZCZEGÓLNYCH MÓWIMY O

* ROZMAITOŚCIACH TOPOLOGICZNYCH, GDY $k = 0$;
* ROZMAITOŚCIACH GŁADKICH, GDY $k = \infty$;
* ROZMAITOŚCIACH ANALITYCZNYCH, GDY $k = \omega$.

UWAGI: (1) WARUNEK (W3) IMPLIKUJE C^k-GŁADKĄ IZOMORFICZNOŚĆ POD-MODELI $\kappa_i(O_{ij})$ i $\kappa_j(O_{ij})$.

(2) Z RELACJI RÓWNOWAŻNOŚCI ATLASÓW MOŻNA WYABSTRAHOWAĆ POJĘCIE ATLASU MAKSYMALNEGO, BĘDĄCEGO FORMALNĄ KONKATENACJĄ WSZYSTKICH ATLASÓW RÓWNOWAŻNYCH.

E.G., (i) 2-SFERA JAKO ROZMAITOŚĆ GŁADKA:

POKRYWAMY $\mathbb{S}^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{\times 3} \mid x^2+y^2+z^2-1=0\}$

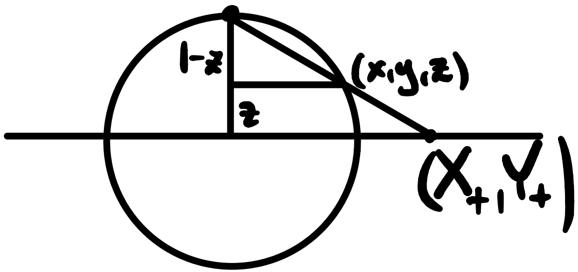
DWOMA ZBIORAMI OTWARTYMI:

$$\mathbb{S}^2_\pm := \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,\pm 1)\} \quad , \quad \mathbb{S}^2_+ \cup \mathbb{S}^2_- = \mathbb{S}^2$$

O PRZECIĘCIU $\mathbb{S}^2_+ \cap \mathbb{S}^2_- = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1),(0,0,-1)\} \equiv \mathbb{S}^2_{+-}$

JAKO MODEL W OBU PRZYPADKACH WYBIERAMY $\mathbb{R}^{\times 2}$, JAKO MAPY ZAŚ — RZUTY STEREOGRAFICZNE NA PŁASZCZYZNĘ RÓWNIKOWĄ

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^{\times 3} \mid z=0\} \equiv \mathbb{R}^{\times 2}.$$



$$K_+ : \mathbb{S}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}^{\times 2},\quad (x,y,z) \longmapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

$$(z \mapsto -z) \Downarrow$$

NB: $\left(\frac{x}{1+z}\right)^2 + \left(\frac{y}{1+z}\right)^2 = \frac{1-z}{1+z}$

$$K_- : \mathbb{S}^2_- \longrightarrow \mathbb{R}^{\times 2},\quad (x,y,z) \longmapsto \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right)$$

$$\frac{X_+}{x} = \frac{1}{1-z} = \frac{Y_+}{y}$$

(PROPORCJE DŁUGOŚCI BOKÓW TRÓJKĄTÓW PODOBNYCH)

STĄD:

$$K_+ \circ K_-^{-1}\restriction_{\mathbb{S}^2_{+-}} : \mathbb{S}^2_{+-} \ni (X_-, Y_-) \longmapsto \left(\frac{X_-}{X_-^2+Y_-^2}, \frac{Y_-}{X_-^2+Y_-^2}\right)$$

JAWNIE GŁADKIE I GŁADKO ODWRACALNE.

(ii) NIERÓWNOWAŻNE ATLASY NA $\mathbb{R}$:

(1) POKRYCIE $\mathcal{O} = \{\mathbb{R}\}$; MAPA $id_{\mathbb{R}} : \mathcal{O} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$

(2) —〃— $\mathcal{O}' = \{\mathbb{R}\}$; —〃— $\kappa : \mathcal{O}' \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3$

$\mathcal{O} \cap \mathcal{O}' = \mathbb{R}$

ODWZOROWANIA PRZEJŚCIA

$id_{\mathbb{R}} \circ \kappa^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ NIE JEST KLASY C^∞!

—— x ——

W NASTĘPNEJ KOLEJNOŚCI ROZPATRZYMY NATURALNE POJĘCIE MORFIZMU POMIĘDZY ROZMAITOŚCIAMI RÓŻNICZKOWYMI TEJ SAMEJ KLASY C^k, WYKORZYSTUJĄCE IZOMORFIZMY MODELUJĄCE I STRUKTURĘ MODELU.

DEF. 5.: NIECHAJ $((X_a, \mathcal{J}(X_a), [(\mathcal{O}_a, \kappa_a)]))$, $a \in \{1,2\}$ BĘDĄ ROZMAITOŚCIAMI RÓŻNICZKOWYMI KLASY C^k ODPOWIEDNICH WYMIARÓW n_a I NIECH $f : X_1 \to X_2$ BĘDZIE ODWZOROWANIEM. WÓWCZAS POWIEMY, ŻE

f JEST KLASY C^k,

JEŚLI DLA KAŻDEJ LOKALNEJ MAPY $\kappa_{1\alpha} : \mathcal{O}_{1\alpha} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{1\alpha} \subset \mathbb{R}^{\times n_1}$ ORAZ DOWOLNEJ — " — " — $\kappa_{2\beta} : \mathcal{O}_{2\beta} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{2\beta} \subset \mathbb{R}^{\times n_2}$ O WŁASNOŚCI $\mathcal{O}_{\alpha\beta} := \mathcal{O}_{2\beta} \cap f(\mathcal{O}_{1\alpha}) \neq \emptyset$ SPEŁNIONY JEST WARUNEK:

$$\kappa_{2\beta} \circ f \circ \kappa_{1\alpha}^{-1} \restriction_{\kappa_{1\alpha}(f^{-1}(\mathcal{O}_{\alpha\beta}))} \in C^k(\kappa_{1\alpha}(f^{-1}(\mathcal{O}_{\alpha\beta})), \mathcal{U}_{2\beta})$$

ZBIÓR TAKICH ODWZOROWAŃ OZNACZAMY SYMBOLEM $C^k(X_1, X_2)$.

