GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA

XI ; XII MORE OF THE SAME, WITH THE METRIC,
6/5 13/5 & JUST A LIL' BIT
OF
DE RHAM & BEILINSON-DELIGNE COHOMOLOGY

2025/26

CZĘŚĆ XI

KOLEJNYM ETAPEM STUDIUM ALGEBRY ZEWNĘTRZNEJ $\Omega^{\cdot}(M)$ JEST ZBADANIE RELACJI POMIĘDZY WPROWADZONYM UPRZEDNIO RÓŻNICZKOWANIEM GEOMETRYCZNYM $\mathcal{L}_V$, $V\in\Gamma(TM)$ (POCHODNA LIEGO) A SKŁADOWYMI STRUKTURY $(\Omega^{\cdot}(M),\wedge,d_{\cdot})$.

Stw. 35. (i) $\forall V\in\Gamma(TM)\ \forall \omega\in\Omega^p(M),\ \eta\in\Omega^q(M):\ \mathcal{L}_V(\omega\wedge\eta)=(\mathcal{L}_V\omega)\wedge\eta+\omega\wedge(\mathcal{L}_V\eta)$

(ii) ZACHODZI MAGICZNA FORMUŁA CARTANA:

$$\mathcal{L}_V\big|_{\Omega^{\cdot}(M)}=\iota_V\circ d_{\cdot}+d_{\cdot-1}\circ\iota_V\,,\quad \text{GDZIE}\quad \iota_V\omega:=\omega(V,\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)$$

STOSOWANE NOTACJE $\equiv V\lrcorner\,\omega$

(iii) $[\mathcal{L}_V,d_{\cdot}]=0$

D: (i) OCZYWISTE. (TOŻSAMOŚĆ ODZIEDZICZONA PO $\Gamma(T^{(k,l)}M)$, PATRZ: Stw.30(ii).)

(ii) DOWÓD MA CHARAKTER INDUKCYJNY WZGLĘDEM STOPNIA FORMY.

$p=0$: JEST $\iota_V f\equiv 0$, ZATEM $\iota_V\circ d_0(f)=\iota_V(df)=V(f)$

Stw.30(i) $\rightarrow\ =\mathcal{L}_V f$.

ZAŁÓŻMY, ŻE TEZA ZOSTAŁA UDOWODNIONA DLA $p \leq p_0$, I ROZWAŻMY $\omega \in \Omega^{p_0+1}(M)$ O PREZENTACJI LOKALNEJ

$$\omega|_{\mathcal{O}} = \omega_{\bar{\mu}}\, dx^{\bar{\mu}} \equiv dx^{\mu_1} \wedge \omega_{\mu_1 \ldots \mu_{p_0+1}}\, dx^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_{p_0+1}}$$

WOBEC POWYŻSZEGO $\kappa = (x^\mu) : \mathcal{O} \to \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{\times D}$

JEST JASNYM, ŻE Z UWAGI NA ADDYTYWNY CHARAKTER OPERATORÓW PO OBU STRONACH DOWODZONEJ RÓWNOŚCI WYSTARCZY DOKAZAĆ JEJ PRAWDZIWOŚĆ DLA (p_0+1)-FORM SZCZEGÓLNEJ POSTACI

$$df \wedge \underline{\omega}, \quad \underline{\omega} \in \Omega^{p_0}(M).$$

OBLICZAMY WPROST

$$(\iota_V \circ d_{p_0+1} + d_{p_0} \circ \iota_V)(df \wedge \underline{\omega}) \overset{\text{Tw. 14.(ii)}}{=} \iota_V\left(d_1 \circ d_0(f) \wedge \underline{\omega} - df \wedge d_{p_0} \underline{\omega}\right) + d_{p_0}\left(df(V) \triangleright \underline{\omega} - df \wedge \iota_V \underline{\omega}\right)$$

$$= -df(V) \triangleright d_{p_0} \underline{\omega} + df \wedge \iota_V d_{p_0} \underline{\omega} + d\left(df(V)\right) \triangleright \underline{\omega} + df(V) \triangleright d_{p_0} \underline{\omega} - d_1 \circ d_0(f) \wedge \iota_V \underline{\omega} + df \wedge d_{p_0-1}(\iota_V \underline{\omega})$$

PRZY CZYM PO DRODZE WYKORZYSTALIŚMY

Lemat 5. $\forall (\omega,\eta)\in\Omega^p(M)\times\Omega^q(M)\ \forall V\in\Gamma(TM):\ \iota_V(\omega\wedge\eta)=(\iota_V\omega)\wedge\eta+(-1)^p\,\omega\wedge(\iota_V\eta)$

D: PROSTE ĆWICZENIE DOMOWE.

PO DOKONANIU STOSOWNEGO SKRÓCENIA I WYKORZYSTANIU ZAŁOŻENIA INDUKCYJNEGO DOSTAJEMY

Stw.30(i)

$$\left(\iota_V\circ d_{p_0+1}+d_{p_0}\circ\iota_V\right)(df\wedge\underline{\omega})=df\wedge\mathcal{L}_V\underline{\omega}+d(V(f))\wedge\underline{\omega}=df\wedge\mathcal{L}_V\underline{\omega}+d(\mathcal{L}_V f)\wedge\underline{\omega}$$

Cor. 3 Stw.35.(i)

$$=\mathcal{L}_V(df)\wedge\underline{\omega}+df\wedge\mathcal{L}_V\underline{\omega}=\mathcal{L}_V(df\wedge\underline{\omega}),$$

CO DAJE DOWODZONĄ TEZĘ PO UWZGLĘDNIENIU RZECZONEJ ADDYTYWNOŚCI.

(ii) KORZYSTAJĄC ZE Stw.35.(ii), DOSTAJEMY $\forall \omega\in\Omega^p(M)$

$$\mathcal{L}_V d_p\omega=\iota_V(d_{p+1}\circ d_p\omega)+d_p\circ\iota_V(d_p\omega)=d_p(\iota_V\circ d_p\omega)_{=0}$$

$$=d_p(\mathcal{L}_V\omega)-d_p(d_{p-1}\circ\iota_V\omega)\equiv d(\mathcal{L}_V\omega)-(d_p\circ d_{p-1})\circ\iota_V\omega=d(\mathcal{L}_V\omega).\ \square$$

210

OBECNOŚĆ METRYKI NA ROZMAITOŚCI INDUKUJE DODATKOWĄ, CIEKAWĄ STRUKTURĘ NA $\Omega^\bullet(M)$. ISTOTNIE, OTO MAMY

Stw. 36. NA ZORIENTOWANEJ ROZMAITOŚCI METRYCZNEJ (M,g) WYMIARU D ISTNIEJE KANONICZNY IZOMORFIZM

$$*_g^p : \Omega^p(M) \xrightarrow{\cong} \Omega^{D-p}(M),$$

ZWANY IZOMORFIZMEM HODGE'A, KTÓRY W LOKALNEJ PREZENTACJI WSPÓŁRZĘDNIOWEJ PRZYBIERA POSTAĆ

$$*_g^p \Big(\underbrace{\tfrac{1}{p!}\,\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}\,dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}}_{\equiv\ \omega_{\vec\mu}\,dx^{\vec\mu}}\Big)$$

$$= \frac{1}{p!(D-p)!}\sqrt{|\det[g]_{\partial_\mu}|}\;\varepsilon_{\lambda_1\ldots\lambda_p\nu_1\ldots\nu_{D-p}}(g^{-1})^{\lambda_1\mu_1}\cdots(g^{-1})^{\lambda_p\mu_p}\,\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}\,dx^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\nu_{D-p}},$$

W KTÓRYM ZAPISIE $[g]_{\partial_\mu} \equiv \big(g(\partial_\mu,\partial_\nu)\big)_{\mu,\nu\in\overline{1,D}}$ JEST MACIERZĄ GRAMA DLA BAZY WSPÓŁRZĘDNIOWEJ $\{\partial_\mu\}_{\mu\in\overline{1,D}}$ i $g^{-1}\in\Gamma(S^2TM)$ JEST METRYKĄ NA T^*M O PREZENTACJI (2.1)

WSPÓŁRZĘDNIOWEJ $(g^{-1})^{\mu\nu}\partial_\mu \otimes \partial_\nu$, $\left((g^{-1})^{\mu\nu}\right)^{\mu,\nu\in\overline{1,D}} \equiv \left([g]_{\partial_\mu}\right)^{-1}$, A

$$\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_D} = \begin{cases} \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & D \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_D \end{pmatrix}, & \text{iLEKROĆ } \{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_D\} = \overline{1,D} \\ 0 & \text{W PRZECIWNYM RAZIE} \end{cases}$$

JEST TZW. SYMBOLEM LEVI-CIVITA'Y.

D: ROZWAŻMY LOKALNIE GŁADKIE $(D-p)$-FORMY $*^p_g(\omega_{\vec\mu}\, dx^{\vec\mu})$ i $*^p_g(\tilde\omega_{\vec I}\, dy^{\vec I})$ POCHODZĄCE Z DZIEDZIN DWÓCH LOKALNYCH MAP: $\kappa = (x^\mu) : \mathcal{O} \to \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{\times D}$ i $\tilde\kappa = (y^\alpha) : \tilde{\mathcal{O}} \to \tilde{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^{\times D}$ O NIEPUSTYM PRZEKRYCIU $\mathcal{O} \cap \tilde{\mathcal{O}} \neq \emptyset$, NA KTÓRYM MAMY TRANSFORMACJĘ WSPÓŁRZĘDNIOWĄ $y^\alpha(x^\mu) \leftarrow \tilde\kappa \circ \kappa^{-1}(\kappa(\cdot))$.

W TEJ OBRAZIE OTRZYMUJEMY

TUTAJ REPREZENTUJE TRANSFORMACJĘ! $\longrightarrow$ $(\tilde\kappa\circ\kappa^{-1})^*\left(*^p_g\,\tilde\omega_{\vec I}\, dy^{\vec I}\right)$

$$= \frac{1}{p(D-p)!}\sqrt{\left|\det(\tilde\kappa\circ\kappa^{-1})^*[g]_{\partial_\alpha}\right|}\,\varepsilon_{\beta_1\cdots\beta_p\gamma_1\cdots\gamma_{D-p}}(\tilde\kappa\circ\kappa^{-1})^*(\tilde g^{-1})^{\beta_1\alpha_1}\cdots(\tilde\kappa\circ\kappa^{-1})^*(\tilde g^{-1})^{\beta_p\alpha_p}\,\tilde\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_p}(y(x))\, dy^{\gamma_1}(x)\wedge\cdots\wedge dy^{\gamma_{D-p}}(x),$$

(212)

GDZIE $(\tilde{g}^{-1})^{\alpha\beta}\partial_\alpha \wedge \partial_\beta$ JEST LOKALNĄ PREZENTACJĄ g^{-1} WE WSPÓŁRZĘDNYCH $\{y^\alpha\}^{\alpha\in\overline{1,D}}$. WOBEC TEGO OTRZYMAMY $(\tilde{g}^{-1})^{\alpha\beta}(y(x)) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}(g^{-1})^{\mu\nu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}(x)$, A PONIEWAŻ TAKŻE $\tilde{g}_{\alpha\beta}(y(x)) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} g_{\mu\nu}(x)$ ORAZ $\tilde{\omega}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(y(x)) = \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial y^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial y^{\alpha_p}}\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}(x)$,

PRZETO $(\tilde{\kappa}\circ\kappa^{-1})^*(*_g^p\tilde{\omega}_I dy^I)$

$$= \frac{1}{p!(D-p)!}\sqrt{\left|\left(\det\frac{\partial(x)}{\partial(y)}\right)^2\cdot\det[g]_{\partial_\mu}\right|}\,\epsilon_{\beta_1\ldots\beta_p\gamma_1\ldots\gamma_{D-p}}\frac{\partial y^{\beta_1}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial y^{\beta_p}}{\partial x^{\mu_p}}(g^{-1})^{\mu_1\nu_1}\cdots(g^{-1})^{\mu_p\nu_p}\frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial y^{\alpha_p}}{\partial x^{\nu_p}}$$

$$\cdot\frac{\partial x^{\lambda_1}}{\partial y^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial x^{\lambda_p}}{\partial y^{\alpha_p}}\omega_{\lambda_1\ldots\lambda_p}\frac{\partial y^{\gamma_1}}{\partial x^{\kappa_1}}\cdots\frac{\partial y^{\gamma_{D-p}}}{\partial x^{\kappa_{D-p}}}dx^{\kappa_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\kappa_{D-p}}.$$

