GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA

X STRUKTURA ALGEBRY RÓŻNICZKOWEJ Z GRADACJĄ NA PRZESTRZENI $\Gamma(\Lambda^\bullet T^*M)$

29/4

2025/26

W tej części wykładu skupimy uwagę na polach skośnych tensorów kowariantnych, tj. takich cięciach $\bigotimes T^*M = \bigoplus_{l\in\mathbb{N}} T^*M^{\otimes l}$, których wartości w dowolnym punkcie $m\in M$ są formami wieloliniowymi alternującymi na T_mM. Jako że podzbiór tych form rozpina podprzestrzeń w $\bigotimes T^*_m M$, przeto jest jasnym, że tworzą one pod-wiązkę wektorową

$$\Lambda^\bullet T^*M \equiv \bigsqcup_{m\in M} \Lambda^\bullet T^*_m M \subset \bigotimes T^*M, \qquad \Lambda^\bullet T^*_m M \cong \bigoplus_{l\in\mathbb{N}} \Lambda^l T^*_m M$$

przy czym – przypomnijmy – $\Lambda^0 T^*M \equiv M\times\mathbb{R}$ i $\Gamma(\Lambda^0 T^*M)\equiv C^\infty(M,\mathbb{R})$.

(wystarczy popatrzeć na ten podzbiór w mapach naturalnych)

Zanim zajmiemy się $\Omega^\bullet(M) := \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M)$, przeformułujemy wygodnie standardowy opis $\Gamma(\bigotimes T^*M)$, w którym $\omega\in\Gamma(T^*M^{\otimes p})$ jest równoznaczne $\exists\, \omega_{\mu_1\ldots\mu_p}\in C^\infty(\mathcal{O},\mathbb{R})$ dla $\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}\, dx^{\mu_1}\otimes\cdots\otimes dx^{\mu_p} = \omega|_{\mathcal{O}}$ na dziedzinie $\mathcal{O}\in\mathcal{J}(M)$ (dowolnej) mapy lokalnej $\kappa=(x^\mu):\mathcal{O}\xrightarrow{\cong}\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^{\times\dim M}$:

Stw. 31. ISTNIEJE BIJEKCJA

$$\Gamma(T^*M^{\otimes p}) \simeq \left\{ \begin{array}{c} \text{ODWZOROWANIA } \underline{C^\infty(M,\mathbb{R})\text{-LINIOWE}} \\ \tilde{\omega} : \Gamma(TM)^{\times p} \longrightarrow C^\infty(M,\mathbb{R}) \end{array} \right\}$$

D: $\boxed{\rightarrow}$ NIECH $\omega \in \Gamma(T^*M^{\otimes p})$. WÓWCZAS DLA DOWOLNYCH $V_a \in \Gamma(TM)$, $a \in \overline{1,p}$ ODWZOROWANIE $\omega(V_1,\dots,V_p) : M \to \mathbb{R}$, $m \longmapsto \omega(m)(V_1(m),\dots,V_p(m))$ JEST FUNKCJĄ GŁADKĄ (PATRZ: PREZENTACJE LOKALNE ω i V_a – SUMA ILOCZYNÓW FUNKCJI GŁADKICH).

$\boxed{\leftarrow}$ NIECH $\tilde{\omega} : \Gamma(TM)^{\times p} \to C^\infty(M,\mathbb{R})$. POKAŻEMY NAJPIERW, ŻE FUNKCJA $\tilde{\omega}(V_1,\dots,V_p) \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ (DLA V_a J/W) ZALEŻY OD V_a W SPOSÓB LOKALNY, TJ. $V_a|_{\mathcal{O}} = 0$ DLA $\mathcal{O} \in \mathcal{J}(M) \Longrightarrow \omega(V_1,\dots,V_a,\dots,V_p)|_{\mathcal{O}} = 0$.

W TYM CELU NA (ODPOWIEDNIO MAŁYM) OTOCZENIU $\mathcal{O}_m \subset \mathcal{O}$ DOWOLNEGO $m \in \mathcal{O}$ KONSTRUUJEMY FUNKCJĘ ULURU $\mathcal{I}$, $\operatorname{supp} \mathcal{I} \subset \mathcal{O}_m$, $\mathcal{I}(m) = 1$

I ROZSZERZAMY TĘ PRZEZ 0 DO FUNKCJI $\tilde{\mathcal{I}} \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. TA SPEŁNIA OCZYWISTĄ TOŻSAMOŚĆ $\tilde{\mathcal{I}} \triangleright V_a \equiv 0$, ZATEM WPROST NA MOCY ZAŁOŻENIA

$$0 = \omega(V_1, \ldots, 0, \ldots, V_p) \equiv \omega(V_1, \ldots, \tilde{\mathcal{I}} \triangleright V_a, \ldots, V_p) = \tilde{\mathcal{I}} \cdot \omega(V_1, \ldots, V_a, \ldots, V_p),$$

CO W PUNKCIE m DAJE

$$0 = \tilde{\mathcal{I}}(m) \cdot \omega(V_1, \ldots, V_p)(m) \equiv \mathcal{I}(m) \cdot \omega(V_1, \ldots, V_p)(m) = \omega(V_1, \ldots, V_p)(m).$$

WIDZIMY ZATEM, ŻE – ISTOTNIE – $\omega(V_1, \ldots, V_p)$ ZALEŻY W $m \in M$ OD WARTOŚCI V_a, $a \in \overline{1,p}$ NA OTOCZENIU m (A NIE GLOBALNIE – W DOWOLNYM PUNKCIE M).