JEŻELI f JEST ODWRACALNE i $f^{-1} \in C^k(X_2, X_1)$, NAZYWAMY JE DYFEOMORFIZMEM KLASY C^k.

ZBIÓR DYFEOMORFIZMÓW KLASY C^k OZNACZAMY SYMBOLEM

$$\mathrm{Diff}^k(X_1, X_2).$$

W PRZYPADKU $k=\infty$ MÓWIMY O ODWZOROWANIACH GŁADKICH, OZNACZANYCH JAKO $C^\infty(X_1, X_2)$, ORAZ DYFEOMORFIZMACH (GŁADKICH), OZNACZANYCH JAKO $\mathrm{Diff}(X_1, X_2)$. JEŚLI ZBIÓR TEN JEST NIEPUSTY, PISZEMY $X_1 \simeq X_2$ I MÓWIMY, ŻE X_1 i X_2 SĄ DYFEOMORFICZNE.

E.G.: TAUTOLOGICZNIE $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}}) \simeq (\mathbb{R}, \kappa)$, OTO BOWIEM $f := \sqrt[3]{\cdot}$ SPEŁNIA $\kappa \circ f \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{-1} \equiv \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

BARDZIEJ WYRAFINOWANE PRZYKŁADY ROZMAITOŚCI ORAZ ODWZOROWAŃ (NIE)GŁADKICH POMIĘDZY NIMI ZOSTANĄ PRZEDSTAWIONE NA ĆWICZENIACH.

MY TYMCZASEM PÓJDZIEMY DALEJ KU „WSZYSTKIEMU".

JEST OTO BOWIEM JASNE, ŻE DEF. 4 OTWIERA PRZED NAMI MOŻLIWOŚĆ LOKALNEGO INDUKOWANIA STRUKTUR NA X Z TYCH OBECNYCH NA MODELU. POZOSTAJE ZASTANOWIĆ SIĘ NAD ICH „ZSZYWANIEM"...

[illegible] II

W TEJ CZĘŚCI KURSU NASZĄ AMBICJĄ BĘDZIE KLEJENIE TOŻSAMOŚCI LOKALNYCH W TOŻSAMOŚĆ GLOBALNĄ / ZBIOROWĄ. W ŚRODOWISKU GEOMETRYCZNYM CEL TEN REALIZUJĄ ... GŁADKIE ROZBIORY JEDNOŚCI.

PRZEKONAMY SIĘ, ŻE NASZA DEFINICJA ROZMAITOŚCI – PO STOSOWNYM UZUPEŁNIENIU – GWARANTUJE ICH ISTNIENIE, CO POKAZUJE JEJ DOBROĆ. DROGA DO PRZEKONANIA BIERZE SWÓJ POCZĄTEK W POGŁĘBIONYM STUDIUM TOPOLOGII...

ZACZNIEMY OD ODROBINY NORMALNOŚCI, CZYLI WZMOCNIENIA WŁASNOŚCI HAUSDORFFA...

DEF. 6. PRZESTRZEŃ TOPOLOGICZNĄ $(X, \mathcal{T}(X))$ NAZWIEMY NORMALNĄ, JEŚLI DOWOLNE DWA JEJ ROZŁĄCZNE PODZBIORY DOMKNIĘTE MAJĄ ROZŁĄCZNE OTOCZENIA OTWARTE, TJ.

HAUSDORFF MÓWI O SZCZEGÓLNYCH PUNKTACH

$$\forall D_1, D_2 \text{ - DOMKNIĘTE}: \left(D_1 \cap D_2 = \emptyset \Rightarrow \exists \underset{D_1}{\underset{\cup}{U_1}}, \underset{D_2}{\underset{\cup}{U_2}} \in \mathcal{T}(X) : U_1 \cap U_2 = \emptyset \right).$$

, CO ZAPISUJEMY:

$$D_1 \mid D_2$$

TW. 1. [DIEUDONNÉ]

$(X, \mathcal{T}(X)) \in \mathrm{Top}$ PARAZWARTA O TOPOLOGII HAUSDORFFOWSKIEJ $\Longrightarrow (X, \mathcal{T}(X))$ NORMALNA.

D: POKAŻEMY NAJSAMPIERW, ŻE

$\forall x \in X, \underset{\not\ni x}{D} \subset X$ - DOMKNIĘTY : $D \mid \{x\}$.

W TYM CELU ROZWAŻYMY POKRYCIE OTWARTE

$\widetilde{\mathcal{O}}_D := \{\mathcal{O}_d\}_{d\in D} \cup \{X \setminus D\}$, $\bigcup_{d\in D} \mathcal{O}_d \cup (X\setminus D) = X$

UTWORZONE Z DOWOLNYCH OTOCZEŃ $\underset{\ni d}{\mathcal{O}_d} \in \mathcal{T}(X)$

ROZDZIELAJĄCYCH x i d WRAZ Z ODNOŚNYMI $\mathcal{O}_{x,d} \ni x$, TJ.

$\forall d \in D : \mathcal{O}_{x,d} \cap \mathcal{O}_d = \emptyset$. POKRYCIE $\widetilde{\mathcal{O}}_D$ MA - Z RACJI PARAZWARTOŚCI (DEF. 3.)

X - ROZDROBNIENIE LOKALNIE SKOŃCZONE. ALE TEŻ...