WYKORZYSTUJĄC WZAJEMNĄ ODWROTNOŚĆ $\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\right)^{\alpha\in\overline{1,D}}_{\mu\in\overline{1,D}}$ I $\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\right)^{\mu\in\overline{1,D}}_{\alpha\in\overline{1,D}}$, REDUKUJEMY POWYŻSZE WYRAŻENIE DO POSTACI

$$(\tilde{\kappa}\circ\kappa^{-1})^*\left(*_g^p\,\tilde{\omega}_I\,dy^I\right)$$

$$= \frac{1}{p!(D-p)!}\sqrt{|\det[g]_{\partial_\mu}|}\cdot\left|\det\frac{\partial(x)}{\partial(y)}\right|\epsilon_{\rho_1\ldots\rho_p\gamma_1\ldots\gamma_{D-p}}\frac{\partial y^{\rho_1}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial y^{\rho_p}}{\partial x^{\mu_p}}\cdot\frac{\partial y^{\gamma_1}}{\partial x^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial y^{\gamma_{D-p}}}{\partial x^{\nu_{D-p}}}\cdot(g^{-1})^{\mu_1\lambda_1}\cdots(g^{-1})^{\mu_p\lambda_p}$$

$$\cdot\,\omega_{\lambda_1\ldots\lambda_p}\,dx^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\nu_{D-p}}$$

$$= \frac{1}{p!(D-p)!}\sqrt{|\det[g]_{\partial_\mu}|}\cdot\left|\det\frac{\partial(x)}{\partial(y)}\right|\sum_{\sigma\in S_D}\mathrm{sign}(\sigma)\frac{\partial y^{\sigma(1)}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial y^{\sigma(D)}}{\partial x^{\mu_D}}(g^{-1})^{\mu_1\lambda_1}\cdots(g^{-1})^{\mu_p\lambda_p}\,\omega_{\lambda_1\ldots\lambda_p}\,dx^{\mu_{p+1}}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_D}$$

ZAUWAŻMY, ŻE ILEKROĆ POŚRÓD WYSUMOWANYCH INDEKSÓW $\mu_1,\ldots,\mu_D$ POJAWIA SIĘ POWTÓRZENIE, NP. $\mu_i=\mu_j$, $i\neq j$, TO WÓWCZAS WKŁADY DO SUMY $\sum_{\sigma\in S_D}$ POCHODZĄCE OD σ I $(ij)\circ\sigma$ ZNOSZĄ SIĘ WZAJEMNIE Z RACJI $\mathrm{sign}((ij)\circ\sigma)=-\mathrm{sign}(\sigma)$, A ZATEM $\exists\,\mu\in S_D:(\mu_1,\ldots,\mu_D)=\mu(1,\ldots,D)$, CZYLI (EINSTEINOWSKIE) SUMOWANIE PO $\mu_1,\ldots,\mu_D$ JEST SPROWADZA SIĘ DO $\sum_{\mu\in S_D}$.

Ż14

WOBEC TEGO JEDNAK SUMOWANIE $\sum_{\varrho \in G_D}$ MOŻEMY – DLA USTALONEGO $\mu \in G_D$ – ZASTĄPIĆ SUMOWANIEM

PRZESTAWIAMY WYRAZY

$$\sum_{\varrho \in G_D} \operatorname{sign}(\varrho \circ \mu) \frac{\partial y^{\varrho\circ\mu(1)}}{\partial x^{\mu(1)}} \cdots \frac{\partial y^{\varrho\circ\mu(D)}}{\partial x^{\mu(D)}} \equiv \sum_{\varrho \in G_D} \operatorname{sign}(\varrho \circ \mu) \frac{\partial y^{\varrho(1)}}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial y^{\varrho(D)}}{\partial x^D}$$

$$= \operatorname{sign}(\mu) \sum_{\varrho \in G_D} \operatorname{sign}(\varrho) \frac{\partial y^{\varrho(1)}}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial y^{\varrho(D)}}{\partial x^D} \equiv \operatorname{sign}(\mu) \det \frac{\partial(y)}{\partial(x)}$$

OSTATECZNIE WIĘC MOŻEMY PRZEPISAĆ

$$(\tilde{K} \circ K^{-1})^* \left(*_g^p \tilde{\omega}_{\bar{I}} \, dy^{\bar{I}} \right)$$

$$= \frac{1}{p!(D-p)!} \sqrt{|\det [g]_{\partial_\mu}|} \cdot \left| \det \frac{\partial(x)}{\partial(y)} \right| \cdot \det \frac{\partial(y)}{\partial(x)} \, \varepsilon_{\mu_1 \ldots \mu_D} (g^{-1})^{\mu_1 \lambda_1} \cdots (g^{-1})^{\mu_p \lambda_p} \omega_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} dx^{\mu_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_D}$$

$$\equiv \operatorname{sgn}\left(\det \frac{\partial(y)}{\partial(x)} \right) \cdot *_g^p \omega_{\bar{\mu}} \, dx^{\bar{\mu}}$$

KONSTATUJEMY PRZETO, ŻE $*_g^p\omega$ JEST $(D-p)$-FORMĄ, O ILE ATLAS NA M JEST ZORIENTOWANY, PRZEZ CO ROZUMIEMY $\mathrm{sgn}\left(\det\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right)$ DLA KAŻDEJ PARY ODWZOROWAŃ PRZEJŚCIA $\tilde{\kappa}\circ\kappa^{-1}$ J/W (W PRZECIWNYM RAZIE MAMY DO CZYNIENIA Z GĘSTOŚCIAMI...). $\square$

NA MARGINESIE POWYŻSZEGO DOWODU WARTO ODNOTOWAĆ NIEODZOWNOŚĆ MNOŻNIKA $\sqrt{|\det[g]_{\partial_\mu}|}$ W FORMULE NA $*_g^p$.

CIEKAWEJ INTERPRETACJI IZOMORFIZMU HODGE'A DOSTARCZA

Stw. 37. $\forall\, \omega_1,\omega_2\in\Omega^p(M):\ *_g^p\omega_1\wedge\omega_2 = *_g^p\omega_2\wedge\omega_1 = (-1)^s(\omega_1|\omega_2)\cdot\mathrm{Vol}(M,g)$,

GDZIE * $s\in\mathbb{N}$ JEST SKŁADOWĄ UJEMNĄ SYGNATURY $\mathrm{sign}\, g=(r,s)$,

** $\Omega^D(M)\ni\mathrm{Vol}(M,g)|_{\mathcal{O}} = \sqrt{|\det[g]_{\partial_\mu}|}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^D$ JEST METRYCZNĄ FORMĄ OBJĘTOŚCI NA M,

$\kappa=(x^\mu):\mathcal{O}\to U\subset\mathbb{R}^{\times D}$ – MAPA LOKALNA

$*** \; (\omega_1|\omega_2) \in C^\infty(M,\mathbb{R})$:

$$(\omega_1|\omega_2)\big|_O = \frac{1}{p!}\,\omega_{1\,\mu_1\ldots\mu_p}(g^{-1})^{\mu_1\nu_1}\ldots(g^{-1})^{\mu_p\nu_p}\omega_{2\,\nu_1\ldots\nu_p}$$

JEST ILOCZYNEM SKALARNYM p-FORM ω_1 I ω_2 INDUKOWANYM PRZEZ g.

D: PROSTA KOMBINATORYKA, J/W. (ĆWICZENIE)

OTO WIĘC $*_g^\bullet$ ZADAJE ILOCZYN SKALARNY NA $\Omega^\bullet(M)$.

IZOMORFIZM ODWROTNY DO $*_g^\bullet$ IDENTYFIKUJEMY W

Stw. 38. $$*_g^{D-p}\circ *_g^p = (-1)^{p(D-p)}\cdot(-1)^s\,\mathrm{id}_{\Omega^p(M)} \quad (s \text{ J/W})$$

D: PROSTA KOMBINATORYKA, J/W. (ĆWICZENIE)

PROSTEGO ZASTOSOWANIA $*_g^\bullet$ DOSTARCZA...

Def. 30. OPERATOR KODÓŻNICZKI NA (M,g) TO

$$\delta_\bullet : \Omega^\bullet(M) \circlearrowleft \text{ o ograniczeniach}$$

$$\delta_p = (-1)^p *_g^{D-p+1} \circ d_{D-p} \circ \left(*_g^{D-p}\right)^{-1} : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p-1}(M).$$

OPERATOR LAPLACE'A - DE RHAMA NA (M,g) TO

$$\Delta_\bullet = \delta_{\bullet+1} \circ d_\bullet + d_{\bullet+1} \circ \delta_\bullet : \Omega^\bullet(M) \circlearrowleft \text{ o ograniczeniach}$$

$$\Delta_p : \Omega^p(M) \circlearrowleft .$$

ICH KONSTRUKCJA JEST PUNKTEM WYJŚCIA DO TEORII HODGE'A, W SZCZEGÓLNOŚCI – DO TEORII FORM HARMONICZNYCH.

Stw. 39. $\delta_{p-1} \circ \delta_p = 0 \quad \forall p$

D: TRYWIALNA KONSEKWENCJA Stw. 38. i Tw. 14 (iii). $\square$

OPISANE POWYŻEJ STRUKTURY ABSTRAKCYJNE ZACHOWUJĄ W ELEMENTARNYM POLU SKOJARZENIOWYM I TYM SAMYM OSWAJAMY POPRZEZ NAZWANIE WYRÓŻNIONYCH PRZEZ METRYKĘ IZOMORFIZMÓW $TM \cong T^*M$.

Def. 31. IZOMORFIZMY MUZYCZNE NA (M,g) TO

(i) $\flat_g : \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(T^*M)$ (OPUSZCZANIE WSKAŹNIKA)

O PREZENTACJI LOKALNEJ $\flat_g(V^\mu \partial_\mu) = V^\mu g_{\mu\nu}\, dx^\nu$, OZN. $V^{\flat_g} \equiv \flat_g(V)$;

(ii) $\#_g : \Gamma(T^*M) \longrightarrow \Gamma(TM)$ (PODNOSZENIE WSKAŹNIKA)

O PREZENTACJI LOKALNEJ $\#_g(\omega_\mu dx^\mu) = \omega_\mu (g^{-1})^{\mu\nu} \partial_\nu$, OZN. $\omega^{\#_g} \equiv \#_g(\omega)$.

NB: STRUKTURA WSKAŹNIKOWA LOKALNYCH PREZENTACJI GWARANTUJE, ŻE MAMY DO CZYNIENIA Z LOKALNYMI PREZENTACJAMI TENSORÓW.

OTO BOWIEM MAMY UOGÓLNIENIA ZNAJOMYCH OPERACJI RÓŻNICZKOWYCH

Def. 32. NA ROZMAITOŚCI METRYCZNEJ (M,g)

(i) GRADIENT FUNKCJI TO ODWZOROWANIE

$$\mathrm{grad} : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \Gamma(TM),\quad f \longmapsto (df)^{\sharp_g}\ ;$$

(ii) DYWERGENCJA POLA WEKTOROWEGO TO ODWZOROWANIE

$$\mathrm{div} : \Gamma(TM) \to C^\infty(M,\mathbb{R}),\quad V \longmapsto \delta_1 V^{\flat_g}\ ;$$

(iii) W WYMIARZE $D=3$ ROTACJA POLA WEKTOROWEGO TO ODWZOROWANIE

$$\mathrm{rot} : \Gamma(TM) \circlearrowleft,\quad V \longmapsto \left(*_g^2\, d_1 V^{\flat_g}\right)^{\sharp_g}.$$

W PRZYPADKU MODELOWYM $(\mathbb{R}^{\times D}, \delta_E^{(D,0)})$ ODTWARZAMY ZNANE FORMUŁY: 220

$$\begin{cases} \mathrm{grad}\, f = \partial_i f\, \delta^{ij} \partial_j \\ \mathrm{div}\, V = \partial_i V^i \\ \mathrm{rot}\, V = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk}\, \partial_l V^j\, \delta^{il} \delta^{km} \partial_m \end{cases} \quad \text{NA} \quad \left(\mathbb{R}^{\times 3}, \delta_E^{(3,0)}\right).$$

NAWET W TEJ PROSTEJ SYTUACJI GEOMETRYCZNEJ POWYŻSZE FORMUŁY OKAZUJĄ SIĘ NADER PRZYDATNE, KIEDY UŻYWAMY ICH – W DUCHU UWAGI ZE STR. 192. – DO REKONSTRUKCJI OPERATORÓW grad, div i rot WE WSPÓŁRZĘDNYCH KRZYWOLINIOWYCH NA $\mathbb{R}^{\times D}$, NP. ZAADAPTOWANYCH DO SYMETRII ZAGADNIENIA FIZYCZNEGO. W POSZUKIWANIU INNYCH, GŁĘBSZYCH ZASTOSOWAŃ FIZYKALNYCH PRZYJRZYMY SIĘ TERAZ BARDZIEJ WNIKLIWIE STRUKTURZE $(\Omega^\bullet(M), \wedge, d.)$.

