GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA

XIII, XIV i XV O TYM, ŻE WARTO MIEĆ POWIĄZANIA,
20/5 27/5 3/6 JAK I O TYM,
ŻE BLIŻSZA KOSZULA CIAŁA

2025/26

CZĘŚĆ XIII i XIV

DOTYCHCZASOWA NASZA ANALIZA STRUKTURY $(\underline{A}_i, g_{ij})$ NIEODZOWNEJ DO UMODELOWANIA – W SPOSÓB KWANTOWOMECHANICZNIE SPÓJNY – EFEKTU AHARONOVA–BOHMA POZWOLIŁA NAM USTALIĆ SENS GEOMETRYCZNY LEDWIE CZĘŚCI OWEJ STRUKTURY – ODWZOROWANIA $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \to U(1)$ UZYSKAŁY INTERPRETACJĘ 1-KOCYKLU PRZEJŚCIA WIĄZKI DIRACA P_F. POZOSTAŁO PYTANIE O ROLĘ 1-FORM $\underline{A}_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i)$ NA ELEMENTACH POKRYCIA $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ TRYWIALIZUJĄCEGO P_F I ZNACZENIE SPEŁNIANYCH PRZEZ NIE AFINICZNYCH RELACJI SZYCIA:

$$(\underline{A}_j - \underline{A}_i)\restriction_{\mathcal{O}_{ij}} = i\,d\log g_{ij}$$ (PATRZ: str. 266.).

ISTNIEJE UZASADNIONE PODEJRZENIE, ŻE RELACJE TE GWARANTUJĄ „ZSTĄPIENIE" DO P_F RODZINY 1-FORM NA LOKALNYCH MODELACH $O_i \times U(1) \hookrightarrow \bigsqcup_{i \in I} O_i \times U(1)$, KTÓREJ ELEMENTY SĄ WSPÓŁOKREŚLANE PRZEZ $\underline{A}_i$. ABY TO STWIERDZIĆ, MUSIMY NAJSAMPIERW OPISAĆ ALGORYTMICZNIE PROCES „ZSTĄPIENIA". W TYM CELU PRZYPOMNIJMY SCHEMAT REKONSTRUKCJI WIĄZKI P_F Z JEJ DANYCH LOKALNYCH g_{ij} (PATRZ: DOWÓD Tw. 8., Sł. 93.-97.): OTÓŻ WYSZEDŁSZY OD ROZMAITOŚCI $\bigsqcup_{i \in I} O_i \times U(1)$, NAD KAŻDYM Z PUNKTÓW $x \in O_{ij}$ DOKONUJEMY UTOŻSAMIENIA WŁÓKIEN $U(1)$ POCHODZĄCYCH Z OBU DOSTĘPNYCH NAD NIMI LOKALNYCH MODELI:

$$O_i \cap O_{ij} \times U(1) \quad \text{i} \quad O_j \cap O_{ij} \times U(1)$$

PRZY UŻYCIU DYFEOMORFIZMÓW ($\mathcal{O}_{ij}^{(k)} \equiv \mathcal{O}_k \cap \mathcal{O}_j$, $k \in \{i,j\}$)

$$\tilde{g}_{ij} : \mathcal{O}_{ij}^{(j)} \times U(1) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{ij}^{(i)} \times U(1) , \quad (x, z) \longmapsto (x, g_{ij}(x) \cdot z) ,$$

POR.: Str. 86. TO UTOŻSAMIENIE PODNOSI SIĘ DO STYCZNEJ (PAMIĘTAJMY: WEKTORY STYCZNE TO KLASY WSPÓŁSTYCZNOŚCI ŚCIEŻEK!) WEDLE SCHEMATU

$$T\tilde{g}_{ij} : T(\mathcal{O}_{ij}^{(j)} \times U(1)) \xrightarrow{\cong} T(\mathcal{O}_{ij}^{(i)} \times U(1)) ,$$

CO POZWALA NA OKREŚLENIE NATURALNEGO WARUNKU ZSTĄPIENIA RODZINY 1-FORM $\theta_\bullet \equiv \{ \theta_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i \times U(1)) \}_{i \in I}$ NA P_F : OTÓŻ $\theta_\bullet$ ZADAJE JEDNOZNACZNIE 1-FORMĘ NA P_F WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY $\theta_i \restriction_{T(\mathcal{O}_{ij}^{(i)} \times U(1))} \circ T\tilde{g}_{ij} \equiv \theta_j \restriction_{T(\mathcal{O}_{ij}^{(j)} \times U(1))}$, XR3

TJ. GDY Θ_i OBLICZA SIĘ NA WEKTORZE $w \in T_{\tilde{g}_{ij}(x,z)}\left(\mathcal{O}_{ij}^{(i)} \times U(1)\right)$ UTOŻSAMIANYM Z $v \in T_{(x,z)}\left(\mathcal{O}_{ij}^{(j)} \times U(1)\right)$ WZDŁUŻ $\tilde{g}_{ij}$ DOKŁADNIE TAK SAMO, JAK Θ_j OBLICZA SIĘ NA WYJŚCIOWYM WEKTORZE v. WARUNEK POWYŻSZY PRZEPISUJE SIĘ W SPOSÓB ZWARTY JAKO

$$\Theta_j \restriction_{\mathcal{O}_{ij} \times U(1)} = \tilde{g}_{ij}^{\,*} \Theta_i \,.$$

WPROWADŹMY WSPÓŁRZĘDNĄ GLOBALNĄ z NA WŁÓKNIE $U(1)$ I ZDEFINIUJMY $\Theta_i(x,z) := i z^{-1} dz + \underline{A}_i(x)$, $(x,z) \in \mathcal{O}_i \times U(1)$.

OBLICZAMY BEZ TRUDU $\left(\tilde{g}_{ij}^{\,*} \Theta_i\right)(x,z) \equiv i \dfrac{d\left(g_{ij}(x) \cdot z\right)}{g_{ij}(x) \cdot z} + \underline{A}_i(x)$

$$= i \frac{dz}{z} + i\, d\log g_{ij}(x) + \underline{A}_i(x) = i \frac{dz}{z} + \underline{A}_j(x) \equiv \Theta_j(x,z) \,.$$

WNIOSEK: $\exists\, \mathcal{A} \in \Omega^1(P_F) \,:\, [\tau_i]^{-1*}\mathcal{A} = \Theta_i\,,\ i \in I.$

1-FORMA TA MA NASTĘPUJĄCE WŁASNOŚCI STRUKTURALNE:

* TRYWIALIZACJA F (POLA FARADAYA) W KOHOMOLOGII P_F:

$$d\mathcal{A}\big|_{\pi_{P_F}^{-1}(\mathcal{O}_i)} \equiv d[\tau_i]^*\Theta_i = [\tau_i]^* d\Theta_i = [\tau_i]^* d\,\mathrm{pr}_1^* \underline{A}_i = \frac{q}{\hbar}[\tau_i]^*\mathrm{pr}_1^* F|_{\mathcal{O}_i}$$
$$\equiv \frac{q}{\hbar}\left(\mathrm{pr}_1 \circ [\tau_i]\right)^* F|_{\mathcal{O}_i} \equiv \frac{q}{\hbar}\pi_{P_F}^* F|_{\mathcal{O}_i} \equiv \pi_{P_F}^*\left(\frac{q}{\hbar}F\right)\Big|_{\pi_{P_F}^{-1}(\mathcal{O}_i)},$$

CZYLI $\quad d\mathcal{A} = \pi_{P_F}^*\left(\frac{q}{\hbar}F\right)$

** $U(1)$-EKWIWARIANTNOŚĆ $\mathcal{A}: TP_F \to \mathbb{R}$ WZGLĘDEM DZIAŁANIA $T r : U(1) \longrightarrow \mathrm{Diff}(TP_F)$ (INDUKOWANEGO PRZEZ $r: U(1) \to \mathrm{Diff}(P_F)$), O LOKALNEJ PREZENTACJI $\phi: U(1) \to \mathrm{Diff}(U(1)),\, u \mapsto (\cdot)\cdot u$) I TRYWIALNEGO NA $\mathbb{R}$:

$$[\tau_i]^{-1*}(\mathcal{A} \circ Tr_u) \equiv \mathcal{A} \circ Tr_u \circ T[\tau_i]^{-1} = \mathcal{A} \circ T\left(r_u \circ [\tau_i]^{-1}\right)$$

$$= \mathcal{A}\circ T\big([\tau_i]^{-1}\circ(\mathrm{id}_{\mathcal{O}_i}\times p_u)\big) \equiv \big([\tau_i]^{-1\,*}\mathcal{A}\big)\circ\big(\mathrm{id}_{T\mathcal{O}_i}\times Tp_u\big)$$

$$\equiv i\,\frac{d(p_u\cdot z)}{p_u\cdot z} + \underline{A}_i(x) = i\,\frac{dz}{z} + \underline{A}_i(x) \equiv [\tau_i]^{-1\,*}\mathcal{A},$$ czyli

$$\boxed{\mathcal{A}\circ Tr_u = \mathcal{A}}$$

*** $\mathcal{A}$ w kanoniczny sposób zadaje rzut $TP_F \to VP_F$, gdzie $VP_F \hookrightarrow TP_F$ jest (gładką) sumą rozłączną stycznych do włókien, $VP_F \equiv \bigsqcup_{x\in M} T(P_{F_x})$, $P_{F_x}\cong U(1)$. Istotnie, rozważmy globalny generator $-iz\partial_z =: \mathcal{K}$ przestrzeni cięć $\Gamma(TU(1))$ wiązki stycznej nad włóknem typowym P_F i zdefiniujmy

$$\Theta_i := \theta_i \otimes \mathcal{K} : T(\mathcal{O}_i\times U(1)) \equiv pr_1^{*}\,T\mathcal{O}_i \oplus pr_2^{*}\,TU(1) \longrightarrow pr_2^{*}\,TU(1),$$

CZYLI WPROST:
$$\Theta_i(x,z) = i\,\frac{dz}{z}\otimes\left(-iz\partial_z\right) + \underline{A}_i(x)\otimes \mathcal{K}(z)$$
$$\equiv dz\otimes\partial_z + \underline{A}_i(x)\otimes\mathcal{K}(z)$$
$$\equiv \mathrm{id}_{T_z U(1)} + \underline{A}_i(x)\otimes\mathcal{K}(z).$$

LOKALNE GŁADKIE POLA OPERATORÓW RZUTOWYCH Θ_i ZSZYWAJĄ DO TP_F Z DOKŁADNIE TEJ SAMEJ PRZYCZYNY, KTÓRA STOI ZA ZSZYCIEM $\mathcal{O}_i$. MAMY ZATEM

$$\Theta\in\Gamma(TP_F\otimes VP_F),\qquad \left(\mathrm{pr}_2\circ\right)T[\tau_i]\circ\Theta\circ T[\tau_i]^{-1}\equiv\Theta_i$$

RZUTY TE WYZNACZAJĄ DOPEŁNIENIE PROSTE $\ker\Theta_i$ PODWIĄZKI

$T[\tau_i]\left(VP_F|_{\pi_{P_F}^{-1}(\mathcal{O}_i)}\right)\cong\mathcal{O}_i\times TU(1)$ W $T[\tau_i]\left(TP_F|_{\pi_{P_F}^{-1}(\mathcal{O}_i)}\right)\equiv T(\mathcal{O}_i\times U(1))$,

PRZY CZYM $\forall (x,z) \in \mathcal{O}_i \times U(1)$: $\operatorname{Ker} \Theta_i \simeq T_x M$, A KONKRETNIE:

$$\Big(\zeta\, \mathfrak{K}(z) + v^\mu \partial_\mu(x)\Big) \in \operatorname{Ker} \Theta_i(x,z)$$

(DLA $\kappa = (x^\mu) : \mathcal{O}_x \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_x \subset \mathbb{R}^{\times D}$, $D = \dim M$)

MAPA LOKALNA NA OTOCZENIU x

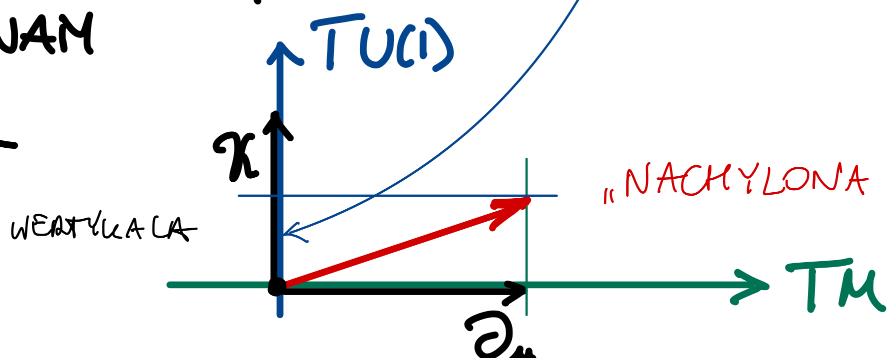
$$\overset{!!}{h}(x,z) \quad \Updownarrow \quad \stackrel{L}{=} v(x)$$

$$\zeta = -v \lrcorner \underline{A}_i(x), \text{ CZYLI } h(x,z) = v(x) - v \lrcorner \underline{A}_i(x) \triangleright \mathfrak{K}(z).$$

LOKALNA BAZA CIĘĆ DOPEŁNIENIA TO ZATEM

$$\partial_\mu - \underline{A}_{i\mu}(x) \triangleright \mathfrak{K}(z), \quad \mu \in \overline{1,D},$$

CO DAJE NAM OBRAZEK



OSTATNI, NAJMNIEJ OCZYWISTY PUNKT LISTY OKAZUJE SIĘ MIEĆ NADER ISTOTNE ZASTOSOWANIE. NIM JEDNAK JE USTALIMY, ZATRZYMAMY SIĘ PRZY DEFINICJI POLA $\mathcal{K}$...

OBSERWACJA: WARTOŚCI $\mathcal{K}$ SPEŁNIAJĄ TOŻSAMOŚCI

$$\mathcal{K}(z) \equiv \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(e^{-it} \cdot z\right),$$

PRZY CZYM ŚCIEŻKA $\gamma_z : \mathbb{R} \ni t \longmapsto e^{-it} \cdot z \in U(1)$ JEST ORBITĄ (LEWEGO) DZIAŁANIA REGULARNEGO $\ell : U(1) \to \mathrm{Diff}(U(1))$, $u \longmapsto u \cdot (\cdot)$ ($U(1)$ NA SOBIE). Z TAKIM POLEM WEKTOROWYM SPOTKALIŚMY SIĘ ONEGDAJ – JEST TO POLE FUNDAMENTALNE DZIAŁANIA ℓ (PATRZ: str. 142.). ZAUWAŻMY W SZCZEGÓLNOŚCI PROSTĄ

REGUŁĘ TRANSFORMACYJNĄ :

$$T_z l_u(\mathcal{K}(z)) \equiv T_z l_u \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(e^{-it}\cdot z\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(l_u(e^{-it}\cdot z)\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(u e^{-it} z\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left((u e^{-it} u^{-1})\cdot uz\right)$$

PRZEMIENNOŚĆ !!
U(1)

$$= \mathcal{K}(uz)$$

(WIDAĆ PROSTY SCHEMAT UOGÓLNIENIA NA PRZYPADEK GRUPY NIEPRZEMIENNEJ)

×

MOŻEMY JUŻ TERAZ POWRÓCIĆ DO DYSKUSJI ZASTOSOWAŃ RZUTU ω. TYTUŁEM PRZYGOTOWANIA GRUNTU POD KONKLUZJĘ PRZYPOMNIJMY, ŻE WERTYKALNE AUTOMORFIZMY WIĄZKI WŁÓKNISTEJ SĄ LOKALNIE MODELOWANE NA RODZINACH AUTOMORFIZMÓW WŁÓKNA TYPOWEGO GŁADKO INDEKSOWANYCH PRZEZ PUNKTY W BAZIE (PATRZ: Def. B.).