LEMAT 1.: NIECH $(X, \mathcal{T}(X)) \in \mathrm{Top}$. KAŻDE LOKALNIE SKOŃCZONE ROZDROBNIENIE $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ POKRYCIA $\mathcal{O} = \{O_i\}_{i \in I}$ PRZESTRZENI X INDUKUJE ROZDROBNIENIE $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ POKRYCIA $\mathcal{U}$ O TYM SAMYM ZBIORZE INDEKSÓW I CO $\mathcal{O}$, A ZARAZEM LOKALNIE SKOŃCZONE.

DL1: JAKO ŻE $\mathcal{U}$ JEST ROZDROBNIENIEM $\mathcal{O}$, PRZETO $\exists\, \imath : A \to I\ \forall \alpha \in A : U_\alpha \subset O_{\imath(\alpha)}$. ZDEFINIUJMY

$$(\mathcal{T}(X) \ni)\ V_i := \bigcup_{\alpha \in \imath^{-1}(\{i\})} U_\alpha \quad (= \emptyset \in \mathcal{T}(X), \text{ ILEKROĆ } \imath^{-1}(\{i\}) = \emptyset).$$

ZACHODZI $V_i \subset O_i$, GDYŻ $\forall \alpha \in \imath^{-1}(\{i\}) : U_\alpha \subset O_{\imath(\alpha)} \equiv O_i$. 22

JEST WIĘC $V := \{V_i\}_{i\in I}$ ROZDROBNIENIEM Θ. PRZY TYM

$\forall x\in X\ \exists\ \underset{x}{\overset{\Downarrow}{\mathcal{U}_x}} \in \mathcal{T}(x) : |\{\alpha\in A \mid \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_x \neq \emptyset\}| < \infty$ Z RACJI

LOKALNEJ SKOŃCZONOŚCI $\mathcal{U}$, CZYLI

$\exists\ B\subset A : \left(|B|<\infty \wedge \forall \alpha\in A\setminus B : \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_x = \emptyset\right)$, ZATEM TAKŻE

$$\forall i\in I\setminus \imath(B) : V_i \cap \mathcal{U}_x \equiv \bigcup_{\alpha\in \imath^{-1}(\{i\})\subset A\setminus B} \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_x = \emptyset .$$

WOBEC SKOŃCZONOŚCI B, JEST $|\imath(B)| \leq |B| < \infty$,

CZYLI – ISTOTNIE – V LOKALNIE SKOŃCZONE. $\blacksquare$

WRACAMY DO DOWODU Tw. 1. ...

MAMY W NIM POKRYCIE $\widetilde{\vartheta}_D$, DLA KTÓREGO TERAZ WYBIERAMY LOKALNIE SKOŃCZONE ROZDROBNIENIE

$$\{V_d\}_{d\in D} \cup \{\hat{V}\} \; : \; V_d \subset \vartheta_d \, , \; \hat{V} \subset X \setminus D,$$

WIĘC TEŻ $\bigcup_{d\in D} V_d \supset X\setminus \hat{V} \supset D$, CZYLI $\{V_d\}_{d\in D}$ JEST POKRYCIEM ZBIORU DOMKNIĘTEGO D, PRZY CZYM (DLA $x\in X$ JAK W 1. LINIJCE DOWODU)

$$\underset{x}{\exists}\, \mathcal{U}_x \in \mathcal{T}(x) : \left|\{e\in D \mid V_e \cap \mathcal{U}_x\}\right| < \infty \, , \text{ CZYLI}$$

$$\exists\, D_0 \subset D : \left(|D_0| < \infty \wedge \forall d\in D\setminus D_0 : V_d \cap \mathcal{U}_x = \emptyset \right).$$

DEFINIUJEMY $\underset{x^{\ll}}{V_x} := \mathcal{U}_x \cap \bigcap_{d\in D_0} \vartheta_{x,d}$, A WTEDY

$V_x \in \mathcal{J}(X)$, bo $|D_0| < \infty$, i ponadto $V_x \cap \bigcup_{d \in D} V_d = \phi$,

gdyż $\mathcal{U}_x$ przecina się pusto z wszystkimi V_d, $d \in D \setminus D_0$,

natomiast $\bigcap_{d \in D_0} \Theta_{x,d}$ – je wszystkimi $\Theta_d \supset V_d$ o dopełniających

indeksach $d \in D_0$. To dowodzi $D \setminus \{x\}$, bo $\bigcup_{d \in D} V_d$

jest otoczeniem D.

Rozważmy następnie parę zbiorów domkniętych

$D_1, D_2 \subset X$. Wobec powyższego dla każdego $d_1 \in D_1$

mamy $\underset{\{d_1\}}{\mathcal{U}_{d_1} \cup} \in \mathcal{J}(X)$ i odnośny $\underset{D_2}{\mathcal{U}_{D_2, d_1} \cup} \in \mathcal{J}(X)$

O WŁASNOŚCI $\mathcal{U}_{d_1} \cap \mathcal{U}_{D_2, d_1} = \emptyset$. JEST PRZETO

$$\{\mathcal{U}_{d_1}\}_{d_1 \in D_1} \cup \{X \setminus D_1\}$$

POKRYCIEM X, DLA KTÓREGO WYBIERAMY - NA MOCY LEMATU 1. - LOKALNIE SKOŃCZONE PODPOKRYCIE

$$\{V_{d_1}\}_{d_1 \in D_1} \cup \{\hat{V}\} : V_{d_1} \subset \mathcal{U}_{d_1}, \hat{V} \subset X \setminus D_1,$$

PRZY CZYM $\mathcal{U}_1 := \bigcup_{d_1 \in D_1} V_{d_1} \supset D_1$. PUNKTOM $d_2 \in D_2$ PRZYPISUJEMY OBECNIE OTOCZENIA OTWARTE $\hat{V}^{d_2}_{d_2} \in \mathcal{T}(X)$ O WŁASNOŚCI

$\forall d_2 \in D_2 : V_{d_2} \cap \mathcal{U}_1 = \emptyset$, A WTEDY $\bigcup_{d_2 \in D_2} V_{d_2} =: \mathcal{U}_2$