TYTUŁEM PRZYGOTOWANIA GRUNTU POD DYSKUSJĘ FIZYKALNĄ ROZWAŻMY CIĄG GRUP PRZEMIENNYCH

$$C^{\bullet}_{dR}(M) := \Omega^{\bullet}(M) \;:\; \mathbb{Z} \to \mathbf{AbGrp}\,,\; n \longmapsto \Omega^n(M)\,,$$

(PRZY CZYM KŁADZIEMY $C^n_{dR}(M) \equiv 0$ DLA $n \in -\mathbb{N}_{>0} \cup \mathbb{N}_{>\dim M}$),

A WRAZ Z NIM – CIĄG HOMOMORFIZMÓW JE ŁĄCZĄCYCH:

$$\ldots \xrightarrow{d_{n-1}} C^n_{dR}(M) \xrightarrow{d_n} C^{n+1}_{dR}(M) \xrightarrow{d_{n+1}} \ldots$$

O WŁASNOŚCI STRUKTURALNEJ

$$d_{n+1} \circ d_n = 0\,,$$

Z KTÓREJ WYPROWADZAMY $\mathrm{Ker}\, d_{n+1} \supset \mathrm{Im}\, d_n$.

ZDEFINIUJMY PODGRUPY

Def. 33. $\mathcal{Z}^n_{dR}(M) := \operatorname{Ker} d_n$ n-KOCYKLE DE RHAMA (n-FORMY ZAMKNIĘTE)

$\cup$

$B^n_{dR}(M) := \operatorname{Im} d_{n-1}$ n-KOBRZEGI DE RHAMA (n-FORMY DOKŁADNE)

JAKO ŻE $\mathcal{Z}^n_{dR}(M)$ JEST PRZEMIENNA, PRZETO JEJ PODGRUPA $B^n_{dR}(M)$ JEST TRYWIALNIE NORMALNA, MAMY ZATEM DOBRZE OKREŚLONĄ GRUPĘ ILORAZOWĄ

Def. 34. GRUPA KOHOMOLOGII DE RHAMA ROZMAITOŚCI M TO

$$H^\bullet_{dR}(M) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{Z}^n_{dR}(M)/B^n_{dR}(M)$$

-TEJ SKŁADNIK PROSTY

$$H^n_{dR}(M) := Z^n_{dR}(M) / B^n_{dR}(M)$$

OKREŚLAMY MIANEM n-TEJ GRUPY KOHOMOLOGII DE RHAMA M.

RELACJĘ MIĘDZY KOHOMOLOGIĄ A OPERACJĄ COFNIĘCIA USTALA

Stw. 40. NIECHAJ $M_1, M_2 \in \mathrm{Man}^\infty$. KAŻDE $f \in C^\infty(M_1, M_2)$ INDUKUJE HOMOMORFIZM GRUP PRZEMIENNYCH $\hat{f}^* : H^\bullet_{dR}(M_2) \longrightarrow H^\bullet_{dR}(M_1)$ O SKŁADOWYCH $\hat{f}^*_n : H^n_{dR}(M_2) \to H^n_{dR}(M_1)$, $[\omega] \longmapsto [f^*\omega]$.

D: DOBRĄ OKREŚLONOŚĆ $\hat{f}^*$ GWARANTUJE **Stw. 34.**, OTO BOWIEM ZACHODZI $[f^*(\omega + d_{p-1}\eta)] = [f^*\omega + f^* d_{p-1}\eta] = [f^*\omega + d_{p-1} f^*\eta] = [f^*\omega]$. $\square$

ROLĘ KOHOMOLOGII DE RHAMA W MODELOWANIU ZJAWISK Z UDZIAŁEM ŁADUNKU ELEKTROMAGNETYCZNEGO OMÓWIMY NA NASTĘPNYM WYKŁADZIE, A TYMCZASEM ZBADAMY PROSTY ZWIĄZEK Z TOPOLOGIĄ M...

Def. 35. NIECHAJ $M_1, M_2 \in \mathrm{Man}^\infty$ I NIECH $F_a \in C^\infty(M_1, M_2)$, $a \in \{0,1\}$. MÓWIMY, ŻE ODWZOROWANIA F_0 I F_1 SĄ HOMOTOPIJNIE RÓWNOWAŻNE LUB PO PROSTU HOMOTOPIJNE, CO ZAPISUJEMY SYMBOLICZNIE:

$$F_0 \sim_h F_1 ,$$

ILEKROĆ ISTNIEJE ODWZOROWANIE GŁADKIE

$$F : [0,1] \times M \longrightarrow M, \quad (t, m) \longmapsto F(t,m)$$

O WŁASNOŚCIACH $F(0,\cdot) \equiv F_0 \wedge F(1,\cdot) \equiv F_1$, ZWANE HOMOTOPIĄ POMIĘDZY F_0 I F_1. BĘDZIEMY PISAĆ $F(t,\cdot) \equiv F_t$.

MAMY FUNDAMENTALNE

Tw. 16. [O HOMOTOPIJNEJ NIEZMIENNICZOŚCI KOHOMOLOGII DE RHAMA]

NIECHAJ $M_1, M_2 \in \mathbf{Man}^\infty$ i NIECH $F_0, F_1 \in C^\infty(M_1, M_2)$. WÓWCZAS

$$F_0 \sim_h F_1 \implies \hat{F}_0^* = \hat{F}_1^*.$$

D: NIECH $F : [0,1] \times M \xrightarrow[C^\infty]{} M$ BĘDZIE HOMOTOPIĄ POMIĘDZY F_0 i F_1.

ROZWAŻMY p-FORMĘ $\omega \in \Omega^p(M_2)$ i JEJ COFNIĘCIE $F^*\omega \in \Omega^p(I \times M)$, GDZIE $I \equiv [0,1]$. W OPISIE LOKALNYM : $\kappa_1 = (x^\mu) : \overset{m\in}{\mathcal{O}_1} \to \mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}^{\times D_1}$ i $\kappa_2 = (y^\alpha) : \overset{F_t(m)\in}{\mathcal{O}_2} \to \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^{\times D_2}$ ZACHODZI

$$F^*\omega(t,m) \equiv F^*\left(\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} dy^{\alpha_1} \overset{<}{\wedge \ldots \wedge} dy^{\alpha_p}\right)(t,m)$$

$$= \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(F_t(m))\, d\left(y^{\alpha_1} \circ F(t,m)\right) \overset{<}{\wedge \ldots \wedge} d\left(y^{\alpha_p} \circ F(t,m)\right)$$

$$= \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(F_t(m)) \, \frac{\partial (y^{\alpha_1} \circ F_t)}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial (y^{\alpha_p} \circ F_t)}{\partial x^{\mu_p}} \, dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}(m)$$

$$+ p\, \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(F_t(m)) \, \frac{\partial (y^{\alpha_1} \circ F)}{\partial t}(t,m) \, \frac{\partial (y^{\alpha_2} \circ F_t)}{\partial x^{\mu_2}} \cdots \frac{\partial (y^{\alpha_p} \circ F_t)}{\partial x^{\mu_p}} \, dt \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}(m)$$

$$\equiv (F_t^* \omega)(m) + dt \wedge (\iota_{\partial_t} F^* \omega)(t,m),$$

CZYLI – JUŻ W OBRAZIE GLOBALNYM (t JEST WSPÓŁRZĘDNĄ GLOBALNĄ NA I)

$$F^* \omega = \underline{\underline{F_\bullet^* \omega}} + dt \wedge \iota_{\partial_t} F^* \omega$$

OCZYWISTY SENS, A NOTACJA – DO ZAPAMIĘTANIA!

NIECH TERAZ $\omega \in \mathrm{Ker}\, d_p$, A WTEDY

$$0 = F^* d_p \omega \overset{\text{Stw.34.}}{=} d_p F^* \omega = d_p (F_\bullet^* \omega + dt \wedge \iota_{\partial_t} F^* \omega), \quad ** \; **$$

ALE $d_p = d_p^I + d_p^{M_1}$ W SENSIE TOŻSAMOŚCI – ZAPISANEJ

WE WSPÓŁRZĘDNYCH $(\xi^i) = (t, x^\mu)$ –

$$d_p(\tilde{\omega}_{\bar{\iota}}\, d\xi^{\bar{\iota}}) = \underbrace{dt \wedge \partial_t}_{d_p^I} \tilde{\omega}_{\bar{\iota}}\, d\xi^{\bar{\iota}} + \underbrace{dx^\mu \wedge \partial_\mu}_{d_p^{M_1}} \tilde{\omega}_{\bar{\iota}}\, d\xi^{\bar{\iota}},$$

A ZATEM PRZEPISUJEMY ✱✱ W POSTACI

$$0 = d_p^{M_1} F_\cdot^* \omega + dt \wedge \left(\partial_t F_\cdot^* \omega - d_{p-1}^{M_1} \iota_{\partial_t} F^* \omega\right).$$

ZWĘŻIWSZY POWYŻSZE STRONAMI Z ∂_t, WNIOSKUJEMY, ŻE

$$0 = \partial_t F_\cdot^* \omega - d_{p-1}^{M_1} \iota_{\partial_t} F^* \omega, \quad \boxed{\times}$$

KTÓRĄ TO RÓWNOŚĆ MOŻEMY NASTĘPNIE ODCAŁKOWAĆ STRONAMI PO ODCINKU (ZWARTYM!) $I = [0,1]$ (CAŁKĘ WYKONUJEMY LOKALNIE SKŁADOWA PO SKŁADOWEJ W BAZIE

WSPÓŁRZĘDNIOWEJ $\mathcal{Q}^{\circ}(\Theta_1)$ – JEST OCZYWISTE, ŻE DOSTAJEMY TYM SPOSOBEM TENSOR NA M_1). PRZYWOŁAWSZY PODSTAWOWE TWIERDZENIE RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO ORAZ TWIERDZENIE O CAŁCE Z PARAMETREM (W KTÓREJ TO ROLI OBJAWIAJĄ SIĘ – LOKALNIE – WSPÓŁRZĘDNE x^{μ}), OBLICZAMY

$$0 = \int_0^1 dt\, \partial_t F_\bullet^{*}\omega - \int_0^1 dt\, d^{M_1}_{p-1}\, \iota_{\partial_t} F^{*}\omega$$

$$= F_1^{*}\omega - F_0^{*}\omega - d^{M_1}_{p-1} \int_0^1 dt\, \iota_{\partial_t} F^{*}\omega\,,$$

SKĄD WNIOSEK – NA GRUNCIE Stw. 10. – $\hat{F}_1^{*}[\omega] = \hat{F}_0^{*}[\omega]$. $\square$

KLUCZOWEGO – Z PUNKTU WIDZENIA NASZYCH DALSZYCH ROZWAŻAŃ – ZASTOSOWANIA POWYŻSZEGO WYNIKU ABSTRAKCYJNEGO DOSTARCZA

Tw. 17. [(UOGÓLNIONY) LEMAT POINCARÉ]

NIECHAJ $M \in \mathbf{Man}^\infty$ BĘDZIE ŚCIĄGALNA DO PODROZMAITOŚCI $M_0 \subset M$, PRZEZ CO ROZUMIEMY HOMOTOPIJNĄ RÓWNOWAŻNOŚĆ $j_{M_0} \circ \pi_{M_0} \sim_h \mathrm{id}_M$, GDZIE $\pi_{M_0} : M \twoheadrightarrow M_0$ JEST GŁADKĄ SURJEKCJĄ, A $j_{M_0} : M_0 \hookrightarrow M$ JEST GŁADKIM WŁOŻENIEM.

WÓWCZAS DOWOLNA p-FORMA ZAMKNIĘTA $\omega \in Z^p_{dR}(M)$ O WŁASNOŚCI

$$\exists\, \eta \in \Omega^{p-1}(M_0) \; : \; d_{p-1}\eta = \omega\restriction_{TM_0} \equiv j_{M_0}^*\omega$$

(OBCIĘCIE NALEŻY ROZUMIEĆ JAKO OGRANICZENIE ω DO WEKTORÓW STYCZNYCH DO M_0 (NAD M_0, RZECZ JASNA)) JEST DOKŁADNA.