WNIOSEK: ILEKROĆ $\underset{\Gamma(TM)}{\tilde{V}_a}\restriction_{\mathcal{O} \ni m} = \underset{\Gamma(TM)}{V_a}\restriction_{\mathcal{O} \ni m} \Longrightarrow \omega(V_1, \ldots, \tilde{V}_a, \ldots, V_p)(m)$

$$= \omega(V_1, \ldots, V_a, \ldots, V_p)(m).$$

W NASTĘPNYM KROKU POKAŻEMY, ŻE POWYŻSZA ZALEŻNOŚĆ JEST W ISTOCIE ZALEŻNOŚCIĄ OD WARTOŚCI $V_a(m)$ POLA W PUNKCIE EWALUACJI...

NIECH ZATEM $V_a(m)=0$, CZYLI W LOKALNEJ MAPIE $\kappa=(x^\mu):\underset{m}{\mathcal{O}} \xrightarrow{\cong} U \subset \mathbb{R}^{\dim M}$ MAMY $V_a\restriction_{\mathcal{O}} = V_a^\mu \partial_\mu$, $V_a^\mu(m)=0$. WYKORZYSTUJĄC KONSTRUKCJĘ ULURU NA $\mathcal{O}_m \subset \mathcal{O}$ MOŻEMY ROZSZERZYĆ ∂_μ DO $\tilde{\partial}_\mu \in \Gamma(TM)$ O WŁASNOŚCI $\tilde{\partial}_\mu\restriction_{\mathcal{O}_m} = \partial_\mu\restriction_{\mathcal{O}_m}$, A $V^\mu \in C^\infty(\mathcal{O},M)$ – DO $\tilde{V}_a^\mu \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ — " — $\tilde{V}_a^\mu\restriction_{\mathcal{O}_m} = V_a^\mu\restriction_{\mathcal{O}_m}$. WÓWCZAS $\tilde{V}_a := \tilde{V}_a^\mu \tilde{\partial}_\mu \in \Gamma(TM)$ SPEŁNIA TOŻSAMOŚĆ $\tilde{V}_a\restriction_{\mathcal{O}_m} = V_a\restriction_{\mathcal{O}_m}$, PRZETO – NA MOCY POPRZEDNICH USTALEŃ –

$$\omega(V_1,\ldots,V_a,\ldots,V_p)(m) = \omega(V_1,\ldots,\tilde{V}_a,\ldots,V_p)(m) = \tilde{V}_a^\mu(m)\cdot\omega(V_1,\ldots,\tilde{\partial}_\mu,\ldots,V_p)(m)$$

$$\equiv V_a^\mu(m)\cdot\omega(V_1,\ldots,\tilde{\partial}_\mu,\ldots,V_p)(m) = 0$$

CAŁA INFORMACJA SWOISTA O V_a

INFORMACJA NIESWOISTA (WSZYSTKIE POLA MOŻNA ROZPIĄĆ LOKALNIE NA TEJ SAMEJ BAZIE)

NA PODSTAWIE DOTYCHCZASOWYCH DOCIEKAŃ MOŻEMY ZDEFINIOWAĆ DLA $\tilde{\omega}$ ODWZOROWANIE $\omega : M \longrightarrow T^*M^{\otimes p}$ PUNKT PO PUNKCIE $m \in M$:

$$\omega(m)(v_1, \ldots, v_p) := \tilde{\omega}(V_1, \ldots, V_p)(m)$$ UŻYWAJĄC DOWOLNYCH PÓL

$v_a \in T_m M, \; a \in \overline{1,p}$ WEKTOROWYCH $V_a \in \Gamma(TM) : V_a(m) = v_a$

GDYŻ WYNIK W m NIE ZALEŻY OD WYBORU V_a:

$$\equiv \omega(m)(V_1(m), \ldots, V_p(m))$$

ZAPISZMY $\omega\restriction_{\mathcal{O}} = \omega_{\mu_1 \ldots \mu_p} dx^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\mu_p}$, A WÓWCZAS

$C^\infty(M, \mathbb{R})$

$\Downarrow$

$$\omega_{\mu_1 \ldots \mu_p}(m) \equiv \omega\restriction_{\mathcal{O}}(\partial_{\mu_1}(m), \ldots, \partial_{\mu_p}(m)) \equiv \tilde{\omega}(\tilde{\partial}_{\mu_1}, \ldots, \tilde{\partial}_{\mu_p})(m)$$

ZALEŻY GŁADKO OD $m \in \mathcal{O}$, CO WOBEC DOWOLNOŚCI $m \in M$ IMPLIKUJE

$$\omega \in \Gamma(T^*M^{\otimes p}). \quad \square$$

SKORZYSTAMY Z POWYŻSZEGO, ABY SNADNIE WYPOSAŻYĆ $\Omega^p(M)$ W UŻYTECZNĄ STRUKTURĘ ALGEBRAICZNĄ...

OZNACZENIA: $\Omega^\bullet(M) := \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M)$ FORMY RÓŻNICZKOWE NA M

$$\Omega^\bullet(M) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Omega^p(M) \quad , \quad \Omega^p(M) := \Gamma(\Lambda^p T^*M),$$

PRZY CZYM Z RACJI ... p-FORMY RÓŻNICZKOWE NA M

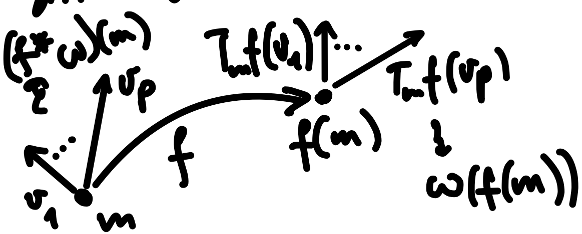
SKOŚNEJ SYMETRII ZACHODZI $\Omega^p(M) \equiv 0$ DLA $p > \dim M =: D$.