BĘDZIE POSZUKIWANYM OTOCZENIEM D_2. POWTARZAMY POPRZEDNIE ROZUMOWANIE, KORZYSTAJĄC Z LOKALNEJ SKOŃCZONOŚCI $\{V_{d_1}\}_{d_1\in D_1}\cup\{\hat{V}\}$:

$$\forall d_2\in D_2\ \exists\ \underset{\hat{}}{U_{d_2}}\in\mathcal{J}(X),\ \underline{D}_{d_2}\subset D_1:\left(|\underline{D}_{d_2}|<\infty\wedge\forall d_1\in D_1\setminus\underline{D}_{d_2}: V_{d_1}\cap U_{d_2}=\phi\right)$$

WYBIERAMY $\underset{d_2}{V_{d_2}} := U_{d_2}\cap\bigcap_{d_1\in\underline{D}_{d_2}} U_{D_2,d_1} \in\mathcal{J}(X)$ (PATRZ: STR. 26.)

I DOSTAJEMY

$$\begin{cases} V_{d_2}\cap V_{d_1\in\underline{D}_{d_2}}\subset U_{D_2,d_1}\cap V_{d_1}=\phi \\ V_{d_2}\cap V_{d_1\in D_1\setminus\underline{D}_{d_2}}\subset U_{d_2}\cap V_{d_1}=\phi \end{cases}$$

$\square$

27

PRZEDSTAWIONY POWYŻEJ DOWÓD WYKORZYSTUJE CECHĘ ROZDROBNIENIA POKRYCIA, JAKĄ JEST LOKALNA SKOŃCZONOŚĆ. ZATRZYMAMY SIĘ NA CHWILĘ, BY PODKREŚLIĆ JEJ OSOBLIWOŚĆ:

Stw. 1. NIECHAJ $(X, \mathcal{T}(X)) \in \mathbf{Top}$ I NIECH $\{V_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}(X)$ BĘDZIE RODZINĄ LOKALNIE SKOŃCZONĄ. WÓWCZAS CECHĘ TĘ MA TAKŻE $\{\overline{V_i}\}_{i \in I}$, A NADTO ZACHODZI TOŻSAMOŚĆ

$$\bigcup_{i \in I} \overline{V_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} V_i}.$$

D: NIECH $x \in X$. DOWOLNE OTOCZENIE $\mathcal{U}_x \in \mathcal{T}(X)$ SPEŁNIA (OTOCZENIE $\mathcal{U}_x \ni x$) WARUNEK: $\mathcal{U}_x \cap \overline{V_i} \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{U}_x \cap V_i \neq \emptyset$. W TAKIM JEDNAK

RAZIE PRZECINANIE ∞ WIELU $\overline{V}_i$ IMPLIKUJE PRZECINANIE ∞ WIELU V_i, TYMCZASEM ISTNIEJĄ $\mathcal{U}_x$, KTÓRE PRZECINAJĄ SKOŃCZENIE WIELE V_i, WIĘC TEŻ - SKOŃCZENIE WIELE $\overline{V}_i$.

PONADTO, RZECZ JASNA, $\bigcup_{i\in I} \overline{V}_i \subset \overline{\bigcup_{i\in I} V_i}$, GDYŻ $\forall i\in I: V_i \subset \bigcup_{j\in I} V_j \subset \overline{\bigcup_{j\in I} V_j}$ I OSTATNI NADZBIÓR JEST DOMKNIĘTY, WIĘC TEŻ $\overline{V}_i \subset \overline{\bigcup_{j\in I} V_j}$. POZOSTAŁO POKAZAĆ, ŻE TAKŻE $\overline{\bigcup_{i\in I} V_i} \subset \bigcup_{i\in I} \overline{V}_i$. OCZYWIŚCIE $\bigcup_{i\in I} V_i \subset \bigcup_{i\in I} \overline{V}_i$, ZATEM WYSTARCZY POKAZAĆ, ŻE $\bigcup_{i\in I} \overline{V}_i$ JEST DOMKNIĘTY, CZYLI - RÓWNOWAŻNIE - ŻE $X \setminus \bigcup_{i\in I} \overline{V}_i$ JEST OTWARTY. NIECH $x \in X \setminus \bigcup_{i\in I} \overline{V}_i$,

A WÓWCZAS WYBIERAMY OTOCZENIE $\mathcal{U}_x^{\ni x} \in \mathcal{T}(x)$ PRZECINAJĄCE SKOŃCZONĄ LICZBĘ V_i, WIĘC TEŻ – SKOŃCZONĄ LICZBĘ $\overline{V}_i$.

MAMY: $\exists J \subset I : \left(|J| < \infty \wedge \forall i \in I \setminus J : \mathcal{U}_x \cap \overline{V}_i = \phi \right)$.

WYBIERZMY $\mathcal{U}_j^{\ni x} \in \mathcal{T}(x) : \mathcal{U}_j \subset \left(X \setminus \overline{V}_j \right) \cap \mathcal{U}_x$, $j \in J$, A WTEDY

$x \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{U}_j \in \mathcal{T}(X)$ i $\bigcap_{j \in J} \mathcal{U}_j \subset X \setminus \bigcup_{j \in J} \overline{V}_j$ ORAZ $\bigcap_{j \in J} \mathcal{U}_j \subset \mathcal{U}_x$,

WIĘC $\bigcap_{j \in J} \mathcal{U}_j \cap \overline{V}_i = \phi$ DLA $i \in I \setminus J$. OSTATECZNIE ZATEM

$$\bigcap_{j \in J} \mathcal{U}_j \subset X \setminus \bigcup_{i \in I} \overline{V}_i,$$

CZYLI – ISTOTNIE – $X \setminus \bigcup_{i \in I} \overline{V}_i$ OTWARTY. $\square$

MOŻEMY WRESZCIE ZBADAĆ, JAK ISTNIENIE LOKALNEGO MODELU $\mathbb{R}^{\times n}$ WARUNKUJE TOPOLOGIĘ ROZMAITOŚCI. ZACZNIEMY OD PROSTEGO

Stw. 2. NIECHAJ $(X, \mathcal{T}(X)) \in \mathbf{Top}$ LOKALNIE EUKLIDESOWA, CZYLI $\forall_{x \in X} \, \exists_{\mathcal{U}_x \overset{x}{\in} \mathcal{T}(X)}, \tilde{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^{\times N} : \mathcal{U}_x \simeq \tilde{\mathcal{U}}$ w $\mathbf{Top}$.