D: ROZWAŻMY HOMOTOPIĘ $F: I\times M \to M$ POMIĘDZY id_M i π_{M_0}, KTÓREJ ISTNIENIE ZAŁOŻYLIŚMY, A NASTĘPNIE WPROWADŹMY WYGODNE OZNACZENIE NA UŻYTY UPRZEDNIO (str. 229) OPERATOR $\mathbb{R}$-LINIOWY

$$J_p : \Omega^{p+1}(I\times M) \to \Omega^p(M),\ \tilde{\omega} \longmapsto \int_0^1 dt\, \iota_{\partial_t} \tilde{\omega}$$

ODCAŁKOWANIE PO WŁÓKNIE HOMOTOPII

DLA $\omega \in Z^p_{dR}(M)$ DOSTAJEMY

$$0 = (J_{p+1} \circ F^* \circ d_p)\omega = (J_{p+1} \circ d_p \circ F^*)\omega$$

str. 228.

$$= J_{p+1}\left(\partial_t F_\cdot^*\omega - d^M_{p-1}\iota_{\partial_t}F^*\omega\right) = F_1^*\omega - F_0^*\omega - d_{p-1}J_p(F^*\omega)$$

$$= \mathrm{id}_M^*\omega - (j_{M_0}\circ \pi_{M_0})^*\omega - d_{p-1}J_pF^*\omega$$

$$= \omega - \pi_{M_0}^* j_{M_0}^* \omega - d_{p-1} J_p F^* \omega = \omega - d_{p-1}\left(\pi_{M_0}^* \eta + J_p F^* \omega\right),$$

CZYLI $\omega = d_{p-1}\left(\pi_{M_0}^* \eta + J_p F^* \omega\right)$. $\square$

ODNOTUJMY NA MARGINESIE FORMUŁĘ NA HOMOTOPIĘ

$$J_{p+1} \circ F^* \circ d_p + d_{p-1} \circ J_p \circ F^* = F_1^* - F_0^*.$$

NASZE ROZWAŻANIA DOMYKA

Cozz. 4. ILEKROĆ $M \in \mathrm{Man}^\infty$ JEST ŚCIĄGALNA DO PUNKTU $m \in M$, TJ. $j_{\{m\}} \circ \pi_{\{m\}} \sim_h \mathrm{id}_M$, ZACHODZI $H^\bullet(M) = 0$.

D: WYSTARCZY ZAUWAŻYĆ, ŻE $T\{m\} = \{m\} \times 0$, ZATEM $j_{\{m\}}^* \omega = 0$ (TRYWIALNIE DOKŁADNA). $\square$

Część XII

W TEJ CZĘŚCI WYKŁADU PRZEDSTAWIMY ARGUMENTY ZA UŻYTECZNOŚCIĄ KOHOMOLOGII DE RHAMA (I JEJ ROZSZERZEŃ/UOGÓLNIEŃ) W MODELOWANIU ZJAWISK FIZYCZNYCH Z UDZIAŁEM ŁADUNKU TOPOLOGICZNEGO (np. ELEKTROMAGNETYCZNEGO). W NASZYCH ROZWAŻANIACH PRZYDA SIĘ ZNAJOMOŚĆ ELEMENTARNYCH FAKTÓW DOTYCZĄCYCH CAŁKOWANIA FORM RÓŻNICZKOWYCH PO ROZMAITOŚCIACH ZORIENTOWANYCH, KTÓRE OBECNIE PRZYTOCZYMY BEZ DOWODU – W ŚWIETLE DEFINICJI CAŁKI $\int_M$ PO ROZMAITOŚCI M TEN MA CHARAKTER TRYWIALNY, CHOĆ NIERZADKO ŻMUDNEJ BUCHALTERII WYKORZYSTUJĄCEJ ZNANE WŁASNOŚCI CAŁKI Z FORMY PO OBSZARZE (Z BRZEGIEM) W $\mathbb{R}^{\times m}$.

ZACZNIJMY OD UWAGI NATURY POGLĄDOWEJ: ROLA n-FORM RÓŻNICZKOWYCH JAKO NATURALNYCH ŹRÓDEŁ MIARY OBJĘTOŚCI NA ROZMAITOŚCIACH WYMIARU n ZASADZA SIĘ NA PROSTEJ OBSERWACJI Z ZAKRESU ALGEBRY (WIELO-)LINIOWEJ: OTO NIEZEROWA FORMA SKOŚNA MAKSYMALNEGO STOPNIA n NA PRZESTRZENI WEKTOROWEJ (CZYLI WYZNACZNIK) WYMIARU n OBLICZA OBJĘTOŚĆ WIELOŚCIANU ROZPIĘTEGO NA n-TCE SWOICH ARGUMENTÓW (W JEDNOSTKACH DANYCH PRZEZ OBJĘTOŚĆ WIELOŚCIANU ROZPIĘTEGO NA WYRÓŻNIONEJ BAZIE, WZGLĘDEM KTÓREJ JEST UNORMOWANY). WOBEC TEGO MAMY NATURALNĄ DEFINICJĘ DLA $\omega \in \Omega^n(M)$, $n = \dim M$ O $\operatorname{supp} \omega \subset \mathcal{O}_i$:

$$\mathcal{O}_i \xrightarrow[\cong]{\kappa_i} U_i \subset \mathbb{R}^{\times n}, \qquad \kappa_i := (x^1_i, \ldots, x^n_i), \qquad \theta_n = [\partial_1 \partial_2 \ldots \partial_n]$$

(DZIEDZINA POJEDYNCZEJ MAPY LOKALNEJ $\kappa_i := (x^A)$):

$$\int_{(M,\theta_n)} \omega := \int_{\kappa_i(\mathcal{O}_i)} (\kappa_i^{-1})^* \omega$$

DEFINICJA TA MA SENS, OTO BOWIEM NA PRZECIĘCIU $\mathcal{O}_{ij}$

DZIEDZIN MAP κ_i I κ_j MAMY

ZNANA Z RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO NA $\mathbb{R}^{\times n}$ TRANSFORMACJA WSPÓŁRZĘDNIOWA

$$\int_{\kappa_j(\mathcal{O}_{ij})} (\kappa_j^{-1})^*\omega = \int_{\underbrace{(\kappa_j\circ\kappa_i^{-1})}_{\in\,\mathrm{Diff}(\kappa_i(\mathcal{O}_{ij}),\,\kappa_j(\mathcal{O}_{ij}))}(\kappa_i(\mathcal{O}_{ij}))} (\kappa_j^{-1})^*\omega = \int_{\kappa_i(\mathcal{O}_{ij})} (\kappa_j\circ\kappa_i^{-1})^*(\kappa_j^{-1})^*\omega = \int_{\kappa_i(\mathcal{O}_{ij})} (\kappa_i^{-1})^*\omega,$$

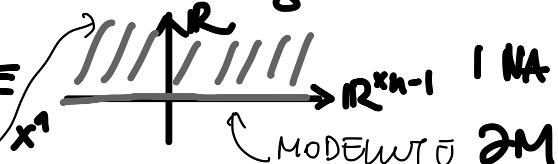
O ILE $\kappa_j\circ\kappa_i^{-1}$ TRANSPORTUJE ORIENTACJĘ, TJ. $\det\left(\frac{\partial(y_j^1,\ldots,y_j^n)}{\partial(x_i^1,\ldots,x_i^n)}\right)>0$

W OGÓLNYM PRZYPADKU WYKORZYSTUJEMY GŁADKI ROZKŁAD JEDNOŚCI $\{\varrho_i\}_{i\in I}$ (TW. 5.) STOWARZYSZONY Z POKRYCIEM WSPÓŁRZĘDNIOWYM $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$, ABY ZADAĆ – DLA DOWOLNEJ $\omega\in\Omega^n(M)$ O NOŚNIKU ZWARTYM I PRZY ZAŁOŻENIU WSPÓŁORIENTOWALNOŚCI MAP LOKALNYCH – $\int_M\omega := \sum_{i\in I}\int_M \varrho_i\triangleright\omega$, CO WOBEC $\mathrm{supp}(\varrho_i\triangleright\omega)\subset\mathcal{O}_i$ SPROWADZA SIĘ DO ZASTOSOWANIA DEFINICJI POPRZEDNIEJ DLA KAŻDEJ Z FORM $\varrho_i\triangleright\omega$. BEZ TRUDU PRZEKONUJEMY SIĘ, ŻE TA DEFINICJA NIE ZALEŻY OD WYBORU $\{(\mathcal{O}_i,\varrho_i)\}_{i\in I}$. (ĆWICZENIE!)

KORZYSTAJĄC Z POWYŻSZEJ DEFINICJI, DOWODZIMY — W ODWOŁANIU DO ZNANYCH WYNIKÓW Z $\mathbb{R}^{\times n}$:

Stw. 41. $\forall M_1, M_2 \in \mathrm{Man}^\infty,\ f \in \mathrm{Diff}(M_1, M_2),\ \omega \in \Omega^{\dim M_2}(M_2)$: $\displaystyle\int_{(M_1, O_{M_1})} f^*\omega = \int_{(M_2, Tf(O_{M_1}))} \omega$.

Tw. 42. [Stokes] JEŚLI M JEST ROZMAITOŚCIĄ Z BRZEGIEM ∂M (KOWYMIARU 1), KTÓREGO PUNKTY MAJĄ W M OTOCZENIA WSPÓŁRZĘDNIOWE LOKALNIE MODELOWANE NA $\mathbb{R}^n_+ \equiv$



I NA KTÓRYM ORIENTACJA O_M ROZMAITOŚCI M INDUKUJE ORIENTACJĘ $O_{\partial M}$ W SPOSÓB ZNANY Z $\mathbb{R}^{\times n}$, TJ. $O_M\restriction_{\partial M} = (\partial_1, O_{\partial M})$, TO WÓWCZAS ZACHODZI — DLA DOWOLNEJ $\eta \in \Omega^{n-1}(M)$ —

$$\int_{(M, O_M)} d\eta = \int_{(\partial M, O_{\partial M})} \iota_{\partial M}^*\eta,$$

GDZIE $\iota_{\partial M} : \partial M \overset{C^\infty}{\hookrightarrow} M$ JEST WŁOŻENIEM BRZEGU ∂M W M.

WIĘCEJ NA TEN TEMAT: [Lee]

PO TYM PRZYGOTOWANIU PRZECHODZIMY DO DYSKUSJI ZASTOSOWAŃ dg-ALGEBRY $(\Omega^\bullet(M), \wedge, d_\cdot)$ W MODELOWANIU ZJAWISK FIZYCZNYCH.

I ELEKTROMAGNETYZM W JĘZYKU FORM — POLA ŁADUNKOWE

STOPNIE SWOBODY POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO NA $\mathbb{R}^{1,3}$:

E_i, $i \in \{1,2,3\}$ – NATĘŻENIE POLA ELEKTRYCZNEGO (qE TO SIŁA DZIAŁAJĄCA NA ŁADUNEK q, ZATEM E TO W NATURALNY SPOSÓB TENSOR KOWARIANTNY)

B^i, $i \in \{1,2,3\}$ – INDUKCJA MAGNETYCZNA, TRAKTOWANA JAKO TENSOR KONTRAWARIANTNY.

UPISUJEMY JE W 2-FORMĘ, ZWANĄ 2-FORMĄ (TENSOREM) FARADAYA:

$$F := -E_i\, dt \wedge dx^i + \tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk} B^k\, dx^i \wedge dx^j,$$

W KTÓREGO ZAPISIE $(\overset{\equiv x^0}{t}, x^i)$ SĄ WSPÓŁRZĘDNYMI PROSTOLINIOWYMI W $\mathbb{R}^{1,3}$, PRZY CZYM $\underset{\text{KIERUNEK CZASOWY}}{\eta_{Mink}(\partial_t, \partial_t) = -1}$ $\wedge$ $\underset{\text{KIERUNKI PRZESTRZENNE}}{\eta_{Mink}(\partial_i, \partial_i) = +1}$.

POWYŻSZY ZAPIS NIE JEST JEDYNIE WYNIKIEM SZCZĘŚLIWEGO „ZBIEGU OKOLICZNOŚCI”:

$$\dim_{\mathbb{R}} \Omega^2(\mathbb{R}^{\times 3}) = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \Omega^1(\mathbb{R}^{\times 3}),$$

LECZ ODZWIERCIEDLAJĄ WŁASNOŚCI TRANSFORMACYJNE SKŁADOWYCH POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO TOWARZYSZĄCE TRANSFORMACJOM WSPÓŁRZĘDNYCH LORENTZA

$$x^\mu \longmapsto \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu =: x'^\mu, \quad (\Lambda^\mu{}_\nu)^{\mu\in\overline{0,4}}_{\nu\in\overline{0,4}} \in (S)O(1,3).$$

NALEŻY PRZEZ TO ROZUMIEĆ, ŻE F JEST OBIEKTEM GEOMETRYCZNYM, ZATEM

$$-E'_i dt' \wedge dx'^i + \tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk} B'^k dx'^i \wedge dx'^j = (-E'_i \Lambda^0_\mu \Lambda^i_\nu + \tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk} B'^k \Lambda^i_\mu \Lambda^j_\nu) dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$\stackrel{!}{=} F = -E_i dx^0 \wedge dx^i + \tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk} B^k dx^i \wedge dx^j,$$ A WYNIKAJĄCE STĄD WZORY TRANSFORMACYJNE $E'_i \propto E_i, B^j$ i $B'^i \propto E_i, B^j$ ODTWARZAJĄ DOBRZE ZNANE PRAWA

— " — DLA PÓL $E_i dx^i$ ORAZ $B^i \partial_i$.

