GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA

XIII ; XIV O TYM, ŻE WARTO MIEĆ POWIĄZANIA,

20/5 27/5 JAK I O TYM,

ŻE BLIŻSZA KOSZULA CIAŁA

2025/26

CZĘŚĆ XIII

DOTYCHCZASOWA NASZA ANALIZA STRUKTURY $(\underline{A}_i, g_{ij})$ NIEODZOWNEJ DO UMODELOWANIA – W SPOSÓB KWANTOWOMECHANICZNIE SPÓJNY – EFEKTU AHARONOVA–BOHMA POZWOLIŁA NAM USTALIĆ SENS GEOMETRYCZNY LEDWIE CZĘŚCI OWEJ STRUKTURY – ODWZOROWANIA $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \to U(1)$ UZYSKAŁY INTERPRETACJĘ 1-KOCYKLU PRZEJŚCIA WIĄZKI DIRACA P_F. POZOSTAŁO PYTANIE O ROLĘ 1-FORM $\underline{A}_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i)$ NA ELEMENTACH POKRYCIA $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ TRYWIALIZUJĄCEGO P_F I ZNACZENIE SPEŁNIANYCH PRZEZ NIE AFINICZNYCH RELACJI SZYCIA:

$$(\underline{A}_j - \underline{A}_i)\restriction_{\mathcal{O}_{ij}} = i\, d\log g_{ij} \quad (\text{PATRZ: } \text{str. } 266.).$$

ISTNIEJE UZASADNIONE PODEJRZENIE, ŻE RELACJE TE GWARANTUJĄ „ZSTĄPIENIE" DO P_F RODZINY 1-FORM NA LOKALNYCH MODELACH $\mathcal{O}_i \times U(1) \hookrightarrow \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times U(1)$, KTÓREJ ELEMENTY SĄ WSPÓŁOKREŚLANE PRZEZ $\underline{A}_i$. AŻEBY TO STWIERDZIĆ, MUSIMY NAJSAMPIERW OPISAĆ ALGORYTMICZNIE PROCES „ZSTĄPIENIA". W TYM CELU PRZYPOMNIJMY SCHEMAT REKONSTRUKCJI WIĄZKI P_F Z JEJ DANYCH LOKALNYCH g_{ij} (PATRZ: DOWÓD Tw. 8., Sł. 93.-97.): OTÓŻ WYSZEDŁSZY OD ROZŁĄCZNOŚCI $\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times U(1)$, NAD KAŻDYM Z PUNKTÓW $x \in \mathcal{O}_{ij}$ DOKONUJEMY UTOŻSAMIENIA WŁÓKIEN $U(1)$ POCHODZĄCYCH Z OBU DOSTĘPNYCH NAD NIMI LOKALNYCH MODELI:

$$\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_{ij} \times U(1) \quad \text{i} \quad \mathcal{O}_j \cap \mathcal{O}_{ij} \times U(1)$$

PRZY UŻYCIU DYFEOMORFIZMÓW ($\mathcal{O}_{ij}^{(k)} \equiv \mathcal{O}_k \cap \mathcal{O}_j$, $k \in \{i,j\}$)

$$\tilde{g}_{ij} : \mathcal{O}_{ij}^{(j)} \times U(1) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{ij}^{(i)} \times U(1) \,, \quad (x,z) \longmapsto (x, g_{ij}(x)\cdot z) \,,$$

POR.: Str. 86. TO UTOŻSAMIENIE PODNOSI SIĘ DO STYCZNEJ (PAMIĘTAJMY: WEKTORY STYCZNE TO KLASY WSPÓŁSTYCZNOŚCI ŚCIEŻEK!) WEDLE SCHEMATU

$$T\tilde{g}_{ij} : T\big(\mathcal{O}_{ij}^{(j)} \times U(1)\big) \xrightarrow{\cong} T\big(\mathcal{O}_{ij}^{(i)} \times U(1)\big) \,,$$

CO POZWALA NA OKREŚLENIE NATURALNEGO WARUNKU ZSTĄPIENIA RODZINY 1-FORM $\theta_\bullet \equiv \{\theta_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i \times U(1))\}_{i\in I}$ NA P_F:

OTÓŻ $\theta_\bullet$ ZADAJE JEDNOZNACZNIE 1-FORMĘ NA P_F WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY $\theta_i \restriction_{T(\mathcal{O}_{ij}^{(i)} \times U(1))} \circ T\tilde{g}_{ij} \equiv \theta_j \restriction_{T(\mathcal{O}_{ij}^{(j)} \times U(1))}$,