WÓWCZAS $(X, \mathcal{T}(X))$ JEST LOKALNIE ZWARTA, TJ.

$\forall_{x \in X} \, \exists_{\mathcal{U}_x \overset{x}{\in} \mathcal{T}(X)} : \overline{\mathcal{U}}_x$ ZWARTY (CZYLI $\mathcal{U}_x$ PREZWARTY).

D: OCZYWISTA KONSEKWENCJA ISTNIENIA LOKALNEGO MODELU $\mathbb{R}^{\times N}$, W KTÓRYM – W LOKALNEJ MAPIE $\kappa : \mathcal{O}_i \xrightarrow{\simeq} \mathcal{U}_i \overset{x}{\in} \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\times N})$ WYCENTROWANEJ NA $x \equiv \kappa^{-1}(0)$ – ZACHODZI: $\exists_{\varepsilon > 0} : \overline{B_N(0;\varepsilon)} \subset \kappa(\mathcal{U}_x \cap \mathcal{O}_i)$.

KULA DOMKNIĘTA $\overline{B_N(0;\varepsilon)}$ JEST ZWARTA W MODELU $\mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^{\times N}$, WIĘC TEŻ JEJ HOMEOMORFICZNY OBRAZ $\kappa^{-1}(\overline{B_N(0;\varepsilon)})$ JEST ZWARTY W $\kappa^{-1}(\mathcal{U}_i)$, A W NIM $\kappa^{-1}(\overline{B_N(0;\varepsilon)}) \subset \mathcal{U}_x$. $\square$

W NASTĘPNYM KROKU WYŁAWIAMY SENS POŁĄCZENIA LOKALNEJ ZWARTOŚCI (WIĘC LOKALNEJ EUKLIDESOWOŚCI) Z PARAZWARTOŚCIĄ, CO STANOWI ISTOTNY KROK NA DRODZE KU KONSTRUKCJI GŁADKICH ROZKŁADÓW JEDNOŚCI I ... CAŁKOWANIU.

Tw. 2. (ZA [C.T.C. WALLEM, 4.09 = A.2.8.(ii)]) ŁUKOWO SPÓJNA SKŁADOWA LOKALNIE ZWARTEJ PRZESTRZENI PARAZWARTEJ MA PRZELICZALNE, GWIEŹDZIŚCIE SKOŃCZONE POKRYCIE ZBIORAMI ZWARTYMI, TJ. TAKIE, KTÓREGO KAŻDY ELEMENT MA NIEPUSTE PRZECIĘCIE ZE SKOŃCZONĄ LICZBĄ POZOSTAŁYCH.

D: Lokalna zwartość pozwala pokryć $(X, \mathcal{T}(X))$ zbiorami prezwartymi $\{U_x\}_{x \in X} \subset \mathcal{T}(X)$ ($\overline{U_x}$ zwarty). Na mocy prezwartości otrzymujemy z tego pokrycia jego lokalnie skończone rozdrobnienie $\mathcal{O} \equiv \{O_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}(X)$, przy czym $\forall i \in I: \overline{O_i} \subset \overline{U_x}$ jest zwarty jako domknięty podzbiór zbioru zwartego. Wobec lokalnej skończoności $\mathcal{O}$ każdy punkt $x \in \overline{O_i}$ ma otoczenie $V_x \in \mathcal{T}(X)$, które przecina skończoną liczbę elementów $\mathcal{O}$. Otoczenia te składają się na pokrycie $\overline{O_i}$, z którego możemy wybrać podpokrycie skończone z racji zwartości $\overline{O_i}$. To skończone pokrycie, 33

ZATEM i CAŁE $\overline{\Theta}_i$, PRZECINA SKOŃCZONĄ LICZBĘ ELEMENTÓW Θ, CO DOWODZI GWIAŹDZISTEJ SKOŃCZONOŚCI Θ. POZOSTAJE PRZEKONAĆ SIĘ, ŻE J JEST PRZELICZALNE.

W TYM CELU WYBIERAMY DOWOLNY JEGO ELEMENT Θ_{j_0} i USTALAMY WSZYSTKIE ELEMENTY $\Theta_{(1)} = \{\Theta_{j_1}\}_{j_1 \in J_1 \subset J \setminus \{j_0\}}$ O WŁASNOŚCI $\forall j_1 \in J_1 : \Theta_{j_1} \cap \Theta_{j_0} \neq \emptyset$. OCZYWIŚCIE $|J_1| < \infty$.

NASTĘPNIE USTALAMY WSZYSTKIE ELEMENTY $\Theta_{(2)} = \{\Theta_{j_2}\}_{j_2 \in J_2}$, $J_2 \subset J \setminus J_1 \cup \{j_0\}$, O WŁASNOŚCI $\forall j_2 \in J_2 \; \exists j_1 \in J_1 : \Theta_{j_2} \cap \Theta_{j_1} \neq \emptyset$, $|J_2| < \infty$ (SPOZA TYCH DOTYCHCZAS WSKAZANYCH). W ANALOGICZNY SPOSÓB WYRÓŻNIAMY PODZBIORY $\Theta_{(3)}, \Theta_{(4)}, \ldots$

O MOCACH $|J_3| < \infty$, $|J_4| < \infty$

JEŚLI PRZEJŚCIE Z $\Theta_{(n)}$ DO $\Theta_{(n+1)}$ (DLA $n \in \mathbb{N}$ I $\Theta_{(0)} = \{\Theta_{j_0}\}$) WYOBRAŻAĆ SOBIE JAKO „KROK” NA GRAFIE O WIERZCHOŁKACH INDEKSOWANYCH PRZEZ KOLEJNE J_n (DLA $J_0 = \{j_0\}$), TO DOSTAJEMY TYM SPOSOBEM GRAF O WIERZCHOŁKACH O SKOŃCZONEJ WALENCJI, PRZY CZYM SPÓJNOŚĆ X IMPLIKUJE SPÓJNOŚĆ GRAFU, A TAKI MA PRZELICZALNY ZBIÓR WIERZCHOŁKÓW, CO JEST ZNANYM FAKTEM.