JEST WOBEC TEGO NATURALNYM OCZEKIWANIEM WOBEC RÓŻNICZKOWANIA CIĘĆ WIĄZKI, ŻEBY POD DZIAŁANIEM TAKIEGO AUTOMORFIZMU WERTYKALNEGO POCHODNA CIĘCIA PODLEGAŁA TRANSFORMACJI INDUKOWANEJ (STYCZNOŚCIOWEJ) LOKALNIE MODELOWANEJ NA RODZINIE POCHODNYCH ODNOŚNYCH AUTOMORFIZMÓW WŁÓKNA TYPOWEGO. (TAKIE JEJ ZACHOWANIE JEST NIE TYLKO NATURALNE, ALE WRĘCZ POŻĄDANE Z PUNKTU WIDZENIA PEWNYCH FIZYKALNYCH ZASTOSOWAŃ WIĄZEK WŁÓKNISTYCH – NP. W TEORII POLA Z SYMETRIĄ CECHOWANIA (PATRZ: WYKŁAD MONOGRAFICZNY "DUALITY, DESCENT, & DEFECTS [...]" AUTORA NINIEJSZYCH NOTATEK).) O TYM, ŻE ZWYCZAJNA POCHODNA $\Gamma(E) \ni \phi \longmapsto T\phi$ NIE SPEŁNIA TEGO OCZEKIWANIA (W OGÓLNOŚCI), NAJŁATWIEJ MOŻNA

SIĘ PRZEKONAĆ W OBRAZIE TRYWIALIZACJI LOKALNEJ $\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F$, W KTÓREJ

$$\tau_i \circ \phi = (\mathrm{id}_{\mathcal{O}_i}, \phi_i), \quad \phi_i \in C^\infty(\mathcal{O}_i, F)$$

ROZWAŻMY AUTOMORFIZM

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_E"'] & E \arrow[d, "\pi_E"] \\ B \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_B"'] & B \end{tikzcd}$$

WIĄZKI WŁÓKNISTEJ (E, B, F, π_E) O PREZENTACJI LOKALNEJ

$$(\tau_i \circ \Phi \circ \tau_i^{-1})(x, f) = (x, h_i(x)(f))$$

$$h_i : \mathcal{O}_i \to \mathrm{Aut}(F)$$

POD JEGO DZIAŁANIEM

$$\Gamma(E) \ni \phi \longmapsto \Phi \circ \phi \equiv \phi^{\Phi} \in \Gamma(E) \quad (\text{WSZAK } \pi_E \circ \Phi \circ \phi = \pi_E \circ \phi),$$

CZYLI LOKALNIE: $\phi_i \longmapsto h_i(\cdot)(\phi_i(\cdot)) \equiv \phi_i^h(\cdot)$

TO WŁAŚNIE ZALEŻNOŚĆ h_i OD PUNKTU W BAZIE PRZESĄDZA O NIEPOŻĄDANYM CHARAKTERZE TRANSFORMACYJNYM $T\phi$:

RÓŻNICZKOWANIE $h_i(\cdot)$ W $h_i(\cdot)(\phi_i(\cdot))$ WZGLĘDEM ARGUMENTU $x \in B$ WPROWADZA POPRAWKĘ DO POŻĄDANEGO

$$T_{\phi_i(\cdot)} h_i \circ T\phi_i .$$

W NASZYM KONKRETNYM PRZYPADKU $(E, B, F, \pi_E) = (P_F, M, U(1), \pi_{P_F})$ OTRZYMUJEMY – DLA $\phi \in \Gamma(P_F)$, $[\tau_i] \circ \phi = (\mathrm{id}_{\mathcal{O}_i}, \phi_i)$, $\phi_i \in C^\infty(\mathcal{O}_i, U(1))$ i $\Phi : E \to E$, $[\tau_i] \circ \Phi \circ [\tau_i]^{-1}(x, u) = (x, h_i(x) \cdot u)$, $h_i : \mathcal{O}_i \to U(1)$ (ŁATWO WIDAĆ, ŻE TO JEDYNE DYFEOMORFIZMY WŁÓKNA TYPOWEGO EKWIWARIANTNE WZGLĘDEM DZIAŁANIA GRUPY $U(1)$, O KTÓRYM BYŁA MOWA NA str. 275.) – FORMUŁĘ

ZA CHWILĘ ZROZUMIEMY SENS TEGO ZAPISU...

$$T_x\big(h_i(\cdot) \cdot \phi_i(\cdot)\big) = \underbrace{T_{\phi_i(x)} h_i \circ T_x \phi_i}_{\text{POŻĄDANE}} + \underbrace{\big(h_i(\cdot)^{-1} T_x h_i(\cdot)\big) \cdot h_i(\cdot) \cdot \phi_i(\cdot)}_{\text{NIEPOŻĄDANE!}} .$$

BIORĄC POD UWAGĘ POWYŻSZE W POŁĄCZENIU Z FORMUŁĄ ⊛ ZE STR. 266.,
ROZWAŻMY ZAMIAST $T\phi_i$ WYRAŻENIE

$$\mathcal{D}^{A_i}\phi_i := T\phi_i + \underline{A}_i(\cdot)\otimes\mathcal{K}(\phi_i(\cdot)) : TM\restriction_{\Theta_i} \longrightarrow TU(1)\restriction_{\phi_i(\Theta_i)},$$

GDZIE $\left(\underline{A}_i(\cdot)\otimes\mathcal{K}(\phi_i(\cdot))\right)(\partial_\mu) \equiv \underline{A}_{i\mu}(\cdot)\triangleright\mathcal{K}(\phi_i(\cdot))$.

STWIERDZAMY:

NB: $h_i^{-1}dh_i(\partial_\mu) = h_i^{-1}\partial_\mu h_i$
$h_i^{-1}T h_i(\partial_\mu) = h_i^{-1}\partial_\mu h_i\,\partial_z$

$$\mathcal{D}^{A_i^h}\phi_i^h \equiv T\phi_i^h + \underline{A}_i^h(\cdot)\otimes\mathcal{K}(\phi_i^h(\cdot))$$

$$= T_{\phi_i}\ell_{h_i}\circ T\phi_i + h_i\cdot\phi_i\triangleright h_i^{-1}Th_i + \underline{A}_i\otimes\mathcal{K}(h_i\cdot\phi_i) - i h_i^{-1}dh_i\otimes\mathcal{K}(h_i\cdot\phi_i)$$

$$\equiv T_{\phi_i}\ell_{h_i}\circ T\phi_i + \underline{A}_i\otimes T_{\phi_i}\ell_{h_i}(\mathcal{K}(\phi_i)) \quad \text{(STR. 280.)}$$

$$+ i h_i^{-1}dh_i\otimes(-i h_i\cdot\phi_i\,\partial_z) - i h_i^{-1}dh_i\otimes\mathcal{K}(h_i\cdot\phi_i)$$

$$= T_{\phi_i} \ell_{h_i} \circ T_\cdot \phi_i + \underline{A}_i \otimes T_{\phi_i} \ell_{h_i} (\mathcal{K}(\phi_i)) \equiv T_{\phi_i} \ell_{h_i} \circ \mathcal{D}^{A_i}_\cdot \phi_i \,, \qquad ** $$

CO JEST WŁAŚNIE ZACHOWANIEM POŻĄDANYM!

PRZY TYM WYRAŻENIE LOKALNE $\mathcal{D}^{A_i}_\cdot \phi_i$ MA PROSTĄ INTERPRETACJĘ:

$$\mathcal{D}^{A_i} \phi_i \equiv \Theta_i \circ (\mathrm{id}_{TM}, T_\cdot \phi_i) \qquad (\text{NB: } d\phi_i \otimes \partial_z \equiv T_\cdot \phi_i)$$

$$\equiv (\mathrm{pr}_2 \circ)\left(T[\tau_i] \circ \Theta \circ T[\tau_i]^{-1}\right) \circ \left(T[\tau_i] \circ T\phi\right)$$

$$= (\mathrm{pr}_2 \circ) \, T[\tau_i] \circ (\Theta \circ T\phi) \,. \qquad ***$$

WIDZIMY ZATEM, ŻE $\mathcal{D}^{A_i} \phi_i$ JEST LOKALNĄ PREZENTACJĄ OBIEKTU GLOBALNEGO: ZWERTYKALIZOWANEJ POCHODNEJ

$$\nabla^{\Theta} : \Gamma(P_F) \ni \phi \longmapsto \Theta \circ T\phi \in \Gamma(TM \otimes VP_F|_{\phi(M)})$$

W SZCZEGÓLNOŚCI ZACHODZI RELACJA

$$\mathcal{D}^{A_i}\phi_i\restriction_{TO_{ij}} = (\mathrm{pr}_2\circ)T[\tau_i]\circ\textcircled{H}\circ T\phi\restriction_{TO_{ij}} = (\mathrm{pr}_2\circ)T\left([\tau_i]\circ[\tau_j]^{-1}\right)\circ T[\tau_j]\circ\textcircled{H}\circ T\phi\restriction_{TO_{ij}}$$

$$= T_{\phi_j}\ell_{g_{ij}}\circ(\mathrm{pr}_2\circ)T[\tau_j]\circ\textcircled{H}\circ T\phi\restriction_{TO_{ij}} \equiv T_{\phi_j}\ell_{g_{ij}}\circ\mathcal{D}^{A_j}\phi_j\restriction_{TO_{ij}}$$

NB: PROSTE PRAWO TRANSFORMACYJNE (**) IMPLIKUJE – W POŁĄCZENIU Z (***) – STRUKTURALNĄ RELACJĘ: $\textcircled{H}^{\Phi} = T\Phi\circ\textcircled{H}\circ T\Phi^{-1}$ POMIĘDZY RZUTEM $\textcircled{H}$ O DANYCH LOKALNYCH $\underline{A_i}$ I RZUTEM $\textcircled{H}^{\Phi}$ O DANYCH LOKALNYCH $\underline{A_i^h}$.

NA ZAKOŃCZENIE NASZEGO FIZYKALNIE UMOTYWOWANEGO STUDIUM PRZYPADKU USTALMY ZWIĄZEK MIĘDZY RZUTAMI $\textcircled{H}$ I TENSOREM FARADAYA F, KTÓRY POZWOLI NAM NA ZGRABNĄ REINTERPRETACJĘ GEOMETRYCZNĄ F, PODDAJĄCĄ SIĘ NATURALNEJ ABSTRAKCJI

ZAUWAŻMY, ŻE DLA DOWOLNYCH PÓL WEKTOROWYCH ZNAD LOKALNEGO MODELU $\mathcal{O}_i \times U(1)$ WIĄZKI DIRACA P_F,

$$\mathcal{X}_a := \xi_a + V_a \in \Gamma(TM|_{\mathcal{O}_i}) \oplus \Gamma(TU(1)), \quad a \in \{1,2\},$$

KTÓRE ROZPINAJĄ $T(\mathcal{O}_i \times U(1)) \equiv T$, ZACHODZI RÓWNOŚĆ

$$[\mathrm{id}_T - \Theta_i, \mathrm{id}_T - \Theta_i]_{\Gamma(T)}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \equiv [\mathrm{id}_{TM} - \underline{A}_i \otimes \mathcal{K}, \mathrm{id}_{TM} - \underline{A}_i \otimes \mathcal{K}]_{\Gamma(T)}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$$

$$= [\xi_1 - (\xi_1 \lrcorner \underline{A}_i) \triangleright \mathcal{K}, \xi_2 - (\xi_2 \lrcorner \underline{A}_i) \triangleright \mathcal{K}]_{\Gamma(T)}$$

$$\mathcal{K}(\xi_a \lrcorner \underline{A}_i) = 0$$

LEIBNIZ

$$+$$

$$= [\xi_1, \xi_2]_{\Gamma(TM)} + (\xi_1 \lrcorner \underline{A}_i) \cdot (\xi_2 \lrcorner \underline{A}_i) \triangleright [\mathcal{K}, \mathcal{K}]_{\Gamma(TU(1))}$$

$$[\xi_a, \mathcal{K}] = 0$$

$$- \xi_1(\xi_2 \lrcorner \underline{A}_i) \triangleright \mathcal{K} + \xi_2(\xi_1 \lrcorner \underline{A}_i) \triangleright \mathcal{K}$$

$$= [\xi_1, \xi_2]_{\Gamma(TM)} + \xi_2(\xi_1 \lrcorner \underline{A}_i) \triangleright \mathcal{K} - \xi_1(\xi_2 \lrcorner \underline{A}_i) \triangleright \mathcal{K},$$

A WOBEC TEGO

$$\Theta_i \circ [\mathrm{id}_T - \Theta_i, \mathrm{id}_T - \Theta_i]_{\Gamma(T)}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) = \left(\xi_2(\xi_1 \lrcorner \underline{A}_i) - \xi_1(\xi_2 \lrcorner \underline{A}_i) + [\xi_1, \xi_2]_{\Gamma(TM)} \lrcorner \underline{A}_i\right) \triangleright \mathcal{K}.$$

PRZY TYM

$$\xi_2(\xi_1 \lrcorner \underline{A}_i) - \xi_1(\xi_2 \lrcorner \underline{A}_i) + [\xi_1, \xi_2]_{\Gamma(TM)} \lrcorner \underline{A}_i$$

$$\equiv \xi_2 \lrcorner d(\xi_1 \lrcorner \underline{A}_i) - \xi_1 \lrcorner d(\xi_2 \lrcorner \underline{A}_i) + [\xi_1, \xi_2]_{\Gamma(TM)} \lrcorner \underline{A}_i$$

$$\equiv \xi_2 \lrcorner d(\xi_1 \lrcorner \underline{A}_i) - \mathcal{L}_{\xi_1}(\xi_2 \lrcorner \underline{A}_i) + [\xi_1, \xi_2]_{\Gamma(TM)} \lrcorner \underline{A}_i$$

$$\equiv \xi_2 \lrcorner d(\xi_1 \lrcorner \underline{A}_i) - \mathcal{L}_{\xi_1}(\xi_2) \lrcorner \underline{A}_i - \xi_2 \lrcorner \mathcal{L}_{\xi_1} \underline{A}_i + [\xi_1, \xi_2]_{\Gamma(TM)} \lrcorner \underline{A}_i$$

$$\equiv \xi_2 \lrcorner d(\xi_1 \lrcorner \underline{A}_i) - \mathcal{L}_{\xi_1}(\xi_2) \lrcorner \underline{A}_i - \xi_2 \lrcorner d(\xi_1 \lrcorner \underline{A}_i) - \xi_2 \lrcorner \xi_1 \lrcorner d\underline{A}_i + [\xi_1, \xi_2]_{\Gamma(TM)} \lrcorner \underline{A}_i$$

$$\equiv -[\xi_1, \xi_2]_{\Gamma(TM)} \lrcorner \underline{A}_i - \xi_2 \lrcorner \xi_1 \lrcorner \tfrac{g}{\hbar} F + [\xi_1, \xi_2]_{\Gamma(TM)} \lrcorner \underline{A}_i$$

$$\equiv -\xi_2 \lrcorner \xi_1 \lrcorner \tfrac{g}{\hbar} F$$

OSTATECZNIE ZATEM

$$\Theta_i \circ [\mathrm{id}_T - \Theta_i, \mathrm{id}_T - \Theta_i]_{\Gamma(T)} = -\frac{g}{\hbar} F \circ (\mathrm{pr}_2 \otimes \mathrm{pr}_2) \equiv -\frac{g}{\hbar} \mathrm{pr}_2^* F,$$

CO PO UWZGLĘDNIENIU Corr. 2. GLOBALIZUJE SIĘ W POSTACI

$$\Theta \circ [\mathrm{id}_{TP_F} - \Theta, \mathrm{id}_{TP_F} - \Theta]_{\Gamma(TP_F)} = -\frac{g}{\hbar} \pi_{P_F}^* F.$$

TYM SAMYM TENSOR FARADAYA ZYSKUJE INTERPRETACJĘ ILOŚCIOWEJ MIARY OBSTRUKCJI WZGLĘDEM INWOLUTYWNOŚCI (WIĘC - W ŚWIETLE Tw. FROBENIUSA, KTÓREGO TUTAJ NIE OMAWIAMY - CAŁKOWALNOŚCI) DYSTRYBUCJI HORYZONTALNEJ HP_F : $F \neq 0$ JEST RÓWNOZNACZNE Z ISTNIENIEM PÓL WEKTOROWYCH POZIOMYCH, KTÓRYCH KOMUTATORY MAJĄ SKŁADOWĄ PIONOWĄ.

PONIŻEJ SFORMALIZUJEMY REZULTATY NASZEGO STUDIUM PRZYPADKU UMOTYWOWANEGO BEZPOŚREDNIO POTRZEBĄ FIZYKALNĄ W FORMIE ELEMENTARNEJ AKSJOMATYKI EHRESMANNA-CARTANA POWIĄZANIA NA WIĄZCE WŁÓKNISTEJ...

ZACZNIEMY OD POMOCNICZEJ

Def. 36. PODWIĄZKA WIĄZKI WŁÓKNISTEJ (E, B, F, π_E) TO WIĄZKA WŁÓKNISTA $(\tilde{E}, B, \tilde{F}, \pi_{\tilde{E}})$, ZŁOŻONA Z PODROZMAITOŚCI $\tilde{E} \subset E$, $\tilde{F} \subset F$ ORAZ OGRANICZENIA $\pi_{\tilde{E}} = \pi_E \restriction_{\tilde{E}}$, NA KTÓREJ OGRANICZENIA TRYWIALIZACJI LOKALNYCH E INDUKUJĄ TRYWIALIZACJE LOKALNE, TJ. $\tau_i(\pi_{\tilde{E}}^{-1}(\mathcal{O}_i)) = \mathcal{O}_i \times \tilde{F} \subset \mathcal{O}_i \times F$, A ZATEM TAKŻE ODNOŚNE ODWZOROWANIA PRZEJŚCIA ZACHOWUJĄ $\tilde{F} \subset F$.