NA TYM JEDNAK NIE KONIEC — 2-FORMA F UMOŻLIWIA ZWARTY OPIS DYNAMIKI MAXWELLA-FARADAYA (M-F)

$$\begin{cases} dF = 0 & \text{TO PIERWSZA PARA RÓWNAŃ M-F (BEZŹRÓDŁOWA — PRZY ZAŁOŻENIU BRAKU MONOPOLI MAGNETYCZNYCH W PRZYRODZIE)} \\ \delta F = \star_g^3 j_e & \text{TO DRUGA PARA RÓWNAŃ M-F, ZAPISANA W TERMINACH 3-FORMY 4-PRĄDU:} \end{cases}$$

$$j_e = \varrho\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\, j^k\, dt \wedge dx^i \wedge dx^k,$$

GDZIE ϱ - GĘSTOŚĆ ŁADUNKU, $j = j^k \partial_k$ - GĘSTOŚĆ PRĄDU (ELEKTRYCZNEGO).

DEFINICJA TENSORA FARADAYA KODUJE ZATEM ZARÓWNO WŁAŚCIWOŚCI TRANSFORMACYJNE SKŁADOWYCH POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO, JAK I JEGO DYNAMIKĘ. TO KAŻE PRZYJRZEĆ SIĘ F WNIKLIWIE...

W ŚWIETLE Corr. 4. ILEKROĆ MAMY DO CZYNIENIA Z OBSZAREM ŚCIĄGALNYM Θ, MOŻLIWE JEST WPROWADZENIE OPISU POTENCJALNEGO:

$$F\big|_{\Theta} = dA \quad , \quad A \in \Omega^1(\Theta) \, ,$$

GDZIE $A = \phi\, dt + A_i\, dx^i$ JEST STOSOWNYM 4-POTENCJAŁEM.

RZECZ JASNA KAŻDA TRAJEKTORIA FIZYCZNA $x([t_0, t_1])$ JEST ŚCIĄGALNA, WRAZ Z PEWNYM SWOIM OTOCZENIEM TUBULARNYM, ZATEM NA PIERWSZY RZUT OKA CAŁA NASZA OPOWIEŚĆ O KOHOMOLOGII JEST ABSTRAKCYJNĄ ZABAWKĄ BEZ PRAKTYCZNYCH ZASTOSOWAŃ. O TYM, ŻE JEST INACZEJ, PRZEKONUJE SZCZEGÓŁOWA DYSKUSJA DRUGIEGO ASPEKTU TEORII PÓL ŁADUNKOWYCH,

JAKIM JEST DYNAMIKA ŁADUNKÓW PRÓBNYCH (WIĘC TAKICH, KTÓRE BĘDĄC ŹRÓDŁAMI POLA ŁADUNKOWEGO, NIE ZABURZAJĄ W ISTOTNY SPOSÓB POLA ZEWNĘTRZNEGO DETERMINUJĄCEGO ICH DYNAMIKĘ — WIĘC TAKICH, W ODNIESIENIU DO KTÓRYCH MA SENS ZAŁOŻENIE O BRAKU SAMOSPRZĘŻENIA). ROZWAŻYMY OBECNIE RUCH TAKIEGO ŁADUNKU PRÓBNEGO q, DODATKOWO OBDARZONEGO MASĄ m W ZEWNĘTRZNYCH POLACH NA M: GRAWITACYJNYM - REPREZENTOWANYM PRZEZ TENSOR METRYCZNY $g \in \Gamma(S^2 T^* M)$ ORAZ ELEKTROMAGNETYCZNYM - REPREZENTOWANYM PRZEZ TENSOR FARADAYA $F \in Z^2_{dR}(M)$...

TRAJEKTORIE ŁADUNKU MODELUJEMY NA GŁADKICH ŚCIEŻKACH OTWARTYCH

$$x : \underbrace{[t_0, t_1]}_{=: T} \xrightarrow{C^\infty} M \qquad (t_0 < t_1 \in \mathbb{R}),$$

NA KTÓRYCH ZBIORZE DEFINIUJEMY FUNKCJONAŁ DZIAŁANIA

$$S : C^\infty(T, M) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\ldots)$$

ODTWARZAJĄCY TRAJEKTORIE OBSERWOWANE W PRZYRODZIE JAKO SWE PUNKTY KRYTYCZNE (MINIMA), PRZY CZYM TE OSTATNIE ZNAJDUJEMY STOSUJĄC GEOMETRYCZNĄ ZASADĘ WARIACYJNĄ „O USTALONYCH KOŃCACH", TJ. MODELUJĄC ŚCIEŻKI W PRZESTRZENI TRAJEKTORII $C^\infty(T, M)$ NA POTOKACH PÓL WEKTOROWYCH GŁADKICH NA TUBULARNYCH OTOCZENIACH $\mathcal{O}_{x(T)}$ TRAJEKTORII $x \in C^\infty(T, M)$.

KONKRETNIE ZAŚ ŻĄDAMY

$$\forall\, \mathcal{V}\in\Gamma\left(TM\restriction_{\Theta_{x(T)}}\right),\ \mathcal{V}(x(t_0))=0=\mathcal{V}(x(t_1)) :\ \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} S\left[\Phi_{\mathcal{V}}(\tau; x_*(\cdot))\right] \overset{!}{=} 0$$

NA TRAJEKTORIACH KLASYCZNYCH x_*, CZYLI OBSERWOWANYCH (DODATKOWEGO WARUNKU MINIMUM NIE BĘDZIEMY TUTAJ ROZPATRYWAĆ).

PUNKTEM WYJŚCIA DO DALSZEJ ANALIZY JEST WSKAZANIE KLASY TRAJEKTORII OBSERWOWANYCH, KTÓRĄ BĘDZIEMY MODELOWAĆ W OPISANYM SCHEMACIE. DLA ŁADUNKU $q=0$ (NEUTRALNA MASA PUNKTOWA) KLASĘ TĘ TWORZĄ GEODEZYJNE METRYKI g, A STOSOWNY FUNKCJONAŁ MOŻEMY WYBRAĆ NP. W POSTACI POLYAKOVA:

(OPISY GEODEZYJNYCH – SPARAMETRYZOWANYCH I NIE-NACIĄGNIĘTYCH)

$$S_m[x] = -\frac{m}{2}\int_{t_0}^{t_1} dt\, g(x(t))\left(\dot{x}(t),\dot{x}(t)\right).$$

(FUNKCJONAŁ ENERGII)

ADDYTYWNĄ POPRAWKĘ DO NEUTRALNEJ DYNAMIKI GEODEZYJNEJ OBSERWOWANĄ (NP. W KOMORZE MGŁOWEJ) W OBECNOŚCI $g \neq 0$ W FORMIE 4-SIŁY LORENTZA GENERUJE DODATKOWY CZŁON FUNKCJONAŁU DZIAŁANIA POSTACI

$$S_g[x] = g\int_{x(T)} A \quad , \quad A \in \Omega^1(\mathcal{O}_{x(T)}) \, , \, dA = F\restriction_{\mathcal{O}_{x(T)}} .$$

ISTOTNIE,

RACHUNKI PROWADZIMY W MAPIE LOKALNEJ, PO CZYM PREZENTUJEMY W FORMIE NIEZALEŻNEJ OD TEJ WYBORU!

$$0 \overset{!}{=} \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} S_g[\Phi_V(\tau;x(\cdot))] \equiv \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} g\int_{t_0}^{t_1} dt\, A_\mu(\Phi_V(\tau;x(t)))\frac{d}{dt}x^\mu\circ\Phi_V(\tau;x(\cdot))(t)$$

CAŁKA Z PARAMETREM PO ODCINKU ZWARTYM

$$= g\int_{t_0}^{t_1} dt\left[\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} x^\nu\circ\Phi_V(\tau;x(t))\,\partial_\nu A_\mu(\Phi_V(0;x(t)))\frac{d}{dt}x^\mu\circ\Phi_V(0;x(\cdot))(t)\right]$$

$$+ g\int_{t_0}^{t_1} dt\, A_\mu(\Phi_V(0;x(t)))\frac{d}{dt}\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} x^\mu\circ\Phi_V(\tau;x(\cdot))(t)$$

$$= g\int_{t_0}^{t_1} dt \left[T x^\nu (\mathcal{V}(x(t))) \partial_\nu A_\mu (x(t)) \frac{dx^\mu}{dt}(t) \right]$$

$$+ g\int_{t_0}^{t_1} dt \left[A_\mu (x(t)) \frac{d}{dt} T x^\mu (\mathcal{V}(x(\cdot))) (t) \right]$$

LEIBNIZ!

$$= g\int_{t_0}^{t_1} dt\, \mathcal{V}^\nu (x(t)) \partial_\nu A_\mu (x(t)) \frac{dx^\mu}{dt}(t) - g\int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{d}{dt} A_\mu (x(\cdot))(t)\, \mathcal{V}^\mu (x(t)) \right]$$

$$+ g\int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d}{dt}\left[A_\mu (x(\cdot)) \mathcal{V}^\mu (x(\cdot)) \right](t)$$

$$= g\int_{t_0}^{t_1} dt\, \mathcal{V}^\nu (x(t)) \left(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu \right)(x(t)) \frac{dx^\mu}{dt}(t) + g\, A_\mu (x(t)) \mathcal{V}^\mu (x(t)) \Big|_{t=t_0}^{t=t_1}$$

$$\equiv g\int_{t_0}^{t_1} dt\, \dot{x} \lrcorner \mathcal{V} \lrcorner F(x(t)) + g\, A_\mu (x(t_1)) \overbrace{\mathcal{V}^\mu (x(t_1))}^{=0} - g\, A_\mu (x(t_0)) \overbrace{\mathcal{V}^\mu (x(t_0))}^{=0}$$

OSTATECZNIE WIĘC OTRZYMUJEMY ŁADUNKOWY WKŁAD DO PRACY SIŁY W POSTACI $-q\,\dot{x} \lrcorner F$, A TO JEST - W ISTOCIE - 4-SIŁA LORENTZA! MAMY ZATEM FUNKCJONALNY MODEL DYNAMIKI MASYWNEGO ŁADUNKU PRÓBNEGO (DO DYSKUSJI ASPEKTU BRZEGOWEGO JESZCZE WRÓCIMY!). CZY PRZETO NASZ „CHULIGAŃSKI TRUD" JEST ZAKOŃCZONY? AŻEBY UŚWIADOMIĆ SOBIE, ŻE TAK NIE JEST, POTRZEBUJEMY UZYSKAĆ BODAJ FRAGMENTARYCZNY WGLĄD W BŁYSKOTLIWĄ INTERPRETACJĘ KWANTOWOMECHANICZNĄ KLASYCZNEGO FUNKCJONAŁU DZIAŁANIA AUTORSTWA P.A.M. DIRACA. OTÓŻ JAK POKAZAŁ ON W SWEJ PRACY Z 1932 r. "The Lagrangian in Quantum Mechanics",

ILEKROĆ MAMY DO CZYNIENIA Z JEDNOZNACZNIE OKREŚLONĄ TRAJEKTORIĄ KLASYCZNĄ $x \in C^\infty(T, M)$ ŁĄCZĄCĄ $x_0 = x(t_0)$ Z $x_1 = x(t_1)$ (CZYLI ZAWSZE LOKALNIE), AMPLITUDA PRZEJŚCIA

$$\psi_{(t_0, x_0)}(t_1, x_1) \equiv \langle x_1 | e^{-\frac{i}{\hbar}(t_1 - t_0) \cdot \hat{H}} | x_0 \rangle$$

POMIĘDZY STANAMI POŁOŻENIOWYMI (OCZYWIŚCIE TO „TYLKO" HEUREZA, KTÓREJ FORMALIZACJA WYMAGAŁABY WPROWADZENIA DO GRY PACZEK FALOWYCH O MAŁEJ (ACZ NIEZEROWEJ) DYSPERSJI...) $|x_0\rangle$ (NA POCZĄTKU) I $|x_1\rangle$ (NA KOŃCU), OKREŚLAJĄCA GĘSTOŚĆ PRAWDOPODOBIEŃSTWA ZNALEZIENIA OBIEKTU MATERIALNEGO O DYNAMICE KWANTOWEJ OPISYWANEJ HAMILTONIANEM $\hat{H}$ JEST (247)

- PRZY PEWNYCH NIEGROŹNYCH ZAŁOŻENIACH DOTYCZĄCYCH ANALITYCZNEGO CHARAKTERU ZALEŻNOŚCI HAMILTONIANU OD PĘDU – OKREŚLONA W PIERWSZYM RZĘDZIE W MAŁEJ $\hbar$ PRZEZ WARTOŚĆ FUNKCJONAŁU DZIAŁANIA KLASYCZNEGO NA RZECZONEJ TRAJEKTORII KLASYCZNEJ,

RÓWNANIE SCHRÖDINGERA

$$\psi_{(t_0,x_0)}(t_1,x_1) = e^{\frac{i}{\hbar}S[x]}\left(1+\mathcal{O}(\hbar)\right)$$

RÓWNANIE HAMILTONA-JACOBIEGO

W SWOJEJ PRACY DOKTORSKIEJ Z 1942 r. R.P. FEYNMAN UZUPEŁNIŁ POWYŻSZY WYNIK O KONSTATACJĘ, KTÓRA LEGŁA U PODSTAW JEGO PODEJŚCIA DO KWANTOWANIA POPRZEZ TZW. SUMO-CAŁKI PO TRAJEKTORIACH (Z ISZ. ang. PATH INTEGRALS):

$$\psi_{(t_0,x_0)}(t_1,x_1) = \underset{\substack{x\in C^\infty(T,M)\\ x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1}}{⨎} e^{\frac{i}{\hbar}S[x]} ,$$

PRZY CZYM WIODĄCY WKŁAD DO $⨎$ POCHODZI OD TRAJEKTORII KLASYCZNYCH (KTÓRYCH W OGÓLNOŚCI MOŻE BYĆ WIĘCEJ NIŻ 1).