AŻEBY TO SOBIE UZMYSŁOWIĆ, ZAUWAŻMY, ŻE ŁUKOWA SPÓJNOŚĆ X OZNACZA MOŻLIWOŚĆ POŁĄCZENIA DOWOLNEGO PUNKTU $x \in X$ Z USTALONYM PUNKTEM $x_0 \in \Theta_{j_0}$ KRZYWĄ ZWARTĄ, KTÓRĄ POKRYWA SKOŃCZONA LICZBA ELEMENTÓW Θ,

CO OZNACZA SKOŃCZONĄ LICZBĘ KROKÓW (J.W.) POTRZEBNYCH NA DOTARCIE Z x_0 DO x. JEST ZATEM PRAWDĄ, ŻE $\forall x \in X \; \exists n \in \mathbb{N} : x \in \bigcup_{j_n \in J_n} \Theta_{j_n} \subset \bigcup_{j_n \in J_n} \overline{\Theta}_{j_n}$, CZYLI TEŻ

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Big(\bigcup_{j_n \in J_n} \overline{\Theta}_{j_n} \Big),$$

A PONIEWAŻ $\forall n \in \mathbb{N} : |J_n| < \infty$, PRZETO $\Big| \sum_{n \in \mathbb{N}} J_n \Big| \leq \aleph_0$.

$\square$

WNIOSEK: DLA ZACHOWANIA POWYŻSZEJ WYGODNEJ WŁASNOŚCI I INNYCH, KTÓRE WYPROWADZAMY PONIŻEJ, WARTO ZAŁOŻYĆ – I BĘDZIEMY TO ODTĄD CZYNIĆ – ŻE PRZESTRZEŃ TOPOLOGICZNA Z **DEF. 4.** MA PRZELICZALNIE WIELE SKŁADOWYCH (ŁUKOWO) SPÓJNYCH.

Poprzednie twierdzenie odgrywa kluczową rolę w procedurze indukcji struktur globalnie gładkich na rozmaitości z takich, które istnieją i są gładkie lokalnie (np. form różniczkowych i innych tensorów). Dalsza nasza analiza rozwija się w tym właśnie kierunku...

Tw. 3. [O wyczerpaniu zwartościami]

Niechaj $(X, \mathcal{T}(X)) \in \mathbf{Top}$ lokalnie zwarta będzie sumą mnogościową przeliczalnej rodziny zbiorów zwartych. Wówczas istnieją zbiory zwarte K_n, $n \in \mathbb{N}$ pokrywające $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ wraz z otwartymi $V_{n+\frac{1}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$ spełniającymi warunki

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} : K_n \subset V_{n+\frac{1}{2}} \subset K_{n+1} .$$

D: NIECHAJ $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ BĘDZIE RODZINĄ ZBIORÓW ZWARTYCH, O KTÓREJ MOWA W TREŚCI TWIERDZENIA. DEFINIUJEMY

$$K_0 := B_0 .$$

WOBEC LOKALNEJ ZWARTOŚCI X KAŻDY PUNKT $x \in K_0 \cup B_1$ MA OTOCZENIE $\mathcal{U}_x \in \mathcal{T}(X)$: $\overline{\mathcal{U}_x}$ ZWARTY. OTOCZENIA TAKIE POKRYWAJĄ $\overset{x\in}{K_0} \cup B_1$, A PONIEWAŻ TEN JEST ZWARTY (JAKO SKOŃCZONA SUMA ZWARTYCH), PRZETO MOŻNA Z $\{\mathcal{U}_x\}_{x\in K_0\cup B_1}$ WYBRAĆ PODPOKRYCIE $\{\mathcal{U}_y\}_{y\in S_0 \subset K_0\cup B_1}$ SKOŃCZONE, $|S_0|<\infty$.

DEFINIUJEMY $V_{\frac{1}{2}} := \bigcup_{y\in S_0} \mathcal{U}_y$ i $K_1 := \overline{V_{\frac{1}{2}}} \equiv \bigcup_{y\in S_0} \overline{\mathcal{U}_y}$ $\left(\Leftarrow |S_0|<\infty \atop \Rightarrow K_1 \text{ - ZWARTY}\right)$,

A NASTĘPNIE POWTARZAMY PROCEDURĘ W ODNIESIENIU DO $K_1 \cup B_2$ ITD., UZYSKUJĄC TYM SPOSOBEM RODZINY ZBIORÓW:

$$B_0 = K_0 \subset V_{1/2} \subset K_1 \subset V_{3/2} \subset K_2 \subset V_{5/2} \subset \ldots \subset K_n \subset V_{n+\frac{1}{2}} \subset K_{n+1} \subset \ldots$$

$$\begin{array}{cccc} \cup & \cup & \cup & \cup \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_{n+1} \end{array}$$

O POŻĄDANYCH WŁASNOŚCIACH TOPOLOGICZNYCH, A PRZY TYM

$$X \equiv \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \subset X, \text{ CZYLI}$$

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n .$$

□

DZIĘKI POWYŻSZEMU MOŻEMY KONSTRUOWAĆ WYGODNE POKRYCIA ROZMAITOŚCI RÓŻNICZKOWYCH...