W PRZYPADKU WIĄZKI WEKTOROWEJ MÓWIMY O PODWIĄZCE WEKTOROWEJ, JEŚLI DODATKOWO KAŻDE Z WŁÓKIEN PODWIĄZKI JEST PODPRZESTRZENIĄ WŁÓKNA WIĄZKI.

X

... I POMOCNICZEGO

Tw. 20. [O STAŁYM RZĘDZIE MORFIZMU WIĄZEK WEKTOROWYCH]

NIECHAJ $(\mathbb{V}_a, B_a, \mathbb{R}^{\times N_a}, \pi_{\mathbb{V}_a})$, $a \in \{1,2\}$ BĘDĄ WIĄZKAMI WEKTOROWYMI I NIECH

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}_1 & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{V}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

BĘDZIE MORFIZMEM WIĄZEK WEKTOROWYCH. JEGO RZĄD TO $\mathrm{rk}\,\Phi : B_1 \longrightarrow \mathbb{N}$, $x \mapsto \mathrm{rk}\,\Phi\restriction_{\mathbb{V}_{1x}}$.

ZACHODZI IMPLIKACJA: $\mathrm{rk}\,\Phi = \mathrm{const.} \Longrightarrow \mathrm{Ker}\,\Phi := \bigsqcup_{x \in B_1} \mathrm{Ker}\,\Phi\restriction_{\mathbb{V}_{1x}} \subset \mathbb{V}_1$ JEST PODWIĄZKĄ WEKTOROWĄ.

D: W NOTATKACH Z KURSU „ELEMENTY ALGEBRY WYŻSZEJ W FIZYCE" ZAMIESZCZONYCH NA STRONIE INTERNETOWEJ NINIEJSZEGO WYKŁADU. □

MAMY PRZETO

Coroll. 5. WIĄZKA STYCZNA NAD PRZESTRZENIĄ TOTALNĄ E WIĄZKI WŁÓKNISTEJ (E, B, F, π_E) ZAWIERA PODWIĄZKĘ PIONOWĄ (ALBO WERTYKALNĄ) $VE := \mathrm{Ker}\, T\pi_E$.

D: RZUT NA BAZĘ $\pi_E : E \to B$ JEST (SURJEKTYWNĄ) SUBMERSJĄ, ZATEM $T_e\pi_E$ JEST SURJEKCJĄ $\forall e \in E$, TO ZAŚ OZNACZA, ŻE MORFIZM WIĄZEK WEKTOROWYCH

$$\begin{tikzcd} TE \arrow[r, "T\pi_E"'] \arrow[d, "\tau_{TE}"'] & TB \arrow[d, "\tau_{TB}"] \\ E \arrow[r, "\pi_E"'] & B \end{tikzcd}$$

MA MAKSYMALNY RZĄD: $\mathrm{rk}\, T\pi_E = \mathrm{rk}\, TB = \dim B$, CZYLI – W SZCZEGÓLNOŚCI – RZĄD STAŁY. $\square$

TO POZWALA NAM WYPISAĆ ...

Def. 37. POWIĄZANIE EHRESMANNA NA WIĄZCE WŁÓKNISTEJ (E, B, F, π_E) TO ROZKŁAD WIĄZKI STYCZNEJ $(TE, E, \mathbb{R}^{\times \dim E}, \pi_{TE})$ NAD PRZESTRZENIĄ TOTALNĄ E NA SUMĘ WHITNEYA

$$TE \simeq VE \oplus HE.$$

(PATRZ: Str. 113.)

W ŚWIETLE Corr. 5. ISTOTĄ POWYŻSZEJ DEFINICJI JEST WYBÓR PODWIĄZKI POZIOMEJ $HE \subset TE$. JEJ SENS GEOMETRYCZNY USTALA (JAK W STUDIUM PRZYPADKU – PATRZ: Str. 278.)

Stw. 43. $\forall e \in E : H_e E \simeq T_{\pi_E(e)} B$

D: TRYWIALNY RACHUNEK WYMIARÓW NA GRUNCIE IDENTYFIKACJI $V_e E \equiv \mathrm{Ker}\, T_e \pi_E = T_e E_{\pi_E(e)}$. MAMY PRZY TYM $\simeq \equiv T\pi_E \restriction_{H_e E}$. $\square$

ALTERNATYWNEGO OPISU POWIĄZANIA NA WIĄZCE DOSTARCZA

Def. 38. FORMA POWIĄZANIA CARTANA NA WIĄZCE WŁÓKNISTEJ (E,B,F,π_E) TO (WERTYKALNY) MORFIZM WIĄZEK WEKTOROWYCH

$$\begin{tikzcd} TE \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\pi_{TE}"'] & VE \subset TE \arrow[d, "\pi_{TE}\restriction_{VE}"] \\ E \arrow[r, equal] & E \end{tikzcd}$$

O WŁASNOŚCI $H\restriction_{VE\subset TE} = \mathrm{id}_{VE}$.

W OCZYWISTY SPOSÓB H STANOWI GEOMETRYZACJĘ ALTERNATYWNEJ DEFINICJI SUMY PROSTEJ, ZNANEJ Z ALGEBRY LINIOWEJ: ROZKŁAD $V \simeq V_1 \oplus V_2$ DLA PODPRZESTRZENI $V_1, V_2 \subset V$ PRZESTRZENI $\mathbb{K}$-LINIOWEJ V JEST RÓWNOZNACZNY Z ISTNIENIEM OPERATORA

RZUTU $P \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$, $P^2 = P$ Z V NA V_1 WZDŁUŻ V_2.
MORFIZM Ⓗ JEST RODZINĄ GŁADKO INDEKSOWANĄ PRZEZ E TAKICH WŁAŚNIE RZUTÓW Z T_eE NA V_eE WZDŁUŻ $\mathrm{Ker}\,Ⓗ\restriction_{T_eE}$.
TA UWAGA PROWADZI NAS WPROST DO

Tw. 21. FORMA POWIĄZANIA CARTANA WYZNACZA POWIĄZANIE EHRESMANNA I VICE VERSA.

D: MAJĄC Ⓗ JAK W **Def. 37**, DEFINIUJEMY

$$HE := \mathrm{Ker}\,Ⓗ.$$

JAKO ŻE Ⓗ MA RZĄD MAKSYMALNY (WSZAK $Ⓗ\restriction_{VE} = \mathrm{id}_{VE}$), PRZETO MA RZĄD STAŁY, CO OZNACZA, ŻE $\mathrm{Ker}\,Ⓗ \subset TE$ JEST PODWIĄZKĄ. MUSIMY JEDYNIE USTALIĆ, CZY DOPEŁNIA PROSTO

$VE \equiv \mathrm{Ker}\, T\pi_E$, CO CZYNIMY PUNKT PO PUNKCIE w E.

$\forall v \in HE \cap VE : \quad v \equiv \mathrm{id}_{VE}(v) = \circledast(v) = 0 \Leftarrow v \in HE.$

JEST ZATEM $\forall e \in E : H_e E \cap V_e E = \{0_{T_e E}\}$.

PRZY TYM MAMY BILANS WYMIARÓW

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}\, \circledast\restriction_{T_e E} = \dim_{\mathbb{R}} T_e E - \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\, \circledast\restriction_{T_e E} = \dim_{\mathbb{R}} T_e E - \dim_{\mathbb{R}} V_e E,$$

KTÓRY IMPLIKUJE POŻĄDANĄ TOŻSAMOŚĆ $T_e E = V_e E \oplus H_e E$. $\blacksquare$

DOWÓD WYNIKANIA ODWROTNEGO: EHRESMANN $\Rightarrow$ CARTAN POZOSTAWIAMY JAKO ĆWICZENIE DOMOWE.

PODPOWIEDŹ: ROZKŁAD $TE = VE \oplus HE$ OZNACZA W OBRAZIE TRYWIALIZACJI LOKALNEJ $T\tau_i$: ISTNIENIE WYRÓŻNIONYCH

SKŁADOWYCH PROSTYCH $T(O_i \times F)$, W SZCZEGÓLNOŚCI ZAŚ – ISTNIENIE GŁADKO INDEKSOWANEJ PRZEZ $O_i \times F$ RODZINY PODPRZESTRZENI POZIOMYCH $T\tau_i(HE|_{\pi_E^{-1}(O_i)}) \subset T(O_i \times F)$ (TZW. GŁADKIEJ PODROZMAITOŚCI ROZMAITOŚCI STYCZNEJ $T(O_i \times F)$, BĘDĄCEJ SUMĄ ROZŁĄCZNĄ – NAD BAZĄ – PODPRZESTRZENI). TĘ RODZINĘ PODPRZESTRZENI MOŻNA OPISAĆ PRZY UŻYCIU GŁADKO INDEKSOWANEJ PRZEZ $O_i \times F$ RODZINY OPERATORÓW RZUTOWYCH – PATRZ : SK. 276–278. ZACHOWYWANIE $T\tau_i(HE) \oplus T\tau_i(VE)$ PRZEZ ODWZOROWANIA PRZEJŚCIA (ICH STYCZNOŚCIOWE PODNIESIENIA) GWARANTUJE ZSZYCIE TAK OTRZYMANYCH ODWZOROWAŃ $T\tau_i(TE) \longrightarrow T\tau_i(VE)$ W GŁADKIE ODWZOROWANIA $TE \longrightarrow VE$. $\square$

CELEM WYPISANIA NAJPROSTSZEGO PRZYKŁADU MUSIMY WPROWADZIĆ ELEMENTARNĄ KONSTRUKCJĘ TEORII WIĄZEK :

Def. 39. NIECHAJ (E, B, F, π_E) BĘDZIE WIĄZKĄ WŁÓKNISTĄ, X ZAŚ – ROZMAITOŚCIĄ GŁADKĄ, A $f \in C^\infty(X, B)$. COFNIĘCIE WIĄZKI (E, B, F, π_E) NAD X WZDŁUŻ f TO WIĄZKA WŁÓKNISTA

$$(f^*E, X, F, \pi_{f^*E})$$

O PRZESTRZENI TOTALNEJ I RZUCIE NA BAZĘ OPISANYCH PRZEZ DIAGRAM PRZEMIENNY

$$\begin{tikzcd} f^*E := X {}_f\!\times_{\pi_E} E \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "\pi_{f^*E} := pr_1"'] & E \arrow[d, "\pi_E"] \\ X \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd},$$

W KTÓRYM GŁADKOŚĆ ILOCZYNU ROZWŁÓKNIONEGO

$$X {}_f\!\times_{\pi_E} E := \{(x, e) \in X \times E \mid f(x) = \pi_E(e)\} \subset X \times E \text{ JEST}$$

ZAGWARANTOWANA PRZEZ SUBMERSYWNOŚĆ JTE (PATRZ: [Lee]). WIĄZKA TA MA POKRYCIE TRYWIALIZUJĄCE $\{f^{-1}(\mathcal{O}_i)\}_{i\in I}$ INDUKOWANE PRZEZ POKRYCIE TRYWIALIZUJĄCE $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}\subset \mathcal{T}(B)$ WIĄZKI E, A NAD NIM – ODWZOROWANIA PRZEJŚCIA

$$f^*g_{ij}\ :\ f^{-1}(\mathcal{O}_i)\cap f^{-1}(\mathcal{O}_j)\longrightarrow \mathrm{Aut}(F).$$

TERAZ MOŻEMY JUŻ WYSŁOWIĆ

E.G. 1 NA WIĄZCE TRYWIALNEJ $E=B\times F$ ISTNIEJE KANONICZNY WYBÓR POWIĄZANIA EHRESMANNA: $TE\simeq pr_2^*TF\oplus pr_1^*TB$, W KTÓREGO ZAPISIE $pr_1: E\to B$ i $pr_2: E\to F$ SĄ RZUTAMI KANONICZNYMI NA SKŁADOWE KARTEZJAŃSKIE DZIEDZINY

(NIEODZOWNYMI – WSZAK TB JEST NAD B, A TF – NAD F!).
RZECZ JASNA, MAMY TU $pr_1^* TB \equiv H(B\times F)$.
ODNOŚNA FORMA POWIĄZANIA TO $\Theta_0 = pr_2$.

X

W NASTĘPNEJ KOLEJNOŚCI PODDAMY ABSTRAKCJI OBSERWACJĘ ZE
Str. 287.–289.

Def. 40. KRZYWIZNA POWIĄZANIA NA WIĄZCE (E, B, F, π_E)
O FORMIE POWIĄZANIA Θ TO ODWZOROWANIE
$$R(\Theta) := \Theta \circ [\mathrm{id}_{TE} - \Theta, \mathrm{id}_{TE} - \Theta]_{\Gamma(TE)} : \Gamma(TE)^{\times 2} \longrightarrow \Gamma(VE),$$
STANOWIĄCE MIARĘ NIEINWOLUTYWNOŚCI HE.
W PRZYTOCZONYM UPRZEDNIO PRZYKŁADZIE KANONICZNEGO

POWIĄZANIA NA $E = B \times F$ ZACHODZI $R(\Theta_0) = 0$, SKĄD NAZWA: <u>POWIĄZANIE PŁASKIE</u>.

WRESZCIE NA ZAKOŃCZENIE DYSKUSJI OGÓLNEJ WPROWADZIMY NATURALNE WY-SUBTELNIENIE POJĘCIA MORFIZMU WIĄZEK WEKTOROWYCH UWZGLĘDNIAJĄCE OBECNOŚĆ NA NICH POWIĄZAŃ.

Def. 41. MORFIZM WIĄZEK $(\Phi, f) : (E_1, B_1, F_1, \pi_{E_1}) \longrightarrow (E_2, B_2, F_2, \pi_{E_2})$ O ODNOŚNYCH FORMACH POWIĄZANIA Θ_1 i Θ_2 NAZWIEMY <u>ZACHOWUJĄCYM POWIĄZANIE</u>, JEŚLI NASTĘPUJĄCY DIAGRAM MORFIZMÓW WIĄZEK WEKTOROWYCH JEST PRZEMIENNY:

$$\begin{tikzcd} TE_1 \arrow[r, "T\Phi"] \arrow[d, "\Theta_1"'] & TE_2 \arrow[d, "\Theta_2"] \\ VE_1 \arrow[r, "T\Phi|_{VE_1}"'] & VE_2 \end{tikzcd},$$

PRZY CZYM ZAWIERANIE $T\Phi(VE_1) \subset VE_2$ WYNIKA Z PRZEMIENNOŚCI DIAGRAMU DEFINIUJĄCEGO (Φ, f).

ISTOTNIE, $E_1 \xrightarrow{\Phi} E_2$ PODNOSI SIĘ FUNKTORIALNIE DO $TE_1 \xrightarrow{T\Phi} TE_2$,

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_{E_1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & E_2 \arrow[d, "\pi_{E_2}"] \\ B_1 \arrow[r, "f"'] & B_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TE_1 \arrow[r, "T\Phi"] \arrow[d, "T\pi_{E_1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & TE_2 \arrow[d, "T\pi_{E_2}"] \\ TB_1 \arrow[r, "Tf"'] & TB_2 \end{tikzcd}$$

PRZETO $T\pi_{E_2}\left(T\Phi(\ker T\pi_{E_1})\right) = \left(Tf \circ T\pi_{E_1}\right)(\ker T\pi_{E_1}) = Tf(0) = 0.$

JAKO SZCZEGÓLNE ZASTOSOWANIE POWYŻSZEJ DEFINICJI ROZWAŻYMY PRZYPADEK $\Phi \in \mathrm{Aut}(E)$, $f = \mathrm{id}_B$ – TAKI AUTOMORFIZM (WERTYKALNY) NAZWIEMY – W RAMACH SKROMNEGO NADUŻYCIA GWARY FIZYKALNEJ – TRANSFORMACJĄ CECHOWANIA. OZNACZYWSZY FORMĘ POWIĄZANIA NA OBRAZIE $\Phi(E) \equiv E$ SYMBOLEM $\textcircled{H}^{\Phi}$ (W OGÓLNOŚCI NIE MA POWODU OCZEKIWAĆ, ŻE BĘDZIE TO

TA SAMA FORMA O WARTOŚCIACH WEKTOROWYCH $Ⓗ : TE \to VE$), OTRZYMUJEMY FORMUŁĘ OKREŚLAJĄCĄ TRANSFORMATĘ CECHOWANIA FORMY POWIĄZANIA

$$\boxed{Ⓗ^{\Phi} = T\Phi \circ Ⓗ \circ T\Phi^{-1}}$$

JEJ ZNACZENIE UWYPUKLA FINALNA ABSTRAKCJA (PATRZ: Str. 285.):

Def. 42. POCHODNA KOWARIANTNA NA WIĄZCE WŁÓKNISTEJ (E, B, F, π_E) O FORMIE POWIĄZANIA $Ⓗ : TE \to VE$ TO ODWZOROWANIE $\nabla^{Ⓗ} : \Gamma(E) \ni \phi \longmapsto Ⓗ \circ T\phi \in \Gamma(T^*B \otimes \phi^* VE)$, PRZY CZYM OBECNOŚĆ WIĄZKI COFNIĘTEJ $\phi^* VE$ OZNACZA TU TYLE, ŻE ODWZOROWANIE ZŁOŻONE $Ⓗ \circ T\phi : TB \to TE \to VE$

JEST NATURALNIE OGRANICZONE (PRZEZ OBECNOŚĆ $T\phi$, KTÓREGO PRZECIWDZIEDZINĄ JEST $TE|_{\phi(B)} \simeq \phi^* TE$) DO $VE|_{\phi(B)}$.