TJ. GDY Θ_i OBLICZA SIĘ NA WEKTORZE $w \in T_{\tilde{g}_{ij}(x,z)}\left(\mathcal{O}_i^{(i)} \times U(1)\right)$ UTOŻSAMIANYM Z $v \in T_{(x,z)}\left(\mathcal{O}_j^{(j)} \times U(1)\right)$ WZDŁUŻ $\tilde{g}_{ij}$ DOKŁADNIE TAK SAMO, JAK Θ_j OBLICZA SIĘ NA WYJŚCIOWYM WEKTORZE v. WARUNEK POWYŻSZY PRZEPISUJE SIĘ W SPOSÓB ZWARTY JAKO

$$\Theta_j \restriction_{\mathcal{O}_{ij} \times U(1)} = \tilde{g}_{ij}^{\,*} \Theta_i .$$

WPROWADŹMY WSPÓŁRZĘDNĄ GLOBALNĄ z NA WŁÓKNIE $U(1)$ I ZDEFINIUJMY $\Theta_i(x,z) := i\, z^{-1} dz + \underline{A}_i(x)$, $(x,z) \in \mathcal{O}_i \times U(1)$.

OBLICZAMY BEZ TRUDU $\left(\tilde{g}_{ij}^{\,*}\Theta_i\right)(x,z) \equiv i \dfrac{d\left(g_{ij}(x)\cdot z\right)}{g_{ij}(x)\cdot z} + \underline{A}_i(x)$

$$= i\frac{dz}{z} + i\, d\log g_{ij}(x) + \underline{A}_i(x) \equiv i\frac{dz}{z} + \underline{A}_j(x) \equiv \Theta_j(x,z).$$

WNIOSEK: $\exists\, \mathcal{A} \in \Omega^1(P_F)\ :\ [\tau_i]^{-1\,*}\mathcal{A} = \Theta_i\ ,\ i \in I$.

1-FORMA TA MA NASTĘPUJĄCE WŁASNOŚCI STRUKTURALNE:

* TRYWIALIZACJA F (POLA FARADAYA) W KOHOMOLOGII P_F:

$$d\mathcal{A}\big|_{\pi_{P_F}^{-1}(\mathcal{O}_i)} \equiv d[\tau_i]^*\Theta_i = [\tau_i]^* d\Theta_i = [\tau_i]^* d\,\mathrm{pr}_1^* \underline{A}_i = \frac{q}{\hbar}[\tau_i]^*\mathrm{pr}_1^* F\big|_{\mathcal{O}_i}$$
$$\equiv \frac{q}{\hbar}\left(\mathrm{pr}_1\circ[\tau_i]\right)^* F\big|_{\mathcal{O}_i} \equiv \frac{q}{\hbar}\pi_{P_F}^* F\big|_{\mathcal{O}_i} \equiv \pi_{P_F}^*\left(\frac{q}{\hbar}F\right)\Big|_{\pi_{P_F}^{-1}(\mathcal{O}_i)},$$

CZYLI $\quad d\mathcal{A} = \pi_{P_F}^*\left(\frac{q}{\hbar}F\right)$ ✓

** U(1)-EKWIWARIANTNOŚĆ $\mathcal{A} : TP_F \to \mathbb{R}$ WZGLĘDEM DZIAŁANIA $Tr : U(1) \longrightarrow \mathrm{Diff}(TP_F)$ (INDUKOWANEGO PRZEZ $r : U(1) \to \mathrm{Diff}(P_F)$, O LOKALNEJ PREZENTACJI $\phi : U(1) \to \mathrm{Diff}(U(1)),\ u \mapsto (\cdot)\cdot u$) I TRYWIALNEGO NA $\mathbb{R}$:

$$[\tau_i]^{-1\,*}(\mathcal{A}\circ Tr_u) \equiv \mathcal{A}\circ Tr_u \circ T[\tau_i]^{-1} = \mathcal{A}\circ T\left(r_u \circ [\tau_i]^{-1}\right)$$

$$= \mathcal{A} \circ T\big([\tau_i]^{-1} \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{O}_i} \times p_u)\big) \equiv \big([\tau_i]^{-1\,*}\mathcal{A}\big) \circ \big(\mathrm{id}_{T\mathcal{O}_i} \times Tp_u\big)$$