ZACZNIEMY OD KONSTRUKCJI POMOCNICZEJ (Z LOKALNEGO PUNKTU WIDZENIA)

(0) COFNIĘCIE (PULLBACK) FORMY RÓŻNICZKOWEJ WZDŁUŻ $f \in C^\infty(M_1, M_2)$

$$f^* : \Omega^\bullet(M_2) \longrightarrow \Omega^\bullet(M_1), \quad \Omega^p(M_2) \ni \omega \longmapsto f^*\omega \in \Omega^p(M_1),$$

ZADANE PUNKT PO PUNKCIE: $(f^*\omega)(m) := \omega(f(m)) \circ (T_m f, \dots, T_m f)$, CZYLI



$$(f^*\omega)(V_1, \dots, V_p)(m) := \omega(f(m))\big(T_m f(V_1(m)), \dots, T_m f(V_p(m))\big)$$

$V_a \in \Gamma(TM_1)$

(JAWNIE GŁADKA ZALEŻNOŚĆ OD $m \in M_1$!)

W LOKALNYCH BAZACH WSPÓŁRZĘDNIOWYCH $\kappa=(x^\mu): \mathcal{O}_1 \to \mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}^{\times \dim M_1}$

MAMY FORMUŁY $\tilde{\kappa}=(y^\alpha): \mathcal{O}_2 \to \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^{\times \dim M_2}$

$$(f^*\omega)\restriction_{\mathcal{O}_1} = \underbrace{(\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\circ f)\,\frac{\partial(y^{\alpha_1}\circ f\circ\kappa^{-1})}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial(y^{\alpha_p}\circ f\circ\kappa^{-1})}{\partial x^{\mu_p}}(\kappa(\cdot))}_{\equiv (f^*\omega)_{\mu_1\ldots\mu_p}}\, dx^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_p}$$

MAMY OCZYWISTE

Stw. 32. $\forall M_a \in \mathrm{Man}^\infty,\ a\in\{1,2,3\}\ \forall f_1\in C^\infty(M_1,M_2),\ f_2\in C^\infty(M_2,M_3):$

$$(f_2\circ f_1)^* = f_1^* f_2^*$$

D: TRYWIALNY.

E.g. 1 NIECH (x,y) – UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH KARTEZJAŃSKICH NA $\mathbb{R}^{\times 2}$

(r,φ) – –||– —||— NA $]0,\infty[\times[0,2\pi[$

ROZWAŻMY ODWZOROWANIE GŁADKIE

$$\pi:]0,\infty[\times[0,2\pi[\ni (r,\varphi) \longmapsto (\overset{x\circ\pi(r,\varphi)}{r\cos\varphi},\ \overset{y\circ\pi(r,\varphi)}{r\sin\varphi}) \in \mathbb{R}^{\times 2} \quad (\text{ŚCIŚLEJ: } \in \mathbb{R}^{\times 2}\setminus\{0\})$$

ZACHODZI $\pi^*(dx\wedge dy)(r,\varphi) = d(r\cos\varphi)\wedge d(r\sin\varphi) = \ldots = r\,dr\wedge d\varphi$
$$\in \Omega^2(]0,\infty[\times[0,2\pi[)$$

TO JEST WYJŚCIOWA/DEFINICYJNA = AKTYWNA 'INTERPRETACJA' π.

ALE π MOŻEMY TEŻ 'INTERPRETOWAĆ' JAKO ANALITYCZNY MODEL ZAMIANY WSPÓŁRZĘDNYCH NA $\mathbb{R}^{\times 2}\setminus\{0\}$ – Z KARTEZJAŃSKICH NA BIEGUNOWE – A WTEDY MAMY SENS NAPISY (TRANSFORMACJE BAZY W $\Gamma(T^*M)$):

$$dx = \frac{\partial(x\circ\pi)}{\partial r}dr + \frac{\partial(x\circ\pi)}{\partial\varphi}d\varphi\,,\quad dy = \frac{\partial(y\circ\pi)}{\partial r}dr + \frac{\partial(y\circ\pi)}{\partial\varphi}d\varphi\,,$$ CZYLI

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \end{pmatrix}$$

[SYTUACJA OGÓLNIEJSZA (GDY $T\pi$ INIEKTYWNY, ALE $\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Dom}\,T\pi < \dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Codom}\,T\pi$): PARAMETRYZACJA PODROZMAITOŚCI W IMMERSJI

$$\Big\downarrow \det_{(2)}$$

$$r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r \neq 0 \implies \text{ODWRACALNE!}$$

SYTUACJA OGÓLNIEJSZA TO TAKA, W KTÓREJ $\mathrm{Ker}\, T\pi = 0$ (INJEKCJA), DLA $\pi: M_1 \to M_2$,

ALE $\dim_{\mathbb{R}} T_m M_1 < \dim_{\mathbb{R}} T_{\pi(m)} M_2$,

CZYLI MAMY DO CZYNIENIA Z 'PARAMETRYZACJĄ' PODROZMAITOŚCI $\pi(M_1) \subset M_2$ W IMMERSJI.