WYJAŚNIENIE NAZWY ZWERTYKALIZOWANEGO RÓŻNICZKOWANIA $\nabla^{(H)}$ PRZYNOSI

Stw. 44. POCHODNA KOWARIANTNA TRANSFORMUJE SIĘ WZGLĘDEM AUTOMORFIZMÓW WERTYKALNYCH $\Phi \in \mathrm{Aut}(E), f = \mathrm{id}_B$ WEDŁUG WZORU
$$\nabla^{(H)^{\Phi}} \phi^{\Phi} = T\Phi \circ \nabla^{(H)} \phi,$$
W KTÓRYM $\phi^{\Phi} := \Phi \circ \phi$ JEST TRANSFORMATĄ CECHOWANIA $\phi \in \Gamma(E)$.

D: ZAUWAŻMY NAJPIERW, ŻE $\pi_E \circ \phi^{\Phi} = \pi_E \circ \phi = \mathrm{id}_B$, ZATEM — ISTOTNIE — $\phi^{\Phi} \in \Gamma(E)$. PONADTO $\nabla^{(H)^{\Phi}} \phi^{\Phi} \equiv (H)^{\Phi} \circ T\phi^{\Phi} = T\Phi \circ (H) \circ T\Phi^{-1} \circ T(\Phi \circ \phi) = T\Phi \circ (H) \circ T\phi \equiv \nabla^{(H)} \phi$. □

Część XV

NA ZAKOŃCZENIE NASZYCH ROZWAŻAŃ NAD GEOMETRIĄ WIĄZEK WŁÓKNISTYCH PRZYJRZYMY SIĘ BLIŻEJ POWIĄZANIOM NA WIĄZKACH WEKTOROWYCH UZGODNIONYM ZE STRUKTURĄ LINIOWĄ NA ICH WŁÓKNACH. FIZYKALNEGO USPRAWIEDLIWIENIA TAKIEGO WYBORU PRZEDMIOTU ANALIZY DOSTARCZA PROSTA KONSTATACJA: OTO ZARÓWNO WIĄZKA STYCZNA NAD CZASOPRZESTRZENIĄ (WYPOSAŻONA DODATKOWO W STRUKTURĘ METRYCZNĄ), JAK I WIĄZKI SPINOROWE MODELUJĄCE (PO TZW. SUPERYZACJI WŁÓKNA) POLA FERMIONOWE (TUDZIEŻ WIĄZKI CLIFFORDA NA NICH REALIZOWANE) SĄ TAKIMI WŁAŚNIE WIĄZKAMI WEKTOROWYMI, A TEORIA POLA I TEORIA WZGLĘDNOŚCI DOMAGAJĄ SIĘ RÓŻNICZKOWANIA ICH CIĘĆ...

ZACZNIEMY OD OBSERWACJI: PODWIĄZKA PIONOWA $VW \subset TW$ WIĄZKI STYCZNEJ NAD WIĄZKĄ WEKTOROWĄ $(W, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_W)$ JEST ZACHOWYWANA PRZEZ STYCZNOŚCIOWE PODNIESIENIA $T\mathbb{L}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ MORFIZMÓW $\mathbb{L}_\lambda$ IMPLEMENTUJĄCYCH DZIAŁANIE CIAŁA BAZOWEGO $\mathbb{R}$ NA (WŁÓKNACH) W. ISTOTNIE, DLA DOWOLNYCH $v \in W$, $V \in V_v W \equiv \mathrm{Ker}\, T_v \pi_W$ I $\lambda \in \mathbb{R}$ ZACHODZI $T_{\mathbb{L}_\lambda(v)}\pi_W (T_v \mathbb{L}_\lambda (V)) = T_v(\pi_W \circ \mathbb{L}_\lambda)(V) = T_v \pi_W (V) = 0$.

TO PODKREŚLA NIETRYWIALNOŚĆ WARUNKU UZGODNIENIA POWIĄZANIA ZE STRUKTURĄ LINIOWĄ W PONIŻSZEJ

Def. 43. POWIĄZANIE EHRESMANNA $TW \cong VW \oplus HW$ NA WIĄZCE WEKTOROWEJ $(W, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_W)$ NAZWIEMY <u>LINIOWYM</u>, JEŻELI

$$\forall v \in W, \lambda \in \mathbb{R} : T_v \mathbb{L}_\lambda (H_v W) = H_{\mathbb{L}_\lambda(v)} W.$$

Prostą konsekwencją powyższej definicji jest

Stw. 45. W dowolnym punkcie cięcia zerowego wiązki wektorowej przestrzeń pozioma liniowego powiązania Ehresmanna jest styczna do tegoż cięcia, tj. $\forall_{x \in B}: H_{0_{\mathbb{V}}(x)}\mathbb{V} = T_{0_{\mathbb{V}}(x)}\big(0_{\mathbb{V}}(B)\big)$.

D: Wprost na mocy definicji:

$$H_{0_{\mathbb{V}}(x)}\mathbb{V} \equiv H_{\mathbb{L}_0(0_{\mathbb{V}}(x))}\mathbb{V} = T_{0_{\mathbb{V}}(x)}\mathbb{L}_0\big(H_{0_{\mathbb{V}}(x)}\mathbb{V}\big),$$

a operator $T_{0_{\mathbb{V}}(x)}\mathbb{L}_0$ anihiluje wektory pionowe. □

Zanim przejdziemy do alternatywnych a równoważnych opisów powiązania na wiązce wektorowej, zatrzymamy się na chwilę przy nader przydatnym izomorfizmie, stanowiącym punkt wyjścia do tej dalszej dyskusji.

MAMY OTÓŻ – W DOWOLNYM PUNKCIE $v \in \mathbb{V}_x$, $x \in B$ –

$$\mathrm{VerT}_v : \mathbb{V}_x \xrightarrow{\cong} V_v\mathbb{V}, \quad w \longmapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(v + t \triangleright w),$$

GDZIE PO PRAWEJ STRONIE WIDZIMY KLASĘ RÓWNOWAŻNOŚCI ŚCIEŻEK PRZEZ v.
BIJEKCJA TA JEST JAWNIE $\mathbb{R}$-LINIOWA – W SZCZEGÓLNOŚCI

$$\mathrm{VerT}_v(r \triangleright w) \equiv \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\big(v + t \triangleright (r \triangleright w)\big) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(v + tr \triangleright w) = r \triangleright \frac{d}{d\xi}\Big|_{\xi=0}(v + \xi \triangleright w)$$

$$\equiv r \triangleright \mathrm{VerT}_v(w).$$

ZDEFINIOWANY POWYŻEJ IZOMORFIZM SPLATA ZE SOBĄ DZIAŁANIE CIAŁA BAZOWEGO $\mathbb{R}$ NA $\mathbb{V}$ Z OGRANICZENIEM JEGO STYCZNOŚCIOWEGO PODNIESIENIA DO $V\mathbb{V} \subset T\mathbb{V}$... ISTOTNIE, ZACHODZI – DLA DOWOLNYCH $\lambda \in \mathbb{R}$ I $v, w \in \mathbb{V}_x$ –

$$\mathrm{VerT}_{\mathbb{L}_\lambda(v)} \circ \mathbb{L}_\lambda \circ \mathrm{VerT}_v^{-1}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(v + t \triangleright w)\right) \equiv \mathrm{VerT}_{\mathbb{L}_\lambda(v)} \circ \mathbb{L}_\lambda(w)$$

$$\equiv \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\big(\mathbb{L}_\lambda(v) + t \triangleright \mathbb{L}_\lambda(w)\big) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathbb{L}_\lambda(v + t \triangleright w) = T_v\mathbb{L}_\lambda\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(v + t \triangleright w)\right),$$

CZYLI $T_v \mathbb{L}_\lambda \restriction_{V_v \mathbb{V}} = \mathrm{Ver}_{\mathbb{L}_\lambda(v)} \circ \mathbb{L}_\lambda \circ \mathrm{Ver}_v^{-1}$.

MOŻEMY JUŻ TERAZ WYSŁOWIĆ

Def. 44. FORMA POWIĄZANIA LINIOWEGO NA WIĄZCE WEKTOROWEJ $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$

TO MORFIZM WIĄZEK WEKTOROWYCH $(\mathcal{A}, \pi_{\mathbb{V}})$:

$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{V} & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \mathbb{V} \\ \pi_{T\mathbb{V}} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathbb{V}} \\ \mathbb{V} & \xrightarrow[\pi_{\mathbb{V}}]{} & B \end{array}$$

O WŁASNOŚCIACH (FL1) $\forall x \in B, v \in \mathbb{V}_x : \mathcal{A} \circ \mathrm{Ver}_v = \mathrm{id}_{\mathbb{V}_x}$

(FL2) $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \mathcal{A} \circ T\mathbb{L}_\lambda = \mathbb{L}_\lambda \circ \mathcal{A}$.

O RÓWNOWAŻNOŚCI OBU DEFINICJI PRZESĄDZA

Tw. 22. LINIOWE POWIĄZANIE EHRESMANNA WYZNACZA FORMĘ POWIĄZANIA LINIOWEGO, I VICE VERSA.

D: $\boxed{\Rightarrow}$ PATRZ: PODPOWIEDŹ W DOWODZIE Tw. 21. ORAZ

$\boxed{\Leftarrow}$ MAJĄC MORFIZM $(\mathcal{A}, \pi_{\mathbb{V}})$, DEFINIUJEMY PODWIĄZKĘ

$$H\mathbb{V} := \operatorname{Ker} \mathcal{A} \subset T\mathbb{V}$$

(JEJ STATUS OKREŚLA Tw. 20.). SKORO ZAŚ W ŚWIETLE ROZUMOWANIA ZE STR. 308. DOWOLNY WEKTOR PIONOWY $w \in V_v\mathbb{V}$ MOŻEMY PRZEDSTAWIĆ W POSTACI $w = \mathrm{Vert}_v(\varpi)$ DLA PEWNEGO $\varpi \in \mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}$, PRZETO ILEKROĆ TAKŻE $w \in H_v\mathbb{V}$, TO WÓWCZAS

$$\varpi = \mathcal{A} \circ \mathrm{Vert}_v(\varpi) = \mathcal{A}(w) = 0_{\mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}}, \text{ A ZATEM TAKŻE } w = \mathrm{Vert}_v\big(0_{\mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}}\big) = 0_{T_v\mathbb{V}},$$

CZYLI $V_v\mathbb{V} \cap H_v\mathbb{V} = \{0_{T_v\mathbb{V}}\}$, A NADTO

$$\mathrm{Ker}\left(T\pi_{\mathbb{V}}\restriction_{H_v\mathbb{V}}\right) \equiv \mathrm{Ker}\, T\pi_{\mathbb{V}}\restriction_{T_v\mathbb{V}} \cap H_v\mathbb{V} \equiv V_v\mathbb{V} \cap H_v\mathbb{V} = \{0_{T_v\mathbb{V}}\},$$

TJ. $T\pi_{\mathbb{V}}\restriction_{H_v\mathbb{V}}$ JEST MONOMORFIZMEM, A PONIEWAŻ

$$\dim_{\mathbb{R}} H_v\mathbb{V} \equiv \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}\, \mathcal{A}\restriction_{T_v\mathbb{V}} = \dim_{\mathbb{R}} T_v\mathbb{V} - \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\, \mathcal{A}\restriction_{T_v\mathbb{V}}$$

$$\equiv \dim_{\mathbb{R}} T_{\pi_{\mathbb{V}}(v)} B + \dim_{\mathbb{R}} T_v \mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)} - \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V}_v = \dim_{\mathbb{R}} T_{\pi_{\mathbb{V}}(v)} B,$$

ZATEM $T\pi_{\mathbb{V}}\restriction_{H_v\mathbb{V}}$ JEST W ISTOCIE IZOMORFIZMEM, WIĘC TEŻ

$$T\mathbb{V} = V\mathbb{V} \oplus H\mathbb{V}.$$

PRZY TYM DLA DOWOLNYCH $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{V}$ ORAZ $w \in H_v\mathbb{V}$ ZACHODZI

$$\mathcal{A}\left(T_v \mathbb{L}_\lambda(w)\right) = \mathbb{L}_\lambda\left(\mathcal{A}(w)\right) = \mathbb{L}_\lambda(0_{\mathbb{V}_v}) = 0_{\mathbb{V}_v}, \text{ CZYLI } T_v\mathbb{L}_\lambda(H_v\mathbb{V}) \subseteq H_{\mathbb{L}_\lambda(v)}\mathbb{V},$$

* SKORO POWYŻSZA RELACJA PRZECHODZI – W ŚWIETLE WCZEŚNIEJSZYCH USTALEŃ – W

$$T_{\mathbb{L}_\lambda(v)}\pi_{\mathbb{V}}\left(T_v\mathbb{L}_\lambda(H_v\mathbb{V})\right) \subseteq T_{\mathbb{L}_\lambda(v)}\pi_{\mathbb{V}}\left(H_{\mathbb{L}_\lambda(v)}\mathbb{V}\right) = T_{\pi_{\mathbb{V}}(\mathbb{L}_\lambda(v))}B = T_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}B$$

$$\parallel$$

$$T_v(\pi_{\mathbb{V}}\circ\mathbb{L}_\lambda)(H_v\mathbb{V}) = T_v\pi_{\mathbb{V}}(H_v\mathbb{V}) = T_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}B,$$ TO KONIECZNIE

$$T_v\mathbb{L}_\lambda(H_v\mathbb{V}) = H_{\mathbb{L}_\lambda(v)}\mathbb{V}. \qquad \square$$

NA ZAKOŃCZENIE DYSKUSJI STRUKTUR STYCZNOŚCIOWYCH NA WIĄZCE WEKTOROWEJ W UJĘCIU GLOBALNYM OMÓWIMY POCHODZĄCY OD KOSZULA ICH OPIS SWOISTY, W SZCZEGÓLNOŚCI UWZGLĘDNIAJĄCY OPISANE WCZEŚNIEJ UTOŻSAMIENIA – PATRZ: str. 308...

Def. 45. POWIĄZANIE KOSZULA (ZWANE TAKŻE POCHODNĄ KOSZULA) NA WIĄZCE WEKTOROWEJ $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$ TO ODWZOROWANIE

$$\nabla^{K} : \Gamma(\mathbb{V}) \longrightarrow \Gamma(T^{*}B \otimes \mathbb{V}), \quad \sigma \longmapsto \nabla^{K}_{\cdot}\sigma$$

$$\left(\Gamma(TB) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{V}), \quad \nu \longmapsto \nabla^{K}_{\nu}\sigma \right)$$

O NASTĘPUJĄCYCH WŁASNOŚCIACH:

(PK1) ADDYTYWNOŚĆ W ARGUMENCIE Z $\Gamma(\mathbb{V})$,

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(\mathbb{V}) : \nabla^{K}(\sigma_1 + \sigma_2) = \nabla^{K}\sigma_1 + \nabla^{K}\sigma_2 ; \qquad \big((\sigma_1+\sigma_2)(x) := \sigma_1(x) + \sigma_2(x)\big)$$

(PK2) $C^{\infty}(B, \mathbb{R})$-LINIOWOŚĆ (POPRZEZ WARTOŚCI) W ARGUMENCIE Z $\Gamma(TB)$,

$$\forall f_1, f_2 \in C^{\infty}(B, \mathbb{R}), \nu_1, \nu_2 \in \Gamma(TB), \sigma \in \Gamma(\mathbb{V}) : \nabla^{K}_{f_1 \triangleright \nu_1 + f_2 \triangleright \nu_2}\sigma = \underbrace{f_1 \triangleright}_{\equiv \mathbb{L}_{f_1}} \nabla^{K}_{\nu_1}\sigma + \underbrace{f_2 \triangleright}_{\equiv \mathbb{L}_{f_2}} \nabla^{K}_{\nu_2}\sigma ;$$

(PK3) REGUŁA LEIBNIZA W ARGUMENCIE Z $\Gamma(\mathbb{V})$,

$$\forall f \in C^{\infty}(B, \mathbb{R}), \sigma \in \Gamma(\mathbb{V}), \nu \in \Gamma(TB) : \nabla^{K}_{\nu}(\overbrace{f \triangleright}^{\equiv \mathbb{L}_f} \sigma) = f \triangleright \nabla^{K}_{\nu}\sigma + \nu(f) \triangleright \sigma .$$

ZAPIS WŁASNOŚCI (PK3) MOŻNA UWOLNIĆ OD ARGUMENTU Z $\Gamma(TB)$ PISZĄC

$$\nabla^K_\cdot(f \triangleright \sigma) = f \triangleright \nabla^K_\cdot \sigma + df \otimes_{C^\infty(B,\mathbb{R})} \sigma .$$

MAMY KRZEPIĄCE

TW. 23. NA KAŻDEJ WIĄZCE WEKTOROWEJ ISTNIEJE POCHODNA KOSZULA.