KŁOPOT Z TYM POMYSŁEM JEST TAKI, ŻE TYLKO W BARDZO WYJĄTKOWYCH SYTUACJACH UMIEMY NADAĆ ŚCISŁY SENS SUMO-CAŁCE $⨎$ (NIE JEST ZNANA OGÓLNA KONSTRUKCJA MIARY NA PRZESTRZENIACH „TRAJEKTORII"). NIEMNIEJ JEDNAK MOŻEMY Z POWYŻSZEGO WYCIĄGNĄĆ KONSTRUKTYWNY POSTULAT, STANOWIĄCY PARAFRAZĘ KANTOWSKIEGO IMPERATYWU KATEGORYCZNEGO:

„KOMBINUJ TAK, iŻBY FORMUŁA NA FUNKCJONAŁ

$$\mathcal{A}_{DF} : C^\infty(T, M) \longrightarrow U(1)$$

AMPLITUDA DIRACA-FEYNMANA

ZADAJĄCY DYNAMIKĘ KLASYCZNĄ WEDLE SCHEMATU

$$\forall_{\substack{V \in \Gamma(TM\restriction_{\Theta_{x(T)}}) \\ V(x(t_0)) = 0 = V(x(t_1))}} : \frac{1}{i}\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \log \mathcal{A}_{DF}\left[\Phi_V(\tau; x_*(\cdot))\right] = 0$$

DLA POŻĄDANYCH TRAJEKTORII KLASYCZNYCH x_*

BYŁA OKREŚLONA DOKŁADNIE i ZATEM MOGŁA STANOWIĆ POWSZECHNE PRAWO DYNAMIKI."

(ALLGEMEINGESETZ)

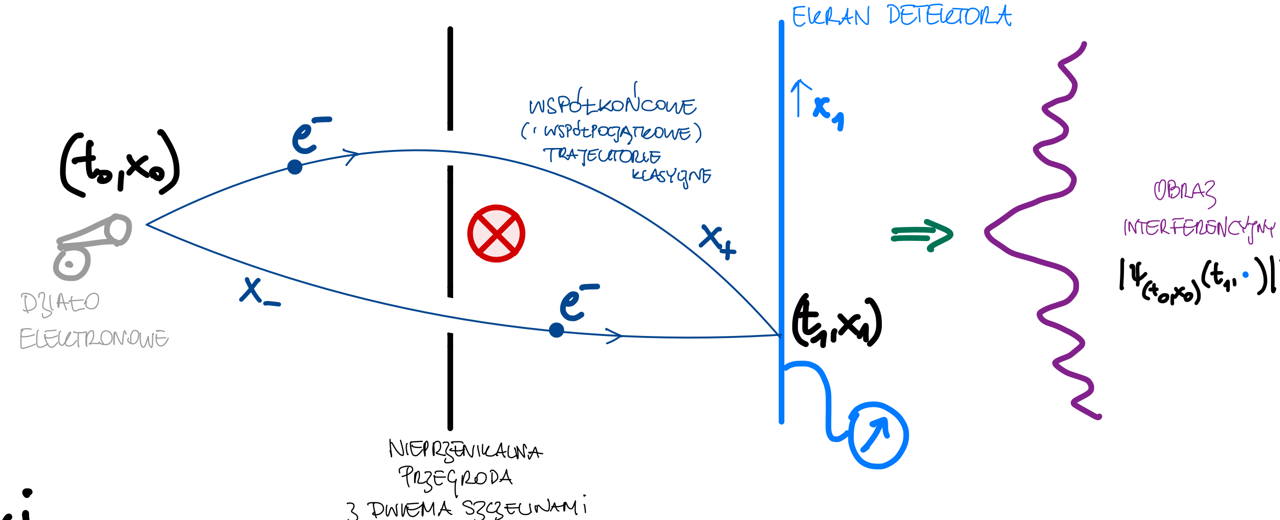
NA TYM ETAPIE NIEODZOWNY JEST NASTĘPUJĄCY KOMENTARZ...

UŻYCIE POCHODNEJ LOGARYTMICZNEJ ZAMIAST ZWYKŁEJ MA NA CELU LI TYLKO ZASYGNALIZOWANIE ZWIĄZKU Z WYJŚCIOWĄ FORMUŁĄ

$$\underline{A}_{DF}[\cdot] = \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[\cdot]\right),$$

KTÓREJ UTRZYMANIE W POWYŻSZEJ POSTACI POCHODNEJ WZGLĘDEM PIERWOTNEGO $S[\cdot]$ – W ŚWIETLE DOTYCHCZASOWYCH ROZWAŻAŃ BYNAJMNIEJ NIE NIEODZOWNE ($\frac{S}{\hbar}$ OKREŚLA FUNKCJONAŁ FAZOWY, ZADANY PRZEZ SWOJĄ WŁASNOŚĆ: GENEROWANIE OKREŚLONYCH RÓWNAŃ EWOLUCJI WYRÓŻNIAJĄCYCH x_*, A NIE SAMO $S[\cdot]$) – OKAZUJE SIĘ ZBYT OGRANICZAJĄCE DLA KLASY DAJĄCYCH SIĘ UMODELOWAĆ SYTUACJI FIZYCZNYCH. PONIŻSZA ANALIZA ŚCISŁA, UWALNIAJĄCA NAS Z NIEWYGODNEGO GORSETU HEUREZY...

ROZWAŻMY UKŁAD DOŚWIADCZALNY AHARONOVA-BOHMA:



WĄSKI
$\otimes$ = WĄŻ PUŁAPKUJĄCY à la Faraday STRUMIEŃ ZMIENNEGO POLA $F \neq 0$
(TRANSWERSALNY DO PŁASZCZYZNY EKSPERYMENTU), TJ.

$$F\restriction_{\mathbb{R}^{\times 2}\setminus\otimes} \equiv 0$$

OBSERWACJA: ZMIANA F PRZY WARUNKU $F\restriction_{\mathbb{R}^{\times 2}\setminus\otimes} \equiv 0$
WYWOŁUJE ZMIANĘ OBRAZU INTERFERENCYJNEGO!

JAKO ŻE EFEKT UTRZYMUJE SIĘ, GDY EFEKTYWNIE WYKLUCZYĆ WNIKANIE PACZKI FALOWEJ ELEKTRONU W WĄS JAKO JEGO ŹRÓDŁO, PRZETO MUSIMY POSZUKAĆ WYJAŚNIENIA GDZIE INDZIEJ, WYCIĄWSZY OBSZAR NIEWYGODNY (NIEZEROWY STRUMIEŃ O OSTRYM PROFILU PRZESTRZENNYM W PŁASZCZYŹNIE DOŚWIADCZENIA), LECZ SZCZĘŚLIWIE ZABRONIONY DLA e^- Z MODELU DYNAMIKI – INNYMI SŁOWY, ROZPATRUJEMY WCZEŚNIEJ ZREKONSTRUOWANĄ DYNAMIKĘ W OBSZARZE $\mathbb{R}^{\times 2} \setminus \otimes \simeq \mathbb{R}^{\times 2} \setminus \{0\}$, KTÓRY WSZAKŻE... NIE JEST ŚCIĄGALNY, CO OKAŻE SIĘ PODSTAWĄ DO ZAPRZĘGNIĘCIA KOHOMOLOGII DE RHAMA (A ŚCIŚLEJ: ČECHA–DE RHAMA) DO WYJAŚNIENIA EFEKTU ZA CENĘ POSTULOWANEGO WCZEŚNIEJ KANTOWSKIEGO UOGÓLNIENIA: $\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\cdot]\right) \rightsquigarrow \mathcal{A}_{DF}[\cdot]$.

A OTO KRÓTKA (JUŻ TERAZ) DROGA DO FINALNEJ ABSTRAKCJI:

ROZWAŻMY DWIE TRAJEKTORIE KLASYCZNE $x_\pm$ ZAZNACZONE NA RYSUNKU UKŁADU DOŚWIADCZALNEGO. ICH INTERFERENCJA W UJĘCIU DIRACA-FEYNMANA JEST OPISYWANA PRZEZ WYRAŻENIE

$$e^{\frac{i}{\hbar}S[x_+]} + e^{\frac{i}{\hbar}S[x_-]} = e^{\frac{i}{\hbar}S[x_-]}\left(1+e^{\frac{i}{\hbar}(S[x_+]-S[x_-])}\right)$$

$$\Big\downarrow \ |\cdot|^2$$

$$\left|1+e^{\frac{i}{\hbar}(S[x_+]-S[x_-])}\right|^2$$

$$\underset{\displaystyle S[x_+ \sqcup \overline{x_-}]}{|||}$$

ODWRÓCENIE ORIENTACJI

IDEALIZACJA: $x_+ \sqcup \overline{x_-} \sim x \in LM \equiv C^\infty(S^1, \mathbb{R}^{\times 2}\setminus\{0\})$ PRZESTRZEŃ PĘTLI W $\mathbb{R}^{\times 2}\setminus\{0\}$

WRACAMY WIĘC Z DALEKIEJ PODRÓŻY DO KRAINY 1001 NOCY...

Z DOBRZE POSTAWIONYM

ZAGADNIENIE: POSZUKUJEMY OKREŚLONEGO ŚCIŚLE (A NIE TYLKO Z DOKŁADNOŚCIĄ DO CZŁONÓW NIEWPŁYWAJĄCYCH NA DYNAMIKĘ) FUNKCJONAŁU $e^{\frac{i}{\hbar}S} : LM \longrightarrow U(1)$,

ALBO LEPIEJ – BO TYLKO UOGÓLNIENIE ZAPEWNI NAM ROZWIĄZYWALNOŚĆ TAK POSTAWIONEGO ZAGADNIENIA –

DYNAMIKA JEST ZADANA LOKALNIE!!!

$$\mathcal{A}_{DF} : LM \longrightarrow U(1),\ \forall v \in \Gamma(TM|_{x(s')}) : \frac{1}{i}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \log \mathcal{A}_{DF}[\Phi_v(t; x_*(\cdot))] = 0 \quad (*)$$

$\Longleftrightarrow$ GEODEZJA + LORENTZ

W KONKRETNEJ SYTUACJI OPISANEJ POWYŻEJ – DLA $M = \mathbb{R}^{\times 2}/\{0\}$, A OGÓLNIE – DLA DOWOLNEJ ROZMAITOŚCI M, O DOWOLNEJ TOPOLOGII.

RACHUNEK ZE STR. 244-245 PODPOWIADA BAZOWE ROZWIĄZANIE WARUNKU FIZYKALNEGO (*) :

KORZYSTAJĄC Z KLASYCZNEGO WYNIKU, PODANEGO TU BEZ DOWODU,

Tw. 43. [DE RHAMA-WEILA]

$\forall$ M - ROZMAITOŚĆ KLASY C^2 $\exists$ $\Theta = \{\Theta_i\}_{i \in I}$ - POKRYCIE OTWARTE M :

Θ JEST DOBRE $\overset{ex}{\underset{def}{\Longleftrightarrow}} \forall N \in \mathbb{N}^\times \forall i_1, i_2, \ldots, i_N \in I : \Theta_{i_1 i_2 \ldots i_N} \equiv \Theta_{i_1} \cap \Theta_{i_2} \cap \cdots \cap \Theta_{i_N} \neq \emptyset$

$\Downarrow$

$\Theta_{i_1 i_2 \ldots i_N}$ ŚCIĄGALNY

WYBIERZMY POKRYCIE DOBRE M, NA KTÓRYM - W ŚWIETLE Corr. 4. - JEST $\forall i \in I \; \exists A_i \in \Omega^1(\Theta_i) : \; F\restriction_{\Theta_i} = dA_i$.