W SZCZEGÓLNOŚCI JEŚLI $\dim M_1 = \dim M_2 =: D$, TO DLA $f: M_1 \xrightarrow{C^\infty} M_2$

OBLICZAMY WE WSPÓŁRZĘDNYCH LOKALNYCH

$\kappa = (x^\mu): \mathcal{O}_1 \subset M_1 \to \mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}^{\times D}$

$\Sigma = (y^\alpha): \mathcal{O}_2 \subset M_2 \to \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^{\times D}$

FORMUŁĘ NA COFNIĘCIE FORMY MAKSYMALNEGO RZĘDU $\left(\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^D (\mathbb{R}^{\times D})^* = \binom{D}{D} = 1\right)$:

$$f^*(\underset{C^\infty(\mathcal{O}_2,\mathbb{R})}{\omega_{12\cdots D}}\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^D) = (\omega_{12\cdots D} \circ f) \det[Df]^{\partial_y}_{\partial_x}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^D.$$

MOŻEMY JUŻ WPROWADZIĆ NASTĘPUJĄCE NATURALNE OPERACJE NA $\Omega^\bullet(M)$:

Def. 27.

(1) ILOCZYN ZEWNĘTRZNY:

$$\wedge : \Omega^\bullet(M) \times \Omega^\bullet(M) \longrightarrow \Omega^\bullet(M),$$

$$\Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \ni (\omega, \eta) \longmapsto \omega \wedge \eta \in \Omega^{p+q}(M)$$

DANY WZOREM $(\omega\wedge\eta)(m) := \dfrac{(p+q)!}{p!\,q!} \mathrm{Alt}\left(\omega(m) \otimes_{\mathbb{R}} \eta(m)\right)$, GDZIE

$$\mathrm{Alt} : \bigotimes T_m^* M \xrightarrow[\mathbb{R}\text{-lin.}]{} \Lambda^\bullet T_m^* M,$$

ĆWICZENIE: ŁATWO WIDAĆ, ŻE $\wedge$ JEST ŁĄCZNY.

$$T_m^* M^{\otimes r} \ni \tau \longmapsto \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \mathrm{sign}(\sigma)\, \tau \circ \hat{\sigma},$$ WYRAŻONE PRZY UŻYCIU

$$\hat{\sigma} : T_m M^{\oplus r} \underset{\mathbb{R}\text{-lin.}}{\circlearrowleft} : (v_1, \dots, v_r) \longmapsto (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}).$$

E.g., $dx \wedge dy\,(m) \equiv dx(m) \wedge dy(m) = \frac{2!}{1!\,1!} \cdot \frac{1}{2!} \big(dx(m) \otimes dy(m) - dy(m) \otimes dx(m) \big)$

NA $\mathbb{R}^{\times 2}$

$= dx(m) \otimes dy(m) - dy(m) \otimes dx(m)$

etc.

Def. 28.

(2) POCHODNA ZEWNĘTRZNA

GLOBALNA BAZA WSPÓŁRZĘDNYCH $\to$ $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\times n})$

TYTUŁEM PRZYGOTOWANIA ZDEFINIUJEMY OPERATOR MODELOWY NA $\Omega^{\bullet}(\mathcal{O})$...

DEFINIUJEMY $\vec{\mu} = (\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_p)$, $dx^{\vec{\mu}} \equiv dx^{\mu_1} \overset{<}{\wedge} \ldots \overset{<}{\wedge} dx^{\mu_p}$

$$d_p : \Omega^p(\mathcal{O}) \longrightarrow \Omega^{p+1}(\mathcal{O}), \quad \sum_{\vec{\mu}} \omega_{\vec{\mu}}\, dx^{\vec{\mu}} \longmapsto \sum_{\vec{\mu}} d\omega_{\vec{\mu}} \wedge dx^{\vec{\mu}}$$

RÓŻNICZKA FUNKCJI $\omega_{\vec{\mu}}$

$$\sum_{\vec{\mu}} d\omega_{\vec{\mu}} \wedge dx^{\vec{\mu}} \equiv \sum_{\vec{\mu}} \partial_\nu \omega_{\vec{\mu}}\, dx^\nu \wedge dx^{\vec{\mu}}$$

***

E.g.: (*) $p=0$: $d_0 f = \partial_\mu f \, dx^\mu$

(**) $p=1$: $d_1(\omega_\mu \, dx^\mu) = \partial_\nu \omega_\mu \, dx^\nu \wedge dx^\mu$

$\underset{\omega}{\overset{!!}{}}$

$$= \partial_\nu \omega_\mu \, dx^\nu \overset{<}{\wedge} dx^\mu + \partial_\nu \omega_\mu \, dx^\nu \overset{>}{\wedge} dx^\mu$$

etc.

$$= (\partial_\nu \omega_\mu - \partial_\mu \omega_\nu) \, dx^\nu \overset{<}{\wedge} dx^\mu \equiv (d_1 \omega)_{\mu<\nu} \, dx^\mu \overset{<}{\wedge} dx^\nu$$

— JEDNOZNACZNE IDENTYFIKACJE

ZBIERZEMY OBECNIE WŁASNOŚCI TAK OKREŚLONEGO $d_\bullet : \Omega^\bullet(\mathcal{O}) \circlearrowleft$, KTÓRE – JAKO DEFINIUJĄCE – PODDAMY NASTĘPNIE STOSOWNEJ ABSTRAKCJI...