TW. 4. [O KULAWYM POKRYCIU]

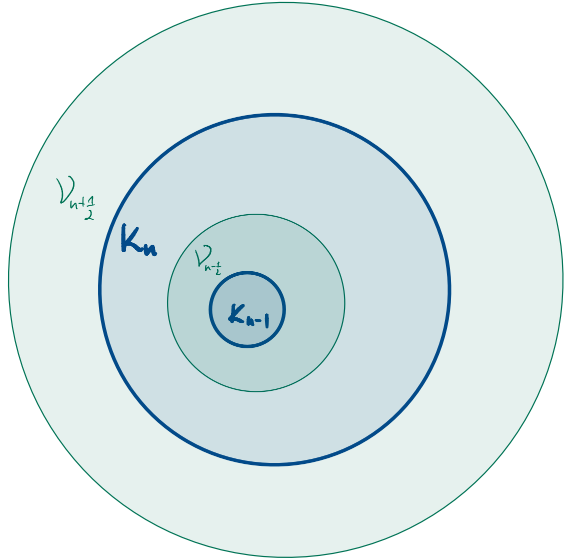
NA DOWOLNEJ N-WYMIAROWEJ ROZMAITOŚCI $(X, \mathcal{T}(X), [(\Theta, \kappa)])$ MOŻNA WYBRAĆ ATLAS $\{\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \xrightarrow{\simeq} B_N \subset \mathbb{R}^{\times N}\}_{\alpha\in A}$ O LOKALNIE SKOŃCZONYM

POKRYCIU WSPÓŁRZĘDNIOWYM $\mathcal{U}=\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$, PRZY CZYM $\mathcal{U}$ MOŻNA WYBRAĆ JAKO ROZDROBNIENIE DANEGO $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$.

D: MAJĄC NA UWZGLĘDNIE (DEF. 4. ORAZ) TW. 2. i TW. 3., WYBIERZMY RODZINY ZBIORÓW $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\leftarrow$ OZN. $K_{-1}\equiv\emptyset$ (ZWARTE) i $\{V_{n+\frac{1}{2}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ (OTWARTE) JAK W TW. 3. DLA KAŻDEGO PUNKTU $x\in X$ ISTNIEJE INDEKS $n\in\mathbb{N}$ O WŁASNOŚCI $x\in K_n\setminus K_{n-1}\subset V_{n+\frac{1}{2}}\setminus K_{n-1}$, PRZY CZYM TEN OSTATNI ZBIÓR JEST OTWARTYM OTOCZENIEM x, WIĘC DOKONUJĄC EW. SKALOWANIA I TRANSLACJI (PRZECIWDZIEDZINY) LOKALNEJ MAPY $\kappa_i:\mathcal{O}_i\xrightarrow{\cong}\mathcal{U}_i$ NA OTOCZENIU $\mathcal{O}_i\ni x$ MOŻNA WYBRAĆ OTOCZENIE $V_{n+\frac{1}{2}}\setminus K_{n-1}\supset\mathcal{O}_{i,x}:=\kappa_i^{-1}(B_N)\ni x$ $\subset$ (POPRAWIONĄ MAPĘ, W OCZYWISTY SPOSÓB C^k-RÓWNOWAŻNĄ WYJŚCIOWEJ, OZNACZAMY DLA UPROSZCZENIA TYM SAMYM SYMBOLEM).

TAK SKONSTRUOWANE ZBIORY $\Theta_{i,x}$ POKRYWAJĄ $K_n \setminus V_{n-\frac{1}{2}}$ (WSZAK $V_{n-\frac{1}{2}} \supset K_{n-1}$), A PONIEWAŻ $K_n \setminus V_{n-\frac{1}{2}}$ JEST DOMKNIĘTY W ZWARTYM K_n, WIĘC JEST ZWARTY, CO OZNACZA, ŻE SPOŚRÓD $\Theta_{i,x}$ MOŻNA WYBRAĆ SKOŃCZONE PODPOKRYCIE. PRZEBIEGŁSZY WSZYSTKIE INDEKSY $n \in \mathbb{N}$ TWORZYMY TYM SPOSOBEM POKRYCIE OTWARTE $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ BĘDĄCE ROZDROBNIENIEM $\{\Theta_i\}_{i \in I}$ I ZŁOŻONE Z HOMEOMORFICZNYCH OBRAZÓW KUL OTWARTYCH.

PRZY TYM DOWOLNY PUNKT $y \in X$ MA OTOCZENIE $V_{m+\frac{1}{2}} \setminus K_{m-1}$ DLA PEWNEGO $m \in \mathbb{N}$. OTOCZENIE TO PRZECINA NIEPUSTO $V_{n+\frac{1}{2}} \setminus K_{n-1} \iff |m-n| \leq 1$, PATRZ: RYSUNEK (WYŻEJ!)



WSKAZANE OTOCZENIE $V_{n+1/2} \setminus K_{n-1}$ PRZECINA ZATEM NIEPUSTO CO NAJWYŻEJ SKOŃCZONE PODPOKRYCIA $O_{i,x}$ ZAWARTE (!) W „PASACH" $V_{n+3/2} \setminus K_n$, $V_{n-1/2} \setminus K_{n-2}$ i $V_{n+1/2} \setminus K_{n-1}$. $\square$

ZWIEŃCZENIE NASZYCH ROZWAŻAŃ (I ULGĘ) PRZYNOSZĄ ROZBIORY JEDNOŚCI...