NASTĘPNIE DLA DANEJ PĘTLI $x \in LM$ USTALMY TESELACJĘ Δ_{S^1} (CZYLI POKAWAŁKOWANIE) OKRĘGU S^1:

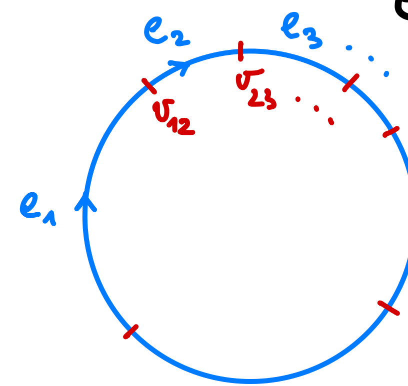
$$\Delta_{S^1} = E \cup V$$

V – WIERZCHOŁKI KOWYMIARU 1

E – KRAWĘDZIE SPÓJNE KOWYMIARU 0 (ODCINKI ŁUKU)

$$: \bigcup_{e \in E} e = S^1$$

$$\forall_{e,e' \in E} : e \cap e' \neq \emptyset \Rightarrow \begin{array}{c} e = e' \\ \vee \\ e \cap e' \in V \end{array}$$



SPEŁNIAJĄCĄ WARUNEK PODPORZĄDKOWANIA $\mathcal{O}$ WZDŁUŻ x:

$$\exists\, \imath : \Delta_{S^1} \to I$$

$$\forall_{\tau \in \Delta_{S^1}} : x(\tau) \subset \mathcal{O}_{\imath(\tau)}$$

(TAKIE ZABIEGI POZWALAJĄ WPROWADZIĆ NA **LM** NATURALNĄ I WYGODNĄ TOPOLOGIĘ ZWARTO-OTWARTĄ – PATRZ: [GAWĘDZKI '87])

MOŻEMY JUŻ TERAZ SFORMUŁOWAĆ (ZAJMUJEMY SIĘ TYLKO CZŁONEM ŁADUNKOWYM, GDYŻ CZŁON MASOWY PRZEPISUJE SIĘ TRYWIALNIE)

ANSATZ NULL: $\mathcal{A}^{(0)}_{gDF}[x] := \exp\left(\frac{ig}{\hbar}\sum_{e\in E}\int_{x(e)} A_{z(e)}\right) \equiv \prod_{e\in E}\exp\left(\frac{ig}{\hbar}\int_{x(e)} A_{z(e)}\right)$

(NB: $\mathbb{S}^1$, WIĘC TAKŻE $x(\mathbb{S}^1)$ JEST ZWARTY, MOŻNA PRZETO ZAWSZE WYBRAĆ $|E| < \infty$)

POWYŻSZE DAJE NAM OCZEKIWANY (LORENTZOWSKI) WKŁAD DO DYNAMIKI, ALE...

PROBLEM: $\mathcal{A}^{(0)}_{gDF}$ JEST FUNKCJONALNIE ZALEŻNY OD WYBORÓW DOWOLNYCH:

* DANYCH LOKALNYCH $A_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i)$;

** TESSELACJI $\Delta_{\mathbb{S}^1}$ PODPORZĄDKOWANEJ POKRYCIU;

*** PODPORZĄDKOWANIA z / POKRYCIA DOBREGO $\mathcal{O}$.

ANALIZA TEJ ZALEŻNOŚCI POZWOLI NA NAPRAWIENIE BŁĘDÓW I WYPACZEŃ...

Ad $\ast$: WOBEC ŚCIĄGALNOŚCI Θ_i RÓWNOŚĆ $F\restriction_{\Theta_i} = dA_i$ DOPUSZCZA SWOBODĘ REDEFINICJI $A_i \xmapsto[\boxed{\ast}]{} A_i + d\alpha_i =: A_i'$, $\alpha_i \in \Omega^0(\Theta_i)$,

$$\mathrm{Im}\, d_0\restriction_{\Theta_i} = \ker d_1\restriction_{\Theta_i} \ni A_i' - A_i$$

KTÓRA ZMIENIA WARTOŚĆ $\mathcal{A}^{(0)}_{gDF}$:

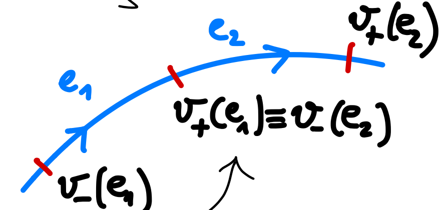
DLA A_i'

$$\mathcal{A}^{(0)\prime}_{gDF}[x] = \prod_{e\in E} \exp\left(\frac{ig}{\hbar}\int_{x(e)} \left(A_{\iota(e)} + d\alpha_{\iota(e)}\right)\right) \overset{\text{Tw. 42}}{=} \mathcal{A}^{(0)}_{gDF}[x]\cdot\prod_{e\in E}\exp\left(\frac{ig}{\hbar}\int_{x(\partial e)} \alpha_{\iota(e)}\right)$$

$$\equiv \mathcal{A}^{(0)}_{gDF}[x]\cdot\prod_{e\in E}\exp\left(\frac{ig}{\hbar}\left(\alpha_{\iota(e)}\big(x(v_+(e))\big) - \alpha_{\iota(e)}\big(x(v_-(e))\big)\right)\right)$$

$$\equiv \mathcal{A}^{(0)}_{gDF}[x]\cdot\prod_{v\in V}\exp\left(\frac{ig}{\hbar}\left(\alpha_{\iota(e_+(v))} - \alpha_{\iota(e_-(v))}\right)\big(x(v)\big)\right)$$

(KAŻDY WIERZCHOŁEK JEST ZARAZEM + i −)



WNIOSEK: ZMIANA JEST FUNKCJONALNA W X, WIĘC NAWET KLASYCZNIE NIE DO PRZYJĘCIA!

ALE TEŻ $(A_j - A_i)\restriction_{O_{ij}} \in \ker d_1|_{O_{ij}} = \operatorname{Im} d_0|_{O_{ij}}$ Z RACJI ŚCIĄGALNOŚCI O_{ij},

PRZETO $\exists\, f_{ij} \in \Omega^0(O_{ij}) : (A_j - A_i)\restriction_{O_{ij}} = d f_{ij}$

NB: FUNKCJE f_{ij} MOŻNA WYBRAĆ TAK, BY BYŁO $f_{ji} = -f_{ij}$.

ISTOTNIE, $d\left(\frac{1}{2}(f_{ij} - f_{ji})\right) = \frac{1}{2}\left[(A_j - A_i)\restriction_{O_{ij}} - (A_i - A_j)\restriction_{O_{ij}}\right] \equiv (A_j - A_i)\restriction_{O_{ij}}$

PRZY $\boxed{*}$ ZACHODZI $d f'_{ij} = (A'_j - A'_i)\restriction_{O_{ij}} = (A_j - A_i)\restriction_{O_{ij}} + d(\alpha_j - \alpha_i)\restriction_{O_{ij}}$

$= d\left(f_{ij} + (\alpha_j - \alpha_i)\restriction_{O_{ij}}\right)$, ZATEM

$f_{ij} \longmapsto f_{ij} + (\alpha_j - \alpha_i) + \underset{\cap}{c_{ij}} =: f'_{ij}$, ZNÓW Z RACJI ŚCIĄGALNOŚCI O_{ij}

$\ker d_0 \equiv \mathbb{R}$ (STAŁE LOKALNE)

WOBEC TEGO WYSTARCZY POPRAWIĆ $\mathcal{A}^{(0)}_{gDF}$ WEDŁUG SCHEMATU:

ANSATZ EINS: $\mathcal{A}^{(1)}_{gDF}[x] := \prod_{e\in E} \exp\left(\frac{ig}{\hbar}\int_{x(e)} A_{\iota(e)}\right) \cdot \prod_{v\in V} \exp\left(\frac{ig}{\hbar} f_{\iota(e_+(v))\iota(e_-(v))}(x(v))\right)$

AŻEBY USUNĄĆ ZALEŻNOŚĆ TYPU * ... NO, PRAWIE, BO TERAZ

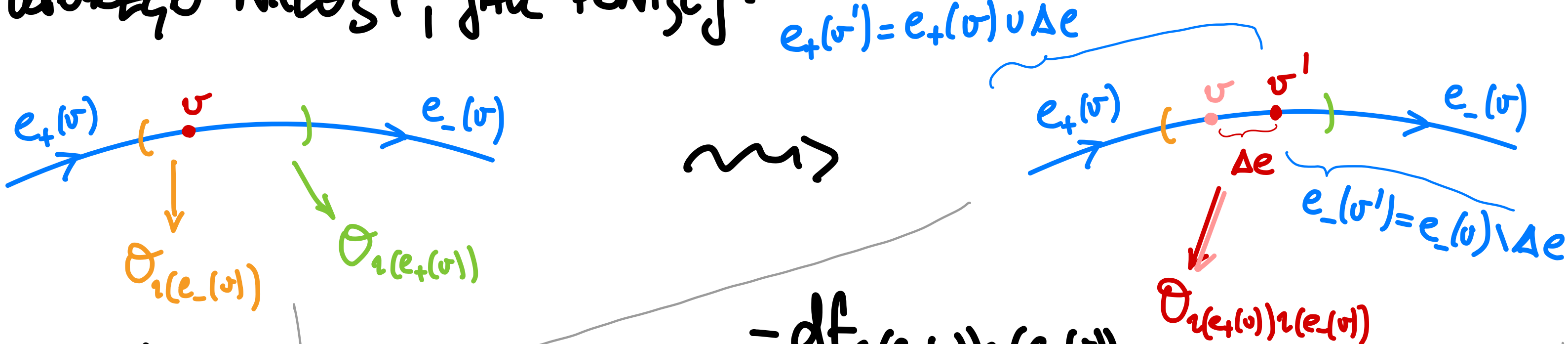
$$\mathcal{A}^{(1)\prime}_{gDF}[x] = \mathcal{A}^{(0)}_{gDF}[x] \cdot \prod_{v\in V} \exp\left(\frac{ig}{\hbar} c_{\iota(e_+(v))\iota(e_-(v))}\right)$$

KLASYCZNIE JEST TO ZMIENNOŚĆ BEZ KONSEKWENCJI, ALE KWANTOWO-MECHANICZNIE JEST NIE DO PRZYJĘCIA (ZMIANA OBRAZU INTERFERENCYJNEGO!), DLATEGO – BIORĄC DOWOLNOŚĆ POŁOŻENIA $x(v)$ (SZUKAMY ROZWIĄZANIA DAJĄCEGO SIĘ ZASTOSOWAĆ DLA DOWOLNEJ PĘTLI) – ŻĄDAMY

$$\forall_{i,j\in I}: \frac{g}{\hbar} c_{ij} \overset{!}{\in} 2\pi\mathbb{Z} \qquad \text{(DQC1)}$$

WRÓCIMY JESZCZE DO (DQC1), TYMCZASEM PRZECHODZIMY DO ANALIZY **.

Ad **: ZMIANA TESSELACJI PODPORZĄDKOWANEJ POKRYCIU ϑ SPROWADZA SIĘ DO PRZESUNIĘCIA KTÓREGOŚ Z JEJ WIERZCHOŁKÓW W OBRĘBIE x-PRZECIWOBRAZU PRZECIĘCIA PARY ELEMENTÓW POKRYCIA, DO KTÓREGO NALEŻY, JAK PONIŻEJ:



OBLICZAMY:

$$= -df_{1(e_+(v))1(e_-(v))}$$

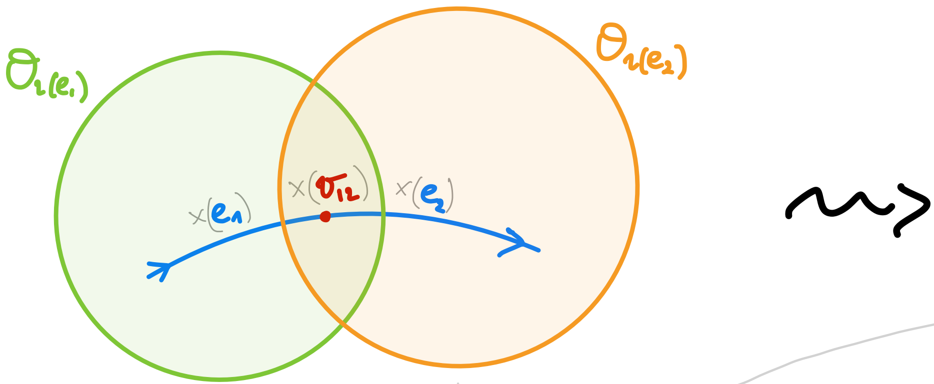
$$\mathcal{A}^{(1)\prime}_{gDF}[x] \Big/ \mathcal{A}^{(1)}_{gDF}[x] = \exp\left(\frac{ig}{\hbar}\int_{x(\Delta e)}\left(A_{1(e_+(v))} - A_{1(e_-(v))}\right)\right)$$

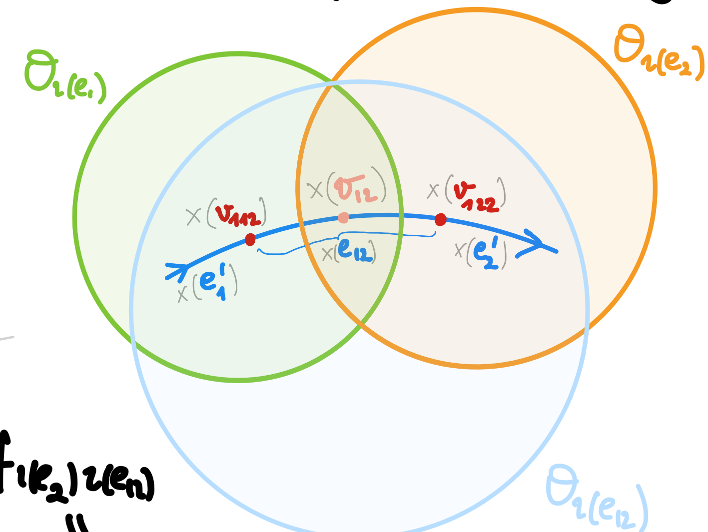
$$\cdot \exp\left(\frac{ig}{\hbar}\left(f_{1(e_+(v))1(e_-(v))}(x(v')) - f_{1(e_+(v))1(e_-(v))}(x(v))\right)\right) = 1$$

DZIĘKI POPRAWCE OD V!