$$\equiv i\,\frac{d(p_u \cdot z)}{p_u \cdot z} + \underline{A}_i(x) = i\,\frac{dz}{z} + \underline{A}_i(x) \equiv [\tau_i]^{-1\,*}\mathcal{A}\,,\ \text{czyli}$$

$$\mathcal{A} \circ Tr_u = \mathcal{A}$$

*** $\mathcal{A}$ w kanoniczny sposób zadaje rzut $TP_F \to VP_F$, gdzie $VP_F \hookrightarrow TP_F$ jest (gładką) sumą rozłączną stycznych do włókien, $VP_F \equiv \bigsqcup_{x \in M} T(P_{Fx})$, $P_{Fx} \cong U(1)$. Istotnie, rozważmy globalny generator $-iz\partial_z =: \mathcal{K}$ przestrzeni cięć $\Gamma(TU(1))$ wiązki stycznej nad włóknem typowym P_F i zdefiniujmy

$$\Theta_i := \theta_i \otimes \mathcal{K} : T(\mathcal{O}_i \times U(1)) \equiv pr_1^*\,T\mathcal{O}_i \oplus pr_2^*\,TU(1) \longrightarrow pr_2^*\,TU(1)\,,$$

CZYLI WPROST:

$$\Theta_i(x,z) = i\,\frac{dz}{z}\otimes(-iz\partial_z) + \underline{A}_i(x)\otimes K(z)$$

$$\equiv dz\otimes\partial_z + \underline{A}_i(x)\otimes K(z)$$

$$\equiv \mathrm{id}_{T_z U(1)} + \underline{A}_i(x)\otimes K(z).$$

LOKALNE GŁADKIE POLA OPERATORÓW RZUTOWYCH Θ_i ZSZYWAJĄ DO TP_F Z DOKŁADNIE TEJ SAMEJ PRZYCZYNY, KTÓRA STOI ZA ZSZYCIEM θ_i. MAMY ZATEM

$$\Theta\in\Gamma(TP_F\otimes VP_F),\qquad (\mathrm{pr}_2\circ)T[\tau_i]\circ\Theta\circ T[\tau_i]^{-1}\equiv\Theta_i$$

RZUTY TE WYZNACZAJĄ DOPEŁNIENIE PROSTE $\ker\Theta_i$ PODWIĄZKI

$T[\tau_i](VP_F|_{\pi_{P_F}^{-1}(O_i)})\cong O_i\times TU(1)$ W $T[\tau_i](TP_F|_{\pi_{P_F}^{-1}(O_i)})\equiv T(O_i\times U(1))$,

PRZY CZYM $\forall (x,z) \in \mathcal{O}_i \times U(1)$: $\mathrm{Ker}\, \Theta_i \simeq T_x M$, A KONKRETNIE:

$$\Big(\underbrace{\zeta\, \mathcal{K}(z) + v^\mu \partial_\mu(x)}_{\substack{\| \\ \dot{h}(x,z)}}\Big) \in \mathrm{Ker}\,\Theta_i(x,z) \quad \Big(\text{DLA } \kappa = (x^\mu) : \mathcal{O}_x \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_x \subset \mathbb{R}^{\times D},\ D = \dim M\Big)$$

MAPA LOKALNA NA OTOCZENIU x

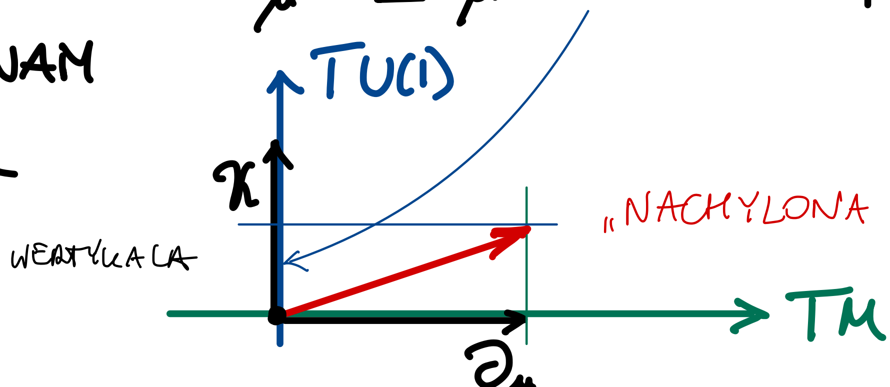
$$\Updownarrow \qquad \stackrel{L}{\equiv} v(x)$$

$$\zeta = -v \lrcorner \underline{A}_i(x), \text{ CZYLI } \dot{h}(x,z) = v(x) - v \lrcorner \underline{A}_i(x) \triangleright \mathcal{K}(z).$$