D: ROZWAŻMY TRYWIALIZACJE LOKALNE $\tau_i : \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times N}$

WIĄZKI WEKTOROWEJ $(V, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_V)$ NAD POKRYCIEM $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}(B)$.

DLA DOWOLNEGO CIĘCIA $\sigma \in \Gamma(V)$, O LOKALNEJ PREZENTACJI

$$\sigma\restriction_{\mathcal{O}_i} : \mathcal{O}_i \longrightarrow \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i),\ x \longmapsto \tau_i^{-1}\left(x, \sigma^a(x) \triangleright e_a\right)$$

ZAPISANEJ PRZY UŻYCIU DOWOLNEJ BAZY $\{e_a\}_{a\in\overline{1,N}}$ PRZESTRZENI $\mathbb{R}^{\times N}$

I FUNKCJI $\sigma^a \in C^\infty(\mathcal{O}_i, \mathbb{R})$, ORAZ POLA WEKTOROWEGO $V \in \Gamma(TB)$ DEFINIUJEMY

$$\nabla^{(i)}_V \sigma(x) := \tau_i^{-1}\big(x, \underbrace{V(\sigma^a)(x)}_{\equiv V(x)(\sigma^a)} \triangleright e_a\big), \quad x \in \Theta_i .$$

BEZ TRUDU PRZEKONUJEMY SIĘ, ŻE AKSJOMATY (PK1)–(PK3) SĄ SPEŁNIONE (LOKALNIE, NAD Θ_i) PRZEZ $\nabla^{(i)}$.

W NASTĘPNEJ KOLEJNOŚCI UPEWNIAMY SIĘ, ŻE KAŻDA WYPUKŁA KOMBINACJA FUNKCJONALNA POCHODNYCH KOSZULA JEST POCHODNĄ KOSZULA, TJ.

$$\forall \varrho_1, \varrho_2 \in C^\infty(B, \mathbb{R}), \nabla^{K,1}, \nabla^{K,2} \text{ SPEŁNIAJĄCE (PK1)–(PK3)}:$$

$$\Big(\varrho_1 + \varrho_2 = 1 \implies \varrho_1 \triangleright \nabla^{K,1} + \varrho_2 \triangleright \nabla^{K,2} \text{ SPEŁNIA (PK1)-(PK3)}\Big).$$

JEDYNĄ „NIETRYWIALNĄ" TOŻSAMOŚĆ TO TUTAJ

$$\varrho_1 \triangleright \big(V(f) \triangleright \sigma\big) + \varrho_2 \triangleright \big(V(f) \triangleright \sigma\big) = (\varrho_1 + \varrho_2) \triangleright V(f) \triangleright \sigma = V(f) \triangleright \sigma .$$

Połączywszy oba powyższe fakty i wybrawszy rozkład jedności $\{\varrho_i\}_{i\in I}$ stowarzyszony z pokryciem $\{O_i\}_{i\in I}$, dostajemy jawnie tensorową definicję

$$\nabla^K_V \sigma := \sum_{i\in I} \varrho_i \triangleright \left(\nabla^{(i)}_{V|_{O_i}} \sigma|_{O_i}\right).$$

□

Mamy też fundamentalne

Tw. 24. Liniowe powiązanie Ehresmanna na wiązce wektorowej określa na niej powiązanie Koszula, i vice versa.

D: $\boxed{\Rightarrow}$ W świetle Tw. 22. wystarczy pokazać, że forma powiązania liniowego $\mathcal{A} : T\mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ zadaje pochodną Koszula. Zdefiniujmy odwzorowanie $\Gamma(\mathbb{V}) \ni \sigma \longmapsto \mathcal{A} \circ T\sigma =: \nabla^{\mathcal{A}}\sigma$. Bez trudu sprawdzamy, że spełnia ono aksjomaty (PK1)–(PK3), przy czym jedynym,

KTÓREGO SPRAWDZENIE WYMAGA ODROBINY UWAŻNOŚCI, JEST (Pk3). OTO OBLICZAMY

$$\nabla^{\mathcal{A}}_{\mathcal{V}}(f \triangleright \sigma) \equiv \mathcal{A} \circ \mathrm{T}(f \triangleright \sigma)(\mathcal{V}) = \mathcal{A} \circ \mathrm{T}_\sigma \mathbb{L}_f \circ \mathrm{T}\sigma(\mathcal{V}) + \mathcal{A}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\sigma + t \triangleright \mathcal{V}(f) \triangleright \sigma\right)\right)$$

$$\equiv \mathbb{L}_f \circ \mathcal{A} \circ \mathrm{T}\sigma(\mathcal{V}) + \mathcal{A} \circ \mathrm{Ver}_\sigma\left(\mathcal{V}(f) \triangleright \sigma\right)$$

$$= f \triangleright \nabla^{\mathcal{A}}_{\mathcal{V}}\sigma + \mathcal{V}(f) \triangleright \sigma \equiv \left(f \triangleright \nabla^{\mathcal{A}}_{\cdot}\sigma + df \otimes \sigma\right)(\mathcal{V}). \blacksquare$$

$\Leftarrow$ NIECHAJ ∇^{K} BĘDZIE POCHODNĄ KOSZULA. ZREKONSTRUUJEMY NAJPIERW WIERNĄ KOPIĘ $\mathrm{T}_x B$ W $\mathrm{T}_v \mathbb{V}$, $v \in \mathbb{V}_x$ LOKALNIE. W TYM CELU DEFINIUJEMY ODWZOROWANIE

$$\mathrm{Hor}_v : \mathrm{T}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)} B \longrightarrow \mathrm{T}_v \mathbb{V}, \quad \xi \longmapsto \mathrm{T}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}\sigma(\xi) - \mathrm{Ver}_v\left(\nabla^K_{\mathcal{X}}\sigma\right)(\pi_{\mathbb{V}}(v))$$

UŻYWAJĄC DOWOLNYCH: $\sigma \in \Gamma_{loc}(\mathbb{V}) : \sigma(\pi_{\mathbb{V}}(v)) = v$ (PATRZ: Sław. 12.)

ORAZ $\mathcal{H} \in \Gamma_{loc}(TB) : \mathcal{H}(\pi_{\mathbb{V}}(v)) = \xi$.

ANALOGICZNIE JAK W DOWODZIE Stw. 31. POWYŻSZA DEFINICJA, KORZYSTAJĄCA Z OBIEKTÓW GŁADKICH: σ i $\mathcal{H}$ ZAGWARANTUJE NAM GŁADKOŚĆ PODNIESIENIA PÓL WEKTOROWYCH Z BAZY WIĄZKI DO JEJ PRZESTRZENI TOTALNEJ. POZOSTAJE JEDYNIE UPEWNIĆ SIĘ, ŻE OWO PODNIESIENIE MA POŻĄDANE WŁASNOŚCI i W DANYM PUNKCIE <u>NIE</u> ZALEŻY OD WYBORÓW DOWOLNYCH: σ i $\mathcal{H}$ INACZEJ JAK TYLKO POPRZEZ WARTOŚCI W PUNKCIE $\pi_{\mathbb{V}}(v) =: \underline{x}$.

ZACZYNAMY OD TEGO PIERWSZEGO ASPEKTU

1° Hor_v JEST JAWNIE $\mathbb{R}$-LINIOWE.

2° $T_v\pi_{\mathbb{V}}\big(\mathrm{Hor}_v(\xi)\big) = T_{\underline{x}}(\pi_{\mathbb{V}}\circ\sigma)(\xi) - \big(T_v\pi_{\mathbb{V}}\circ \mathrm{Verl}_{\sigma}\big)\big(\nabla^K_{\mathcal{H}}\sigma\big)(x)$

$= T_x \mathrm{id}_{\mathrm{Dom}(\sigma)}(\xi) = \xi$, CZYLI Hor_v JEST INIEKTYWNE, A ZATEM BIJEKTYWNE NA OBRAZ. PRZY TYM JEGO PRZECIĘCIE Z $V_v W$ JEST POSTACI $\mathrm{Hor}_v(\xi) \in \mathrm{Ker}\, T_v \pi_W$, CZYLI SPEŁNIA

$0_{T_x B} \equiv T_v \pi_W (\mathrm{Hor}_v(\xi)) = \xi$, WIĘC TEŻ $\mathrm{Hor}_v(\xi) = 0_{T_v W}$ Z RACJI 1°.

JEST ZATEM $\mathrm{Hor}_v(T_x B) \cap V_v W = \{0_{T_v W}\}$, CO NA MOCY BILANSU WYMIARÓW DAJE

$$\mathrm{Hor}_v(T_x B) \oplus V_v W = T_v W.$$

NASTĘPNIE DOWODZIMY ZALEŻNOŚCI Hor_v OD σ POPRZEZ $\sigma(x) = v$ (ZALEŻNOŚĆ OD $\mathcal{X}$ POPRZEZ $\mathcal{X}(x) = \xi$ JEST OCZYWISTA — PATRZ (PK2)).

1° NAJSAMPIERW SPROWADZAMY NASZE ROZWIĄZANIA DO DZIEDZINY TRYWIALIZACJI LOKALNEJ...

ROZWAŻMY $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma_{loc}(\mathbb{V})$: $\exists\, \underset{\substack{\Psi \\ x}}{\mathcal{O}_x} \in \mathcal{J}(B)$: $(\sigma_2 - \sigma_1)\restriction_{\mathcal{O}_x} = 0 \wedge \sigma_2(x) = v = \sigma_1(x)$.

DOBIERAMY FUNKCJĘ UCIĘCIA Υ_x O WŁASNOŚCIACH

$$\operatorname{supp}(\Upsilon_x) \subset \mathcal{O}_x \wedge \exists\, \underset{\substack{\Psi \\ x}}{\mathcal{U}_x} \subset \mathcal{O}_x : \Upsilon\restriction_{\mathcal{U}_x} = 1,$$

STWIERDZAMY $\Upsilon_x \triangleright (\sigma_2 - \sigma_1) \equiv 0$, A ZATEM TAKŻE

$$\nabla^{\mathsf{K}}_{\mathcal{X}}\big(\Upsilon_x \triangleright (\sigma_2 - \sigma_1)\big)(x) \equiv \nabla^{\mathsf{K}}_{\mathcal{X}}\big(0(\cdot)\big)(x) \equiv \nabla^{\mathsf{K}}_{\mathcal{X}}\big(\mathbb{L}_0 \circ 0(\cdot)\big)(x)$$

$$\overset{\mathbb{R}\text{-LINIOWOŚĆ}}{=} \mathbb{L}_0\big(\nabla^{\mathsf{K}}_{\mathcal{X}}(0(\cdot))(x)\big) \equiv 0_{\mathbb{V}_x}$$

Z DRUGIEJ STRONY

$$= \big(\Upsilon_x \triangleright \nabla^{\mathsf{K}}_{\mathcal{X}}(\sigma_2 - \sigma_1)\big)(x) + \big(\mathcal{X}(\Upsilon_x) \triangleright (\sigma_2 - \sigma_1)\big)(x)$$

$$\overset{1}{=} \Upsilon_x(x) \triangleright \nabla^{\mathsf{K}}_{\mathcal{X}}(\sigma_2 - \sigma_1)(x) + \mathcal{X}(\Upsilon_x)(x) \triangleright (\sigma_2 - \sigma_1)(x) \overset{0}{=} \nabla^{\mathsf{K}}_{\mathcal{X}}(\sigma_2 - \sigma_1)(x).$$

JAKO ŻE JEST TEŻ $T_x(\sigma_2-\sigma_1)\equiv 0$, PRZETO OSTATECZNIE

$$\mathrm{Hor}_v^{(\sigma_2)}(\xi)=\mathrm{Hor}_v^{(\sigma_1)}(\xi).$$

DALSZE ROZUMOWANIE PROWADZIMY W OBRAZIE LOKALNEJ TRYWIALIZACJI τ_i NA OTOCZENIU $\mathcal{O}_i\ni x$.

2° NIECHAJ $y\in\mathcal{O}_x\cap\mathcal{O}_i$, A WÓWCZAS $(\tau_i\circ\sigma)(y)=(y,\sigma_i^a(y)\triangleright e_a)$

$$\equiv(y,\sigma_i(y)),$$

CZYLI – Z RACJI $\mathbb{R}$-LINIOWOŚCI τ_i –

$$\sigma(y)=\mathbb{L}_{\sigma_i^a(y)}\big(\underbrace{\tau_i^{-1}(y,e_a)}_{=:\,\mathcal{E}_a^{(i)}(y)}\big).$$

WOBEC TEGO ZACHODZI

$$T_x\sigma(\xi)\equiv T_{\tau_i(v)}\tau_i^{-1}\big(T_x(\tau_i\circ\sigma)(\xi)\big)=T_{\tau_i(v)}\tau_i^{-1}\big(\xi,T_x\sigma_i(\xi)\big)$$

$$= T_{\tau_i(v)}\tau_i^{-1}\left(\xi, 0_{T_{\sigma_i(x)}\mathbb{R}^{\times N}}\right) + T_{\tau_i(v)}\tau_i^{-1}\left(0_{T_xB}, T_x\sigma_i(\xi)\right)$$

$\llcorner\!: (x,w)$

TO WEKTOR STYCZNY DO WŁÓKNA TYPOWEGO, KTÓRE JEST PRZESTRZENIĄ WEKTOROWĄ!

$$= T_{\tau_i(v)}\tau_i^{-1}\left(\xi, 0_{T_{\sigma_i(x)}\mathbb{R}^{\times N}}\right) + T_{\tau_i(v)}\tau_i^{-1}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(x, w + t\triangleright T_x\sigma_i(\xi)\right)\right)$$

$T_{\sigma_i(x)}\mathbb{R}^{\times N} \cong \mathbb{R}^{\times N}$

(POR.: STR. 308)

$$= T_{\tau_i(v)}\tau_i^{-1}\left(\xi, 0_{T_{\sigma_i(x)}\mathbb{R}^{\times N}}\right) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\tau_i^{-1}\left(x, w + t\triangleright T_x\sigma_i(\xi)\right)$$

$\leftarrow$ $\mathbb{R}$-LINIOWE!

$$= T_{\tau_i(v)}\tau_i^{-1}\left(\xi, 0_{T_{\sigma_i(x)}\mathbb{R}^{\times N}}\right) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\tau_i^{-1}(x,w) + t\triangleright\tau_i^{-1}\left(x, T_x\sigma_i(\xi)\right)\right)$$

$$= T_{\tau_i(v)}\tau_i^{-1}\left(\xi, 0_{T_{\sigma_i(x)}\mathbb{R}^{\times N}}\right) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(v + t\triangleright\tau_i^{-1}\left(x, T_x\sigma_i(\xi)\right)\right)$$

$$\equiv T_{\tau_i(v)}\tau_i^{-1}\left(\xi, 0_{T_{\sigma_i(x)}\mathbb{R}^{\times N}}\right) + \mathrm{Ver}\mathcal{L}_v\left(\tau_i^{-1}\left(x, T_x\sigma_i(\xi)\right)\right)$$

$$= T_{\tau_i(v)}\tau_i^{-1}\left(\xi, 0_{T_{\sigma_i(x)}\mathbb{R}^{\times N}}\right) + \left(\mathrm{Ver}\mathcal{L}_v \circ \mathbb{L}_{T_x\sigma_i^a(\xi)}\right)\left(\varepsilon_a^{(i)}(x)\right)$$

OSTATECZNIE WIĘC

$$\mathrm{Hor}_v(\xi) = T_{\tau_i(v)}\tau_i^{-1}\left(\xi, 0_{T_{\sigma_i(x)}\mathbb{R}^{\times N}}\right) + \left(\mathrm{Ver}\mathcal{L}_v \circ \mathbb{L}_{T_x\sigma_i^a(\xi)}\right)\left(\varepsilon_a^{(i)}(x)\right)$$

$$- \mathrm{Ver}\mathcal{L}_v\left(\nabla^K_{\mathcal{A}}\left(\sigma_i^a \triangleright \varepsilon_a^{(i)}\right)(x)\right)$$

(PK3)

$$= T_{\tau_i(v)}\tau_i^{-1}\left(\xi, 0_{T_{\sigma_i(x)}\mathbb{R}^{\times N}}\right) - \left(\mathrm{Ver}\mathcal{L}_v \circ \mathbb{L}_{\sigma_i^a(x)}\right)\left(\nabla^K_{\mathcal{A}}\varepsilon_a^{(i)}\right)(x)$$

TUTAJ TKWI CAŁA SWOISTOŚĆ

σ – POPRZEZ WARTOŚĆ W x! □

Corr. 6. NA KAŻDEJ WIĄZCE WEKTOROWEJ ISTNIEJE POWIĄZANIE LINIOWE.