Stw. 33. (i) $d_p \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\Omega^p(\mathcal{O}), \Omega^{p+1}(\mathcal{O})\right)$

(ii) $\forall (\omega, \eta) \in \Omega^p(\mathcal{O}) \times \Omega^q(\mathcal{O}) : d_{p+q}(\omega \wedge \eta) = d_p \omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d_q \eta$

(iii) $d_{p+1} \circ d_p = 0 \implies \mathrm{Ker}\, d_{p+1} \supset \mathrm{Im}\, d_p$ PUNKT WYJŚCIA DO KONSTRUKCJI HOMOLOGICZNYCH

(iv) $\forall \mathcal{O}_a \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{\times n_a}), a \in \{1,2\} \; \forall f \in C^\infty(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) \; \forall \omega \in \Omega^p(\mathcal{O}_2)$:

$$f^* d_p \omega = d_p(f^* \omega)$$

BEZ UPORZĄDKOWANIA

D: (i) i (iv) TRYWIALNE.

(ii) NAJPIERW DOWODZIMY DLA $\omega = \alpha\, dx^{\bar\mu} \equiv \underset{\substack{\uparrow \\ C^\infty(\mathcal{O},\mathbb{R})}}{\alpha}\, dx^{\mu_1}\wedge\dots\wedge dx^{\mu_p}$

NB: $\exists\, \sigma \in \mathfrak{S}_p : dx^{\bar\mu} = \mathrm{sign}(\sigma)\, dx^{\vec\mu}$

WOBEC (i) TO POZWALA STWIERDZIĆ, CO NASTĘPUJE:

$$d(\alpha\, dx^{\bar\mu}) = d(\mathrm{sign}(\sigma)\, \alpha\, dx^{\vec\mu}) = \mathrm{sign}(\sigma)\, d(\alpha\, dx^{\vec\mu}) \equiv \mathrm{sign}(\sigma)\, d\alpha\wedge dx^{\vec\mu}$$

$$= d\alpha \wedge dx^{\bar\mu}$$

, CO PRZYDAŁO SIĘ W RACHUNKU PONIŻSZYM

$$d(\underset{p}{\alpha\, dx^{\bar\mu}} \wedge \underset{q}{\beta\, dx^{\bar\nu}}) = d(\alpha\cdot\beta\, \underbrace{dx^{\bar\mu}\wedge dx^{\bar\nu}}_{\equiv:\, dx^{\bar\lambda}}) \equiv d(\alpha\cdot\beta)\wedge dx^{\bar\lambda}$$

$$= (\alpha\, d\beta + \beta\, d\alpha)\wedge dx^{\bar\lambda} \equiv \alpha\, d\beta\wedge dx^{\bar\mu}\wedge dx^{\bar\nu} + \beta\, d\alpha\wedge dx^{\bar\mu}\wedge dx^{\bar\nu}$$

łączność $\wedge$ p czynników dx^{μ_i}

$$= (d\alpha\wedge dx^{\bar\mu})\wedge(\beta\, dx^{\bar\nu}) + (-1)^p(\alpha\, dx^{\bar\mu})\wedge(d\beta\wedge dx^{\bar\nu}) \equiv d(\alpha\, dx^{\bar\mu})\wedge(\beta\, dx^{\bar\nu}) + (-1)^p(\alpha\, dx^{\bar\mu})\wedge d(\beta\, dx^{\bar\nu})$$

WOBEC ADDYTYWNOŚCI d (BĘDĄCEJ POCHODNĄ (i)) OTRZYMUJEMY TEZĘ (ii).

(iii) NAJPIERW SPRAWDZAMY DLA $p=0$:

$$d_1(d_0 f)\big|_{\mathcal{O}} = d_1(\partial_\mu f\, dx^\mu) = d(\partial_\mu f)\wedge dx^\mu = \partial_\nu \partial_\mu f\, dx^\nu \wedge dx^\mu$$

$$= (\partial_\nu\partial_\mu f - \partial_\mu \partial_\nu f)\, dx^\nu \overset{<}{\wedge} dx^\mu \equiv 0 \quad (\text{DLA } f \in C^\infty(\mathcal{O},\mathbb{R})),$$

A NASTĘPNIE DLA $\omega_{\bar\mu}\, dx^{\bar\mu} \in \Omega^p(\mathcal{O})$:

$$d_{p+1}(d_p \omega) \equiv d_{p+1}(d\omega_{\bar\mu}\wedge dx^{\bar\mu}) \overset{(ii)}{=} d_1(d\omega_{\bar\mu})\wedge dx^{\bar\mu} \overset{(-1)^1}{-} d\omega_{\bar\mu}\wedge d_p(dx^{\bar\mu})$$

$$= -d\omega_{\bar\mu}\wedge d_p(dx^{\bar\mu}), \quad \text{ALE}$$

$$d_p(dx^{\bar\mu}) \equiv d_p(dx^{\mu_1}\wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}) = \overbrace{d_1(dx^{\mu_1})}^{=0}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_p} + \ldots +$$

$$+ (-1)^{p-1} dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_{p-1}}\wedge \overbrace{d_1(dx^{\mu_p})}^{=0} = 0,$$

SKĄD TEZA. $\square$

NA PODSTAWIE POWYŻSZEGO MOŻEMY WYPOWIEDZIEĆ

Tw. 14. NA $M \in \mathrm{Man}^\infty$ ISTNIEJE JEDNOZNACZNIE OKREŚLONE ODWZOROWANIE

$$d_\bullet : \Omega^\bullet(M) \circlearrowleft \quad , \quad d_p : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$$

$p \in \mathbb{N}$

O WŁASNOŚCIACH

(i) $d_p \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\Omega^p(M), \Omega^{p+1}(M)\right)$

(ii) $d_{p+q}(\underset{p}{\omega} \wedge \underset{q}{\eta}) = (d_p \underset{p}{\omega}) \wedge \underset{q}{\eta} + (-1)^p \underset{p}{\omega} \wedge d_q \underset{q}{\eta} \quad \forall p, q \in \mathbb{N}$

(iii) $d_{p+1} \circ d_p = 0$

(iv) $\forall f \in \Omega^0(M) \equiv C^\infty(M, \mathbb{R}) \; \forall V \in \Gamma(TM) : \; df(V) = V(f)$

ZADANE LOKALNIE JAK W $\ast\ast\ast$ NA STR. 135.