LOKALNA BAZA CIĘĆ DOPEŁNIENIA TO ZATEM

$$\partial_\mu - \underline{A}_{i\mu}(x) \triangleright \mathcal{K}(z), \quad \mu \in \overline{1,D},$$

CO DAJE NAM OBRAZEK



Ostatni, najmniej oczywisty punkt listy okazuje się mieć nader istotne zastosowanie. Nim jednak je ustalimy, zatrzymamy się przy definicji pola $\mathcal{K}$...

Obserwacja: Wartości $\mathcal{K}$ spełniają tożsamości

$$\mathcal{K}(z) \equiv \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(e^{-it}\cdot z\right),$$

przy czym ścieżka $\gamma_z : \mathbb{R} \ni t \longmapsto e^{-it}\cdot z \in U(1)$ jest orbitą (lewego) działania regularnego $\ell : U(1) \longrightarrow \mathrm{Diff}(U(1))$, $u \longmapsto u\cdot(\cdot)$ ($U(1)$ na sobie). Z takim polem wektorowym spotkaliśmy się onegdaj – jest to pole fundamentalne działania ℓ (patrz: str. 142.). Zauważmy w szczególności prostą

REGUŁA TRANSFORMACYJNA:

$$T_z l_u(\mathcal{K}(z)) \equiv T_z l_u \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(e^{-it}\cdot z) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\left(l_u(e^{-it}\cdot z)\right)$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(ue^{-it}z) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\left((ue^{-it}u^{-1})\cdot uz\right)$$

PRZEMIENNOŚĆ!! $U(1)$

$$= \mathcal{K}(uz)$$

(WIDAĆ PROSTY SCHEMAT UOGÓLNIENIA NA PRZYPADEK GRUPY NIEPRZEMIENNEJ)

MOŻEMY JUŻ TERAZ POWRÓCIĆ DO DYSKUSJI ZASTOSOWAŃ RZUTU (*). TYTUŁEM PRZYGOTOWANIA GRUNTU POD KONKLUZJĘ PRZYPOMNIJMY, ŻE WERTYKALNE AUTOMORFIZMY WIĄZKI WŁÓKNISTEJ SĄ LOKALNIE MODELOWANE NA RODZINACH AUTOMORFIZMÓW WŁÓKNA TYPOWEGO GŁADKO INDEKSOWANYCH PRZEZ PUNKTY W BAZIE (PATRZ: Def. B.). 280

JEST WOBEC TEGO NATURALNYM OCZEKIWANIEM WOBEC RÓŻNICZKOWANIA CIĘĆ WIĄZKI, IŻBY POD DZIAŁANIEM TAKIEGO AUTOMORFIZMU WERTYKALNEGO POCHODNA CIĘCIA PODLEGAŁA TRANSFORMACJI INDUKOWANEJ (STYCZNOŚCIOWEJ) LOKALNIE MODELOWANEJ NA RODZINIE POCHODNYCH ODNOŚNYCH AUTOMORFIZMÓW WŁÓKNA TYPOWEGO. (TAKIE JEJ ZACHOWANIE JEST NIE TYLKO NATURALNE, ALE WRĘCZ POŻĄDANE Z PUNKTU WIDZENIA PEWNYCH FIZYKALNYCH ZASTOSOWAŃ WIĄZEK WŁÓKNISTYCH – NP. W TEORII POLA Z SYMETRIĄ CECHOWANIA (PATRZ: WYKŁAD MONOGRAFICZNY "DUALITY, DESCENT, & DEFECTS [...]" AUTORA NINIEJSZYCH NOTATEK).) O TYM, ŻE ZWYCZAJNA POCHODNA $\Gamma(E) \ni \phi \longmapsto T\phi$ NIE SPEŁNIA TEGO OCZEKIWANIA (W OGÓLNOŚCI), NAJŁATWIEJ MOŻNA

SIĘ PRZEKONAĆ W OBRAZIE TRYWIALIZACJI LOKALNEJ $\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F$, W KTÓREJ

$$\tau_i \circ \phi = (\mathrm{id}_{\mathcal{O}_i}, \phi_i)\,, \quad \phi_i \in C^\infty(\mathcal{O}_i, F)$$