D: Tw.23. $\wedge$ Tw.24. □

Zwieńczeniem dyskusji powiązania w obrazie globalnym jest analiza zachowania pochodnej Koszula względem morfizmów wiązek wektorowych. Prowadzimy ją na gruncie obserwacji dotyczącej prostej relacji pomiędzy pochodną Koszula i pochodną kowariantną:

$$\nabla^{K}_{\mathfrak{X}}\sigma(x) = \mathrm{Ver}\mathcal{T}^{-1}_{\sigma(x)}\left(\nabla^{(*)}_{\mathfrak{X}}\sigma(x)\right) \Longleftarrow (*)\big|_{T_v\mathbb{V}} = \mathrm{Ver}\mathcal{T}_v \circ A\big|_{T_v\mathbb{V}}$$

oraz pomocniczej analizy zachowania izomorfizmów $\mathrm{Ver}\mathcal{T}_\cdot$ względem rzeczonych morfizmów wiązek wektorowych: Niechaj zatem $\Phi : \mathbb{V}_1 \to \mathbb{V}_2$ i niech $v, w \in \mathbb{V}_{1,x}$. Oznaczmy odnośne izomorfizmy dla $\mathbb{V}_a$ jako $\mathrm{Ver}\mathcal{T}^{(a)}_\cdot$. Obliczamy

$$\mathrm{Ver}\mathcal{T}^{(2)}_{\Phi(v)}\left(\Phi(w)\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\Phi(v) + t\triangleright\Phi(w)\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Phi(v + t\triangleright w)$$

$$= T_v\Phi\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(v + t\triangleright w)\right) = T_v\Phi \circ \mathrm{Ver}\mathcal{T}^{(1)}_v(w), \text{ czyli } (324)$$

$$\mathrm{Ver}\,\tau^{(2)}_{\Phi(v)} \circ \Phi = T_\sigma \Phi \circ \mathrm{Ver}\,\tau_v$$

STĄD JUŻ WPROST WYNIKA

Stw. 46. NIECHAJ $(\mathbb{V}_a, B_a, \mathbb{R}^{\times N_a}, \pi_{\mathbb{V}_a})$, $a \in \{1,2\}$ BĘDĄ WIĄZKAMI WEKTOROWYMI O POCHODNYCH KOSZULA $\nabla^{K,a} \equiv \mathrm{Ver}\,\tau^{(a)-1}_{\cdot} \circ \nabla^{\Theta_a}_{\cdot}$. NIECH

$$\begin{tikzcd} \mathbb{V}_1 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_{\mathbb{V}_1}"'] & \mathbb{V}_2 \arrow[d, "\pi_{\mathbb{V}_2}"] \\ B_1 \arrow[r, "f"] & B_2 \end{tikzcd}$$

BĘDZIE TEŻ MORFIZMEM WIĄZEK WEKTOROWYCH O SKŁADOWEJ BAZOWEJ $f \in \mathrm{Diff}(B_1, B_2)$.

$$\forall \sigma \in \Gamma(\mathbb{V}_1), V \in \Gamma(TB_1) : \Phi(\nabla^{K,1}_V \sigma) = \nabla^{K,2}_{f_* V}(\Phi \circ \sigma \circ f^{-1}).$$

D: LICZYMY WPROST:

$$\Phi(\nabla^{K,1}_V \sigma) \equiv \left(\Phi \circ \mathrm{Ver}\,\tau^{(1)-1}_{\cdot}\right) \circ \nabla^{\Theta_1}_V \sigma = \mathrm{Ver}\,\tau^{(2)-1}_{\Phi(\cdot)} \circ T\Phi \circ \Theta_1 \circ T\sigma(V)$$

$$\equiv \mathrm{Ver}\,\tau^{(2)-1}_{\Phi(\cdot)} \circ \Theta_2 \circ T\Phi \circ T\sigma(V) = \left(\mathrm{Ver}\,\tau^{(2)-1}_{\Phi(\cdot)} \circ \left(\Theta_2 \circ T(\Phi \circ \sigma \circ f^{-1})\right)\right)(Tf(V)). \quad \square$$

ABSTRAKCYJNE DEFINICJE I KONSTRUKCJE GLOBALNE — POWIĄZANIA, JEGO KRZYWIZNY I ODNOŚNEJ POCHODNEJ KOWARIANTNEJ/KOSZULA — POZWALAJĄ PRECYZYJNIE I ZWIĘŹLE, A PRZY TYM GŁĘBOKO SKONCEPTUALIZOWAĆ REPREZENTOWANE PRZEZ NIE BYTY GEOMETRYCZNE I ZBADAĆ ICH — TAKŻE ABSTRAKCYJNE, GLOBALNE — WŁASNOŚCI. RZADKO NATOMIAST WPROST POZWALAJĄ ODPOWIEDZIEĆ NA PYTANIA NATURY ILOŚCIOWEJ — JAK TO O WARTOŚĆ, CZY NAWET TYLKO NIEZEROWOŚĆ KRZYWIZNY POWIĄZANIA — PRZED KTÓRYMI STAWIA NAS FIZYKA, A NADTO — „MASKUJĄ” OBIEKTY O PIERWSZORZĘDNYM ZNACZENIU FIZYKALNYM — JAK CHOĆBY POLA CECHOWANIA (CZYLI NIEKANONICZNE SKŁADOWE FORMY POWIĄZANIA W OBRAZIE TRYWIALIZACJI LOKALNEJ). TE UKRYTE WĄTKI ODNAJDUJEMY W OPISIE LOKALNYM, KTÓRYM ZAJMIEMY SIĘ NA ZAKOŃCZENIE...

ZACZNIEMY OD SAMEJ POCHODNEJ KOSZULA: OTO FORMUŁA ⊛ ZE Stw. 321.
W POŁĄCZENIU Z REGUŁĄ LEIBNIZA (PK3) PRZESĄDZA O TYM, ŻE PEŁNA INFORMACJA LOKALNA O TEJ POCHODNEJ JEST ZAPISANA W OBIEKTACH, O KTÓRYCH MOWA W

Def. 46. NIECHAJ $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ BĘDZIE POKRYCIEM TRYWIALIZUJĄCYM DLA WIĄZKI WEKTOROWEJ $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$ I ZARAZEM – POKRYCIEM WSPÓŁRZĘDNIOWYM DLA JEJ BAZY B. NIECH TEŻ $\{\varepsilon_a^{(i)}\}_{a\in\overline{1,N}}$ BĘDZIE BAZĄ $C^\infty(\mathcal{O}_i, \mathbb{R})$-MODUŁU $\Gamma(\mathbb{V}\restriction_{\mathcal{O}_i})$, WYZNACZANĄ PRZEZ TRYWIALIZACJĘ $\tau_i : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times N}$ WEDLE WZORU $\varepsilon_a^{(i)} = \tau^{-1}(\cdot, e_a)$, I NIECH $\kappa_i = (x_i^\mu)^{\mu\in\overline{1,D}} : \mathcal{O}_i \xrightarrow{\cong} U_i \subset \mathbb{R}^{\times D}$, $D = \dim B$ BĘDZIE LOKALNĄ MAPĄ.
WÓWCZAS SYMBOLE CHRISTOFFELA POWIĄZANIA KOSZULA ∇^K NA $\mathbb{V}$

NAD $\mathcal{O}_i$ WZGL. BAZ $\{\partial^{(i)}_\mu\}_{\mu\in\overline{1,D}}$ W $\Gamma(TB|_{\mathcal{O}_i})$ i $\{\varepsilon^{(i)}_a\}_{a\in\overline{1,N}}$ W $\Gamma(\mathbb{V}|_{\mathcal{O}_i})$ TO RODZINA ODWZOROWAŃ GŁADKICH ${}^{(i)}\Gamma^{b}_{\mu a}:\mathcal{O}_i\to\mathbb{R}$ ZADANYCH WZORAMI

$$\nabla^{K}_{\partial^{(i)}_\mu}\varepsilon^{(i)}_a =: {}^{(i)}\Gamma^{b}_{\mu a}\triangleright\varepsilon^{(i)}_b .$$

NALEŻY PODKREŚLIĆ, ŻE WSKAŹNIKI NIESIONE PRZEZ ${}^{(i)}\Gamma^{b}_{\mu a}$ – TEN Z BAZY: μ i TE Z WŁÓKNA: a i b – MAJĄ ZASADNICZO ODMIENNY STATUS (TJ. KODUJĄ ZASADNICZO ODMIENNE WŁASNOŚCI TRANSFORMACYJNE), O CZYM MOWA

Ćw. 47. WŁASNOŚCI TRANSFORMACYJNE SYMBOLI CHRISTOFFELA WZGLĘDEM ZAMIANY WSPÓŁRZĘDNYCH: $x^\mu_i \longmapsto \varphi^\alpha(x) =: y^\alpha_i$ ORAZ ZMIANY BAZY PRZESTRZENI CIĘĆ LOKALNYCH: $\varepsilon^{(i)}_a(\cdot)\longmapsto {}^{(i)}A^{a}_{r}(\cdot)\triangleright e^{(i)}_a(\cdot) =: f^{(i)}_r(\cdot)$

OPISUJE FORMUŁA:

$$\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^\mu_i}\, {}^{(i)}\Gamma^{s}_{\alpha r} = {}^{(i)}A^{-1\,s}{}_{b}\left({}^{(i)}\Gamma^{b}_{\mu a}\, {}^{(i)}A^{a}{}_{r} + \frac{\partial\, {}^{(i)}A^{b}{}_{r}}{\partial x^\mu_i}\right),$$

W KTÓREJ ${}^{(i)}\Gamma^{b}_{\mu a}$ SĄ POPRZEDNIO WPROWADZONYMI SYMBOLAMI CHRISTOFFELA WZGLĘDEM BAZ $\{\partial^{(i)}_\mu\}_{\mu\in\overline{1,D}}$ i $\{\varepsilon^{(i)}_a\}_{a\in\overline{1,N}}$, NATOMIAST ${}^{(i)}\Gamma^{s}_{\alpha r}$ SĄ ICH ODPOWIEDNIKAMI WZGLĘDEM BAZ $\{\partial^{(i)}_\alpha\}_{\alpha\in\overline{1,D}}$ i $\{f^{(i)}_r\}_{r\in\overline{1,N}}$.

D: LICZYMY WPROST Z DEFINICJI I NA PODSTAWIE AKSJOMATÓW (PK1)–(PK3):

$${}^{(i)}\Gamma^{b}_{\mu a} \triangleright \varepsilon^{(i)}_b = {}^{(i)}\Gamma^{b}_{\mu a} \cdot {}^{(i)}A^{-1\,s}{}_{b} \triangleright f^{(i)}_s$$

$$\llcorner\ \nabla^K_{\partial^{(i)}_\mu} \varepsilon^{(i)}_a = \nabla^K_{\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^\mu_i}\partial^{(i)}_\alpha}\left({}^{(i)}A^{-1\,r}{}_{a} \triangleright f^{(i)}_r\right)$$

$$\overset{(PK2)}{=} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^\mu_i} \triangleright \nabla^K_{\partial^{(i)}_\alpha} \left({}^{(i)}A^{-1\,r}{}_a \triangleright f^{(i)}_r \right)$$

$$\overset{(PK3)}{=} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^\mu_i} \triangleright \left(\partial^{(i)}_\alpha\, {}^{(i)}A^{-1\,r}{}_a \triangleright f^{(i)}_r + {}^{(i)}A^{-1\,r}{}_a \triangleright \nabla^K_{\partial^{(i)}_\alpha} f^{(i)}_r \right)$$

$$= \partial^{(i)}_\mu\, {}^{(i)}A^{-1\,r}{}_a \triangleright f^{(i)}_r + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^\mu_i}\, {}^{(i)}\Gamma^s_{\alpha r}\, {}^{(i)}A^{-1\,r}{}_a \triangleright f^{(i)}_s$$

$$= -\,{}^{(i)}A^{-1\,r}{}_b\, \partial^{(i)}_\mu\, {}^{(i)}A^b{}_s\, {}^{(i)}A^{-1\,s}{}_a \triangleright f^{(i)}_r + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^\mu_i}\, {}^{(i)}\Gamma^s_{\alpha r}\, {}^{(i)}A^{-1\,r}{}_a \triangleright f^{(i)}_s$$

$$= \left(\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^\mu_i}\, {}^{(i)}\Gamma^s_{\alpha r} - {}^{(i)}A^{-1\,s}{}_b\, \partial^{(i)}_\mu\, {}^{(i)}A^b{}_r \right) \cdot {}^{(i)}A^{-1\,r}{}_a \triangleright f^{(i)}_s$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^\mu_i}\, {}^{(i)}\Gamma^s_{\alpha r} - {}^{(i)}A^{-1\,s}{}_b\, \frac{\partial\, {}^{(i)}A^b{}_r}{\partial x^\mu_i} = {}^{(i)}A^{-1\,s}{}_b\, {}^{(i)}\Gamma^b_{\mu a}\, {}^{(i)}A^a{}_r \,\Big|$$

CO JEST WŁAŚNIE POSTULOWANĄ FORMUŁĄ. □

STWIERDZAMY ZATEM, ŻE INDEKS BAZOWY μ JEST JEDYNYM INDEKSEM TENSOROWYM (KOWARIANTNYM), DWA POZOSTAŁE MAJĄ NATURĘ AFINICZNĄ, CO PODKREŚLA

Obs. 7. TRANSFORMACJA SYMBOLI CHRISTOFFELA WZGLĘDEM ZMIANY BAZY PRZESTRZENI CIĘĆ LOKALNYCH: $\varepsilon^{(i)}_a(\cdot) \longmapsto {}^{(i)}A^a{}_r(\cdot) \circ e^{(i)}_a(\cdot) =: f^{(i)}_r(\cdot)$ MA CHARAKTER

AFINICZNY

$$ {}^{(i)}\Gamma^s{}_{\alpha r} = \underbrace{{}^{(i)}A^{-1\,s}{}_b\, {}^{(i)}\Gamma^b{}_{\mu a}\, {}^{(i)}A^a{}_r}_{\text{PRZYCZYNEK TENSOROWY (TYPU (1,1))}} + \underbrace{{}^{(i)}A^{-1\,s}{}_b\, \frac{\partial\, {}^{(i)}A^b{}_r}{\partial x^\mu_i}}_{\text{PRZYCZYNEK NIEJEDNORODNY}} . $$

||

(TENSOROWY, Z NIEJEDNORODNOŚCIĄ)

DOTYCHCZAS UŻYWANY ZAPIS JEST W OCZYWISTY SPOSÓB PRZECIĄŻONY (WSKAŹNIKOWO), CO OBNIŻA JEGO CZYTELNOŚĆ. MOŻNA TEMU ZARADZIĆ WPROWADZAJĄC ZAPIS MACIERZOWY...