D: CELEM WYKAZANIA LOKALNEJ JEDNOZNACZNOŚCI pH-FORMY $d_p\omega$, $\omega\in\Omega^p(M)$ – O ILE TAKOWA ISTNIEJE – PRZEKONAMY SIĘ NAJSAMPIERW, ŻE $d_p\omega$ ZALEŻY OD ω LOKALNIE, PRZEZ CO ROZUMIEMY, ŻE

$$\forall \omega_1,\omega_2\in\Omega^p(M):\left(\left(\exists\, \mathcal{O}\in\mathcal{T}(M):\ \omega_2\restriction_{\mathcal{O}}=\omega_1\restriction_{\mathcal{O}}\right)\Longrightarrow d_p\omega_2\restriction_{\mathcal{O}}=d_p\omega_1\restriction_{\mathcal{O}}\right)$$

ISTOTNIE, DLA $\omega_{12}:=\omega_2-\omega_1$ $(\omega_{12}\restriction_{\mathcal{O}}=0)$ MOŻEMY – NA PEWNYM OTOCZENIU $\mathcal{O}_m\subset\mathcal{O}$ DOWOLNEGO PUNKTU $m\in\mathcal{O}$ – WYBRAĆ FUNKCJĘ UKURU $\mathcal{X}_m$, $\mathrm{supp}(\mathcal{X}_m)\subset\mathcal{O}\wedge\mathcal{X}_m(m)=1$, A WTEDY $\widetilde{\mathcal{X}}_m\cdot\omega_{12}=0$ DLA DOWOLNEGO PRZEDŁUŻENIA $\widetilde{\mathcal{X}}_m\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ FUNKCJI $\mathcal{X}_m$ PRZEZ 0.

JEST ZATEM $\quad 0=d(0)=d(\widetilde{\mathcal{X}}_m\cdot\omega_{12})=d\widetilde{\mathcal{X}}_m\wedge\omega_{12}+\widetilde{\mathcal{X}}_m\cdot d\omega_{12}$,

CO W M DAJE

$$\Theta = \Theta(m) = d\,\tilde{\mathcal{I}}_m(m) \wedge \omega_{12}(m) \overset{=0}{} + \tilde{\mathcal{I}}_m(m)\, d\omega_{12}(m) = \tilde{\mathcal{I}}_m(m)\, d\omega_{12}(m)$$

$$\equiv \mathcal{I}_m(m)\, d\omega_{12}(m) = d\omega_{12}(m)$$

WNIOSEK: JEŚLI DOKONAMY DOWOLNEGO GŁADKIEGO PRZEDŁUŻENIA LOKALNEJ PREZENTACJI $\omega\restriction_{\mathcal{O}} = \omega_{\bar{\mu}}\, dx^{\bar{\mu}}$ p-FORMY $\omega \in \Omega^p(M)$ Z DZIEDZINY MAPY LOKALNEJ $\kappa = (x^\mu) : \mathcal{O} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{\times D}$ (ANALOGICZNIE JAK NA STR. 188.) : $\tilde{\omega} := \tilde{\omega}_{\bar{\mu}}\, \tilde{dx}^{\bar{\mu}}$, TO $(d_p \tilde{\omega})\restriction_{\mathcal{O}} = d_p(\tilde{\omega}\restriction_{\mathcal{O}}) = d_p(\omega\restriction_{\mathcal{O}})$ BĘDZIE ZADANA PRZEZ RÓŻNICZKOWANIE MODELOWE $d_p(\omega\restriction_{\mathcal{O}})$ PREZENTACJI LOKALNEJ $\omega\restriction_{\mathcal{O}}$ I POZOSTANIE UPEWNIĆ SIĘ, ŻE TAKIE LOKALNE DEFINICJE „ZSZYWAJĄ SIĘ" (W SENSIE SNOPOWYM)

DO OBIEKTU GLOBALNEGO, TJ. – FORMALNIE – ŻE LOKALNE CIĘCIA $d_p(\omega\restriction_{\mathcal{O}})$ SNOPA Ω^p SĄ OGRANICZENIAMI (DO $\mathcal{O}$) CIĘCIA GLOBALNEGO, KTÓRE JEST POŻĄDANYM $d_p\omega$.