ROZWAŻMY AUTOMORFIZM WIĄZKI WŁÓKNISTEJ (E, B, F, π_E)

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_E"'] & E \arrow[d, "\pi_E"] \\ B \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_B"'] & B \end{tikzcd}$$

O PREZENTACJI LOKALNEJ

$$(\tau_i \circ \Phi \circ \tau_i^{-1})(x, f) = (x, h_i(x)(f))$$

$$h_i : \mathcal{O}_i \to \mathrm{Aut}(F)$$

POD JEGO DZIAŁANIEM

$$\Gamma(E) \ni \phi \longmapsto \Phi \circ \phi \equiv \phi^{\Phi} \in \Gamma(E) \quad (\text{WSZAK } \pi_E \circ \Phi \circ \phi = \pi_E \circ \phi),$$

CZYLI LOKALNIE: $\phi_i \longmapsto h_i(\cdot)(\phi_i(\cdot)) \equiv \phi_i^h(\cdot)$

TO WŁAŚNIE ZALEŻNOŚĆ h_i OD PUNKTU W BAZIE PRZESĄDZA O NIEPOŻĄDANYM CHARAKTERZE TRANSFORMACYJNYM $T\phi$:

RÓŻNICZKOWANIE $h_i(\cdot)$ W $h_i(\cdot)(\phi_i(\cdot))$ WZGLĘDEM ARGUMENTU $x \in B$ WPROWADZA POPRAWKĘ DO POŻĄDANEGO

$$T_{\phi_i(\cdot)} h_i \circ T\phi_i .$$

W NASZYM KONKRETNYM PRZYPADKU $(E, B, F, \pi_E) = (P_F, M, U(1), \pi_{P_F})$ OTRZYMUJEMY – DLA $\phi \in \Gamma(P_F)$, $[\tau_i] \circ \phi = (\mathrm{id}_{\mathcal{O}_i}, \phi_i)$, $\phi_i \in C^\infty(\mathcal{O}_i, U(1))$ i $\Phi : E \to E$, $[\tau_i] \circ \Phi \circ [\tau_i]^{-1}(x, u) = (x, h_i(x) \cdot u)$, $h_i : \mathcal{O}_i \to U(1)$ (ŁATWO WIDAĆ, ŻE TO JEDYNE DYFEOMORFIZMY WŁÓKNA TYPOWEGO EKWIWARIANTNE WZGLĘDEM DZIAŁANIA GRUPY $U(1)$, O KTÓRYCH BYŁA MOWA NA str. 275.) – FORMUŁĘ

ZA CHWILĘ ZROZUMIEMY SENS TEGO ZAPISU...

$$T_x\left(h_i(\cdot) \cdot \phi_i(\cdot)\right) = \underbrace{T_{\phi_i(x)} h_i \circ T_x \phi_i}_{\text{POŻĄDANE}} + \underbrace{\left(h_i(\cdot)^{-1} T_x h_i(\cdot)\right) \cdot h_i(\cdot) \cdot \phi_i(\cdot)}_{\text{NIEPOŻĄDANE!}} .$$

BIORĄC POD UWAGĘ POWYŻSZE W POŁĄCZENIU Z FORMUŁĄ ⊛ ZE STR. 266.,
ROZWAŻMY ZAMIAST $T\phi_i$ WYRAŻENIE

$$\mathcal{D}^{A_i}\phi_i := T.\phi_i + \underline{A}_i(\cdot)\otimes\mathcal{K}(\phi_i(\cdot)) : TM\restriction_{\Theta_i} \longrightarrow TU(1)\restriction_{\phi_i(\Theta_i)},$$

GDZIE $\left(\underline{A}_i(\cdot)\otimes\mathcal{K}(\phi_i(\cdot))\right)(\partial_\mu) \equiv \underline{A}_{i\mu}(\cdot)\triangleright\mathcal{K}(\phi_i(\cdot))$.