DEF. 7. NIECHAJ $(X, \mathcal{T}(X)) \in \mathrm{Top}$ I NIECH $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ BĘDZIE POKRYCIEM (OTWARTYM) X. ROZKŁAD JEDNOŚCI PODPORZĄDKOWANY $\mathcal{O}$ TO RODZINA FUNKCJI CIĄGŁYCH $\{\varrho_i : X \to [0,1] \subset \mathbb{R}\}_{i \in I}$ O WŁASNOŚCIACH:

(RJ1) $\mathrm{supp}(\varrho_i) \equiv \overline{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})} \subset \mathcal{O}_i$, $i \in I$

(RJ2) $\{\varrho_i\}_{i \in I}$ LOKALNIE SKOŃCZONA, CZYLI $\{\underbrace{\mathrm{supp}(\varrho_i)}_{=: P_i}\}_{i \in I}$ LOKALNIE SKOŃCZONA

TJ. $\forall x \in X \; \exists \underset{x}{U_x} \in \mathcal{T}(X) : |\{i \in I \mid P_i \cap U_x \neq \emptyset\}| < \infty$

(RJ3) $\sum_{i \in I} \varrho_i = 1$

MÓWIMY, ŻE ROZKŁAD JEDNOŚCI JEST TYPU $\mathcal{C} \subset C(X, \mathbb{R})$ (FUNKCJE CIĄGŁE), ILEKROĆ $\forall i \in I : \varrho_i \in \mathcal{C}$.

TW. 5. [O ISTNIENIU GŁADKICH ROZKŁADÓW JEDNOŚCI] NA DOWOLNEJ ROZMAITOŚCI $((X, \mathcal{T}(X)), [(\mathcal{O}, \kappa)])$ KLASY C^k ISTNIEJE ROZKŁAD JEDNOŚCI TYPU C^k PODPORZĄDKOWANY JEJ DOWOLNEMU POKRYCIU OTWARTEMU.

D: WYBIERZMY POKRYCIE KULOWE $\{\varphi_\alpha^{-1}(B_N) \equiv \mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ PRZESTRZENI $(X, S(X))$ JAK W TEZIE **TW. 4.**, PRZY CZYM ZAKŁADAMY ISTNIENIE $\imath : A \to I : \mathcal{U}_\alpha \subset \overline{\mathcal{U}}_\alpha \subset \mathcal{O}_{\imath(\alpha)}$. WYKORZYSTAJMY

LEMAT 2. USTALMY $N \in \mathbb{N}^\times$. DLA DOWOLNEGO $r \in]0,1[$ NA $\mathbb{R}^{\times N}$ ISTNIEJE GŁADKA FUNKCJA UKUCIA O PROMIENIU r

$$\Upsilon_r : \mathbb{R}^{\times N} \to [0,1], \quad x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{DLA } |x| \leq r \\ \in]0,1[& \text{DLA } r < |x| < 1 \\ 0 & \text{DLA } x \in \mathbb{R}^{\times N} \setminus B_N \end{cases},$$

PRZY CZYM $\Upsilon_r(x) = \mathcal{I}_r(|x|)$ i $\mathcal{I}_r$ ŚCIŚLE MALEJĄCA NA $]r,1[$.

DL2.: NA ĆWICZENIACH.

LEMAT 2. IMPLIKUJE ISTNIENIE NA U_α FUNKCJI C^k-GŁADKIEJ $f_\alpha : U_\alpha \to]0,1]$ GŁADKO ZBIEGAJĄCEJ DO 0 NA $\varphi_\alpha^{-1}(\{x \in \mathbb{R}^{\times N} \mid |x| = 1\})$, ZATEM C^k-GŁADKO PRZEDŁUŻALNEJ PRZEZ 0 DO X. ZAUWAŻMY, ŻE $\forall x \in X\ \exists \alpha \in A : f_\alpha(x) > 0$, A PRZY TYM ZBIÓR INDEKSÓW O TEJ WŁASNOŚCI JEST SKOŃCZONY Z RACJI LOKALNEJ SKOŃCZONOŚCI $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$. WOBEC TEGO MOŻEMY ZDEFINIOWAĆ $f := \sum_{\alpha \in A} f_\alpha$ (SUMA JEST LOKALNIE SKOŃCZONA!) I ZACHODZI $f > 0$.

NASTĘPNIE DEFINIUJEMY

$$\varrho_i := \sum_{\alpha \in \tau^{-1}(\{i\})} \frac{f_\alpha}{f} \in C^k(X, \mathbb{R}), \quad i \in I$$

i SPRAWDZAMY : (0) $0 \leqslant \varrho_i \leqslant 1$

(1) $\mathrm{supp}(\varrho_i) \equiv \overline{\bigcup_{\alpha \in \tau^{-1}(\{i\})} \mathcal{U}_\alpha} \overset{\text{Stw. 1.}}{=} \bigcup_{\alpha \in \tau^{-1}(\{i\})} \overline{\mathcal{U}_\alpha} \subset \bigcup_{\alpha \in \tau^{-1}(\{i\})} \mathcal{O}_{\tau(\alpha)} \equiv \mathcal{O}_i$

(2) $\{\mathrm{supp}(\varrho_i)\}_{i \in I}$ LOKALNIE SKOŃCZONA W ŚWIETLE Stw. 1.,

GDYŻ PRZECINANIE PRZEZ DOWOLNE OTOCZENIE $\mathcal{U}_x \in \mathcal{J}(x)$ NIESKOŃCZONEGO PODZBIORU NOŚNIKÓW OZNACZAŁOBY PRZECINANIE PRZEZ $\mathcal{U}_x$ NIESKOŃCZONEGO PODZBIORU $\{\overline{\mathcal{U}_\alpha}\}_{\alpha \in A}$, CO PRZECZYŁOBY LOKALNEJ SKOŃCZONOŚCI $\mathcal{U}$.

46

WRESZCIE TEŻ

$$(3)\quad \sum_{i\in I} \varrho_i = \sum_{i\in I} \sum_{\alpha\in \iota^{-1}(\{i\})} \frac{f_\alpha}{f} = \sum_{\alpha\in A} f_\alpha \Big/ f = f/f = 1.$$

$\square$

JAKO PRZYKŁAD PRZYDATNEGO ZASTOSOWANIA POWYŻSZEGO PODANY... CDN.