ZDEFINIUJMY PRZETO $d_p\omega\restriction_{\mathcal{O}_i} := \kappa_i^* d_p((\kappa_i^{-1})^*\omega\restriction_{\mathcal{U}_i})$

RÓŻNICZKOWANIE MODELOWE NA $\Omega^p(\mathcal{U}_i)$

SPRAWDZAMY – NA $\mathcal{O}_{ij} \equiv \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j \neq \emptyset$ – DLA ATLASU $\kappa_i : \mathcal{O}_i \to \mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^{\times D},\ i \in I$

$$d_p\omega\restriction_{\mathcal{O}_{ij}} = \kappa_i^* d_p((\kappa_i^{-1})^*\omega\restriction_{\mathcal{U}_i})\restriction_{\mathcal{O}_{ij}} \equiv \kappa_i^* d_p\big((\kappa_i^{-1})^*\omega\restriction_{\kappa_i(\mathcal{O}_{ij})}\big)$$

ALE TEŻ

$$= \kappa_j^* d_p((\kappa_j^{-1})^*\omega\restriction_{\mathcal{U}_j})\restriction_{\mathcal{O}_{ij}} \equiv (\kappa_j \circ \kappa_i^{-1} \circ \kappa_i)^* d_p\big((\kappa_j^{-1})^*\omega\restriction_{\kappa_j(\mathcal{O}_{ij})}\big)$$

Stw. 33.(iv)

$$= \kappa_i^*(\kappa_j \circ \kappa_i^{-1})^* d_p\big((\kappa_j^{-1})^*\omega\restriction_{\kappa_j(\mathcal{O}_{ij})}\big) = \kappa_i^* d_p\big((\kappa_j \circ \kappa_i^{-1})^*((\kappa_j^{-1})^*\omega\restriction_{\kappa_j(\mathcal{O}_{ij})})\big)$$

TO JEST $\kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \xrightarrow[C^\infty]{\cong} \kappa_j(\mathcal{O}_{ij})$

$$= \kappa_i^* d_p\big((\kappa_i^{-1})^*\omega\restriction_{\kappa_i(\mathcal{O}_{ij})}\big),$$

!

202

CO KOŃCZY DOWÓD, GDYŻ (i) - (iv) SĄ SPEŁNIONE LOKALNIE W ŚWIETLE Stw. 33., A TYLKO LOKALNIE POTRZEBUJEMY JE SPRAWDZAĆ. $\square$

BEZ TRUDU SPRAWDZAMY TAKŻE

Stw. 34. $\forall M_1, M_2 \in \mathrm{Man}^\infty\ \forall f \in C^\infty(M_1, M_2)\ \forall \omega \in \Omega^p(M_2): f^* d_p \omega = d_p f^* \omega$

D: WOBEC GŁADKOŚCI OBU p-FORM: $f^* d_p \omega$ i $d_p f^* \omega$ WYSTARCZY PRZEPROWADZIĆ DOWÓD LOKALNIE, TJ. W DZIEDZINACH MAP:

$\kappa: \mathcal{O}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}^{\times D_1}$ NA OTOCZENIU $m \in M_1$ i $\tilde{\kappa}: \mathcal{O}_2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^{\times D_2}$ NA OTOCZENIU $f(m)$.

ZACHODZI

$$f^* d_p \omega \restriction_{\mathcal{O}_1 \cap f^{-1}(\mathcal{O}_2)} \equiv f^*\left(\tilde{\kappa}^* d_p\left(\tilde{\kappa}^{-1*} \omega\restriction_{\mathcal{U}_2}\right)\right) \equiv \kappa^*\left(\tilde{\kappa} \circ f \circ \kappa^{-1}\right)^* d_p\left(\tilde{\kappa}^{-1*} \omega\restriction_{\mathcal{U}_2}\right)$$

$$\overset{\text{Stw. 33.(iv)}}{=} \kappa^* d_p\left(\left(f \circ \kappa^{-1}\right)^* \omega\restriction_{\mathcal{U}_1}\right) = \kappa^* d_p\left(\left(\kappa^{-1}\right)^*\left(f^* \omega\right)\restriction_{\mathcal{U}_1}\right) \equiv d_p\left(f^* \omega\right)\restriction_{\mathcal{O}_1 \cap f^{-1}(\mathcal{O}_2)} \quad \square$$

NA KONIEC WYKAŻEMY ISTNIENIE PROSTEGO ZWIĄZKU MIĘDZY RÓŻNICZKOWANIAMI : $d_\bullet$ NA $\Omega^\bullet(M)$ i $[\cdot,\cdot]_{TM}$ NA $\Gamma(TM)$.

Tw. 15. $\forall \omega \in \Omega^p(M)\ \forall V_1, \ldots, V_{p+1} \in \Gamma(TM)$:

$$(d_p\omega)(V_1,\ldots,V_{p+1}) = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k-1} V_k\big(\omega(V_1,\ldots,\widehat{k},\ldots,V_{p+1})\big) + \sum_{1\leq l<m\leq p+1} (-1)^{l+m}\,\omega\big([V_l,V_m]_{TM}, V_1,\ldots,\widehat{l},\ldots,\widehat{m},\ldots,V_{p+1}\big)$$

D: w świetle Stw. 31. NIETRYWIALNYM PUNKTEM WYJŚCIA DO TRYWIALNEGO (CZYSTO KOMBINATORYCZNEGO) DOWODU (KTÓRY MOŻNA, WIĘC WARTO PRZEPROWADZIĆ LOKALNIE – DLA $\omega = \alpha\, dx^{\overline{\mu}}$ i $V_a = \partial_{\mu_a}$), KTÓRY POZOSTAWIAMY JAKO ĆWICZENIE RACHUNKOWE, JEST SPRAWDZENIE $C^\infty(M,\mathbb{R})$-LINIOWEJ ZALEŻNOŚCI WYRAŻENIA PO PRAWEJ STRONIE ZNAKU RÓWNOŚCI OD ARGUMENTÓW $V_a,\ a\in\overline{1,p+1}$. WOBEC JAWNIE SKOŃCZONEGO CHARAKTERU TEJ ZALEŻNOŚCI DOWÓD WYSTARCZY PRZEPROWADZIĆ DLA $f\triangleright V_1$, CO CZYNIMY PONIŻEJ...