KORZYSTAJĄC Z WPROWADZONEJ UPRZEDNIO BAZY $\{e_a\}_{a\in\overline{1,N}}$ W $\mathbb{R}^{\times N}$ ORAZ BAZY WZGLĘDEM NIEJ DUALNEJ $\{\varphi^a\}^{a\in\overline{1,N}}$ W $\mathbb{R}^{\times N *}\cong\mathbb{R}^{*\times N}$, DEFINIUJEMY

$$\varphi^a(e_b)=\delta^a{}_b \qquad {}^{(i)}\Gamma^{b}_{\substack{a\\ \mu}}\,\varphi^a\otimes e_b$$

(*) MACIERZE FORM CHRISTOFFELA ${}^{(i)}\Gamma := {}^{(i)}\Gamma^b_{\mu a}\,dx^\mu_i\otimes(\varphi^a\otimes e_b)\equiv{}^{(i)}\Gamma_\mu\,dx^\mu_i$, O WŁASNOŚCI

$${}^{(i)}\Gamma^b_{\mu a}(x)\triangleright\varepsilon^{(i)}_b(x)=\tau_i^{-1}\big(x,{}^{(i)}\Gamma^b_{\mu a}(x)\triangleright e_b\big)\equiv\tau_i^{-1}\big(x,{}^{(i)}\Gamma_\mu(x)(e_a)\big);$$

(**) MACIERZE 1-KOCYKLU PRZEJŚCIA $g_{ij}:=g_{ij\,ab}\,\varphi^a\otimes e_b$, O WŁASNOŚCI – ZAPISANEJ DLA DOWOLNEGO $x\in O_{ij}$ –

$$\varepsilon^{(j)}_a(x)\equiv\tau_j^{-1}(x,e_a)=\tau_i^{-1}\big(x,g_{ij}(x)(e_a)\big)=\mathbb{1}_{g_{ij\,ab}(x)}\big(\tau_i^{-1}(x,e_b)\big)\equiv\mathbb{1}_{g_{ij\,ab}(x)}\big(\varepsilon^{(i)}_b(x)\big)$$

(**)

DZIĘKI POWYŻSZYM MOŻEMY WYSŁOWIĆ W SPOSÓB ZWIĘZŁY...

Stw. 48. AFINICZNE PRAWO ZSZYCIA MACIERZY FORM CHRISTOFFELA:

$$\forall_{x\in O_{ij}} : \ {}^{(i)}\Gamma(x) = \mathrm{Ad}_{g_{ij}(x)}\left({}^{(j)}\Gamma(x)\right) - dg_{ij}(x)\cdot g_{ij}(x)^{-1}.$$

D: LICZYMY WPROST – DLA $x^\mu \equiv x^\mu_i \equiv x^\mu_j$ (WSPÓLNE WSPÓŁRZĘDNE!) –

$$\mathbb{L}_{{}^{(j)}\Gamma^d_{\mu a}(x)}\left(\varepsilon^{(j)}_d(x)\right) \equiv \nabla^K_{\partial_\mu}\varepsilon^{(j)}_a(x) \overset{(**)}{=} \nabla^K_{\partial_\mu}\left(\mathbb{L}_{g_{ij\,ac}}\left(\varepsilon^{(i)}_c\right)\right)(x)$$

$$\overset{(PK3)}{=} \mathbb{L}_{\partial_\mu g_{ij\,ac}(x)}\left(\varepsilon^{(i)}_c(x)\right) + \mathbb{L}_{g_{ij\,ac}(x)}\circ\mathbb{L}_{{}^{(i)}\Gamma^b_{\mu c}(x)}\left(\varepsilon^{(i)}_b(x)\right)$$

$$= \mathbb{L}_{\partial_\mu g_{ij\,ac}(x)\, g_{ji\,cd}(x)}\left(\varepsilon^{(j)}_d(x)\right) + \mathbb{L}_{g_{ij\,ac}(x)\,{}^{(i)}\Gamma^b_{\mu c}(x)\, g_{ji\,bd}(x)}\left(\varepsilon^{(j)}_d(x)\right),$$

CZYLI $g_{ij\,ac}\,{}^{(i)}\Gamma^b_c\, g^{-1}_{ij\,bd} + dg_{ij\,ac}\cdot g^{-1}_{ij\,cd} = {}^{(j)}\Gamma^d_a$. JAK WYNIK MA SIĘ DO DOWODZONEJ TEZY? SPRAWDZAMY!

EWALUUJEMY OBIE STRONY DOWODZONEJ RÓWNOŚCI NA e_a, ZAMIENIAJĄC PO DRODZE $i \leftrightarrow j$ I WYKORZYSTUJĄC KOCYKLICZNOŚĆ g_{ij}:

$$
\begin{aligned}
{}^{(j)}\Gamma^{d}{}_{a} \triangleright e_d \equiv {}^{(j)}\Gamma(e_a) &= \mathrm{Ad}_{g_{ji}}\left({}^{(i)}\Gamma\right)(e_a) - dg_{ji}\cdot g_{ji}^{-1}(e_a) \\
&= g_{ij}^{-1}\cdot {}^{(i)}\Gamma \cdot g_{ij}(e_a) + g_{ij}^{-1}\, dg_{ij}(e_a) \\
&= g_{ij\,ab}\, {}^{(i)}\Gamma^{c}{}_{b}\, g^{-1}_{ij\,cd} \triangleright e_d + dg_{ij\,ab}\, g^{-1}_{ij\,bd} \triangleright e_d ,
\end{aligned}
$$

CO ODTWARZA POSTULOWANĄ RELACJĘ. $\square$

W ANALOGICZNY SPOSÓB MOŻEMY ZANALIZOWAĆ ZACHOWANIE SYMBOLI CHRISTOFFELA POD DZIAŁANIEM MORFIZMÓW WIĄZEK WEKTOROWYCH, KTÓRE DLA UPROSZCZENIA BĘDZIEMY ROZWAŻAĆ WYŁĄCZNIE W WERSJI WERTYKALNEJ (TJ. NAD id_B)...

Stw. 49. AFINICZNE PRAWO TRANSFORMACYJNE MACIERZY FORM CHRISTOFFELA:

NIECHAJ
$$\begin{tikzcd} \mathbb{V}_1 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & \mathbb{V}_2 \arrow[d] \\ B \arrow[r, equal] & B \end{tikzcd}$$
BĘDZIE MORFIZMEM (WERTYKALNYM) WIĄZEK WEKTOROWYCH Z POWIĄZANIEM (O ODNOŚNYCH MACIERZACH FORM CHRISTOFFELA ${}^{(i)}\Gamma^{\alpha}$, $\alpha \in \{1,2\}$), O DANYCH LOKALNYCH $\tau_i^2 \circ \Phi \circ \tau_i^{1\,-1}(x, e_a) \overset{(**)}{=}: (x, h_i(x)(e_a))$, $i \in I$, $h_i : \mathcal{O}_i \to \mathrm{Mat}(N_1 \times N_2 ; \mathbb{R})$ NAD POKRYCIEM (WSPÓŁ)TRYWIALIZUJĄCYM BAZY $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ (NAD KTÓRYM MAMY ODNOŚNE TRYWIALIZACJE $\{\tau_i^{\alpha}\}_{i \in I, \alpha \in \{1,2\}}$).
ZAPISZMY $h_i \equiv h_{iar}\, \varphi^a \otimes e_r$, GDZIE $h_{iar} : \mathcal{O}_i \to \mathbb{R}$, $\{\varphi^a\}^{a \in \overline{1,N_1}}$ JEST BAZĄ DUALNĄ DO PEWNEJ BAZY WŁÓKNA TYPOWEGO $\mathbb{R}^{\times N_1}$ WIĄZKI $\mathbb{V}_1$, $\{e_r\}_{r \in \overline{1,N_2}}$ ZAŚ JEST PEWNĄ BAZĄ WŁÓKNA TYPOWEGO $\mathbb{R}^{\times N_2}$ WIĄZKI $\mathbb{V}_2$.

WÓWCZAS
$$\forall x \in \mathcal{O}_i : \ {}^{(i)}\Gamma^2(x) \circ h_i(x) = h_i(x)\, {}^{(i)}\Gamma^1(x) - dh_i(x).$$

D: LICZYMY, ANALOGICZNIE JAK W DOWODZIE Stw. 48., W NOTACJI $\varepsilon^{(i)}_a = \tau_i^{1\,-1}(\cdot, e_a)$ i $f^{(i)}_r = \tau_i^{2\,-1}(\cdot, f_r)$, GDZIE $\{e_a\}_{a\in\overline{1,N_1}}$ J/w, A $\{f_r\}_{r\in\overline{1,N_2}}$ JEST DOWOLNĄ BAZĄ WŁÓKNA TYPOWEGO $\mathbb{R}^{\times N_2}$ WIĄZKI W_2,

NA $\Gamma(W_2)$

$$\nabla^{K2}_{\partial^{(i)}_\mu}\left(\Phi\circ\varepsilon^{(i)}_a\right)(x) \overset{(*)}{=} \mathbb{L}^{(2)}_{\partial^{(i)}_\mu h_{ias}(x)}\left(f^{(i)}_s(x)\right) + \mathbb{L}^{(2)}_{h_{iar}(x)}\circ\mathbb{L}_{{}^{(i)}\Gamma^{2\,s}_{\mu r}(x)}\left(f^{(i)}_s(x)\right)$$

$$\underset{\text{Stw.46.}}{=}\left(\Phi\circ\nabla^{K1}_{\partial^{(i)}_\mu}\right)\left(\varepsilon^{(i)}_a\right)(x) = \Phi\left(\mathbb{L}^{(1)}_{{}^{(i)}\Gamma^{1\,b}_{\mu a}(x)}\left(\varepsilon^{(i)}_b(x)\right)\right)$$

$$=\left(\mathbb{L}^{(2)}_{{}^{(i)}\Gamma^{1\,b}_{\mu a}(x)}\circ\Phi\right)\left(\varepsilon^{(i)}_b(x)\right) = \mathbb{L}^{(2)}_{{}^{(i)}\Gamma^{1\,b}_{\mu a}(x)h_{ibs}(x)}\left(f^{(i)}_s(x)\right),$$ ZATEM

$${}^{(i)}\Gamma^{1\,b}_{\mu a}(x)\,h_{ibs}(x) = \partial^{(i)}_\mu h_{ias}(x) + h_{iar}(x)\,{}^{(i)}\Gamma^{2\,s}_{\mu r}(x).$$

ROZUMUJĄC JAK W DRUGIEJ CZĘŚCI DOWODU Stw. 48., ODTWARZAMY TEZĘ DOWODZONEGO STWIERDZENIA. $\square$

NA MARGINESIE NASZYCH BIEŻĄCYCH ROZWAŻAŃ MOŻEMY WYPISAĆ FORMUŁĘ NA POCHODNĄ KOSZULA W OBRAZIE TRYWIALIZACJI LOKALNEJ DLA $\sigma = \mathbb{L}_{\sigma_i^a}(\varepsilon_a^{(i)})$ (PATRZ: ⊛ NA Str. 321.) :

ORAZ $V \in \Gamma(TB)$, $V\restriction_{\mathcal{O}_i} = V^\mu \partial_\mu^{(i)}$:

$$\nabla^K_V \sigma = \mathbb{L}_{V^\mu} \circ \nabla^K_{\partial_\mu^{(i)}}\left(\mathbb{L}_{\sigma_i^a}(\varepsilon_a^{(i)})\right) = \mathbb{L}_{V^\mu} \circ \left(\mathbb{L}_{\partial_\mu^{(i)}\sigma_i^b} + \mathbb{L}_{\sigma_i^a\,{}^{(i)}\Gamma_{\mu a}^b}\right)(\varepsilon_b^{(i)}),$$

CZYLI

$$\nabla^K_V \sigma \underset{(\text{lok.})}{=} V^\mu\left(\partial_\mu \sigma_i^a + {}^{(i)}\Gamma_{\mu b}^a\, \sigma_i^b\right) \triangleright \varepsilon_a^{(i)}.$$

NA ZAKOŃCZENIE NASZYCH DOCIEKAŃ USTALIMY ZWIĄZEK POMIĘDZY KRZYWIZNĄ POWIĄZANIA (PATRZ: Def. 40.) A SYMBOLAMI CHRISTOFFELA. W PIERWSZYM KROKU USTALMY ZWIĄZEK MIĘDZY TYMI OSTATNIMI A FORMĄ POWIĄZANIA W OBRAZIE TRYWIALIZACJI LOKALNEJ.

Stw. 50. FORMA POWIĄZANIA (LINIOWEGO) Θ NA WIĄZCE WEKTOROWEJ PRZYJMUJE W OBRAZIE TRYWIALIZACJI LOKALNEJ $\tau_i : \pi_W^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times N}$ (I W DOTYCHCZASOWYCH OZNACZENIACH) POSTAĆ (PATRZ: Stw. 277.)

$$\Theta_i(x,v) := (\tau_i^{-1})^* \Theta(x,v) \equiv \left(T\tau_i \circ \Theta \circ T\tau_i^{-1}\right)(x,v) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{\times N}} + A_i^a(x,v) \otimes e_a ,$$

GDZIE $A_i^a(x,v) \in T_x^* B$ I GDZIE DOKONALIŚMY STANDARDOWEGO UTOŻSAMIENIA $T_v \mathbb{R}^{\times N} \cong \mathbb{R}^{\times N} \ni e_a$. PRZY TYM 1-FORMY A_i^a

ZALEŻĄ OD ARGUMENTU $v \in \mathbb{R}^{\times N}$ (WE WŁÓKNIE TYPOWYM) $\mathbb{R}$-LINIOWO, TJ.

$$A^b_i(x, v^a \triangleright e_a) = v^a \triangleright A^b_i(x, e_a),$$

A NADTO ZACHODZI TOŻSAMOŚĆ (W ZAPISIE JAK WCZEŚNIEJ)

$$\partial^{(i)}_\mu \lrcorner A^b_i(x, e_a) = {}^{(i)}\Gamma^b_{\mu a}(x).$$

D: ZACZNIJMY OD USTALENIA OBRAZU STYCZNEGO PODNIESIENIA $T\mathbb{L}_\lambda$ DZIAŁANIA SKALARÓW $\mathbb{R} \ni \lambda$ NA TV W OBRAZIE TRYWIALIZACJI LOKALNEJ WZGLĘDEM WZMIANKOWANEGO UTOŻSAMIENIA $T_v\mathbb{R}^{\times N} \cong \mathbb{R}^{\times N}$.

OTO MAMY – PO PIERWSZE: $\mathbb{L}_\lambda(\tau_i^{-1}(x, v)) = \tau_i^{-1}(x, \ell_\lambda(v))$, GDZIE $\ell_\lambda(v) \equiv \lambda \triangleright v$ JEST STANDARDOWYM DZIAŁANIEM $\mathbb{R}$ NA $\mathbb{R}^{\times N}$;

– PO DRUGIE – DLA DOWOLNYCH $v, w \in \mathbb{R}^{\times N}$:

$$T_v \ell_\lambda \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(v + t \triangleright w) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \ell_\lambda (v + t \triangleright w) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\big(\ell_\lambda(v) + t \triangleright (\ell_\lambda(w))\big),$$

ZATEM MAMY (DIAGRAM PRZEMIENNY)

$$\begin{tikzcd}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(v + t\triangleright w) \arrow[rr, "T_v \ell_\lambda"] \arrow[d, leftrightarrow, "\boxed{**}\ T_v\mathbb{R}^{\times N} \cong \mathbb{R}^{\times N}"'] & \Downarrow & \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\ell_\lambda(v) + t \triangleright \ell_\lambda(w)) \arrow[d, leftrightarrow, "\boxed{**}\ T_{\ell_\lambda(v)}\mathbb{R}^{\times N} \cong \mathbb{R}^{\times N}"] \\
w \arrow[rr, "\ell_\lambda"'] & & \ell_\lambda(w)
\end{tikzcd}$$
,

CZYLI $T_v \ell_\lambda$ JEST REALIZOWANE PRZEZ ℓ_λ.

UWZGLĘDNIAJĄC POWYŻSZE, PRZEPISUJEMY WARUNEK $\mathbb{R}$-LINIOWOŚCI (*) (CZYLI SPLATANIA PRZEZEŃ $T\mathbb{L}_\lambda$ Z $T\mathbb{L}_\lambda \restriction_{VV}$), DLA $(\xi, v) \in T_x B \oplus T_v \mathbb{R}^{\times N}$, (340)

W POSTACI $\equiv \mathrm{id}_{T_xB} \circ \mathrm{pr}_1 \oplus l_\lambda \circ \mathrm{pr}_2 : T_xB \oplus T_v \mathbb{R}^{\times N} \longrightarrow T_xB \oplus T_{l_\lambda(v)} \mathbb{R}^{\times N}$

$$\circledast_i(x, l_\lambda(v)) \circ (\mathrm{id}_{T_xB}, l_\lambda)(\xi, w) \equiv (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{\times N}} + A_i(x, l_\lambda(v)))(\xi, l_\lambda(w))$$
$$= l_\lambda(w) + \xi \lrcorner A_i(x, l_\lambda(v))$$

SPLATANIE!

$$= (\mathrm{id}_{T_xB}, l_\lambda) \circ \circledast_i(x, v)(\xi, w) \equiv (\mathrm{id}_{T_xB}, l_\lambda)(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{\times N}} + A_i(x, v))(\xi, w)$$
$$= (\mathrm{id}_{T_xB}, l_\lambda)(w + \xi \lrcorner A_i(x, v)) = l_\lambda(w) + \xi \lrcorner l_\lambda \circ A_i(x, v), \text{ SKĄD}$$

WOBEC DOWOLNOŚCI x, v, ξ, w i λ WYCIĄGAMY POŻĄDANY WNIOSEK

$$A_i(x, l_\lambda(v)) = l_\lambda \circ A_i(x, v). \quad \blacksquare$$

POZOSTAJE TERAZ USTALIĆ RELACJĘ MIĘDZY A_i i ${}^{(i)}T$...