NA OBECNYM ETAPIE POZOSTAJE ROZWAŻYĆ

Ad *** ZALEŻNOŚĆ $A^{(1)}_{gDF}$ OD WYBORU Θ i ϱ POPRZEZ ROZDROBNIENIE POKRYCIA I WYKORZYSTANIE GO DO ROZDROBNIENIA TESSELACJI – JAK PONIŻEJ:





PORÓWNUJEMY :

$$A^{(1)\prime}_{gDF}[x] / A^{(1)}_{gDF}[x] = \exp\left(\frac{ig}{\hbar}\left(\int_{x(e_{12}\setminus e_2)} \overbrace{(A_{2(e_{12})} - A_{2(e_1)})}^{=df_{2(e_1)2(e_{12})}} + \int_{x(e_{12}\setminus e_1)} \overbrace{(A_{1(e_{12})} - A_{1(e_2)})}^{=df_{1(e_2)2(e_{12})}}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{ig}{\hbar}\left(f_{1(e_1)2(e_{12})}(x(v_{112})) + f_{2(e_{12})2(e_2)}(x(v_{122})) - f_{2(e_1)2(e_2)}(x(v_{12}))\right)\right)$$

UWZGLĘDNIAJĄC ANTYSYMETRIĘ $f_{ij}=-f_{ji}$, OTRZYMUJEMY WYNIK:

$$A^{(1)\prime}_{gDF}[x]/A^{(1)}_{gDF}[x]=\exp\Big(\frac{ig}{\hbar}\Big(f_{\imath(e_1)\imath(e_{12})}(x(\sigma_{12}))-\cancel{f_{\imath(e_1)\imath(e_{12})}(x(\sigma_{112}))}$$

$$+\cancel{f_{\imath(e_2)\imath(e_{12})}(x(\sigma_{122}))}-f_{\imath(e_2)\imath(e_{12})}(x(\sigma_{12}))$$

$$\cancel{f_{\imath(e_1)\imath(e_{12})}(x(\sigma_{112}))}-\cancel{f_{\imath(e_2)\imath(e_{12})}(x(\sigma_{122}))}-f_{\imath(e_1)\imath(e_2)}(x(\sigma_{12}))\Big)\Big)$$

$$=\exp\Big(\frac{ig}{\hbar}\big(f_{\imath(e_1)\imath(e_{12})}-f_{\imath(e_2)\imath(e_{12})}-f_{\imath(e_1)\imath(e_2)}\big)(x(\sigma_{12}))\Big)$$

HOUSTON, WE HAVE A PROBLEM! BUT DO WE?

ZAUWAŻMY (PATRZ: STR. 260.)

$$(f_{jk}-f_{ik}+f_{ij})\restriction_{O_{ijk}}\in\ker d_0 \Longrightarrow \exists\, \underbrace{N_{ijk}}_{\text{STAŁE LOKALNE}}\in\mathbb{R}:\ (f_{jk}-f_{ik}+f_{ij})\restriction_{O_{ijk}}=N_{ijk}$$

JEST PRZETO $A^{(1)\prime}_{gDF}[x]/A^{(1)}_{gDF}[x]=\exp\big(-\frac{ig}{\hbar}N_{\imath(e_1)\imath(e_2)\imath(e_{12})}\big)$

POWTARZAJĄC ARGUMENTACJĘ ZE STR. 261., ŻĄDAMY

$$\forall_{i,j,k \in I} : \frac{q}{\hbar} N_{ijk} \overset{!}{\in} 2\pi\mathbb{Z} \qquad \text{(DQC2)}$$

NIETRUDNO POKAZAĆ, ŻE PO NARZUCENIU WIĘZÓW (DQC1) i (DQC2), ZWANYCH WARUNKAMI KWANTOWANIA (ŁADUNKU) DIRACA, AMPLITUDY D-F W POSTACI $A^{(1)}_{DF}$ SĄ JUŻ W PEŁNI NIEZALEŻNE OD WYBORÓW DOWOLNYCH, A PRZY TYM ZADAJĄ POŻĄDANĄ DYNAMIKĘ (ĆWICZENIE!). POZOSTAJE ZROZUMIEĆ, JAKĄ STRUKTURĘ OPISUJĄ NAD M... AŻEBY TO ŁACNO ZROZUMIEĆ, WPROWADZAMY OZNACZENIA DOPASOWANE DO (DQC1) i (DQC2):

$$\underline{A}_i := \frac{g}{\hbar} A_i \in \mathbb{R}^1(\mathcal{O}_i) \quad ; \quad g_{ij} := \exp\left(-\frac{ig}{\hbar} f_{ij}\right) : \mathcal{O}_{ij} \to U(1)$$

ORAZ $$h_i := \exp\left(\frac{ig}{\hbar}\alpha_i\right) : \mathcal{O}_i \to U(1)$$

i PRZEPISUJEMY WSZYSTKIE WYPROWADZONE UPRZEDNIO RELACJE:

$$\begin{cases} \frac{g}{\hbar} F\restriction_{\mathcal{O}_i} = d\underline{A}_i \,, \quad \underline{A}_i \sim \underline{A}_i - i\, h_i^{-1} dh_i \equiv \underbrace{\underline{A}_i - i\, d\log h_i}_{=:\, \underline{A}_i^h} \quad \circledast \\ (\underline{A}_j - \underline{A}_i)\restriction_{\mathcal{O}_{ij}} = i\, g_{ij}^{-1} dg_{ij} \equiv i\, d\log g_{ij} \,, \quad \underline{g_{ij} \sim h_i \cdot g_{ij} \cdot h_j^{-1}} \\ \underline{(g_{jk} \cdot g_{ik}^{-1} \cdot g_{ij})\restriction_{\mathcal{O}_{ijk}} = 1} \end{cases}$$

ALEŻ DWIE PODKREŚLONE RELACJE WYGLĄDAJĄ ZNAJOMO!

PATRZ: Tw. 8. i Stw. 14.

KONKLUZJA: 1-KOCYKL $\{g_{ij}\}_{i,j\in I}$ ZADAJE WIĄZKĘ WŁÓKNISTĄ O GRUPIE STRUKTURALNEJ $G \supset U(1)$ (REDUKCJA!)

E.g. 1 WIĄZKA DIRACA DLA F

$$P_F := \bigsqcup_{i\in I} \mathcal{O}_i \times U(1) \Big/ \sim_{g..}\ , \quad (\overset{\mathcal{O}_{ij}}{\overset{\in}{x}}, z, j) \sim (x, g_{ij}(x)\cdot z, i)$$

$$\begin{array}{c} P_F \\ \downarrow \pi_{P_F} \\ M \end{array}$$

(WIĄZKA BAZ UNITARNYCH WIĄZKI PREKWANTOWEJ)

MOŻEMY TEŻ WYBRAĆ: $\mathbb{C}^\times, \mathbb{C}$

(Tw. 8. $\to$ AUTOMORFIZMY WŁÓKNA TYPOWEGO $U(1)$ POSTACI $U(1)\ni z \mapsto u\cdot z \in U(1)$)

NATOMIAST $\{h_i\}_{i\in I}$ WYZNACZA AUTOMORFIZM WERTYKALNY (NAD id_M) WIĄZKI DIRACA

$$\begin{tikzcd} P_F \arrow[r, "\Phi", "\simeq"'] \arrow[d, "\pi_{P_F}"'] & P_F \arrow[d, "\pi_{P_F}"] \\ M \arrow[r, equal] & M \end{tikzcd}$$

O PREZENTACJI LOKALNEJ:

$$[\tau_i]\circ\Phi\circ[\tau_i]^{-1}(x,u) = (x, h_i(x)\cdot u)$$

Stw. 14.

TYM OTO SPOSOBEM NASZA (UDANA) PRÓBA NADANIA ŚCISŁEGO SENSU MATEMATYCZNEGO AMPLITUDOM INTERFERENCYJNYM W DOŚWIADCZENIU AHARONOVA-BOHMA DOPROWADZIŁA NAS WPROST DO GEOMETRYZACJI POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO W POSTACI... WIĄZKI WŁÓKNISTEJ, ODKRYWAJĄC PRZED NAMI GŁĘBSZĄ PRAWDĘ O NATURZE TEGOŻ POLA I ZARAZEM DOSTARCZAJĄC NADER NATURALNEGO ARGUMENTU (FIZYKALNEGO!) NA RZECZ TEORII WIĄZEK.

RZECZONA PRAWDA NIE JEST PEŁNA — TAKA KRYJE SIĘ W GEOMETRYCZNEJ INTERPRETACJI DANYCH LOKALNYCH $\{A_i\}_{i \in I}$, KTÓRĄ PRZEDSTAWIMY NA NASTĘPNYM WYKŁADZIE, BIORĄC JĄ ZA MOTYWACJĘ DLA STUDIÓW NAD... TEORIĄ POWIĄZANIA NA WIĄZKACH WŁÓKNISTYCH...

TYMCZASEM, NA ZAMKNIĘCIE WYKŁADU NINIEJSZEGO, ZAUWAŻYMY, ŻE WARUNEK KWANTOWANIA DIRACA (DQC2) MA DUŻO POWAŻNIEJSZE KONSEKWENCJE, NIŻ MOŻNA BY SIĘ SPODZIEWAĆ: OTO DOPUSZCZA ON GEOMETRYZACJĘ TYLKO W PRZYPADKU PÓL ELEKTROMAGNETYCZNYCH, KTÓRYCH TENSOR FARADAYA SPEŁNIA WARUNEK

$$\forall c_2 \in Z_2(M) \; : \quad \boxed{\frac{q}{\hbar}\int_{c_2} F \in 2\pi\mathbb{Z}} \qquad \text{(DQC2')}$$

2-CYKL, CZYLI PODROZMAITOŚĆ M WYMIARU 2, O PUSTYM BRZEGU, $\partial c_2 = \emptyset$.

NA MARGINESIE: JEŚLI ZATEM – NP. – POLE F POCHODZI OD MONOPOLA MAGNETYCZNEGO, ZW. MONOPOLEM DIRACA, WÓWCZAS PRAWO GAUßA: $\int_{c_2} F = Q(b_3) \; : \; c_2 = \partial b_3$ DAJE NAM WARUNEK SKWANTOWANIA ŁADUNKU MONOPOLA q_m W JEDNOSTKACH ELEMENTARNEGO ŁADUNKU.

ELEKTRYCZNEGO $q=e$ (MOGĄCEGO PORUSZAĆ SIĘ W POLU ZEWNĘTRZNYM $\mathcal{F}$ POCHODZĄCYM OD q_m):

$$\boxed{\frac{e\,q_m}{\hbar} \in 2\pi\mathbb{Z}} \; .$$

WRÓĆMY WSZAKŻE DO (DQC2'): JEGO DOWÓD JEST PROSTYM ĆWICZENIEM POLEGAJĄCYM NA UŻYCIU TESSELACJI (CZYLI PARKIETAŻU) C_2 PODPORZĄDKOWANEJ POKRYCIU $\mathcal{O}_1$, A NASTĘPNIE – ZASTOSOWANIU Tw. 42., CO W DWÓCH KROKACH POZWALA WYRAZIĆ CAŁKĘ $\int_{C_2} F$ JAKO SUMĘ LICZB CAŁKOWITYCH N_{ijk} PRZYPISANYCH WIERZCHOŁKOM PARKIETAŻU. ABY UŁATWIĆ SOBIE ZADANIE, WARTO WYBRAĆ PARKIETAŻ TRÓJKĄTAMI (TRIANGULACJĘ), A NASTĘPNIE – PRZEJŚĆ DO TZW. PARKIETAŻU DUALNEGO... (TYPU „PLASTER MIODU")

POWODZENIA! RRF