STWIERDZAMY:

NB: $h_i^{-1}dh_i(\partial_\mu) = h_i^{-1}\partial_\mu h_i$
$h_i^{-1}T.h_i(\partial_\mu) = h_i^{-1}\partial_\mu h_i\,\partial_z$

$$\mathcal{D}^{A_i^h}\phi_i^h \equiv T.\phi_i^h + \underline{A}_i^h(\cdot)\otimes\mathcal{K}(\phi_i^h(\cdot))$$

$$= T_{\phi_i}\ell_{h_i}\circ T.\phi_i + h_i\cdot\phi_i\triangleright h_i^{-1}T.h_i + \underline{A}_i\otimes\mathcal{K}(h_i\cdot\phi_i) - ih_i^{-1}dh_i\otimes\mathcal{K}(h_i\cdot\phi_i)$$

$$\equiv T_{\phi_i}\ell_{h_i}\circ T.\phi_i + \underline{A}_i\otimes T_{\phi_i}\ell_{h_i}(\mathcal{K}(\phi_i)) \quad (\text{STR. }280.)$$

$$+ih_i^{-1}dh_i\otimes(-ih_i\cdot\phi_i\,\partial_z) - ih_i^{-1}dh_i\otimes\mathcal{K}(h_i\cdot\phi_i)$$

$$= T_{\phi_i} l_{h_i} \circ T.\phi_i + \underline{A}_i \otimes T_{\phi_i} l_{h_i} (\mathcal{K}(\phi_i)) \equiv T_{\phi_i} l_{h_i} \circ \mathcal{D}^{A_i}_{.} \phi_i \,, \quad (**)$$

CO JEST WŁAŚNIE ZACHOWANIEM POŻĄDANYM!

PRZY TYM WYRAŻENIE LOKALNE $\mathcal{D}^{A_i}_{.}\phi_i$ MA PROSTĄ INTERPRETACJĘ:

$$\mathcal{D}^{A_i}\phi_i \equiv \Theta_i \circ (\mathrm{id}_{TM}, T.\phi_i) \qquad (\text{NB: } d\phi_i \otimes \partial_z \equiv T.\phi_i)$$

$$\equiv (\mathrm{pr}_2 \circ)\left(T[\tau_i] \circ \Theta \circ T[\tau_i]^{-1}\right) \circ \left(T[\tau_i] \circ T\phi\right)$$

$$= (\mathrm{pr}_2 \circ)\, T[\tau_i] \circ (\Theta \circ T\phi) \,. \quad (***)$$

WIDZIMY ZATEM, ŻE $\mathcal{D}^{A_i}\phi_i$ JEST LOKALNĄ PREZENTACJĄ OBIEKTU GLOBALNEGO: ZWERTYKALIZOWANEJ POCHODNEJ

$$\nabla^{\Theta} : \Gamma(P_F) \ni \phi \longmapsto \Theta \circ T\phi \in \Gamma(TM \otimes VP_F \restriction_{\phi(M)})$$

W SZCZEGÓLNOŚCI ZACHODZI RELACJA

$$\mathcal{D}^{A_i}\phi_i\restriction_{TO_{ij}} = (m_2\circ)T[\tau_i]\circ \textcircled{H}\circ T\phi\restriction_{TO_{ij}} = (m_2\circ)T([\tau_i]\circ[\tau_j]^{-1})\circ T[\tau_j]\circ \textcircled{H}\circ T\phi\restriction_{TO_{ij}}$$
$$= T_{t_j}\ell_{g_{ij}}\circ(m_2\circ)T[\tau_j]\circ \textcircled{H}\circ T\phi\restriction_{TO_{ij}} \equiv T_{t_j}\ell_{g_{ij}}\circ\mathcal{D}^{A_j}\phi_j\restriction_{TO_{ij}}$$

NB: PROSTE PRAWO TRANSFORMACYJNE (**) IMPLIKUJE – W POŁĄCZENIU Z (***) – STRUKTURALNĄ RELACJĘ: $\textcircled{H}^{\Phi} = T\Phi\circ \textcircled{H}\circ T\Phi^{-1}$

POMIĘDZY RZUTEM $\textcircled{H}$ O DANYCH LOKALNYCH $\underline{A_i}$ I RZUTEM $\textcircled{H}^{\Phi}$ O DANYCH LOKALNYCH $\underline{A_i}^h$.

PONIŻEJ SFORMALIZUJEMY REZULTATY NASZEGO STUDIUM PRZYPADKU UMOTYWOWANEGO BEZPOŚREDNIO POTRZEBĄ FIZYKALNĄ W FORMIE ELEMENTARNEJ AKSJOMATYKI EHRESMANNA-CARTANA POWIĄZANIA NA WIĄZCE WŁÓKNISTEJ...

CDN.