$$\mathrm{RHS}(f \triangleright V_1, V_2, \dots, V_{p+1}) - f\,\mathrm{RHS}(V_1, V_2, \dots, V_{p+1})$$

$$= (f \triangleright V_1)\big(\omega(V_2, \dots, V_{p+1})\big) - f\Big(V_1\big(\omega(V_2, \dots, V_{p+1})\big)\Big) \equiv 0$$

$$+ \sum_{k=2}^{p+1} (-1)^{k-1} \Big[V_k\big(\omega(f \triangleright V_1, V_2, \dots, \hat{k}, \dots, V_{p+1})\big) - f\, V_k\big(\omega(V_1, \dots, \hat{k}, \dots, V_{p+1})\big) \Big] \equiv 0$$

$$+ \sum_{2 \le l < m \le p+1} (-1)^{l+m} \Big[\omega\big([V_l, V_m]_{TM}, f \triangleright V_1, V_2, \dots, \hat{l}, \hat{m}, \dots, V_{p+1}\big) - f\, \omega\big([V_l, V_m]_{TM}, V_1, \dots, \hat{l}, \hat{m}, \dots, V_{p+1}\big) \Big]$$

$$+ \sum_{1 = l < m \le p+1} (-1)^{1+m} \Big[\omega\big([f \triangleright V_1, V_m]_{TM}, V_2, \dots, \hat{m}, \dots, V_{p+1}\big) - f\, \omega\big([V_1, V_m]_{TM}, V_2, \dots, \hat{m}, \dots, V_{p+1}\big) \Big]$$

Üb. 19(iv)

$$= \sum_{k=2}^{p+1} (-1)^{k-1} V_k(f) \cdot \omega(V_1, \dots, \hat{k}, \dots, V_{p+1}) + \sum_{m=2}^{p+1} (-1)^{m+1} \omega\big(-V_m(f) \triangleright V_1, V_2, \dots, \hat{m}, \dots, V_{p+1}\big)$$

Üb. 31.

$$= \sum_{k=2}^{p+1} (-1)^{k-1} V_k(f) \cdot \omega(V_1, \dots, \hat{k}, \dots, V_{p+1}) - \sum_{m=2}^{p+1} (-1)^{m+1} V_m(f)\, \omega(V_1, \dots, \hat{m}, \dots, V_{p+1}) = 0 \quad \square$$

STRUKTURA $(\Omega^{\bullet}(M), \wedge, d_{\bullet})$ JEST PRZYKŁADEM ABSTRAKCJI OPISANEJ W

Def. 29. ALGEBRA RÓŻNICZKOWA Z $\mathbb{Z}$-GRADACJĄ NAD PIERŚCIENIEM PRZEMIENNYM R TO TRÓJKA $(\mathcal{A}, m_{\mathcal{A}}, D)$ ZŁOŻONA Z "dg-ALGEBRA nad R"

(*) R-MODUŁU $\mathcal{A}$ Z $\mathbb{Z}$-GRADACJĄ, CZYLI ROZKŁADEM NA SUMĘ PROSTĄ PODMODUŁÓW $\mathcal{A} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_n$;

(**) DWU-R-LINIOWEJ OPERACJI BINARNEJ $\overset{\cdot_{\mathcal{A}}}{\overset{\shortparallel}{m_{\mathcal{A}}}} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ ZGODNEJ Z $\mathbb{Z}$-GRADACJĄ W SENSIE: $m_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_m, \mathcal{A}_n) \subset \mathcal{A}_{m+n}$

(***) $D \in \mathrm{End}_R(\mathcal{A})$ O WŁASNOŚCIACH

(i) $D \circ D = 0$

GRADOWANA TOŻSAMOŚĆ LEIBNIZA

(ii) $\forall a_k \in \mathcal{A}_{n_k}, k \in \{1,2\} : D(a_1 \cdot_{\mathcal{A}} a_2) = (Da_1) \cdot_{\mathcal{A}} a_2 + (-1)^{n_1} a_1 \cdot_{\mathcal{A}} (Da_2).$

JEŚLI PONADTO $m_{\mathcal{A}}$ SPEŁNIA TOŻSAMOŚCI

$$\forall a_k \in \mathcal{A}_{n_k} : a_1 \cdot_{\mathcal{A}} a_2 = (-1)^{n_1 n_2} a_2 \cdot_{\mathcal{A}} a_1$$

dg-ALGEBRĘ $(\mathcal{A}, m_{\mathcal{A}}, D)$ NAZYWAMY PRZEMIENNĄ.

W ŚWIETLE NASZYCH USTALEŃ $(\Omega^\bullet(M), \wedge, d_\bullet)$ JEST ZATEM PRZEMIENNĄ dg-ALGEBRĄ nad $\mathbb{R}$.

INNYCH, MNIEJ OCZYWISTYCH PRZYKŁADÓW STRUKTUR TEGO RODZAJU DOSTARCZA M.IN. STUDIUM DYNAMIKI ROZCIĄGŁYCH ROZKŁADÓW ŁADUNKU TOPOLOGICZNEGO W ZEWNĘTRZNYCH POLACH ŁADUNKOWYCH (NIELINIOWE σ-MODELE I ICH WARIANTY SUPERGEOMETRYCZNE).