LICZYMY WPROST (PATRZ: STR. 324.):

$$\mathbb{L}_{{}^{(i)}\Gamma^{b}_{\mu a}(x)}\left(\varepsilon^{(i)}_b(x)\right) = \nabla^{K}_{\partial^{(i)}_\mu}\varepsilon^{(i)}_a(x) = \mathrm{Ver}\tau^{-1}_{\varepsilon^{(i)}_a(x)}\circ\nabla_{\partial^{(i)}_\mu}\varepsilon^{(i)}_a(x)$$

$$\equiv \mathrm{Ver}\tau^{-1}_{\varepsilon^{(i)}_a(x)}\circ \mathrm{H} \circ T_x\varepsilon^{(i)}_a\left(\partial^{(i)}_\mu\right)$$

$$\equiv \mathrm{Ver}\tau^{-1}_{\varepsilon^{(i)}_a(x)}\circ T_{(x,e_a)}\tau_i^{-1}\circ \mathrm{H}_i(x,e_a)\circ T_{\varepsilon^{(i)}_a(x)}\tau_i\circ T_x\varepsilon^{(i)}_a\left(\partial^{(i)}_\mu\right)$$

$$= \mathrm{Ver}\tau^{-1}_{\varepsilon^{(i)}_a(x)}\circ T_{(x,e_a)}\tau_i^{-1}\circ \mathrm{H}_i(x,e_a)\circ T_x\left(\tau_i\circ\varepsilon^{(i)}_a\right)\left(\partial^{(i)}_\mu\right) = *$$

ALE $\left(\tau_i\circ\varepsilon^{(i)}_a\right)(x) = (x, \underbrace{e_a}_{\text{const}})$, ZATEM $T_x\left(\tau_i\circ\varepsilon^{(i)}_a\right) = (\mathrm{id}_{T_xB}, 0)$ i

$$* = \mathrm{Ver}\tau^{-1}_{\varepsilon^{(i)}_a(x)}\circ T_{(x,e_a)}\tau_i^{-1}\circ \mathrm{H}_i(x,e_a)\left(\partial^{(i)}_\mu, 0\right)$$

$$= \left(\mathrm{Ver}\tau^{-1}_{\varepsilon^{(i)}_a(x)}\circ T_{(x,e_a)}\tau_i^{-1}\right)\left(0, \left(\partial^{(i)}_\mu \lrcorner A^b_i(x,e_a)\right)\triangleright e_b\right) = **$$

NA OBECNYM ETAPIE WARTO PRZYPOMNIEĆ INTERPRETACJĘ NAPISU

$$\left(\partial_\mu^{(i)} \lrcorner\, A^b_i(x, e_a)\right) \triangleright e_b$$

ZAWARTĄ JUŻ W TREŚCI DOWODZONEGO STWIERDZENIA (PATRZ: UWAGA O STANDARDOWYM UTOŻSAMIENIU NA DOLE STR. 338.) I ROZWINIĘTĄ NA SAMYM POCZĄTKU TEGO DOWODU: W ISTOCIE (TJ. PRZED DOKONANIEM UTOŻSAMIENIA $T_{e_a}\mathbb{R}^{\times N} \simeq \mathbb{R}^{\times N}$) MAMY TU DO CZYNIENIA Z KLASĄ WSPÓŁSTYCZNOŚCI ŚCIEŻEK

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(x, e_a + t \triangleright \left(\partial_\mu^{(i)} \lrcorner\, A^b_i(x, e_a)\right) \triangleright e_b\right),$$

ZATEM

$$** = \mathrm{Ver}\,\tau^{-1}_{\varepsilon_a^{(i)}(x)}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tau_i^{-1}\left(x, e_a + t \triangleright \left(\partial_\mu^{(i)} \lrcorner\, A^b_i(x, e_a)\right) \triangleright e_b\right)\right)$$

$$= \mathrm{Ver}\,\tau^{-1}_{\varepsilon^{(i)}_a(x)}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\underbrace{\tau_i^{-1}(x, e_a)}_{\equiv\, \varepsilon^{(i)}_a(x)} + t \triangleright \tau_i^{-1}\big(x, (\partial^{(i)}_\mu \lrcorner A_i^b(x,e_a)) \triangleright e_b\big)\right)\right)$$

$$= \tau_i^{-1}\big(x, (\partial^{(i)}_\mu \lrcorner A_i^b(x,e_a)) \triangleright e_b\big) \equiv \mathbb{L}_{\partial^{(i)}_\mu \lrcorner A_i^b(x,e_a)}\big(\varepsilon^{(i)}_b(x)\big),$$

CO PROWADZI JUŻ WPROST DO OCZEKIWANEJ IDENTYFIKACJI

$$\partial^{(i)}_\mu \lrcorner A_i^b(x,e_a) = {}^{(i)}\Gamma^b_{\mu a}(x). \qquad \square$$

WYNIK NASZYCH DOTYCHCZASOWYCH DOCIEKAŃ MOŻEMY PRZEDSTAWIĆ W POSTACI PRZYDATNEJ W DALSZEJ ANALIZIE FORMUŁY:

$$H_i(x, v^a \triangleright e_a) = \mathrm{id}_{\underset{T_v\mathbb{R}^{\times N}\cong}{\mathbb{R}^{\times N}}} + {}^{(i)}\Gamma^b_{\mu a}(x)\, v^a\, dx^\mu \otimes e_b.$$

POWYŻSZE WYKORZYSTUJEMY W DOWODZIE

Stw. 51. KRZYWIZNA POWIĄZANIA LINIOWEGO NA WIĄZCE WEKTOROWEJ $\mathbb{V}$ (O FORMIE POWIĄZANIA $\Theta \in \Gamma(T^*\mathbb{V} \otimes V\mathbb{V})$) WYRAŻA SIĘ W OBRAZIE TRYWIALIZACJI LOKALNEJ $\tau_i : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times N}$ NAD WSPÓŁRZĘDNIOWYM POKRYCIEM TRYWIALIZUJĄCYM $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ BAZY B (PATRZ: **Def. 46.**) POPRZEZ SYMBOLE CHRISTOFFELA, JAK NASTĘPUJE (PATRZ: **Stz. 338.**):

$$\Theta_i \circ \left[\mathrm{id}_{T(\mathcal{O}_i\times\mathbb{R}^{\times N})} - \Theta_i\, , \mathrm{id}_{T(\mathcal{O}_i\times\mathbb{R}^{\times N})} - \Theta_i\right]_{\Gamma(T(\mathcal{O}_i\times M))}\big((\xi_1, V_1), (\xi_2, V_2)\big)(x, v)$$

$$= -\left(\partial_\mu^{(i)}\, {}^{(i)}\Gamma^b_{\nu a} - \partial_\nu^{(i)}\, {}^{(i)}\Gamma^b_{\mu a} + {}^{(i)}\Gamma^b_{\mu c}\, {}^{(i)}\Gamma^c_{\nu a} - {}^{(i)}\Gamma^b_{\nu c}\, {}^{(i)}\Gamma^c_{\mu a}\right)\xi_1^\mu \xi_2^\nu(x)\, v^a \triangleright e_b\, ,$$

GDZIE $\left(\xi_a \equiv \xi_a^\mu \partial_\mu^{(i)}, V_a\right) \in \Gamma(TB|_{\mathcal{O}_i}) \times \Gamma(T\mathbb{R}^{\times N})$, $a \in \{1,2\}$ TRAKTUJEMY JAKO ROZKŁAD DOWOLNEGO POLA WEKTOROWEGO NAD $\mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times N}$

WZGLĘDEM $T(\Theta_i\times\mathbb{R}^{\times N})\simeq pr_1^{*}T\Theta_i\oplus pr_2^{*}T\mathbb{R}^{\times N}$, A WYNIK LICZYMY W $(x, v=v^a\triangleright e_a)\in\Theta_i\times\mathbb{R}^{\times N}$.

D: JAKO ŻE W RACHUNKU POJAWIA SIĘ WPROST KOMUTATOR PÓL WEKTOROWYCH NA MODELU LOKALNYM WIĄZKI $\mathbb{V}$, TJ. NA $\Theta_i\times\mathbb{R}^{\times N}$, MUSIMY NAJPIERW PRZYWRÓCIĆ STATUS e_a W DEFINICJI Θ_i ZE Stw. 50. JAKO (WARTOŚCI) POLA WEKTOROWEGO NA $\mathbb{R}^{\times N}$. WYCHODZĄC OD JAWNEJ POSTACI UTOŻSAMIENIA ZE Str. 340.,

PATRZ: Str. 65.

$$e_a \equiv \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(v+t\triangleright e_a),$$

OBLICZAMY POCHODNĄ (GLOBALNEJ) FUNKCJI WSPÓŁRZĘDNIOWEJ φ^a NA $\mathbb{R}^{\times N}$ (PRZYJMUJĄCEJ WARTOŚCI $\varphi^a(v^b\triangleright e_b):=v^a$) WZDŁUŻ e_a: (346)

$$e_a(v^b) \equiv \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^b(v + t \triangleright e_a) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(v^b + t\,\delta^b_a) = \delta^b_a\,,$$

CO POZWALA ZAPISAĆ (W NOTACJI ZE STR. 75.):

$$e_a \equiv \frac{\partial}{\partial \varphi^a} =: \partial_a$$

CO UCZYNIWSZY, LICZYMY WPROST (PORZUCAJĄC UTOŻSAMIENIE $T_v\mathbb{R}^{\times N} \cong \mathbb{R}^{\times N}$)

$$\textcircled{H}_i \circ \left[\mathrm{id}_{T(\mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times N})} - \textcircled{H}_i\,, \mathrm{id}_{T(\mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times N})} - \textcircled{H}_i\right]_{\Gamma(T(\mathcal{O}_i \times M))}\big((\xi_1, V_1), (\xi_2, V_2)\big)(x, v)$$

$$= \left(\mathrm{id}_{T\mathbb{R}^{\times N}} + {}^{(i)}\Gamma^b_{\mu a}\varphi^a dx^\mu \otimes \partial_b\right) \circ \left(\left[\mathrm{id}_{T\mathcal{O}_i} - {}^{(i)}\Gamma^d_{\nu c}\,\varphi^c dx^\nu \otimes \partial_d\,, \mathrm{id}_{T\mathcal{O}_i} - {}^{(i)}\Gamma^f_{\lambda e}\,\varphi^e dx^\lambda \otimes \partial_f\right]_\Gamma\right)(-\text{''}-)$$

$$= \left(\mathrm{id}_{T\mathbb{R}^{\times N}} + {}^{(i)}\Gamma^b_{\mu a}\varphi^a dx^\mu \otimes \partial_b\right)\left(\left[\xi_1 - {}^{(i)}\Gamma^d_{\nu c}\,\varphi^c \xi_1^\nu \partial_d\,, \xi_2 - {}^{(i)}\Gamma^f_{\lambda e}\,\varphi^e \xi_2^\lambda \partial_f\right]_\Gamma\right)(x, v)$$

$$= \left(\mathrm{id}_{T\mathbb{R}^{\times N}} + {}^{(i)}\Gamma^b_{\mu a}\varphi^a dx^\mu \otimes \partial_b\right)\begin{pmatrix} [\xi_1, \xi_2]_\Gamma - \xi_1\left({}^{(i)}\Gamma^f_{\lambda e}\xi_2^\lambda\right)\varphi^e\partial_f + \xi_2\left({}^{(i)}\Gamma^d_{\nu c}\xi_1^\nu\right)\varphi^c\partial_d \\ + {}^{(i)}\Gamma^d_{\nu c}\,{}^{(i)}\Gamma^f_{\lambda e}\,\xi_1^\nu \xi_2^\lambda\left[\varphi^c\partial_d, \varphi^e\partial_f\right]_\Gamma \end{pmatrix}(x, v)$$

$$= \Big([\xi_1, \xi_2]_\Gamma^\mu \, {}^{(i)}\Gamma^b_{\mu a} \varphi^a \partial_b - \xi_1 \big({}^{(i)}\Gamma^f_{\lambda e} \xi_2^\lambda \big) \varphi^e \partial_f + \xi_2 \big({}^{(i)}\Gamma^d_{\nu c} \xi_1^\nu \big) \varphi^c \partial_d + {}^{(i)}\Gamma^d_{\nu c} \, {}^{(i)}\Gamma^f_{\lambda e} \xi_1^\nu \xi_2^\lambda [\varphi^c \partial_d, \varphi^e \partial_f]_\Gamma \Big)(x,v)$$

$$= \Big(-\xi_1 \big({}^{(i)}\Gamma^f_{\lambda e} \big) \xi_2^\lambda \varphi^e \partial_f + \xi_2 \big({}^{(i)}\Gamma^d_{\nu c} \big) \xi_1^\nu \varphi^c \partial_d + \big({}^{(i)}\Gamma^d_{\nu c} \, {}^{(i)}\Gamma^f_{\lambda d} \varphi^c \partial_f - {}^{(i)}\Gamma^d_{\nu c} \, {}^{(i)}\Gamma^c_{\lambda e} \varphi^e \partial_d \big) \xi_1^\nu \xi_2^\lambda \Big)(x,v),$$

CO JEST WYNIKIEM POSTULOWANYM. $\square$

POWYŻSZE PROWADZI DO

Cor. 8. KRZYWIZNA POWIĄZANIA JEST OPISYWANA PRZEZ TENSOR KRZYWIZNY (RIEMANNA) O PREZENTACJI LOKALNEJ

$${}^{(i)}R^b_{\mu\nu a} \, dx^\mu \wedge dx^\nu \otimes \varphi^a \partial_b, \quad {}^{(i)}R^b_{\mu\nu a} := \partial^{(i)}_\mu \, {}^{(i)}\Gamma^b_{\nu a} - \partial^{(i)}_\nu \, {}^{(i)}\Gamma^b_{\mu a} + {}^{(i)}\Gamma^b_{\mu c} \, {}^{(i)}\Gamma^c_{\nu a} - {}^{(i)}\Gamma^b_{\nu c} \, {}^{(i)}\Gamma^c_{\mu a}.$$

D: WYKAZANIE TENSOROWEGO CHARAKTERU $R^b_{\mu\nu a}$ (GDYBY TEN WCIĄŻ BUDZIŁ WĄTPLIWOŚCI PO UWAŻNYM PRZECZYTANIU Def. 40.) JEST PROSTYM, CHOĆ ŻMUDNYM ĆWICZENIEM RACHUNKOWYM, KTÓRE POZOSTAWIAM WĄTPIĄCYM. $\square$

$\overline{\underline{XV}}$ $\overline{I}/\overline{\underline{II}}$

EPILOG

NINIEJSZY WYKŁAD WPROWADZIŁ NAS LEDWIE DO KRUCHTY GEOMETRII WYŻSZEJ, DAJĄC PRZEDSMAK JEJ NOWOCZESNYCH FIZYKALNYCH ZASTOSOWAŃ — OT, CHOĆBY W TEORIACH GRAWITACJI, TEORIACH POLA Z CECHOWANIEM, TEORII STRUN I BRAN, TOPOLOGICZNYCH TEORIACH POLA ORAZ ICH NATURALNYCH KATEGORYFIKACJACH (TZW. WYŻSZYCH TEORIACH POLA Z CECHOWANIEM, TEORIACH POLA O SYMETRIACH GRUPOIDALNYCH...) etc.

ŚMIAŁKOWIE / ŚMIAŁKINIE GOTOWI/-E PODEJŚĆ BLIŻEJ OŁTARZA, NA KTÓRYM WYRYWA SIĘ SERCA POKONANYM, MOGĄ DOWIEDZIEĆ SIĘ WIĘCEJ NA PRZYSZŁOROCZNYM KURSIE MONOGRAFICZNYM pt. "DUALITY, DESCENT & DEFECTS: THE HIGHER GEOMETRY & CATEGORY THEORY OF CHARGED DYNAMICS".

ZAPRASZAM.

The battle is on.

THE BATTLE FOR GERBA, THE LAND OF ΛΩΤΟΦΑΓΟΙ

THE LAFRERI SCHOOL, ROME, 1560